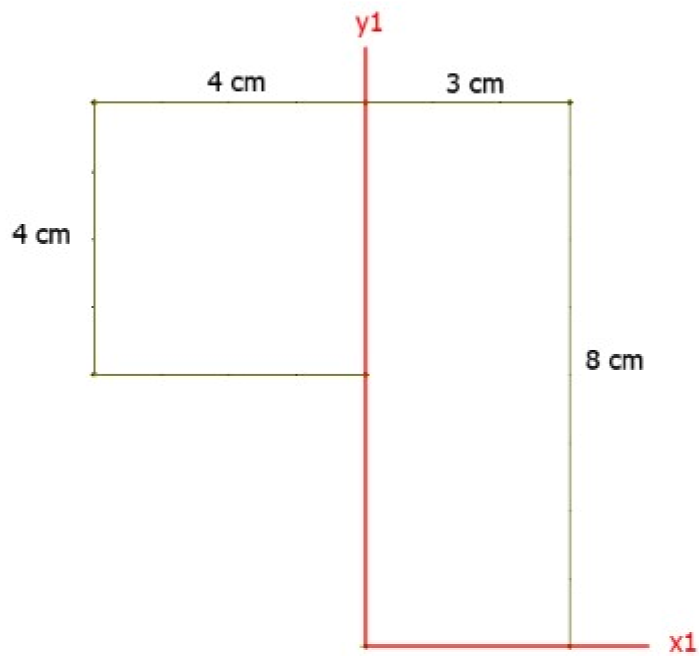
GEOMETRÍA DE LAS SUPERFICIES

EJERCICIO DE CLASE 24/08/18

Dada la siguiente figura compuesta, hallar:

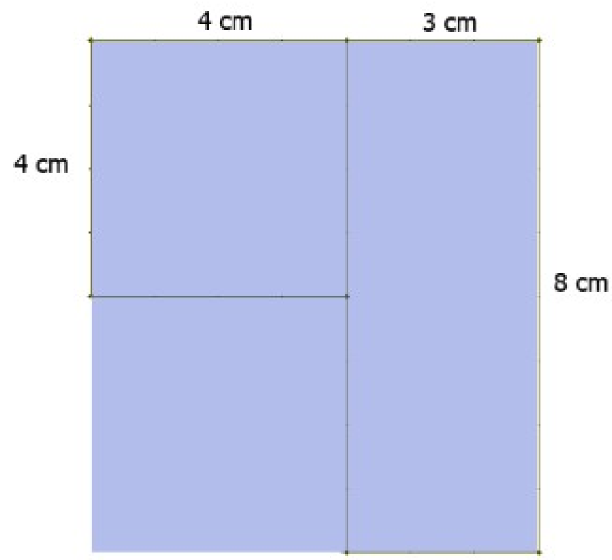
a. El baricentro de la figura
b. Los momentos de inercia baricéntricos horizontal y vertical
c. Los momentos de inercia respecto a los ejes x_1 e y_1
d. Los momentos de inercia principales baricéntricos



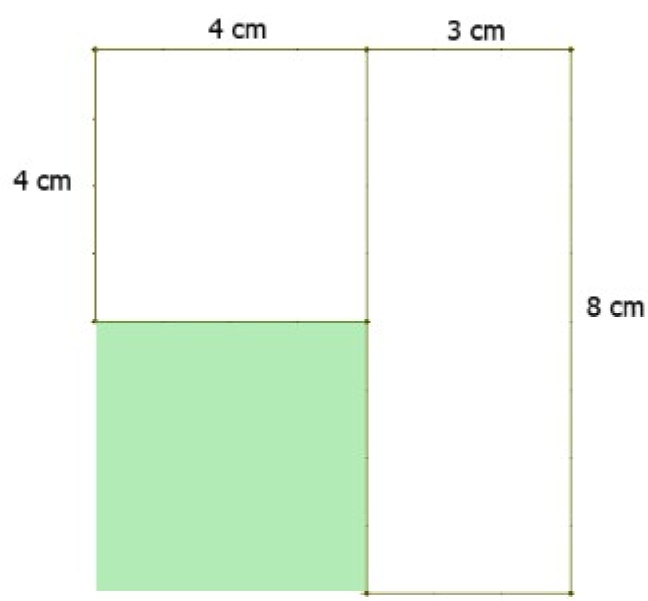
a. Hallar el baricentro de la figura

Como primer paso se debe partir la figura compuesta en figuras sencillas. En este caso se eligieron las siguientes figuras sencillas.
Nota: Hay varias maneras de buscar el baricentro de una figura compuesta.

