

las componentes del sistema. Es decir, un punto material tal que cumpla las condiciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} M &= \sum_1^n m_i \\ M \cdot x_G &= \sum_1^n m_i \cdot x_i \\ M \cdot y_G &= \sum_1^n m_i \cdot y_i \\ M \cdot z_G &= \sum_1^n m_i \cdot z_i \end{aligned} \right\} \quad [4.3]$$

donde x_G, y_G, z_G son las coordenadas respecto de los tres planos xy, xz e yz del centro de masas G , y M la masa total del sistema.

En consecuencia, la posición del centro de masas de un conjunto discreto queda definido por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} x_G &= \frac{\sum_1^n m_i \cdot x_i}{\sum_1^n m_i} \\ y_G &= \frac{\sum_1^n m_i \cdot y_i}{\sum_1^n m_i} \\ z_G &= \frac{\sum_1^n m_i \cdot z_i}{\sum_1^n m_i} \end{aligned} \right\} \quad [4.4]$$

Si todas las masas son coplanares, estando ubicados los puntos materiales sobre el plano xy por ejemplo, en las expresiones [4.3], por ser nulas todas las coordenadas z_i , se anulan los términos que las contienen, resultando como expresiones que definen en este caso el centro de masas, las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} M &= \sum_1^n m_i \\ M \cdot x_G &= \sum_1^n m_i \cdot x_i \\ M \cdot y_G &= \sum_1^n m_i \cdot y_i \end{aligned} \right\} \quad [4.5]$$

4. Geometría de las masas.

4.1. Baricentros.

4.1.1. Centros de masas.

Consideremos, figura 4.1, un conjunto de puntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i$, cuyas coordenadas genéricas con respecto a una terna $x \cdot y \cdot z$ son x_i, y_i, z_i . Supongamos que cada punto posea una masa m_i . Al conjunto de puntos materiales A_i de masa m_i , lo denominaremos en lo sucesivo *conjunto discreto de masas*.

Definimos como *momento estático o de primer orden* de la masa m_i respecto del plano xy , al producto de la masa m_i por su distancia z_i al mismo, es decir

$$S_{xy}^1 = m_i \cdot z_i \quad [4.1]$$

Análogamente, los momentos estáticos de la masa m_i respecto de los planos yz y zx tendrán las expresiones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} S_{yz}^1 &= m_i \cdot y_i \\ S_{zx}^1 &= m_i \cdot x_i \end{aligned} \right\} \quad [4.2]$$

Se define como *centro de masa* del conjunto discreto a un punto material G , cuya masa es igual a la suma de las masas que componen el sistema, y cuyo momento estático respecto de cada uno de los tres planos xy, xz y yz es igual a la suma de los momentos estáticos respecto de dichos planos, de las ma-

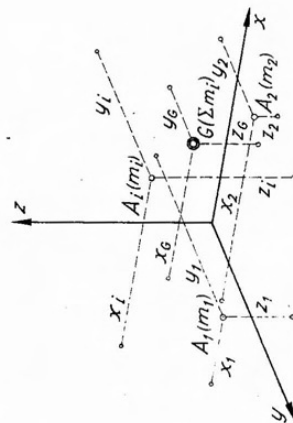


Fig. 4.1.

Los productos $m_i \cdot z_i$ y $m_i \cdot y_i$ se definen como *momentos estáticos* o de primer orden de la masa m_i respecto de los ejes y y z respectivamente. Las coordenadas del centro de masas, en este caso, serán:

$$\left. \begin{aligned} z_G &= \frac{\sum_1^n m_i \cdot z_i}{\sum_1^n m_i} \\ y_G &= \frac{\sum_1^n m_i \cdot y_i}{\sum_1^n m_i} \end{aligned} \right\} [4.6]$$

En lo anterior hemos supuesto que las distancias, tanto a los planos como a los ejes coordenados, se medían normalmente a los mismos.

Si, en el caso de tomar momentos estáticos de un sistema de masas respecto de un plano, el xy , por ejemplo, conviniéramos en medir las distancias en una dirección que formara un ángulo φ con respecto al eje z , la distancia de un punto genérico tendría por expresión

$$z'_i = \frac{z_i}{\cos \varphi} \quad [4.7]$$

Si en la tercera de las expresiones [4.4] dividiémos ambos miembros por $\cos \varphi$, resulta

$$\frac{z_G}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\sum_1^n m_i \cdot z_i}{\sum_1^n m_i} = \frac{\sum_1^n m_i \frac{z_i}{\cos \varphi}}{\sum_1^n m_i} \quad [4.8]$$

