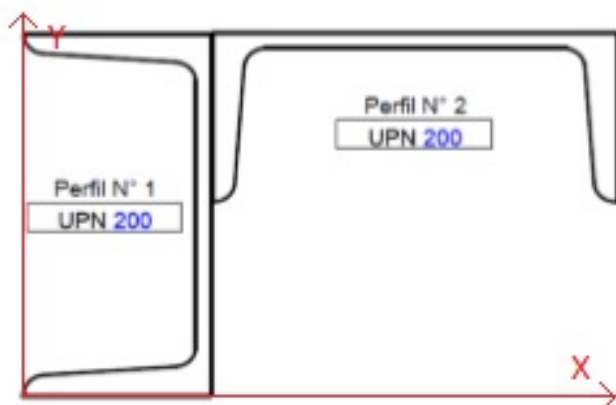


Problema:

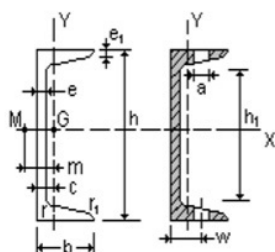
- Hallar la posición del Baricentro
- Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico
- Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Datos

Perfiles UPN 200

Resolución:

Para empezar a resolver el ejercicio debemos buscar los datos del perfil dado que el único dato que nos da el problema es el nombre del perfil, UPN 200. Los datos deben obtenerse de una tabla de perfiles laminados de acero en donde nos encontraremos con la siguiente imagen y los siguientes datos para el perfil buscado:

Tabla 2.A1.4.- Perfiles UPN

A = Área de la de la sección
 S_x = Momento estático de media sección, respecto a X.

I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X.

$W_x = 2I_x : h$. Módulo resistente de la sección, respecto a X.

$i_x = (I_x : A)^{1/2}$. Radio de giro de la sección, respecto a X.

I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y.

$W_y = 2I_y : (b-c)$. Mínimo módulo resistente de la sección, respecto a Y.

$i_y = (I_y : A)^{1/2}$. Radio de giro de la sección, respecto a Y

I_t = Módulo de torsión de la sección.

c = Posición del eje Y.

u = Perímetro de la sección.

a = Diámetro del agujero del roblón normal.

w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros.

h_1 = Altura de la parte plana del alma.

p = Peso por metro.

Perfil	Dimensiones							Términos de la sección											Agujeros		Peso p kp/m
	h mm	b mm	e mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h ₁ mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _t cm ⁴	c cm	m cm	w mm	a mm	
UPN 200	200	75	8,5	11,5	6,0	151	661	32,2	114	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	12,6	2,01	3,94	40	23	25,30

Con lo cual ahora podemos proceder a resolver el ejercicio:

Punto a) Hallar la posición del Baricentro

Para este punto vamos a tomar como referencia los ejes X e Y que aparecen en la imagen, es decir, referiremos los baricentros a ese sistema de ejes y el resultado también nos quedara referido a ellos.

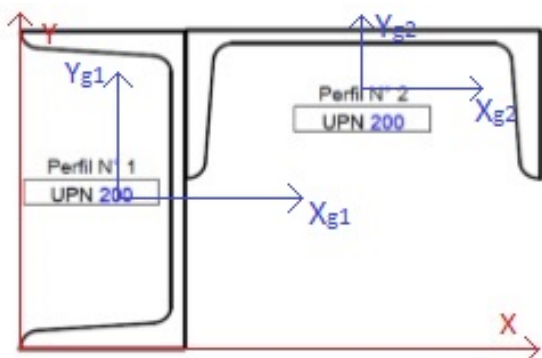
Primero obtengamos los datos necesarios:

$$h := 200 \text{ mm} \quad b := 75 \text{ mm} \quad e := 8.5 \text{ mm} \quad c := 20.1 \text{ mm} \quad A := 32.2 \text{ cm}^2$$

Posición de los baricentros:

$$\text{Perfil N}^\circ 1 \quad x_{g1} := b - c = 5.49 \text{ cm} \quad y_{g1} := \frac{h}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Perfil N}^\circ 2 \quad x_{g2} := b + \frac{h}{2} = 17.5 \text{ cm} \quad y_{g2} := (h - b) + (b - c) = 17.99 \text{ cm}$$



Para poder resolverlo plantearemos la ecuación que surge de que el momento estático de la figura compuesta es igual a la suma de los momentos estáticos individuales, con lo cual:

$$S_T = S_1 + S_2$$

Recordemos que la fórmula de momento estático se puede expresar como:

$$S = A \cdot d_G \text{ Siendo, } A: \text{ área; } d_G: \text{ distancia al baricentro}$$

$$A_t \cdot X_G = A \cdot x_{g1} + A \cdot x_{g2} \quad X_G := \frac{A \cdot x_{g1} + A \cdot x_{g2}}{2 \cdot A} = 11.495 \text{ cm}$$

$$A_t \cdot Y_G = A \cdot y_{g1} + A \cdot y_{g2} \quad Y_G := \frac{A \cdot y_{g1} + A \cdot y_{g2}}{2 \cdot A} = 13.995 \text{ cm}$$

