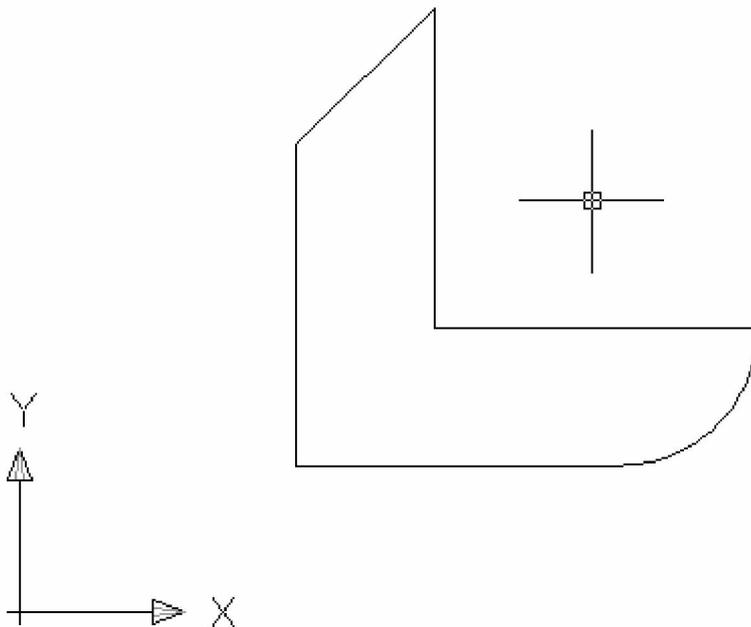


## **CÁLCULO DE PROPIEDADES DE MASAS** **MEDIANTE EL USO DE AutoCAD**

A continuación se describen los pasos necesarios para obtener las propiedades de masa de la figura del ejemplo desarrollado en el apunte de la **Unidad N°2 – Geometría de las Masas**, y así poder comparar los resultados con los obtenidos en el mismo.

1° - Se dibuja la figura deseada con línea simple (comando *line*) y arcos (comando *arc*). Se dibuja en este ejemplo 1 unidad de dibujo por cada centímetro.



2° - Una vez dibujada la figura, se debe crear la “región” que conformará la superficie. Para ello se escribe en la línea de comandos *reg* y luego se presiona *enter*. A continuación se selecciona la figura completa (cada uno de los elementos que la componen) y se da *enter* de nuevo.

3° - Con la región ya creada, se pueden obtener las propiedades de su superficie. Se escribe en la línea de comandos *massprop* y luego *enter*. Se selecciona la región y se da *enter* de nuevo.

Se despliega una ventana que informa las propiedades de masa (de área) de la región en análisis. La misma es similar a la siguiente:

```
Command: massprop
Select objects: 1 found
Select objects:
----- REGIONS -----
Area:                11.1421
Perimeter:           18.4775
Bounding box:        X: 1446.8483 -- 1451.8483
                    Y: 871.5974 -- 876.5974
Centroid:            X: 1448.6319
                    Y: 873.1647
Moments of inertia:  X: 8494973.8014
                    Y: 23382195.0223
Product of inertia:  XY: 14093628.7939
Radii of gyration:   X: 873.1656
                    Y: 1448.6325
Principal moments and X-Y directions about centroid:
                    I: 10.1205 along [0.7908 -0.6120]
                    J: 25.9586 along [0.6120 0.7908]
Write analysis to a file? [Yes/No] <N>:
```

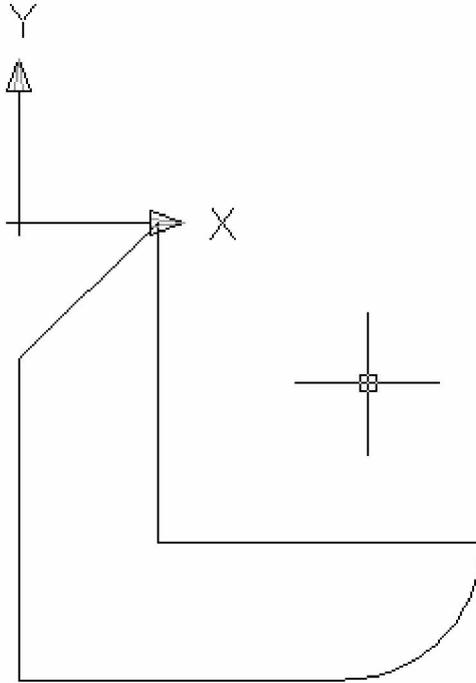
Los valores arrojados en la ventana son los siguientes:

- Area: área de la sección [**u**<sup>2</sup>]
- Perimeter: perímetro de la sección [**u**]
- Bounding box: las coordenadas de la “caja” (rectángulo) en la cual está inscrita la sección, referidas a la terna de trabajo [**u**]
- Centroid: las coordenadas del baricentro (centro de área) de la sección, referidas a la terna de trabajo [**u**]
- Moments of inertia: momentos de inercia referidos a los ejes X e Y de la terna de trabajo [**u**<sup>4</sup>]
- Product of inertia: momento centrífugo referido a los ejes X e Y de la terna de trabajo [**u**<sup>4</sup>]
- Radii of gyration: radios de giro referidos a los ejes X e Y de la terna de trabajo [**u**]
- Principal moments and X-Y directions about centroid: momentos de inercia principales baricéntricos (máximo y mínimo) [**u**<sup>4</sup>] y los cosenos directores de las direcciones de los ejes principales de la sección

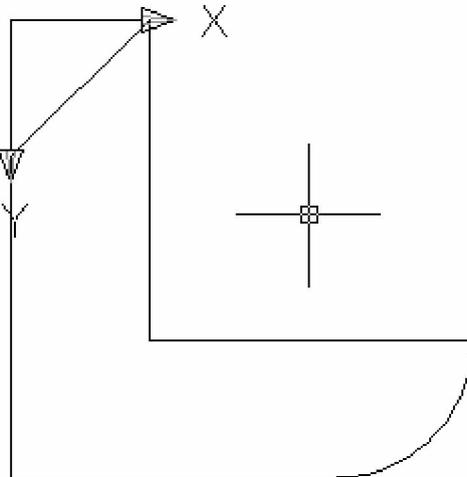
Cabe aclarar que los valores están expresados en “unidades” con el grado que corresponda en cada caso. Como se dibujó la figura siguiendo la relación 1 cm = 1 unidad (**u**), entonces los valores arrojados serán equivalentes a [cm<sup>2</sup>], [cm], [cm<sup>4</sup>], etc.

Como se sabe, dichas propiedades están referidas a una terna de trabajo. En este caso, la terna es la que tiene por defecto el AutoCAD. Seguramente la posición de la terna no sea de utilidad (porque usualmente se comienza a dibujar sin tenerla en cuenta), con lo cual se la debe ubicar en el punto deseado (origen de coordenadas) y con la orientación de los ejes deseada para poder comparar los resultados con los obtenidos numéricamente.

Para ello se utiliza en primer lugar la función que se encuentra en el menú **Tools** **New UCS** **Origin**. Con esto, se elige con el mouse el nuevo origen de coordenadas de la terna (denominada UCS en el AutoCAD).



En segundo lugar, se gira la terna respecto del eje X en  $180^\circ$ . Para ello se hace **Tools** **New UCS** **X**. Se pide el ingreso del ángulo de giro de la terna. Se ingresa *180* y se da *enter*.



Ahora sí están dadas las condiciones para comparar resultados. Se escribe nuevamente en la línea de comandos *massprop* y luego *enter*. Se selecciona la región y se da *enter* de nuevo.

```

Command: massprop
Select objects: 1 found
Select objects:
-----          REGIONS          -----
Area:                11.1421
Perimeter:           18.4775
Bounding box:        X: 0.0000 -- 5.0000
                    Y: 0.0000 -- 5.0000
Centroid:            X: 1.7835
                    Y: 3.4327
Moments of inertia: X: 147.3447
                    Y: 55.4697
Product of inertia: XY: 75.8819
Radii of gyration:  X: 3.6365
                    Y: 2.2312
Principal moments and X-Y directions about centroid:
                    I: 10.1205 along [0.7908 0.6120]
                    J: 25.9586 along [-0.6120 0.7908]

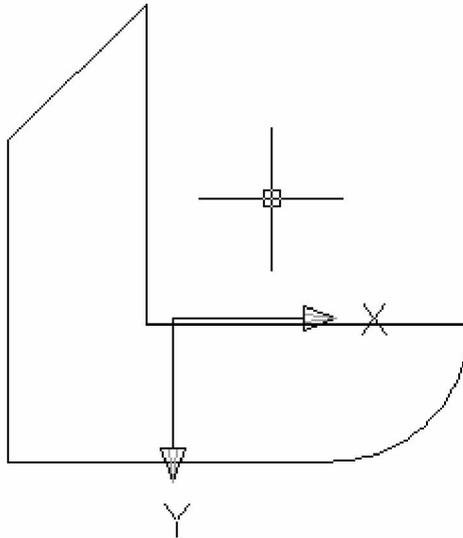
Write analysis to a file? [Yes/No] <N>: |