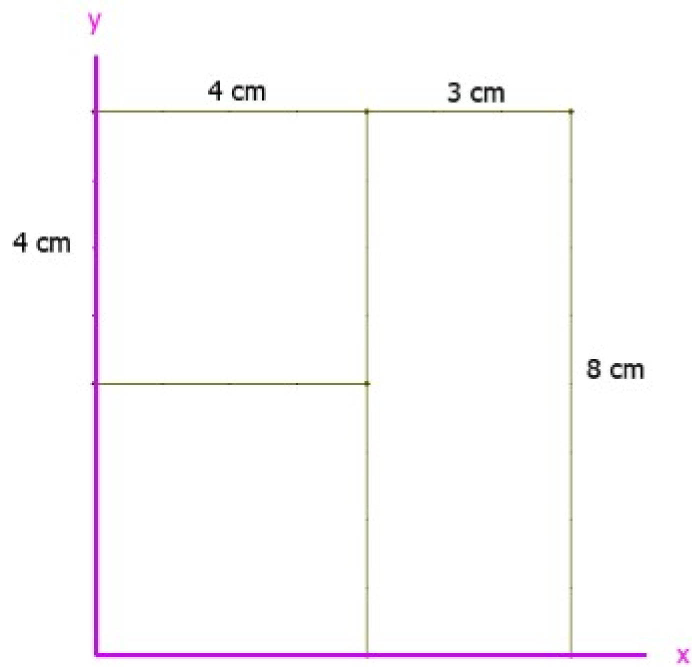
Se designa como figura 1 a la siguiente parte sombreada en azul.



Y como figura 2 a la parte sombreada en verde (la cual se restará de la azul).



Para conocer la ubicación del baricentro, se debe adoptar una terna de referencia a la cual estarán referidas sus coordenadas. Se adopta la siguiente terna en violeta.



La ubicación del baricentro de las figuras 1 y 2 respecto a la terna elegida son:

Figura 1:

$x_1 := 3.5\mathrm{cm}$ *Coordenada x del baricentro de la figura 1.*

$y_1 := 4\mathrm{cm}$ *Coordenada y del baricentro de la figura 1.*

$Area_1 := 56\mathrm{cm}^2$

Figura 2:

$x_2 := 2\mathrm{cm}$ *Coordenada x del baricentro de la figura 2.*

$y_2 := 2\mathrm{cm}$ *Coordenada y del baricentro de la figura 2.*

$Area_2 := 16\mathrm{cm}^2$

Las coordenadas del baricentro de la figura compuesta se obtienen mediante las siguientes fórmulas.

$$x_G = \frac{\left[\sum_n \left(x_i \cdot Area_i\right)\right]}{\sum_n Area_i} \qquad y_G = \frac{\left[\sum_n \left(y_i \cdot Area_i\right)\right]}{\sum_n Area_i}$$

