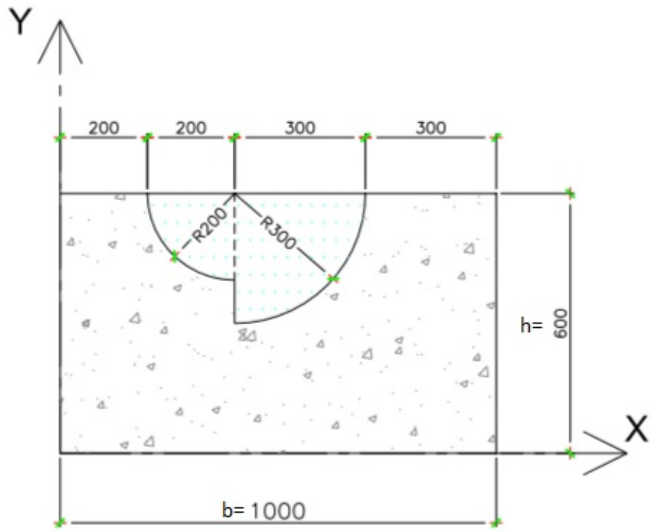
Problema:



a) Hallar la posición del Baricentro

b) Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico

c) Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Datos

$b := 1000\ m$ $h := 600\ m$

$r_{II} := 200\ m$ $r_{III} := 300\ m$

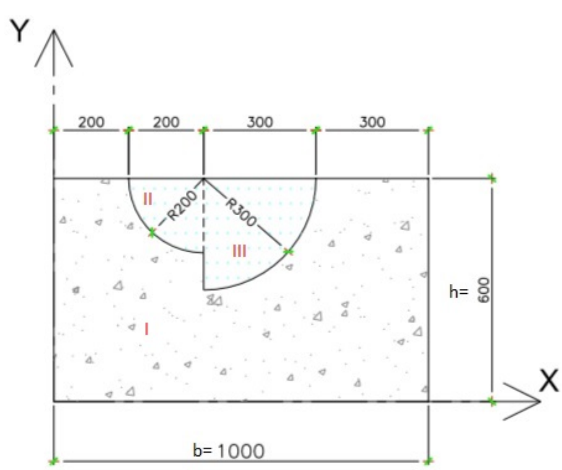
Podemos analizar la figura como una partición de distintas figuras, esto se debe a que existe adición como propiedad tanto para los momentos estáticos como para los momentos de inercia y centrífugos, con lo cual, como regla general, podemos plantear que cierta propiedad en la figura total resulta igual a la suma (se entiende por suma de cosas positivas o negativas -resta-) de las partes componentes.

Como podemos observar en la figura presentada en el problema tenemos un cierto corte rectangular al cual se le practican dos excavaciones formando cuartos de círculos. Esto quiere decir que tendremos una figura a la cual se le resta una cierta porción de área, con lo cual:

Punto a) Hallar la posición del Baricentro

Como mensionábamos anteriormente podemos utilizar la adición de los momentos estáticos (S) respecto a los ejes x y planteados:

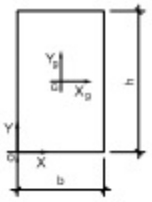
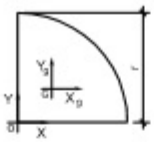
$$S_T = S_I - S_{II} - S_{III}$$



Recordemos que la fórmula de momento estático se puede expresar como:

$S = A \cdot d_G$ Siendo, A: área; d_G: distancia al baricentro

Recordemos las propiedades geométricas de los elementos componentes:

SECCIÓN	BARICENTRO / ÁREA	MOMENTOS DE INERCIA Y MOMENTOS CENTRIFUGOS	
	$x_g = \frac{b}{2}$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$	$J_{xg} = \frac{b \cdot h^3}{12}$
	$y_g = \frac{h}{2}$	$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$	$J_{yg} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$
	$F = b \cdot h$	$J_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$	$J_{xyg} = 0$
	$x_g = \frac{4r}{3\pi}$	$J_x = \frac{\pi r^4}{16} = \frac{\pi D^4}{256}$	$J_{xg} = r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)$
	$y_g = \frac{4r}{3\pi}$	$J_y = \frac{\pi r^4}{16} = \frac{\pi D^4}{256}$	$J_{yg} = r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)$
	$F = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi D^2}{16}$	$J_{xy} = \frac{r^4}{8}$	$J_{xyg} = r^4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)$

En el eje y tendremos:

<u>Figura I</u>

$A_I := b \cdot h = 600000\ m^2$ $\qquad y_{G.I} := \frac{h}{2} = 300\ m$ $\qquad S_{I.Y} := A_I \cdot y_{G.I} = 180000000\ m^3$

<u>Figura II</u>

$A_{II} := \pi \cdot \frac{{r_{II}}^2}{4} = 31415.927\ m^2$ $\qquad y_{G.II} := h - \frac{4 \cdot r_{II}}{3 \cdot \pi} = 515.117\ m$

$S_{II.Y} := A_{II} \cdot y_{G.II} = 16182889.255\ m^3$

<u>Figura III</u>

$A_{III} := \pi \cdot \frac{{r_{III}}^2}{4} = 70685.835\ m^2$ $\qquad y_{G.III} := h - \frac{4 \cdot r_{III}}{3 \cdot \pi}$

$S_{III.Y} := A_{III} \cdot y_{G.III} = 33411500.823\ m^3$

$$S_{T.Y} = S_{I.Y} - S_{II.Y} - S_{III.Y} = A_t \cdot Y_{Gt} \qquad \text{donde} \qquad A_t = A_I + A_{II} + A_{III}$$

Con lo cual la posiición del baricentro de la figura total Y_{Gt} será

$$Y_{Gt} := \frac{S_{I.Y} - S_{II.Y} - S_{III.Y}}{A_I - A_{II} - A_{III}} = 261.912\ m$$

<u>En el eje X</u>

<u>Figura I</u>

$$x_{G.I} := \frac{b}{2} = 500\ m \qquad S_{I.X} := A_I \cdot x_{G.I} = 300000000\ m^3$$

<u>Figura II</u>

$$x_{G.II} := 400\ m - \frac{4 \cdot r_{II}}{3 \cdot \pi} \qquad S_{II.X} := A_{II} \cdot x_{G.II} = 9899703.948\ m^3$$

<u>Figura III</u>

$$x_{G.III} := 400\ m + \frac{4 \cdot r_{III}}{3 \cdot \pi} \qquad S_{III.X} := A_{III} \cdot x_{G.III} = 37274333882308.1\ cm^3$$

El momento de inercia de la figura total será:

$$S_{T.X} = S_{I.X} - S_{II.X} - S_{III.X} = A_t \cdot X_{Gt} \qquad \text{donde} \qquad A_t = A_I - A_{II} - A_{III}$$

Con lo cual la posiición del baricentro de la figura total X_{Gt} será

$$X_{Gt} := \frac{S_{I.X} - S_{II.X} - S_{III.X}}{A_I - A_{II} - A_{III}} = 507.786\ m$$

Punto b) Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico

Para resolver este punto debemos recordar que los momentos de inercia son también aditivos en tanto procedamos con el TEOREMA DE STEINER mediante. De esta forma

podemos plantear en forma generica que:

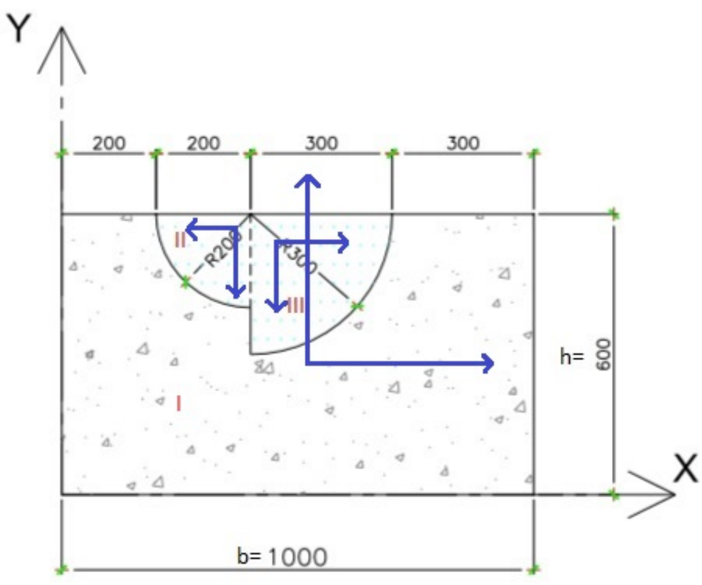
$$I_X = I_{xg} + A \cdot d_x^{\,2}$$

Siendo:
I_X: el momento de inercia respecto a un eje X
I_{xg}: el momento de inercia de la figura respecto a su propio baricentro
A: área de la figura
d: distancia entre el origen de X y xg

Analogamente se puede hacer para el eje Y

Es por esto que, para las figuras simples en las que se descompuso la figura total, se debe hallar el baricentro de cada una para luego trasladar los ejes al baricentro de la figura total.

Dado que en este punto nos piden que sean paralelos a los ejes indicados anteriormente tendremos que:



Como vemos se toman de cada una de las figuras los ejes baricéntricos. Esto está directamente relacionado con la aplicación del Teorema de Steiner dado que este plantea que la traslación es desde un eje baricéntrico a uno cualquiera (sumando el término de Steiner) o desde un eje cualquiera a uno baricéntrico (en este caso se resta).

Ahora conforme lo que nos pide el enunciado trasladaremos cada uno de los ejes para luego superponer sus efectos, esto es adicionando como antes dijimos.

Eje Y

Figura I

$$d_{yI} := x_{G.I} - X_{Gt} = -7.786\ m \qquad I_{YgI} := \frac{h \cdot b^3}{12} = 50000000000\ m^4$$

$$I_{YGI} := I_{YgI} + A_I \cdot d_{yI}^{\ 2} = 50036376964.066\ m^4$$

Figura II

$$d_{yII} := x_{G.II} - X_{Gt} = -192.669\ m \qquad I_{YgII} := r_{II}^{\ 4} \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right) = 87805568.517\ m^4$$

$$I_{YGII} := I_{YgII} + A_{II} \cdot d_{yII}^{\ 2} = 1254007603.534\ m^4$$

Figura III

$$d_{yIII} := x_{G.III} - X_{Gt} = 19.538\ m \qquad I_{YgIII} := r_{III}^{\ 4} \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right) = 444515690.618\ m^4$$

$$I_{YGIII} := I_{YgIII} + A_{III} \cdot d_{yIII}^{\ 2} = 471497563.087\ m^4$$

El momento de inercia total, en el eje Y

$$I_{YG} := I_{YGI} - I_{YGII} - I_{YGIII} = 48310871797.445\ m^4$$

En el Eje X

Figura I

$$d_{xI} := y_{G.I} - Y_{Gt} = 38.088\ m \qquad I_{XgI} := \frac{b \cdot h^3}{12} = 18000000000\ m^4$$

$$I_{XGI} := I_{XgI} + A_I \cdot d_{xI}^{\ 2} = 18870409514.05\ m^4$$

Figura II

$$d_{xII} := y_{G.II} - Y_{Gt} = 253.205\ m \qquad I_{XgII} := r_{II}^{\ 4} \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right) = 87805568.517\ m^4$$

$$I_{XGII} := I_{XgII} + A_{II} \cdot d_{xII}^{\ 2} = 2101970729.324\ m^4$$

Figura III

$$d_{xIII} := y_{G.III} - Y_{Gt} = 210.764\ m \qquad I_{XgIII} := r_{III}^{\ 4} \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right) = 444515690.618\ m^4$$