```

Valores respecto de ejes X e Y:

	AutoCAD	Apunte
Área [cm <sup>2</sup> ]	11.1421	11.14
X <sub>G</sub> [cm]	1.7835	1.79
Y <sub>G</sub> [cm]	3.4327	3.43
I <sub>min</sub> [cm <sup>4</sup> ]	10.1205	10.07
I <sub>max</sub> [cm <sup>4</sup> ]	25.9586	25.92

Ahora, para hallar las propiedades de la figura respecto de un par de ejes X<sub>G</sub> e Y<sub>G</sub> (baricéntricos), se debe trasladar la terna de trabajo al baricentro. Para ello se hace **Tools New UCS Origin** y en lugar de elegir el nuevo origen con el mouse, se ingresan las coordenadas del mismo: se teclea *1.7835,1.79* y se da *enter* (la coma “,” separa las coordenadas X e Y).



Se ingresa nuevamente en la línea de comandos *massprop* y luego *enter*. Se selecciona la región y se da *enter* de nuevo.

```

Edit
Command: massprop
Select objects: 1 found
Select objects:
----- REGIONS -----
Area:                11.1421
Perimeter:           18.4775
Bounding box:        X: -1.7835 -- 3.2165
                    Y: -3.4327 -- 1.5673
Centroid:            X: 0.0000
                    Y: 0.0000
Moments of inertia: X: 16.0529
                    Y: 20.0262
Product of inertia: XY: 7.6658
Radii of gyration:  X: 1.2003
                    Y: 1.3406
Principal moments and X-Y directions about centroid:
                    I: 10.1205 along [0.7908 0.6120]
                    J: 25.9586 along [-0.6120 0.7908]
Write analysis to a file? [Yes/No] <N>: |
  
```

Se puede notar que ahora, dada la nueva ubicación de la terna, la posición del baricentro es (0,0). Lo cual resulta lógico y correcto.

Valores respecto de ejes  $X_G$  e  $Y_G$ :

	AutoCAD	Apunte
$I_{x_G} [\text{cm}^4]$	16.0529	15.96
$I_{y_G} [\text{cm}^4]$	20.0262	20.03
$I_{xy_G} [\text{cm}^4]$	7.6658	7.65
$I_{\min} [\text{cm}^4]$	10.1205	10.07
$I_{\max} [\text{cm}^4]$	25.9586	25.92

Se puede ver que los valores de  $I_{\min}$  e  $I_{\max}$  se mantuvieron iguales. Esto es debido a que en ambos casos el cuadro de diálogo informa **momentos de inercia principales baricéntricos**.

Lo que se hace ahora es obtener, a partir de los cosenos directores, las direcciones de los ejes principales de inercia baricéntricos ( $\alpha$  y  $\beta$ ).

Se puede ver que el eje de menor inercia ( $I_{\min}$ ) pasa por el 1er y 3er cuadrantes, ya que tiene los dos cosenos directores mayores a 0. Entonces:

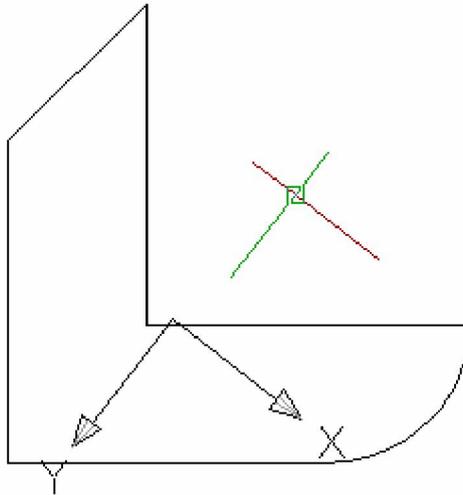
- $\arccos(0.7908) = 37.7^\circ$  ángulo medido en sentido horario desde semieje X positivo  **$37.7^\circ$**  es el valor de  $\alpha$  para  $I_{\min}$

De la misma manera se puede ver que el eje de mayor inercia ( $I_{\max}$ ) pasa por el 2do y 4to cuadrantes, ya que tiene el coseno director respecto de X negativo y respecto de Y negativo.