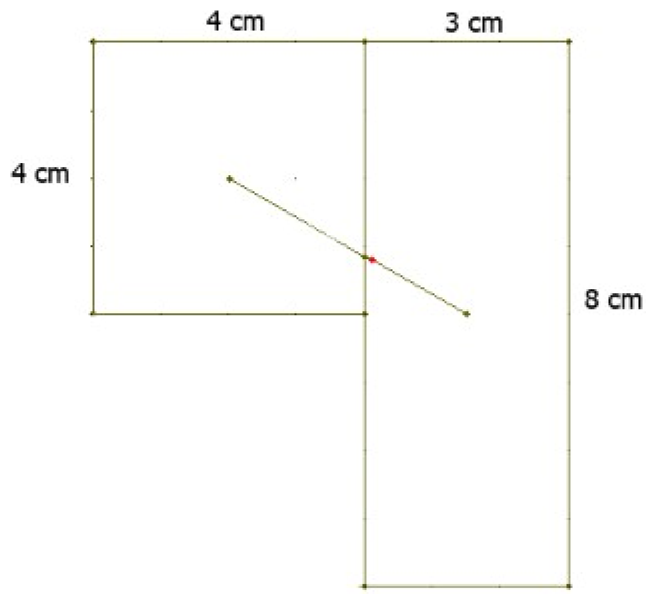
Reemplazando los datos se obtiene:

$$x_G := \frac{x_1 \cdot Area_1 - x_2 \cdot Area_2}{Area_1 - Area_2} = 4.1 \cdot cm$$

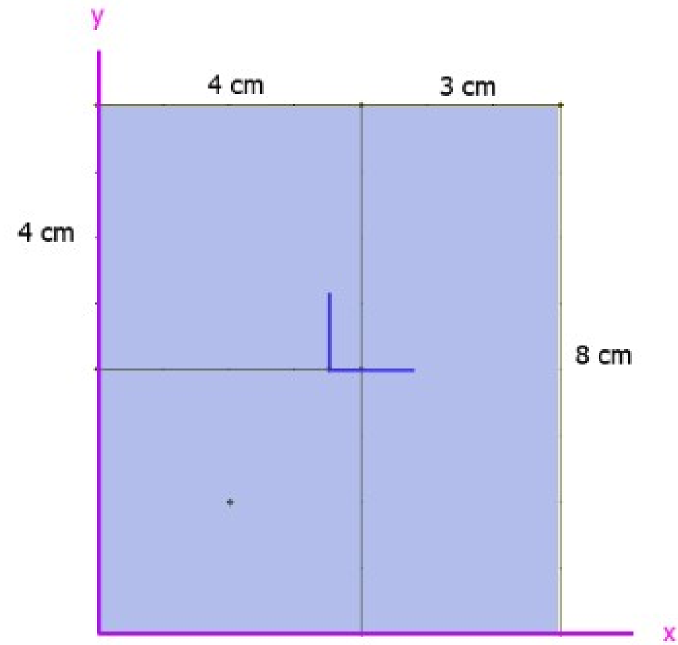
$$y_G := \frac{y_1 \cdot Area_1 - y_2 \cdot Area_2}{Area_1 - Area_2} = 4.8 \cdot cm$$

Nota: Como la figura 2 se debe descontar, el area resulta "negativa".

Una forma de verificar el resultado es que el baricentro de la figura compuesta estará sobre la recta que une los dos baricentros de las figuras separadas.



b. Hallar los Momentos de inercia baricéntricos horizontal y vertical
Datos de la figura 1.



$x_1 = 3.5 \cdot cm$ *coordenadas del baricentro*
$y_1 = 4 \cdot cm$

$Area_1 = 56 \cdot cm^2$

$b_1 := 7cm$ *lados de la figura*
$h_1 := 8cm$

Por ser sección rectangular:

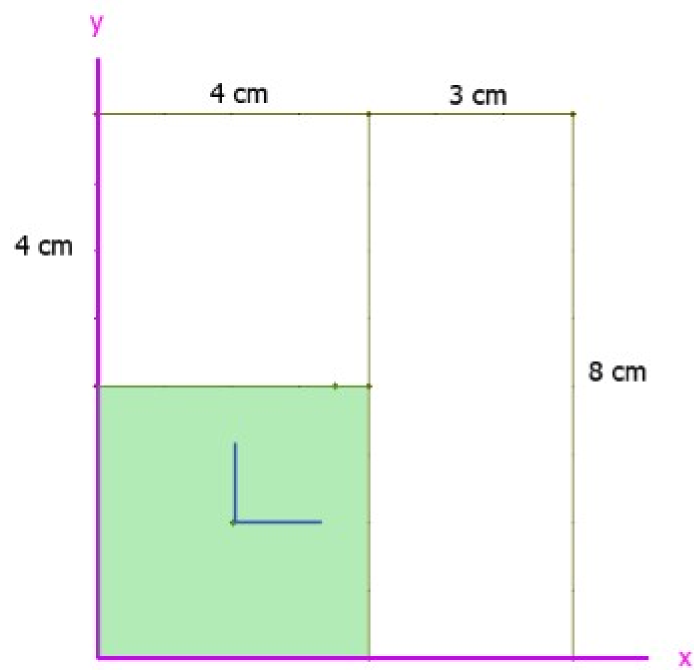
$$J_{xg1} := \frac{b_1 \cdot h_1^{\,3}}{12} = 298.667 \cdot cm^4$$