Pero, de acuerdo con la [4.7], y llamando

$$z'_G = \frac{z_G}{\cos \varphi},$$

resulta finalmente

$$z'_G = \frac{\sum_1^n m_i \cdot z'_i}{\sum_1^n m_i} \quad [4.9]$$

Si, con respecto a los planos xz é yz , las distancias se miden en direcciones que formen ángulos cualesquiera con los ejes normales a dichos planos se llega, para las dos restantes coordenadas del centro de masas, a expresiones correspondientes con la [9.4], teniéndose en definitiva

$$\left. \begin{aligned} x'_G &= \frac{\sum_1^n m_i \cdot x'_i}{\sum_1^n m_i} \\ y'_G &= \frac{\sum_1^n m_i \cdot y'_i}{\sum_1^n m_i} \\ z'_G &= \frac{\sum_1^n m_i \cdot z'_i}{\sum_1^n m_i} \end{aligned} \right\} [4.10]$$

Expresiones que definen el centro de masas, en una forma más general que las [4.4], por cuanto contemplan la posibilidad de que las distancias a los planos coordenados se midan en direcciones cualesquiera.

Para conjuntos discretos de masa, ubicados en un mismo plano, si las distancias a los ejes coordenados se miden en direcciones arbitrarias, las expresiones a que se llega son similares.

Consideremos las ecuaciones [4.5] y admitamos, por un momento, conocida la posición del centro de masas. Si los ejes con respecto a los cuales tomamos momentos estáticos pasan por dicho centro de masas, las distancia z_G é y_G serán iguales a cero, con lo que se anularán los miembros izquierdos de las dos últimas ecuaciones [4.5], resultando con ello:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n m_i \cdot z_i &= 0 \\ \sum_1^n m_i \cdot y_i &= 0 \end{aligned} \right\} [4.11]$$

es decir, la suma de los momentos estáticos de un conjunto plano discreto de masas respecto de un eje cualquiera que pase por su centro de masas, es nulo.

Análogamente, si en las [4.3], los planos respecto de las cuales se toman momentos estáticos pasan por el centro de masas, resultarán iguales a cero las tres coordenadas de este último, es decir x_0, y_0, z_0 . En consecuencia, tendremos que

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n m_i \cdot x_i &= 0 \\ \sum_1^n m_i \cdot y_i &= 0 \\ \sum_1^n m_i \cdot z_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [4.12]$$

es decir, que la suma de los momentos estáticos de un conjunto discreto de masas espaciales, respecto de un plano cualquiera que pase por el correspondiente centro de masas, es nula.

4.1.2. Determinación gráfica del momento estático con respecto a un eje de un conjunto discreto de masas plano.

En los desarrollos posteriores nos ocuparemos fundamentalmente de conjuntos de masas ubicados en un mismo plano. Por ello interesa especialmente la determinación de los momentos estáticos de masas y de magnitudes asimilables a ellas, no sólo por métodos analíticos sino también utilizando procedimientos gráficos.

La determinación gráfica del momento estático de una masa o de un conjunto discreto de masas respecto de un eje cualquiera de su plano, se efectúa utilizando una de las aplicaciones del polígono funicular. En el capítulo 2, al tratar en detalle el polígono funicular, vimos que, para determinar el momento de una fuerza respecto de un punto, bastaba trazar un polígono funicular de la misma, e intersectar con los lados extremos de aquél una paralela a la fuerza trazada por el centro de momentos. El momento estático resultaba de leer el segmento así determinado en la escala correspondiente. Dicho procedimiento se extendía al caso de un sistema de varias fuerzas, para el que la paralela trazada por el centro de momentos lo era a la resultante del sistema. Y particularmente, en el caso de un sistema de fuerzas paralelas, se trazaba una paralela a la dirección común de las fuerzas.

Sea el conjunto de masas discretas m_i aplicadas en los puntos A_i de figura 4.2 y sea z el eje con respecto al cual se desea calcular el momento estático del conjunto de masas.

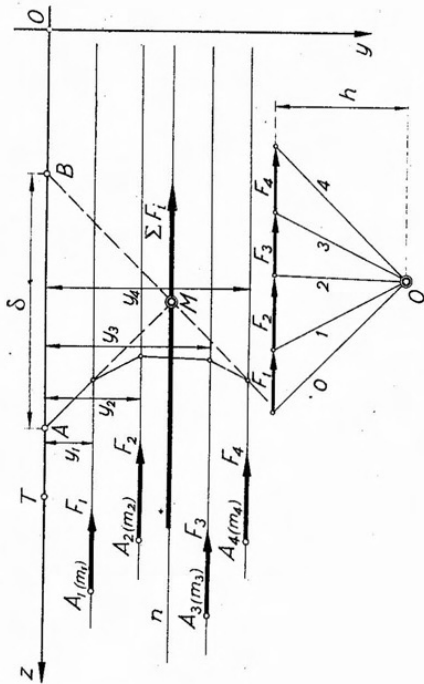


Fig. 4.2.

