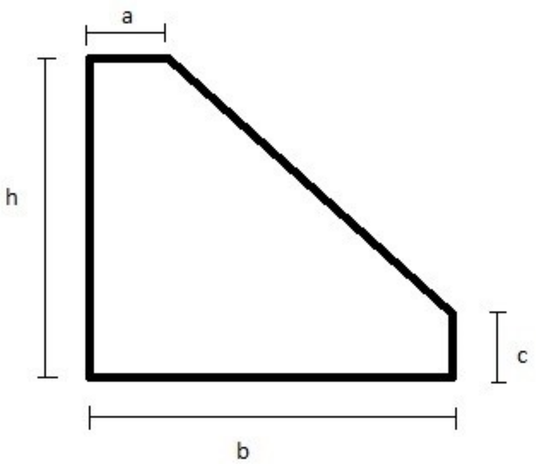
Problema:



a) Hallar la posición del Baricentro

b) Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico

c) Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Datos

$a := 30\ cm$ $c := 30\ cm$

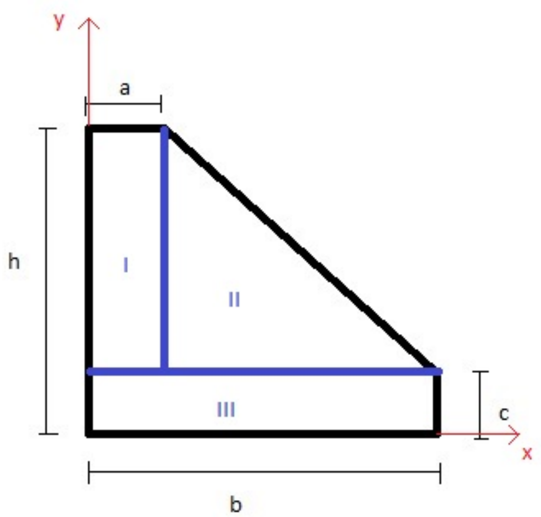
$h := 100\ cm$ $b := 100\ cm$

Resolución:

En primer lugar lo que debemos hacer es analizar la figura. Esta figura puede ser resuelta como un solo bloque, en ese caso se debe recurrir a las fórmulas integrales que resuelven el problema; pero existe una forma mas sencilla y rápida, igualmente válida, de resolverlo, esto es descomponiendo el problema en figuras simples.

Esta resolución resulta válida dado que existe adición de los momentos estáticos, esto es, que el momento estático de una figra es igual al de la suma de sus componentes.

Aprovechando esa propiedad y que la fórmula de momento estático involucra la posición del baricentro tendremos que:



La sección total fue descompuesta en tres figuras simples (I, II, III) las cuales tienen datos ya conocidos. Ellos son:

La posición del baricentro de un rectángulo está (para ejes x e y paralelos a sus lados y baricéntricos) en la mitad de sus lados

La posición del baricentro de un triángulo está a una distancia igual a 1/3 del lado correspondiente

Los momentos de inercia de las figuras son:

Retángulo: $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$ Tríangulo: $I = \frac{b \cdot h^3}{36}$

Siendo b la base y h la altura

Siempre que tomemos momentos de inercia de figuras simples serán referidas al baricentro de las mismas. Estos datos se pueden obtener de tablas.

Punto a) Hallar la posición del Baricentro

Como mensionábamos anteriormente podemos utilizar la adición de los momentos estáticos (S) respecto a los ejes x y planteados:

$S_T = S_I + S_{II} + S_{III}$

Recordemos que la fórmula de momento estático se puede expresar como:

$S = A \cdot d_G$ Siendo, A: área; d_G: distancia al baricentro

En el eje Y

Figura I

$A_I := a \cdot (h-c)$ $y_{G.I} := \frac{(h-c)}{2} + c$ $S_{I.Y} := A_I \cdot y_{G.I} = 136500\ cm^3$