$$J_{yg1} := \frac{h_1 \cdot b_1^{\,3}}{12} = 228.667 \cdot cm^4$$

$$J_{xyg1} := 0$$

Nota: Los ejes XG1 e YG1 son los ejes horizontal y vertical pasantes por el baricentro de la figura 1

Datos de la figura 2 (que es un área negativa):



$x_2 = 2 \cdot cm$ *coordenadas del baricentro*
$y_2 = 2 \cdot cm$

$Area_2 = 16 \cdot cm^2$

$b_2 := 4cm$ *lados de la figura*
$h_2 := 4cm$

Por ser sección rectangular:

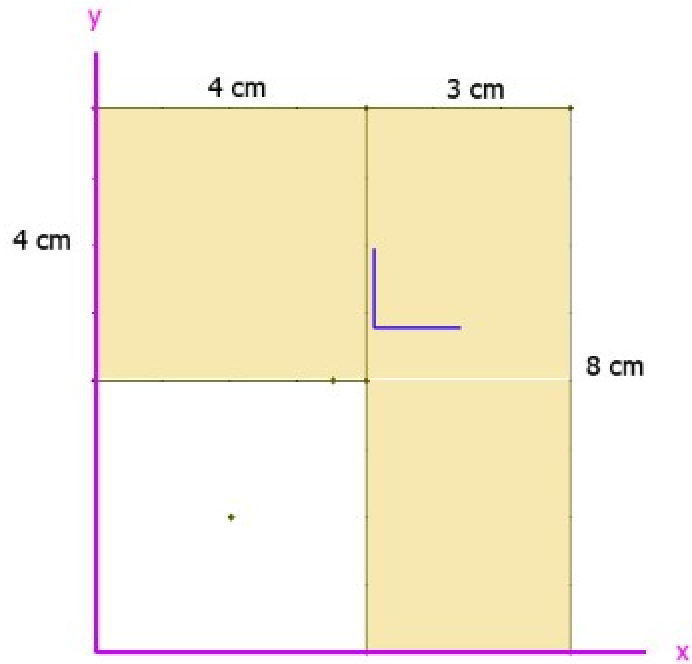
$$J_{xg2} := \frac{b_2 \cdot h_2^{\,3}}{12} = 21.333 \cdot cm^4$$

$$J_{yg2} := \frac{h_2 \cdot b_2^{\,3}}{12} = 21.333 \cdot cm^4$$

$$J_{xyg2} := 0$$

Nota: Los ejes XG2 e YG2 son los ejes horizontal y vertical pasantes por el baricentro de la figura 2

Datos de la figura compuesta:



$x_G = 4.1 \cdot cm$

$y_G = 4.8 \cdot cm$

$Area_{total} := Area_1 - Area_2$

$Area_{total} = 40 \cdot cm^2$

Utilizando el teorema de Steiner se calcularán los momentos de inercia de cada figura respecto de los ejes que pasan por el baricentro de la figura compuesta.