Supongamos aplicadas en los puntos A_i fuerzas F_i paralelas al eje z , de un mismo sentido, que puede ser cualquiera, por cuanto las masas tienen el mismo signo, y cuyas intensidades sean proporcionales a las masas m_i .

Sea T un punto cualquiera perteneciente al eje z . Si nos proponemos hallar el momento estático del sistema de fuerzas F_i respecto de T , basta construir con polo O un polígono funicular del sistema dado, y trazar luego por T una paralela a la dirección común de las fuerzas. El segmento intersecado sobre dicha recta por los lados extremos del polígono funicular, leído en la correspondiente escala de momentos, nos da el momento buscado.

Ahora bien, la expresión del momento estático del sistema respecto de T , tiene por expresión

$$M_T = \sum_1^n F_i \cdot y_i \quad [4.13]$$

donde y_i corresponde a la distancia genérica del punto T a la recta de acción de cada fuerza. Pero, por otra parte, dicha ordenada también representa la distancia genérica de cada uno de los puntos A_i en que están aplicadas las masas m_i al eje z , y, además, las intensidades F_i corresponden a las magnitudes de las masas m_i . En consecuencia, podemos escribir

$$\sum_1^n F_i \cdot y_i = \sum_1^n m_i \cdot y_i \quad [4.14]$$

Es decir que el segmento δ , leído en la escala correspondiente, nos da el valor numérico del momento estático del conjunto de masa m_i respecto del eje z . Al determinar la escala, que como sabemos es igual al producto de la escala de fuerzas por la escala de longitudes por la distancia polar h , debe tenerse presente que, en este caso, la escala de fuerzas no es tal sino una escala de masas, en la que hemos representado en el polígono de fuerzas, mediante los vectores F_i , las masas m_i .

La construcción de la figura 4.2 permite también interpretar las ecuaciones [4.4]. Si prolongamos el primero y último lados del polígono funicular, su intersección define el punto M . Si por dicho punto trazamos un eje paralelo a la dirección de las fuerzas ideales F_i , el segmento que sobre el mismo intersecan los lados extremos del funicular, es nulo y, en consecuencia, también será nulo el momento estático del conjunto de masas respecto de dicho eje.

Ahora bien, las ecuaciones [4.11] nos dicen que, con respecto a un eje cualquiera que pase por el centro de masas de un conjunto discreto, el momento estático de este último es nulo. Además, el eje n -n puede interpretarse como recta de acción de la fuerza resultante de las fuerzas ideales F_i , representativas de las masas m_i , resultante cuya intensidad será evidentemente igual a la masa total del sistema; es decir,

$$F_R = \sum_1^n F_i = \sum_1^n m_i. \quad [4.15]$$

De todo ello se deduce que el eje n -n pasa por el centro de masas del sistema.

Si consideramos que en la construcción de la figura 4.2, que nos ha llevado a determinar un eje que pasa por el centro del conjunto de masas, las fuerzas ideales que representan las masas m_i se llevaron en una dirección arbitraria, deducimos que, llevando dichas fuerzas en otra dirección, obtendremos, mediante el trazado del correspondiente polígono funicular, otro eje que también pasará por el centro de masas. Surge de inmediato que este último, por pertenecer a ambos ejes, debe encontrarse necesariamente en la intersección de los mismos.

Es decir, que la determinación del centro de masas de un conjunto discreto plano, puede efectuarse como si se tratara de hallar el centro de un sistema de fuerzas paralelas, de intensidad igual a la intensidad de las masas componentes, y aplicadas precisamente en los puntos materiales en que están últimas actúan.

Conviene, por razones de simplicidad, suponer el segundo sistema de fuerzas ideales con dirección normal al primero. En tal caso no es necesario el trazado de un segundo polígono de fuerzas, por cuanto los lados de ambos polígonos funiculares resultan perpendiculares.

4.1.3. Conjuntos continuos de masas. Baricentro.

El concepto de centro de masa que hemos definidos en 4.1.1. es independiente de la naturaleza de las masas que integran el sistema. Las masas son entes representables por magnitudes escalares y, en consecuencia, el concepto de centro de masa se generaliza al extenderlo a otras magnitudes, también representables por escalares, aunque su naturaleza difiera. Tales, por ejemplo, las longitudes, las superficies y los volúmenes.

Si consideramos los cuerpos materiales como conjuntos continuos de masas elementales distribuidas en el volumen de los mismos, el concepto de centro de masas adquiere capital importancia. En este caso las masas m_i , que suponíamos aplicadas en puntos materiales A_i , se transforman en elementos diferenciales de masa, dm , distribuidas en el volumen del cuerpo considerado, transformándose las ecuaciones generales [4.4] que definían las coordenadas del centro de masas, en las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} x_G &= \frac{\int x \, dm}{\int dm} \\ y_G &= \frac{\int y \, dm}{\int dm} \\ z_G &= \frac{\int z \, dm}{\int dm} \end{aligned} \right\} \quad [4.16]$$

que corresponden a las coordenadas del centro de masa de un conjunto continuo.