Punto b) Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico

Para resolver este punto debemos recordar que los momentos de inercia son también aditivos en tanto procedamos con el TEOREMA DE STEINER mediante. De esta forma

podemos plantear en forma generica que:

Siendo:

$$I_X = I_{xg} + A \cdot d_x^2$$

I_X : el momento de inercia respecto a un eje X
 I_{xg} : el momento de inercia de la figura respecto a su propio baricentro
 A : área de la figura
 d : distancia entre el origen de X y xg

Analogamente se puede hacer para el eje Y

Es por esto que, para las figuras simples en las que se descompuso la figura total, se debe hallar el baricentro de cada una para luego trasladar los ejes al baricentro de la figura total.

Con el planteo de Steiner podremos obtener los momentos de inercia que aportan cada uno de los perfiles, siendo para cada uno su momento baricéntrico (obtenido de la tabla):

$$I_x := 1910 \text{ cm}^4 \quad I_y := 148 \text{ cm}^4 \quad I_{xy} := 0 \text{ cm}^4$$

Teniendo en cuenta que I_x representa el momento de inercia en un eje horizontal para el perfil posicionado de la forma indicada en la tabla, con lo cual, para el perfil N°1 el I_x es el momento de inercia en su eje baricéntrico "x" y para el perfil N°2 es el momento de inercia en su eje baricéntrico "y". Analogamente se puede establecer los valores para el momento de inercia I_y . Es por eso que no se deben confundir por qué se ponen estos parámetros en cada cálculo. Por otro lado el momento centrífugo es igual a cero dado que x e y son ejes principales

Perfil N°1	$d_{x1} := X_G - x_{g1} = 6.005 \text{ cm}$	$I_{YG1} := I_y + A \cdot d_{x1}^2 = 1309.133 \text{ cm}^4$
	$d_{y1} := Y_G - y_{g1} = 3.995 \text{ cm}$	$I_{XG1} := I_x + A \cdot d_{y1}^2 = 2423.913 \text{ cm}^4$
		$I_{XG.YG.1} := I_{xy} + A \cdot d_{x1} \cdot d_{y1} = 772.477 \text{ cm}^4$
Perfil N°2	$d_{x2} := X_G - x_{g2} = -6.005 \text{ cm}$	$I_{YG2} := I_y + A \cdot d_{x2}^2 = 3071.133 \text{ cm}^4$
	$d_{y2} := Y_G - y_{g2} = -3.995 \text{ cm}$	$I_{XG2} := I_x + A \cdot d_{y2}^2 = 661.913 \text{ cm}^4$
		$I_{XG.YG.2} := I_{xy} + A \cdot d_{x2} \cdot d_{y2} = 772.477 \text{ cm}^4$

$$I_{YG} := I_{YG1} + I_{YG2} = 4380.266 \text{ cm}^4$$

$$I_{XG} := I_{XG1} + I_{XG2} = 3085.826 \text{ cm}^4$$

$$I_{XG.YG} := I_{XG.YG.1} + I_{XG.YG.2} = 1544.954 \text{ cm}^4$$

Punto C) Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Para hallar los momentos de inercia principal debemos recurrir a la fórmula que surge de igualar la fórmula de momento centrífugo a cero para los ángulos α correspondientes a los ejes principales (que a su vez estos se obtienen de buscar los extremos de la función momento de inercia que se logra hallando donde se hace cero la derivada de la función con respecto al ángulo α).

En definitiva tenemos que las funciones obtenidas son:

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot I_{XY}}{I_Y - I_X} \quad I_I = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2} \quad I_{II} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2}$$

Si reemplazamos con los datos obtenidos en los puntos anteriores tendremos que:

$$\alpha := \frac{\arctan\left(\frac{2 \cdot I_{XG.YG}}{I_{YG} - I_{XG}}\right) \cdot \frac{180}{\pi}}{2} = 33.635$$

Aclaro que el $\frac{180}{\pi}$ solo está incluido para que me devuelva la respuesta en grados para el ángulo

$$I_I := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 5408.091 \text{ cm}^4$$

$$I_{II} := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 2058 \text{ cm}^4$$

Hallemos el conjugado de el ángulo α . La fórmula está dada por la siguiente expresión siendo β el conjugado de α , ambos medidos en grados desde el eje horizontal x

$$\tan(\beta) = \frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}{I_{XG.YG} - I_{YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)} \quad \beta := \arctan\left(\frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}{I_{XG.YG} - I_{YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = -56.365$$

$$\alpha - \beta = 90$$

Vemos que entre ambos se forma un ángulo de 90° , con lo cual a demás de ser conjugados, obviamente, son principales. Esto debe ser así dado que el ángulo α fue buscado como uno principal. Sin embargo con la misma formulación de β se puede hallar el conjugado de cualquier ángulo