Para la figura 1:

$$J_{xgt1} := J_{xg1} + \left[\left(y_1 - y_G \right)^2 \cdot Area_1 \right] = 334.507 \cdot cm^4$$

$$J_{ygt1} := J_{yg1} + \left[\left(x_1 - x_G \right)^2 \cdot Area_1 \right] = 248.827 \cdot cm^4$$

Para la figura 2:

$$J_{xgt2} := J_{xg2} + \left[\left(y_2 - y_G \right)^2 \cdot Area_2 \right] = 146.773 \cdot cm^4$$

$$J_{ygt2} := J_{yg2} + \left[\left(x_2 - x_G \right)^2 \cdot Area_2 \right] = 91.893 \cdot cm^4$$

Finalmente se obtiene que para la figura total:

$$J_{xG} := J_{xgt1} - J_{xgt2} = 187.733 \cdot cm^4$$

$$J_{yG} := J_{ygt1} - J_{ygt2} = 156.933 \cdot cm^4$$

c. Hallar los momentos de inercia respecto a los ejes x_1 e y_1

Este inciso consiste simplemente en aplicar Steiner entre los ejes baricentricos de la figura compuesta y los ejes X1 e Y1 indicados.

$$J_{x1} := J_{xG} + \left(y_G\right)^2 \cdot Area_{total} = 1.109 \times 10^3 \cdot cm^4$$

$$J_{y1} := J_{yG} + \left(x_G\right)^2 \cdot Area_{total} = 829.333 \cdot cm^4$$

(d) Hallar los momentos de inercia principales baricéntricos

Figura 1:

$$J_{xgt.ygt1} := J_{xyg1} + \left(x_1 - x_G\right)\left(y_1 - y_G\right) \cdot Area_1 = 26.88 \cdot cm^4$$

Figura 2:

$$J_{xgt.ygt2} := J_{xyg2} + \left(x_2 - x_G\right)\left(y_2 - y_G\right) \cdot Area_2 = 94.08 \cdot cm^4$$

Figura total:

$$J_{xyG} := J_{xgt.ygt1} - J_{xgt.ygt2} = -67.2 \cdot cm^4$$

Planteando la fórmula de los valores extremos:

$$J_I := \frac{J_{xG} + J_{yG}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(J_{yG} - J_{xG}\right)^2 + 4J_{xyG}^{\ 2}} = 241.275 \cdot cm^4$$

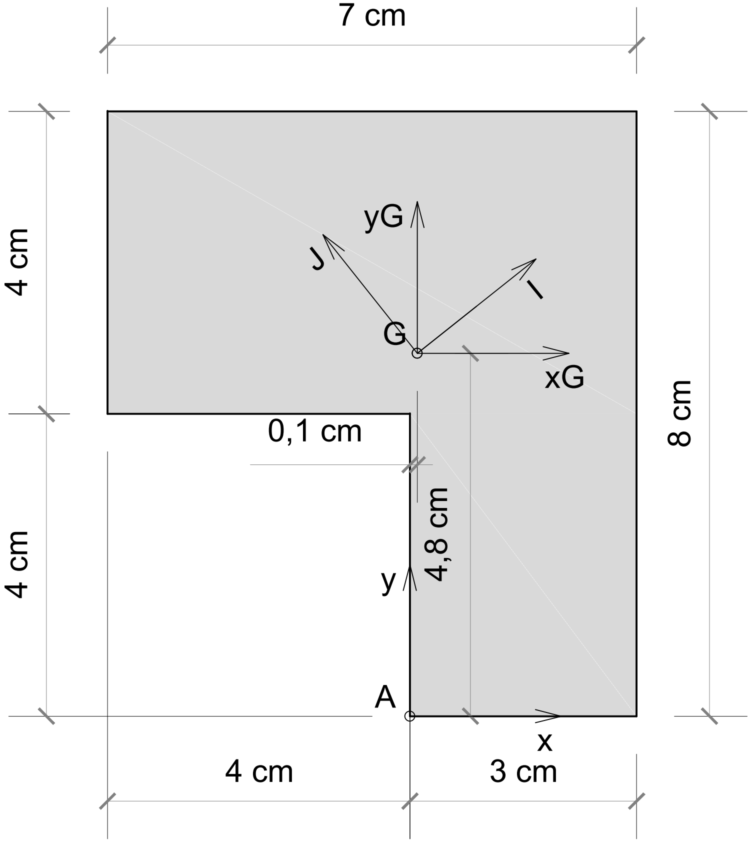
$$J_{II} := \frac{J_{xG} + J_{yG}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(J_{yG} - J_{xG}\right)^2 + 4J_{xyG}^{\ 2}} = 103.391 \cdot cm^4$$