Ahora bien, si un cuerpo material tiene un volumen V y su densidad es γ , variable de punto a punto, la masa aplicada en cada uno de ellos será:

$$dm = \gamma \, dV. \quad [4.17]$$

La masa total del cuerpo tendrá por expresión:

$$M = \int_V dm = \int_V \gamma dV \quad [4.18]$$

transformándose las expresiones [4.16] en

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\int_V x \gamma dV}{\int_V \gamma dV} \\ y_G &= \frac{\int_V y \gamma dV}{\int_V \gamma dV} \\ z_G &= \frac{\int_V z \gamma dV}{\int_V \gamma dV} \end{aligned} \quad [4.19]$$

Particularmente, cuando la densidad sea constante a través de todo el volumen, γ desaparece de las expresiones [4.19], que en tal caso definen el punto G como centro de volumen, coincidente entonces con el centro de masa.

Considerando ahora los pesos de cada una de las masas elementales, tendremos un sistema de infinitas fuerzas paralelas de dirección vertical, de intensidades $dP = g dm$, siendo g la aceleración de la gravedad. La resultante de dicho sistema de fuerzas paralelas, que constituye el peso del cuerpo pasará por el centro de gravedad, coincidente con el centro de masas del sistema y que, a la vez, es el centro del sistema de fuerzas paralelas. Al centro de gravedad se lo designa también como *baricentro* del sistema de masas, denominación que se extiende a los centros de masas, de superficies y volúmenes, aunque impropriamente.

4.1.4. Baricentros de líneas y superficies.

Cuando una figura plana o una línea también plana, poseen un eje de simetría, su baricentro pertenece al mismo. En efecto, consideremos la superficie de figura 4.3, simétrica respecto del eje y . De acuerdo con lo visto en 4.1.2, el baricentro de la figura se hallará sobre la recta de acción de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas, de dirección cualquiera, cuyas intensidades correspondan a las masas componentes. En este caso, el sistema se compone de infinitas fuerzas de intensidad dF ($dF = \text{superficie elemental}$), que supondremos actuando en la dirección del eje y . A cada elemento de superficie dF ubicado al nivel y , y a una distancia z del eje de simetría, corresponderá otro elemento

dF , ubicado al mismo nivel que el anterior y a igual distancia z , pero sobre el segundo cuadrante. Las fuerzas representativas de ambas superficies elementales, tendrán igual intensidad, y por ser paralelas y del mismo sentido, su resultante tendrá por recta de acción el eje de simetría. Extendiendo el razonamiento al conjunto de sistemas constituido cada uno de ellos por dos fuerzas elementales, llegamos a la conclusión de que la

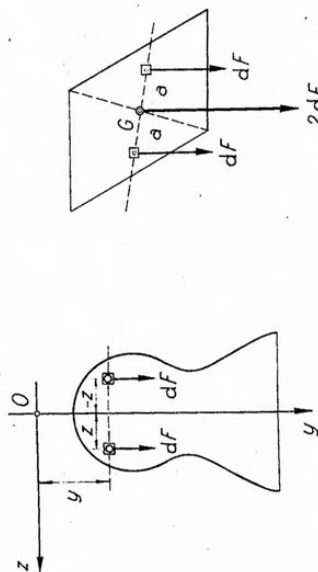


Fig. 4.3.

Fig. 4.4.

resultante total, que representa la superficie de la figura, tiene por recta de acción el eje de simetría. Y, como dicha resultante debe pasar necesariamente por el baricentro de la figura, éste se debe encontrar sobre el eje de simetría.

Si se tratara de una figura que admite un centro de simetría, el baricentro de la misma coincide con este último. En efecto, por el centro de simetría pasan infinitos ejes de simetría y , como, por lo visto anteriormente, el baricentro siempre se encuentra sobre un eje de simetría, es evidente que si la figura admite infinitos, el baricentro debe coincidir con el punto común a todos ellos, es decir, con el centro de simetría.

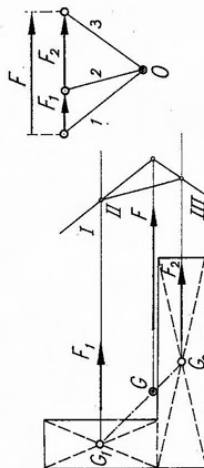
Existen figuras que, si bien no poseen centro de simetría, admiten un centro de figura. En tal caso, el baricentro coincide con este último. En efecto, consideremos la superficie de figura 4.4 y tracemos dos diámetros cualesquiera de la misma. Como se sabe, el centro de figura coincide con el punto de intersección de los diámetros. Ahora bien, sobre uno cualquiera de los diámetros supongamos dos elementos de superficie dF , ubicados a uno y otro lado del centro de figura y a igual distancia del mismo.