Figura II

$A_{II} := \frac{(b-a) \cdot (h-c)}{2}$ $y_{G.II} := c + (h-c) \cdot \frac{1}{3}$ $S_{II.Y} := A_{II} \cdot y_{G.II} = 130666.667\ cm^3$

Figura III

$A_{III} := b \cdot c$ $y_{G.III} := \frac{c}{2}$ $S_{III.Y} := A_{III} \cdot y_{G.III} = 45000\ cm^3$

$S_{T.Y} = S_{I.Y} + S_{II.Y} + S_{III.Y} = A_t \cdot Y_{Gt}$ donde $A_t = A_I + A_{II} + A_{III}$

Con lo cual la posiición del baricentro de la figura total Y_{Gt} será

$$Y_{Gt} := \frac{S_{I.Y}+S_{II.Y}+S_{III.Y}}{A_I+A_{II}+A_{III}} = 41.347\ cm$$

En el eje X

Figura I

$A_I := a \cdot (h-c)$ $\quad x_{G.I} := \frac{a}{2}$ $\quad S_{I.X} := A_I \cdot x_{G.I} = 31500\ cm^3$

Figura II

$A_{II} := \frac{(b-a)\cdot(h-c)}{2}$ $\quad x_{G.II} := a+(b-a)\cdot\frac{1}{3}$ $\quad S_{II.X} := A_{II} \cdot x_{G.II} = 130666.667\ cm^3$

Figura III

$A_{III} := b \cdot c$ $\quad x_{G.III} := \frac{b}{2}$ $\quad S_{III.X} := A_{III} \cdot x_{G.III} = 150000\ cm^3$

El momento de inercia de la figura total será:

$S_{T.X} = S_{I.X}+S_{II.X}+S_{III.X} = A_t \cdot X_{Gt}$ donde $A_t = A_I + A_{II} + A_{III}$

Con lo cual la posiición del baricentro de la figura total X_{Gt} será

$$X_{Gt} := \frac{S_{I.X}+S_{II.X}+S_{III.X}}{A_I+A_{II}+A_{III}} = 41.347\ cm$$

Podemos observar que ambos valores dieron el mismo resultado, lo cual es evidente dado que la geometría es totalmente equivalente para ambos ejes

Punto b) Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico

Para resolver este punto debemos recordar que los momentos de inercia son también aditivos en tanto procedamos con el TEOREMA DE STEINER mediante. De esta forma podemos plantear en forma generica que:

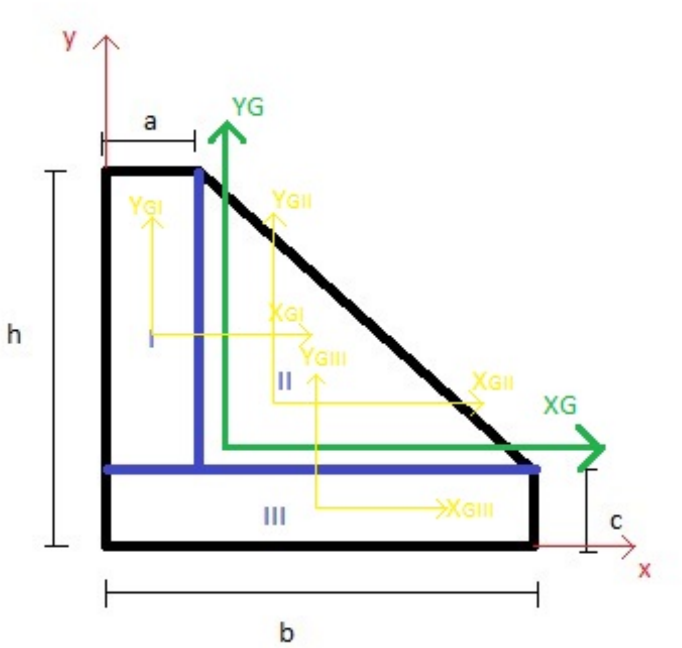
$$I_X = I_{xg} + A \cdot d_x^{\,2}$$

Siendo:
I_X: el momento de inercia respecto a un eje X
I_{xg}: el momento de inercia de la figura respecto a su propio baricentro
A: área de la figura
d: distancia entre el origen de X y xg

Analogamente se puede hacer para el eje Y

Es por esto que, para las figuras simples en las que se descompuso la figura total, se debe hallar el baricentro de cada una para luego trasladar los ejes al baricentro de la figura total.

