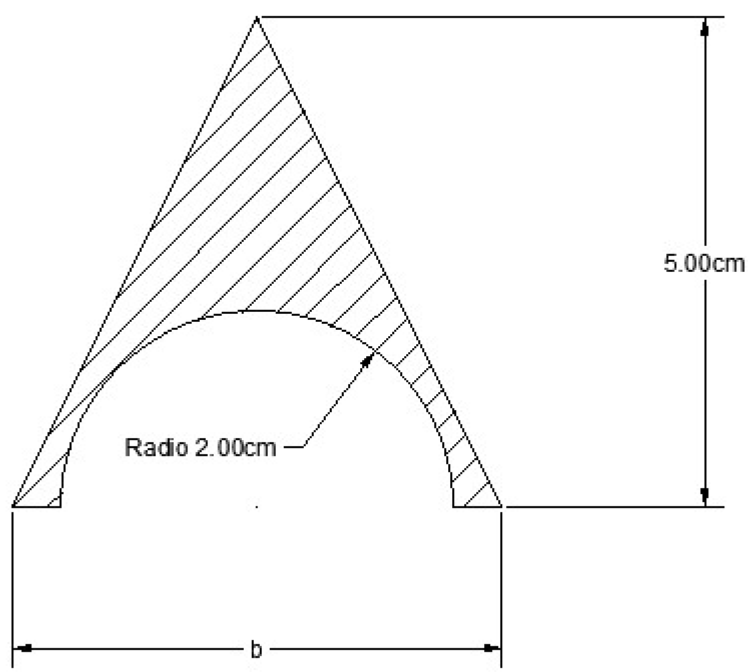
GEOMETRÍA DE LAS SUPERFICIES

EJERCICIO DE CLASE 31/08/18

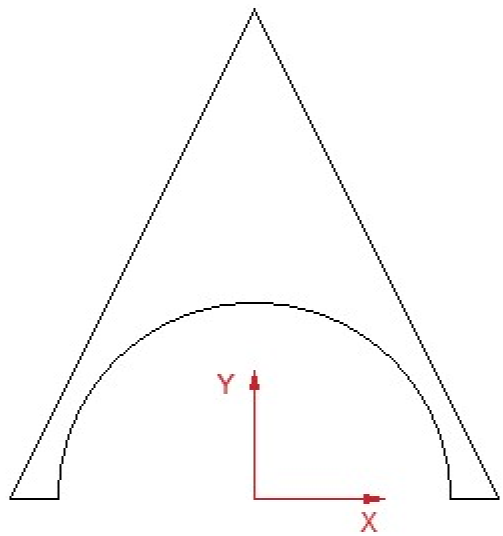
Dada la siguiente figura compuesta, hallar:

a. Hallar el lado b tal que el baricentro esté a la mitad de la altura.
b. ¿Qué distancia se debe desplazar horizontalmente la terna (Xg,Yg) baricéntrica para que los momentos de inercia respecto a esos ejes sean iguales?.



a. Hallar el lado b tal que el baricentro esté a la mitad de la altura.

Como primer paso se establece una terna para referenciar todas las coordenadas. La misma estará ubicada según la imagen siguiente.



Se descompone la figura compuesta en dos figuras simples; un triángulo y un semicírculo. Utilizando la tabla de propiedades geométricas se obtienen las areas y las coordenadas de los baricéntros.

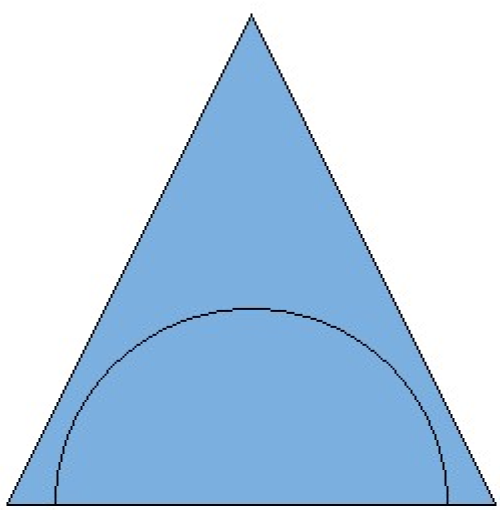


Figura 1:

$$Xg_1 := 0$$

$$Yg_1 := \frac{5.00cm}{3}$$

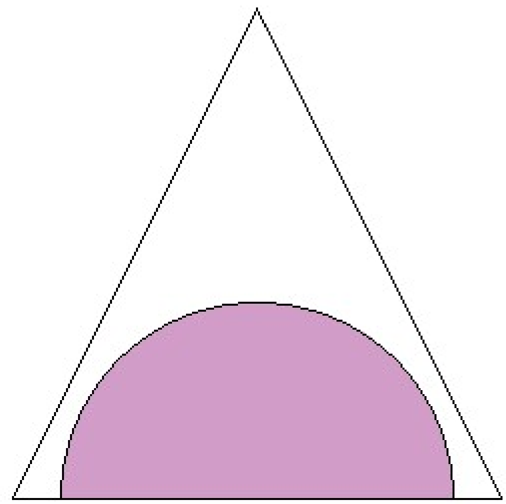
$$Area_1(b) := \frac{b \cdot 5.00cm}{2}$$

Figura 2:

$Xg_2 := 0$

$Yg_2 := \dfrac{4 \cdot 2.00cm}{3 \cdot \pi}$

$Area_2 := \dfrac{\pi \cdot (2.00cm)^2}{2}$



Como el baricentro debe estar a la mitad de la altura, entonces se conoce la coordenada Ygt.