El centro de masa de estas dos masas parciales elementales, queda ubicado entre ambas y a igual distancia de cada una de ellas (concepto

de centro de fuerzas paralelas). Es decir, sobre el centro de figura. Para cualquier otro par de masas elementales, ubicadas sobre el mismo o distinto diámetro, el razonamiento es análogo, con lo que llegamos a que el centro de masa, es decir, el baricentro de la figura, coincide con el centro de la misma.

En el caso más general de una figura de contorno regular que no admita ni centro ni ejes de simetría, existen procedimientos gráficos derivados precisamente de las consideraciones analíticas que definen al baricentro, que permiten su determinación en forma relativamente simple. En otros casos es necesario dividir la figura en figuras parciales, cuyos baricentros son fáciles de determinar, para luego hallar el baricentro de la figura total como centro de fuerzas paralelas, de intensidad igual a las superficies parciales en que se ha dividido la figura, aplicadas en los baricentros de estas últimas. Cuando la figura se divide en sólo dos figuras parciales, tal el caso de la figura 4.5, el procedimiento se simplifica. En efecto, los baricentros de las superficies parciales se conocen, pues, por tratarse de figuras con dos ejes de simetría se encuentran en la intersección de los mismos. Trazando el funicular de las fuerzas ideales, representativas de las superficies parciales, que se suponen aplicadas en los respectivos baricentros, la intersección de sus lados extremos nos determina la recta de acción de la fuerza ideal resultante, F_R , recta que, como sabemos, contendrá el baricentro de la figura. Pero, por otra parte, como el baricentro coincide con el centro de dichas fuerzas paralelas, y éste se encuentra alineado con los correspondientes puntos de aplicación, la recta que une los baricentros parciales define, en su intersección con la recta de acción de F_R , el baricentro de la figura.

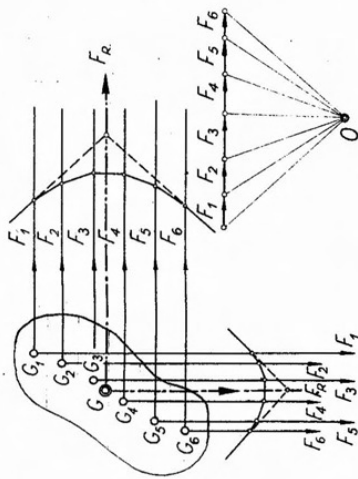
Fig. 4.5.



Cuando se trata de hallar el baricentro de una figura de contorno irregular, tal el caso de la figura 4.6, se procede a dividir la figura en superficies parciales mediante rectas paralelas a una dirección cualquiera, en forma tal que las figuras parciales resultantes sean asimilables a superficies cuyos baricentros sean de fácil determinación, así como también sus correspondientes áreas. Así, en el caso que nos ocupa, las figuras extremas superior e inferior, pueden, sin mayor error, asimilarse a superficies delimitadas por arcos de parábolas, y las restantes a trapecios.

Hallados los baricentros parciales $G_1, G_2, \dots, G_6$ y las áreas de las distintas superficies, suponemos aplicadas en aquéllas fuerzas $F_1, F_2, \dots, F_6$ proporcionales a las superficies parciales, y paralelas a una dirección cualquiera. Trazado con polo O un funicular de dichas fuerzas, sus lados extremos definirán un punto de la recta de acción de la resultante F_R que contendrá el baricentro G de la figura. Haciendo actuar ahora las fuerzas en otra dirección, que en este caso por comodidad se ha supuesto normal a la anterior, la nueva resultante también contendrá el baricentro G que, en consecuencia, se encontrará en la intersección de las rectas de acción de ambas resultantes.

Fig. 4.6.



En el caso de la figura 4.7, la superficie grisada puede considerarse como diferencia de dos superficies: un rectángulo mayor de perímetro $ABCD$, de área F_1 y baricentro G_1 , y otro menor, interior, de contorno $A'B'C'D'$, de área F_2 y baricentro G_2 . El área de este segundo rectángulo es un área sustractiva ya que, restándola de la del rectángulo mayor, obtenemos el área de la figura dada. Como abstracción, podemos imaginar el rectángulo interior como una figura de área negativa. Para hallar

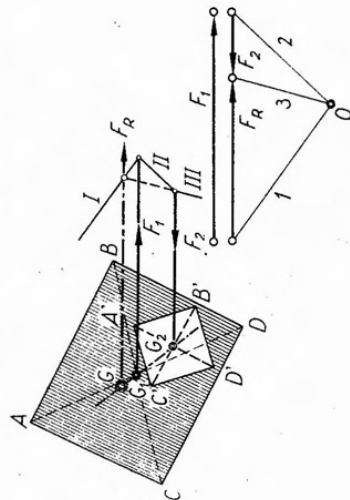


Fig. 4.7.

el baricentro total, bastará suponer aplicadas en los baricentros parciales, y actuando en una dirección cualquiera, fuerzas proporcionales a las respectivas áreas. En este caso, la fuerza ideal representativa del área del rectángulo interior, será de sentido contrario a la restante, por cuanto la resultante de ambas debe corresponder al área de la superficie dada. Una vez hallada, mediante el trazado del correspondiente polígono funicular, la recta de acción de la resultante F_R , el baricentro total queda determinado por la intersección de dicha recta con la definida por los baricentros parciales.