Obteniendo el ángulo α para los ejes principales de inercia:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2J_{xyG}}{J_{yG} - J_{xG}}$$

$$\alpha = 38.546 \cdot {}^\circ$$

Instructivo para determinar las propiedades geométricas de una superficie con CAD



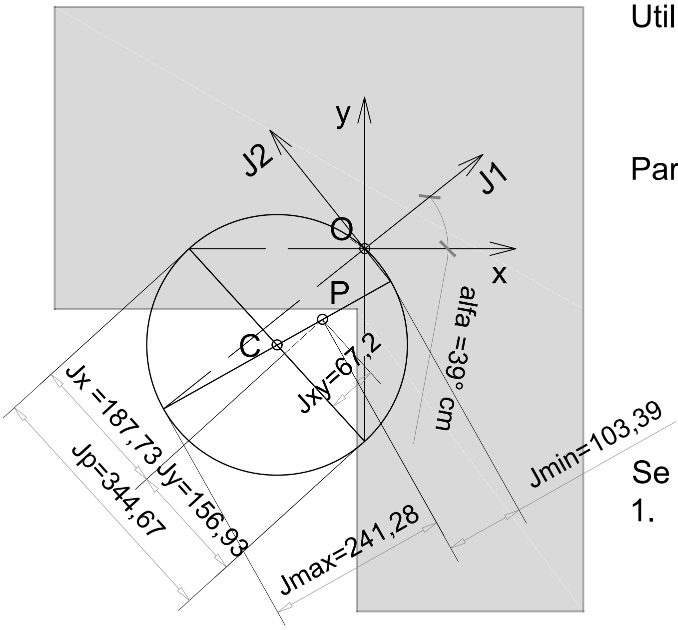
1. Dibujar con una polilínea la figura eligiendo arbitrariamente el centro de coordenadas
2. Transformar en región: region-->marcar la polilinea cerrada (si no está cerrada tira error)
3. Determinar las propiedades de la sección para las coordenadas arbitrarias: massprop -->marcar la region-->entrega en el cuadro de diálogo las props geoms y da la opción de bajarlas a un archivo.
4. Mover el centro de coordenadas al baricentro de la figura: move-->marcar el centro de coordenadas actual o escribir 0,0-->escribir en negativo las coordenadas que salieron de la ubicacion del baricentro (centroid) anteriormente.
5. Volver a determinar las propiedades de la sección, esta vez baricéntricas (debe comprobarse que el centroide se encuentre en 0,0)

Nota: El signo al producto de inercia obtenido por CAD es opuesto al que responde a la definicion en nuestra asignatura.

Salida del comando MASSPROP con centro de coordenadas en A:
Command: MASSPROP
Select objects: 1 found
Select objects:
---------- ----- REGIONS ----------------
Area: 40.0000
Perimeter: 30.0000
Bounding box: X: -4.0000 -- 3.0000
Y: 0.0000 -- 8.0000
Centroid: X: 0.1000
Y: 4.8000
Moments of inertia: X: 1109.3333
Y: 157.3333
Product of inertia: XY: 48.0000
Radii of gyration: X: 5.2662
Y: 1.9833
Principal moments and X-Y directions about centroid:
I: 241.2753 along [0.7821 0.6231]
103.3913 along [-0.6231 0.7821]

Salida del comando MASSPROP con centro en el baricentro:
Command: MASSPROP
Select objects: 1 found
Select objects:
---------------- REGIONS ----------------
Area: 40.0000
Perimeter: 30.0000
Bounding box: X: -4.1000 -- 2.9000
Y: -4.8000 -- 3.2000
Centroid: X: 0.0000
Y: 0.0000
Moments of inertia: X: 187.7333
Y: 156.9333
Product of inertia: XY: 67.2000
Radii of gyration: X: 2.1664
Y: 1.9807
Principal moments and X-Y directions about centroid:
I: 241.2753 along [0.7821 0.6231]
J: 103.3913 along [-0.6231 0.7821]