$Ygt := \dfrac{5.00cm}{2} = 2.5\,cm$

Planteando la ecuación de la coordenada vertical del baricéntro de la figura compuesta puede despejarse el valor de b.

$$Y_{gt} = \frac{\left[\sum_n \left(y_i \cdot Area_i\right)\right]}{\sum_n Area_i}$$

$$Ygt = \frac{Area_1(b) \cdot Yg_1 - Area_2 \cdot Yg_2}{Area_1(b) - Area_2}$$

Resolviendo la ecuación $b = 4.98\,cm$

b. ¿Qué distancia se debe desplazar horizontalmente la terna (Xg, Yg) baricéntrica para que los momentos de inercia respecto a esos ejes sean iguales?

Para empezar a resolver este inciso, se deben conocer primeramente los valores de los momentos de inercia de las figuras simples respecto de un eje. Utilizando la tabla de propiedades geométricas se obtienen dichos momentos respecto de los ejes baricéntricos de cada figura.

Figura 1

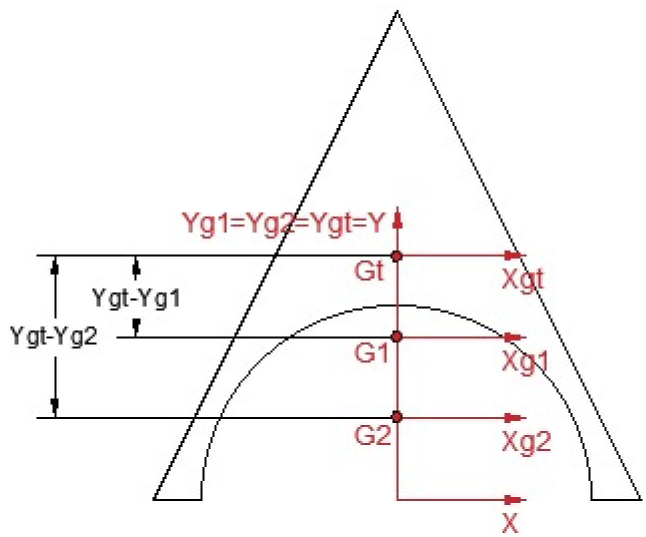
$$J_{xg1} := \frac{4.98\text{cm}\cdot(5.00\text{cm})^3}{36}$$

$$J_{yg1} := \frac{(4.98\text{cm})^3\cdot 5.00\text{cm}}{48}$$

Figura 2

$$J_{xg2} := (2.00\text{cm})^4\cdot\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$$

$$J_{yg2} := \frac{\pi\cdot(2.00\text{cm})^4}{8}$$



Se calculan utilizando el teorema de Steiner los valores de los momentos de inercia de la figura total respecto de los ejes Xgt,Ygt

$$Jxgt := \left[J_{xg1} + (Ygt - Yg_1)^2\cdot Area_1\right] - \left[J_{xg2} + (Ygt - Yg_2)^2\cdot Area_2\right] = 7.051\,\text{cm}^4$$

$$Jygt := J_{yg1} - J_{yg2} = 6.582\,\text{cm}^4$$

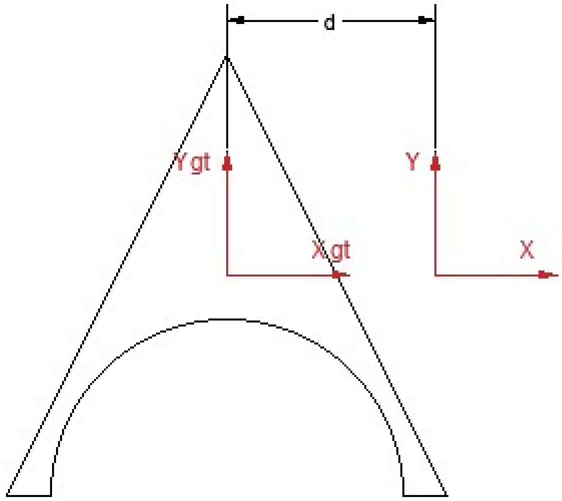
Una vez conocidos los momentos de inercia, se utilizará nuevamente el teorema de Steiner para desplazar la terna Xgt,Ygt horizontalmente hasta que Jx=Jy

Como se desplazará horizontalmente la terna, el eje Xgt no cambiará, y por lo tanto será el mismo.

$$Jx := Jxgt$$

El momento de inercia vertical, en cambio, deberá aumentarse en el siguiente valor, siendo d la distancia a obtener

$$Jygt + (Area_1 + Area_2)\cdot d^2 = Jx$$



Despejando la distancia d de la ecuación anterior se obtiene el siguiente valor

$d = 0.158 \cdot cm$