4.1.5. Determinación de baricentros de líneas.

Nos ocuparemos a continuación de la determinación gráfica del baricentro de algunas líneas, y de la justificación analítica de los procedimientos empleados.

a) Baricentro de una poligonal regular (figura 4.8).

Sea la poligonal regular de cuatro lados $A-B-C-D-E$, de la que se pide hallar el baricentro. Como la línea admite un eje de simetría, el baricentro debe pertenecer al mismo. Hagamos coincidir con dicho eje de simetría el semieje positivo z de un par de ejes coordenados, cuyo origen O coincide con el centro de la circunferencia de radio r , inscrita en la poligonal. Por el punto en que dicha circunferencia corta el eje z (punto N), tracemos una normal y llevemos sobre ésta, y a partir de N , un segmento igual al semidesarrollo de la poligonal, cuyo extremo determina el punto N'' . Unamos N'' con O y por el extremo E de la poligonal tracemos una paralela a z , la que, en su intersección con $N''O$, determina un punto E' . Proyectando ahora E' sobre el eje z , dicha proyección es el punto G , baricentro de la poligonal.

Para justificar la construcción indicada, consideremos un lado cualquiera de la poligonal, el BC por ejemplo. Su baricentro, por razones de simetría, será el punto M , punto medio de BC . Análogamente, los baricentros de los restantes lados de la poligonal se encontrarán en los puntos medios de los mismos. Como el baricentro G de la poligonal se encuentra sobre el eje z , para definirlo bastará conocer su abscisa z . Para hallarla, planteamos una ecuación de momentos del sistema de masas respecto del eje y , cuya expresión será:

$$M \cdot z_G = \sum_1^4 m_i \cdot z_i. \quad [4.20]$$

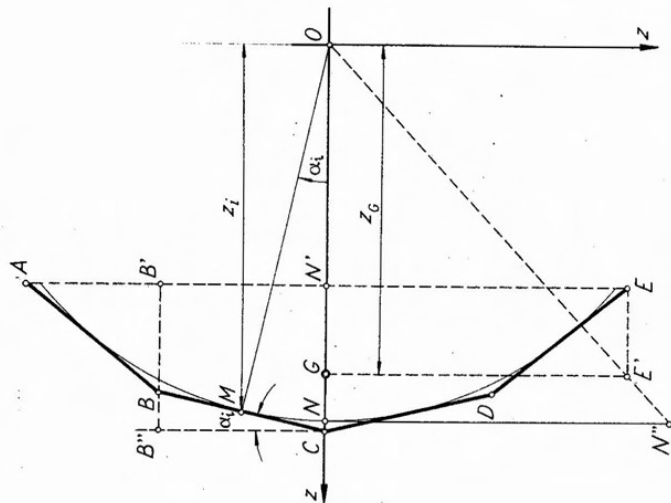


Fig. 4.8.

De la figura tenemos, para el lado BC :

$$m_i = BC \quad [4.21]$$

$$z_i = MO \cdot \cos \alpha_i = r \cdot \cos \alpha_i$$

y, en consecuencia,

$$m_i z_i = BC \cdot r \cdot \cos \alpha_i. \quad [4.22]$$

Pero $BC \cdot \cos \alpha_i = B''C = B'N'$; por razonamientos análogos para los restantes lados de la poligonal, y considerando que $r = NO$, llegamos a

$$\sum_1^4 m_i z_i = AE \cdot NO. \quad [4.23]$$

Además, la masa total M que aparece en [4.20] es, en este caso, igual a

la longitud del desarrollo de la polygonal, que llamaremos S . En consecuencia, reemplazando valores en la [4.20] se tiene:

$$S \cdot z_G = AE \cdot NO \quad [4.24]$$

de donde

$$z_G = \frac{AE \cdot NO}{S}. \quad [4.25]$$

Volviendo a la construcción de figura 4.8, en los triángulos semejantes NON'' y GOE' se tiene:

$$\frac{NN''}{GE'} = \frac{NO}{GO}. \quad [4.26]$$

Pero, $NN'' = \frac{1}{2}S$, por construcción, y $GE' = N'E = \frac{1}{2}AE$. Además $GO = z_G$. Luego, reemplazando en [4.26] y despejando z_G resulta:

$$z_G = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot NO}{\frac{1}{2} \cdot S} = \frac{AE \cdot NO}{S}, \quad [4.27]$$

expresión idéntica a la [4.25], que justifica la construcción empleada.

b) Baricentro de un arco de circunferencia (fig. 4.9).