- $\arccos(0.7908) = 37.74^\circ$  ángulo medido en sentido horario desde semieje Y positivo  $37.7^\circ + 90^\circ = 127.7^\circ$   **$127.7^\circ$**  es el valor de  $\alpha$  para  $I_{\max}$

Se concluye entonces, que los valores coinciden con los obtenidos en el apunte.

Por último, se giran los ejes  $37.7^\circ$  en sentido horario. Entonces se hace **Tools New UCS Z**. El eje Z se encuentra entrante al plano de trabajo, ya que el AutoCAD trabaja por defecto con **terna derecha**. Por lo tanto, al ingresar el ángulo de giro se ingresa *37.7* y se da *enter*.



Una vez más se ingresa en la línea de comandos *massprop* y luego *enter*. Se selecciona la región y se da *enter*:

```

Command: massprop

Select objects: 1 found

Select objects:
-----          REGIONS          -----

Area:                11.1421
Perimeter:           18.4775
Bounding box:        X: -3.5103  --  3.5034
                    Y: -4.6830  --  2.3307
Centroid:            X: 0.0000
                    Y: 0.0000
Moments of inertia:  X: 10.1205
                    Y: 25.9586
Product of inertia:  XY: 0.0098
Radii of gyration:   X: 0.9531
                    Y: 1.5264
Principal moments and X-Y directions about centroid:
                    I: 10.1205 along [1.0000 0.0006]
                    J: 25.9586 along [-0.0006 1.0000]

Write analysis to a file? [Yes/No] <N>:

```

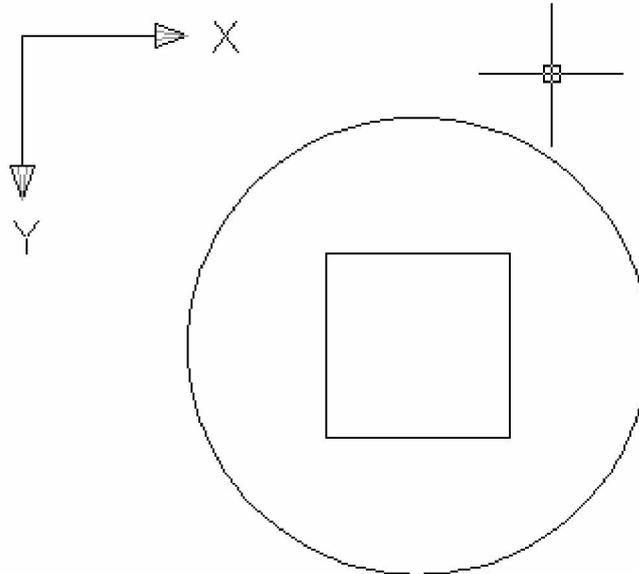
Observando el cuadro se puede concluir que efectivamente, ahora los ejes X e Y **coinciden** con los ejes principales de inercia de la sección en estudio. Esto se puede confirmar viendo que los momentos principales  $I_{\min}$  e  $I_{\max}$  (momentos de inercia mínimo y máximo de la sección) coinciden en valor con los momentos de inercia  $I_x$  y  $I_y$  respectivamente.

Se puede ver que los cosenos directores indican que las direcciones de los ejes principales son efectivamente las direcciones de los ejes X e Y. Además, el momento centrífugo  $I_{xy}$  es nulo, lo que indica también que los ejes en cuestión son conjugados de inercia, y además por ser perpendiculares son **ejes principales de inercia**.

## ANEXO

En esta sección se darán los pasos a seguir cuando se tiene una sección algo más compleja como por ejemplo, una sección hueca.

Como ejemplo se dibuja una sección que consiste en un círculo con un hueco cuadrado concéntrico. Para ello se dibujan por separado un círculo de 5cm de diámetro y un cuadrado de 2cm de lado concéntricos.