Dado que en este punto nos piden que sean paralelos a los ejes indicados anteriormente tendremos que:



Podemos observar que identificamos los ejes baricéntricos de cada figura (color amarillo) y los ejes baricéntricos de la figura total (color verde).

Los de la figura total son las coordenadas halladas en el punto anterior (dadas desde los ejes rojos) y los de cada figura individual son conocidos como ya mencionamos anteriormente

Procedemos a trasladar los momentos de inercia a los ejes baricéntricos, para tomar las distancias entre los baricentros lo haremos con respecto a los ejes originales (rojos) como referencia:

<u>Eje Y</u>

<u>Figura I</u>

$Y_{GI} := \frac{a}{2} = 15\ cm$ $\quad d_{yI} := X_{Gt} - Y_{GI} = 26.347\ cm$ $\quad I_{YgI} := \frac{a^3 \cdot (h-c)}{12} = 157500\ cm^4$

$$I_{YGI} := I_{YgI} + A_I \cdot d_{yI}^{\,2} = 1615198.602\ cm^4$$

Figura II

$Y_{GII} := a + \left(\frac{b-a}{3}\right) = 53.333\ cm$ $\quad d_{yII} := X_{Gt} - Y_{GII} = -11.987\ cm$

$I_{YgII} := \frac{(b-a)\cdot(h-c)^3}{36} = 666944.444\ cm^4$ $\quad I_{YGII} := I_{YgII} + A_{II} \cdot d_{yII}^2 = 1018966.066\ cm^4$

Figura III

$Y_{GIII} := \frac{b}{2} = 50\ cm$ $\quad d_{yIII} := X_{Gt} - Y_{GIII} = -8.653\ cm$ $\quad I_{YgIII} := \frac{b^3 \cdot c}{12} = 2500000\ cm^4$

$$I_{YGIII} := I_{YgIII} + A_{III} \cdot d_{yIII}^2 = 2724645.118\ cm^4$$

El momento de inercia total, en el eje Y

$$I_{YG} := I_{YGI} + I_{YGII} + I_{YGIII} = 5358809.787\ cm^4$$

En el Eje X

Figura I

$X_{GI} := c + \frac{(h-c)}{2} = 65\ cm$ $\quad d_{xI} := Y_{Gt} - X_{GI} = -23.653\ cm$ $\quad I_{XgI} := \frac{a \cdot (h-c)^3}{12} = 857500\ cm^4$

$$I_{XGI} := I_{XgI} + A_I \cdot d_{xI}^2 = 2032417.145\ cm^4$$

Figura II

$X_{GII} := c + \left(\frac{h-c}{3}\right) = 53.333\ cm$ $\quad d_{xII} := Y_{Gt} - X_{GII} = -11.987\ cm$

$I_{XgII} := \frac{(b-a)^3 \cdot (h-c)}{36} = 666944.444\ cm^4$ $\quad I_{XGII} := I_{XgII} + A_{II} \cdot d_{xII}^2 = 1018966.066\ cm^4$

Figura III

$X_{GIII} := \frac{c}{2} = 15\ cm$ $\quad d_{xIII} := Y_{Gt} - X_{GIII} = 26.347\ cm$ $\quad I_{XgIII} := \frac{b \cdot c^3}{12} = 225000\ cm^4$

$$I_{XGIII} := I_{XgIII} + A_{III} \cdot d_{xIII}^{\ 2} = 2307426.575\ cm^4$$

El momento de inercia total, en el eje X

$$I_{XG} := I_{XGI} + I_{XGII} + I_{XGIII} = 5358809.787\ cm^4$$

Se puede observar que los dos resultados dan iguales, esto es evidente dado que la geometría de la figura, en los ejes XG e YG, es igual cuando se la observa a simple vista.