Consideremos el arco de circunferencia AMB , de radio r y ángulo central $2\alpha_0$. Haciendo coincidir el semieje positivo z de un par de ejes coordenados de origen O con el eje de simetría del arco, el baricentro de éste se encontrará sobre dicho semieje. Trazando por M una normal a z y llevando sobre la misma el semidesarrollo del arco, obtenemos un punto M'' . Uniendo O con M'' y trazando por el extremo B del arco una paralela al eje z , su intersección con OM'' determina un punto B' , que proyectado sobre el eje z define el punto G , baricentro del arco.

Para definir analíticamente la posición del baricentro, nos basta sólo fijar su coordenada z_G , por cuanto sabemos que, por razones de simetría, el mismo debe encontrarse sobre el eje z . La expresión de la abscisa z_G es

$$z_G = \frac{\int z dS}{S}, \quad [4.28]$$

donde dS es un elemento de arco, z su abscisa y S la longitud total

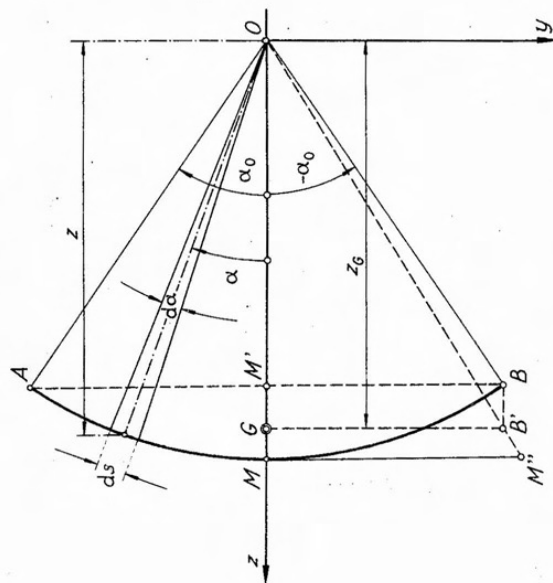


Fig. 4.9.

del arco de circunferencia. Ahora bien, llamando $d\alpha$ al ángulo al centro del elemento de arco, se tiene:

$$dS = r \cdot d\alpha \quad [4.29]$$

y

$$S = 2 \int_0^{\alpha_0} r \cdot d\alpha = 2r \cdot \alpha_0 \quad [4.30]$$

Reemplazando las [4.29] y [4.30] en la [4.28] resulta

$$z_G = \frac{2 \int_0^{\alpha_0} r \cdot z \cdot d\alpha}{2r \cdot \alpha_0}. \quad [4.31]$$

Pero, $z = r \cdot \cos \alpha$, luego

$$z_G = \frac{2r^2 \int_0^{\alpha_0} \cos \alpha \, d\alpha}{2r \cdot \alpha_0} \quad [4.32]$$

e integrando el numerador

$$z_G = \frac{2r^2 \cdot \text{sen } \alpha_0}{2r\alpha_0} = \frac{r \text{ sen } \alpha_0}{\alpha_0}. \quad [4.33]$$

En los triángulos semejantes $MM''O$ y $GB'O$ tenemos

$$\frac{MM''}{GB'} = \frac{MO}{GO}. \quad [4.34]$$

Pero $MM'' = \frac{1}{2}S$, por construcción. Además $MO = r$ y $GB' = M'B = r \cdot \text{sen } \alpha_0$. Luego, reemplazando en la [4.34] se llega a

$$\frac{\frac{1}{2}S}{r \cdot \text{sen } \alpha_0} = \frac{r}{z_G} \quad [4.35]$$

de donde

$$z_G = \frac{2r^2 \cdot \text{sen } \alpha_0}{S} = \frac{r \text{ sen } \alpha_0}{\alpha_0}. \quad [4.36]$$

Llegamos así a una expresión idéntica a la [4.33], que justifica la construcción gráfica utilizada.

c) *Baricentro del perímetro de un triángulo* (figura 4.10).

En el triángulo de la figura 4.10 el baricentro del lado AB coincide con su punto medio C' y, análogamente, los de los lados BC y CA con sus puntos medios A' y B' respectivamente. En consecuencia, en dichos puntos podemos suponer aplicadas masas iguales a las longitudes de los lados correspondientes. Ahora bien, el centro de las masas aplicadas en C' y B' se encuentra sobre la recta $C'B'$, y será un punto A'' tal que para el mismo se cumpla

$$AB \cdot C'A'' = AC \cdot B'A'' \quad [4.37]$$

o sea

$$\frac{AB}{AC} = \frac{B'A''}{C'A''}. \quad [4.38]$$

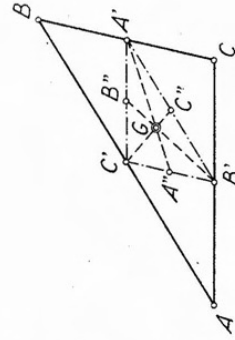


Fig. 4.10.