$$I_{XGIII} := I_{XgIII} + A_{III} \cdot {d_{xIII}}^2 = 3584480116.122\ m^4$$

El momento de inercia total, en el eje X

$$I_{XG} := I_{XGI} - I_{XGII} - I_{XGIII} = 13183958668.604\ m^4$$

Para obtener el momento centrífugo en los ejes XG e YG debemos tambien utilizar el teorema de Steiner generalizado donde tenemos que:

$$I_{XY} = I_{xg.yg} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

Siendo:
I_{XY}: el momento centrífugo respecto a los ejes X e Y
$I_{xg.yg}$: el momento centrífugo de la figura respecto a su propio baricentro
A: área de la figura
d: distancia entre el origen de X y xg o entre Y e yg

Vale aclarar que el momento centrífugo en los ejes principales es igual a 0. Es por esto que en el caso del rectángulo, en el eje baricéntrico horizontal y vertical valdrá cero y no así en el caso del cuarto de círculo donde tendrá un valor que es obtenido mendiante una integráción o directamente el dado por la tabla de propiedades geométricas.

Figura I

$$I_{xg.yg.I} := 0$$

$$I_{XG.YG.I} := I_{xg.yg.I} + A_I \cdot d_{yI} \cdot d_{xI} = -177940595.748\ m^4$$

Figura II

$$I_{xg.yg.II} := {r_{II}}^4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right) = -26353696.842\ m^4$$

$$I_{XG.YG.II} := I_{xg.yg.II} + A_{II} \cdot d_{yII} \cdot d_{xII} = -1558973515.777\ m^4$$

Figura III

$$I_{xg.yg.III} := -{r_{III}}^4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right) = 133415590.262\ m^4$$

$$I_{XG.YG.III} := I_{xg.yg.III} + A_{III} \cdot d_{yIII} \cdot d_{xIII} = 424486234.068\ m^4$$

Se utiliza el signo menos por la posición de la figura respecto a la de la tabla

El momento centrífugo total:

$$I_{XG.YG} := I_{XG.YG.I} - I_{XG.YG.II} - I_{XG.YG.III} = 956546685.961\ m^4$$

Punto C) Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Para hallar los momentos de inercia principal debemos recurrir a la fórmula que surge de igualar la fórmula de momento centrífugo a cero para los ángulos α correspondientes a los ejes principales (que a su vez estos se obtienen de buscar los extremos de la función momento de inercia que se logra hallando donde se hace cero la derivada de la función con respecto al ángulo α).

En definitva tenemos que las sunciones obtenidas son:

$$tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot I_{XY}}{I_Y - I_X} \qquad I_I = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2} \qquad I_{II} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2}$$

Si reemplazamos con los datos obtenidos en los puntos anteriores tendremos que:

$$\alpha := \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot I_{XG.YG}}{I_{YG} - I_{XG}}\right) \cdot \frac{180}{\pi}}{2} = 1.559$$

Aclaro que el $\frac{180}{\pi}$ solo está incluido para que me devuelva la respuesta en grados para el ángulo

$$I_I := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 48336900389.012\ m^4$$

$$I_{II} := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 13157930077.037\ m^4$$

Hallemos el conjugado de el ángulo α. La fórmula está dada por la siguiente expresión siendo β el conjugado de α, ambos medidos en grados desde el eje horizontal x

$$tan(\beta) = \frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot tan(\alpha°)}{I_{XG.YG} - I_Y \cdot tan(\alpha°)} \qquad \beta := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot \tan(\alpha°)}{I_{XG.YG} - I_{YG} \cdot \tan(\alpha°)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = -88.441$$

$$\alpha - \beta = 90$$

Vemos que entre ambos se forma un ángulo de 90°, con lo cual a demás de ser conjugados, obviamente, son principales. Esto debe ser así dado que el ángulo α fue buscado como uno principal. Sin embargo con la misma fórmulación de β se puede hallar el conjugado de cualquier ángulo