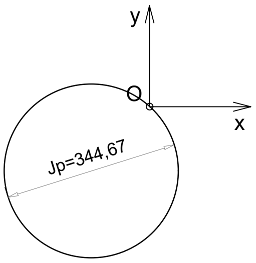
Instructivo paso a paso para verificar momentos principales de inercia usando la circunferencia de Mohr



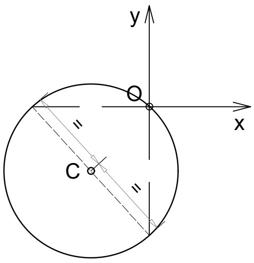
Utilizaremos la circunferencia de Mohr para conocer el valor y la orientación de los ejes Principales de Inercia de una figura (que son independientes del sistema de referencia).

Para trazar la circunferencia de Mohr necesitamos conocer las características geométricas respecto de un par de ejes ortogonales que llamaremos x, y. Esto es: partiremos de conocer Jx, Jy y Jxy. Conocidos estos parámetros ya no utilizaremos la geometria de la figura.

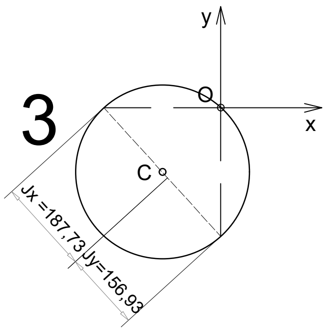
1



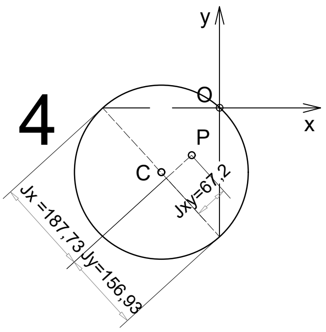
2



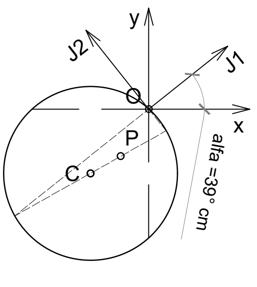
3



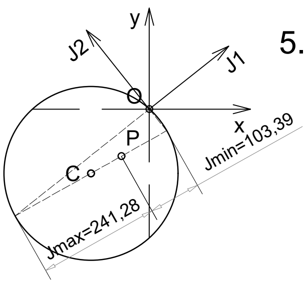
4



5



6



Se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Trazar una circunferencia de diámetro igual al Momento de Inercia polar Jp = Jx+Jy, en una escala cualquiera y con una orientación cualquiera, pero de modo que pase por el origen de coordenadas O.

2. Como x e y son ortogonales, la cuerda que une los puntos donde x e y tocan la circunferencia pasa por el centro de la circunferencia, y se puede marcar el centro C a la mitad del diámetro.

3. Sobre este diámetro medir Jx desde donde la circunferencia toca x y Jy desde donde la circunferencia toca y.

4. Sobre una recta perpendicular a la cuerda, desde donde termina Jx y empieza Jy, marcar en la misma escala Jxy. Si es positivo se mide del lado de afuera de la cuerda, si es negativo entre la cuerda y el origen de coordenadas. En el extremo de esta recta se encontrará el punto P, que se llama polo.

5. Si se extiende la línea que une los puntos C y P hasta la circunferencia obtendremos la cuerda de los ejes principales de inercia, J1 y J2, que se obtienen uniendo el origen de coordenadas con los puntos de intersección de esta línea con la circunferencia. Así queda determinada la orientación de los ejes principales de inercia.

6. Los valores de J1 y J2 (max y min) se obtienen de medir los puntos de intersección de los ejes hasta el polo.