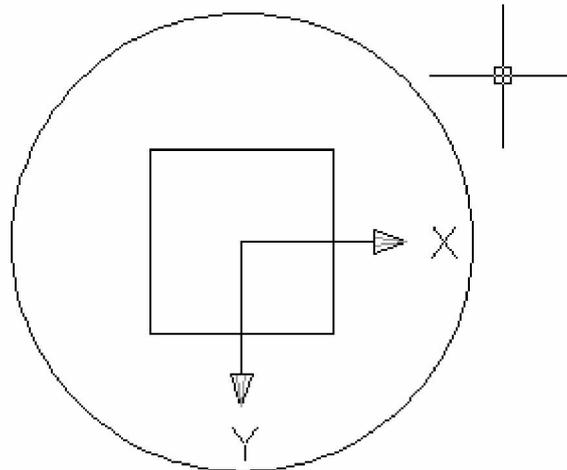


Una vez dibujadas las dos figuras se crean las 2 regiones por separado. De esta manera, es como si estuviera el cuadrado “apoyado” sobre el círculo, pero ambas figuras están en realidad en el mismo plano. Luego se hace **Modify Solid Editing Subtract** y se nos solicita seleccionar las figuras *en el orden en que se quieren “restar”*. Entonces se elige primero el círculo y se da *enter*. Inmediatamente después se selecciona el cuadrado y se da *enter* nuevamente. Ahora sí, la figura está compuesta. O sea, un círculo al que le falta un cuadrado en su centro. Se nota al dar un sólo clic en su perímetro que se selecciona la figura total, mientras que antes eran dos figuras independientes.

A partir de allí, se opera de la misma manera que con cualquier sección. Se ingresa en la línea de comandos *massprop* y luego *enter*. Se selecciona la región y se da *enter*.

```
Command: massprop
Select objects: 1 found
Select objects:
----- REGIONS -----
Area:                15.6350
Perimeter:           23.7080
Bounding box:        X: 1.7773 -- 6.7773
                    Y: 0.8838 -- 5.8838
Centroid:            X: 4.2773
                    Y: 3.3838
Moments of inertia: X: 208.3629
                    Y: 315.3914
Product of inertia: XY: 226.2893
Radii of gyration:  X: 3.6506
                    Y: 4.4913
Principal moments and X-Y directions about centroid:
                    I: 29.3463 along [1.0000 0.0000]
                    J: 29.3463 along [0.0000 1.0000]
Write analysis to a file? [Yes/No] <N>: |
```

Si ahora se lleva el origen de coordenadas al baricentro y se calculan nuevamente las propiedades de masa:



```

Specify new origin point <0,0,0>:
Command: massprop

Select objects: 1 found

Select objects:
-----          REGIONS          -----
Area:                15.6350
Perimeter:           23.7080
Bounding box:        X: -2.5000  --  2.5000
                    Y: -2.5000  --  2.5000
Centroid:            X: 0.0000
                    Y: 0.0000
Moments of inertia:  X: 29.3463
                    Y: 29.3463
Product of inertia:  XY: 0.0000
Radii of gyration:   X: 1.3700
                    Y: 1.3700
Principal moments and X-Y directions about centroid:
                    I: 29.3463 along [0.7071 0.7071]
                    J: 29.3463 along [-0.7071 0.7071]

Write analysis to a file? [Yes/No] <N>: |

```

Se pueden obtener algunas conclusiones:

- El valor de perímetro arrojado es la suma de los perímetros interior y exterior.
- Los momentos de inercia respecto de los ejes X e Y baricéntricos son iguales. Esto era previsible ya que la figura presenta doble simetría.
- Fácilmente podemos verificar dichos valores:

$$I_{xG} = I_{yG} = \frac{\pi \cdot (5 \text{ cm})^4}{64} - \frac{2 \text{ cm} \cdot (2 \text{ cm})^3}{12} = 29.35 \text{ cm}^4$$

- El momento centrífugo es nulo; se debe a que la figura presenta al menos un eje de simetría (en este caso presenta dos). Notar que antes de la traslación del origen de coordenadas el momento centrífugo era distinto de cero y de valor **positivo**. En ese caso la totalidad del área se encontraba en el primer cuadrante (coordenadas  $x$  e  $y$  positivas para todos los diferenciales de área).
- Los momentos de inercia principales resultan ser de igual magnitud que los obtenidos para los ejes XG e YG. Ello se debe a que tanto el círculo como el cuadrado tienen infinitos pares de ejes principales de inercia, y por lo tanto la figura compuesta también.