Una forma de obsevar esto es mirando las áreas y la forma que tenemos por sobre el eje XG y la que tenemos a la derecha de YG, estas resultan idénticas, lo cual nos da un indicio.

Para obtener el momento centrífugo en los ejes XG e YG debemos tambien utilizar el teorema de Steiner generalizado donde tenemos que:

$$I_{XY} = I_{xg.yg} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

Siendo:
I_{XY}: el momento centrífugo respecto a los ejes X e Y
$I_{xg.yg}$: el momento centrífugo de la figura respecto a su propio baricentro
A: área de la figura
d: distancia entre el origen de X y xg o entre Y e yg

Vale aclarar que el momento centrífugo en los ejes principales es igual a 0. Es por esto que en el caso del rectángulo, en el eje baricéntrico horizontal y vertical valdrá cero y no así en el caso del triángulo donde tendrá un valor que es obtenido mendiante una integración o directamente el dado por la tabla de propiedades geométricas.

Figura I

$$I_{xg.yg.I} := 0$$

$$I_{XG.YG.I} := I_{xg.yg.I} + A_I \cdot d_{yI} \cdot d_{xI} = -1308692.126\ cm^4$$

Figura II

$$I_{xg.yg.II} := \frac{-(b-a)^2 \cdot (h-c)^2}{72}$$

$$I_{XG.YG.II} := I_{xg.yg.II} + A_{II} \cdot d_{yII} \cdot d_{xII} = 18549.4\ cm^4$$

Figura III

$I_{xg.yg.III} := 0$

$I_{XG.YG.III} := I_{xg.yg.III} + A_{III} \cdot d_{yIII} \cdot d_{xIII} = -683964.154\ cm^4$

El momento centrífugo total:

$$I_{XG.YG} := I_{XG.YG.I} + I_{XG.YG.II} + I_{XG.YG.III} = -1974106.88\ cm^4$$

Punto C) Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Para hallar los momentos de inercia principal debemos recurrir a la fórmula que surge de igualar la fórmula de momento centrífugo a cero para los ángulos α correspondientes a los ejes principales (que a su vez estos se obtienen de buscar los extremos de la función momento de inercia que se logra hallando donde se hace cero la derivada de la función con respecto al ángulo α).

En definitva tenemos que las sunciones obtenidas son:

$$tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot I_{XY}}{I_Y - I_X} \qquad I_I = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2} \qquad I_{II} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2}$$

Si reemplazamos con los datos obtenidos en los puntos anteriores tendremos que:

$$\alpha := \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot I_{XG.YG}}{I_{YG} - I_{XG}}\right) \cdot \frac{180}{\pi}}{2} = -45$$

Aclaro que el $\frac{180}{\pi}$ solo está incluido para que me devuelva la respuesta en grados para el ángulo

$$I_I := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 7332916.667\ cm^4$$

$$I_{II} := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 3384702.907\ cm^4$$

Hallemos el conjugado de el ángulo α. La fórmula está dada por la siguiente expresión siendo β el conjugado de α, ambos medidos en grados desde el eje horizontal x

$$tan(\beta) = \frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot tan(\alpha°)}{I_{XG.YG} - I_{Y} \cdot tan(\alpha°)}$$

$$\beta := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot \tan(\alpha°)}{I_{XG.YG} - I_{YG} \cdot \tan(\alpha°)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 45$$

$\alpha - \beta = -90$

Vemos que entre ambos se forma un ángulo de 90°, con lo cual a demás de ser conjugados, obviamente, son principales. Esto debe ser así dado que el ángulo α fue buscado como uno principal. Sin embargo con la misma fórmulación de β se puede hallar el conjugado de cualquier ángulo