Pero, por semejanza de triángulos, se tiene

$$\left. \begin{aligned} A'C' &= \frac{1}{2}AC \\ A'B' &= \frac{1}{2}AB \end{aligned} \right\} \quad [4.39]$$

Reemplazando las [4.39] en la [4.38] resulta:

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{B'A''}{C'A''} \quad [4.40]$$

relación que se cumple sólo si el punto A'' se encuentra sobre la bisectriz del ángulo $C'A'B'$.

En A'' podemos suponer aplicada una masa igual a la suma de las masas aplicadas en B' y C' ; es decir, $AB + BC$. Luego, el baricentro buscado debe encontrarse sobre la recta $A'A''$, bisectriz del ángulo $C'A'B'$, por cuanto en el punto A' actúa la masa BC .

Mediante un razonamiento análogo llegamos a la conclusión de que el baricentro G debe encontrarse sobre la recta $B'B''$, bisectriz del ángulo $A'B'C'$, y también sobre la recta $C'C''$, bisectriz del ángulo $A'C'B'$. En consecuencia, el baricentro del perímetro de un triángulo, se encuentra en la intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado, punto que a la vez constituye el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo interior.

4.1.6. Determinación de baricentros de la superficie de las figuras más importantes.

La determinación del baricentro de la superficie del cuadrado, círculo y polígonos regulares es inmediata, por cuanto, por tratarse de figuras con simetría central, coincide con el centro de simetría. Igualmente simple es la determinación del baricentro del rectángulo y paralelepípedo, que admiten centro de figura, coincidiendo el baricentro con éste que, a la vez, queda determinado por la intersección de dos diámetros cualesquiera, por ejemplo las diagonales.

Nos ocuparemos a continuación de la determinación del baricentro del triángulo, trapecio, sector circular y superficie delimitada por un arco de parábola, por tratarse de las superficies que más aplicación tienen en el estudio de la Estabilidad de las Estructuras.

a) *Baricentro de la superficie del triángulo* (figuras 4.11 y 4.12).

Consideremos en el triángulo de la figura 4.11 una faja de espesor infinitésimo, paralela a una de las bases, la AB , por ejemplo. La super-

ficie de dicha faja podemos suponerla concentrada a lo largo de su línea media, es decir, admitir una línea pesada, cuyo baricentro G_i se encontrará ubicado en el punto medio de su longitud. Repitiendo el razonamiento para una sucesión de infinitas fajas paralelas a la anterior, el conjunto de sus baricentros constituirán el lugar geométrico de puntos equidistantes de los lados AC y AB del triángulo; es decir, la mediana CC' . Sobre dicha mediana podemos imaginar distribuida el área de la superficie del triángulo, cuyo baricentro será, en consecuencia, un punto de la misma. Repitiendo el razonamiento para una sucesión de fajas de

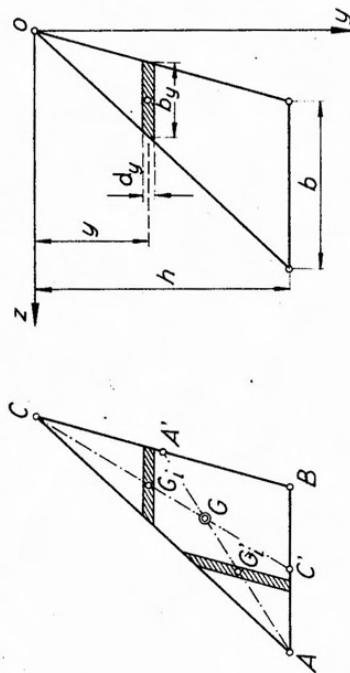


Fig. 4.11.

espesor infinitésimo paralelas a los restantes lados del triángulo, llegamos a la conclusión de que el baricentro del mismo debe encontrarse también sobre las dos restantes medianas. En consecuencia, el baricentro buscado se hallará en la intersección de las medianas.

Interesa conocer a qué distancia de la base se encuentra ubicado el baricentro del triángulo. Para determinarla consideremos, figura 4.12, un par de ejes coordenados cuyo origen haremos coincidir con uno de los vértices, disponiendo el eje z paralelo a la base opuesta.

Supongamos una faja de espesor dy y ancho b_y , ubicada a una distancia y del vértice. Dicha faja puede, sin mayor error, asimilarse a un rectángulo de superficie $dF = b_y dy$.

La distancia del baricentro de la figura al eje z resulta definida por la expresión

$$F \cdot y'_G = \int_0^h y \cdot dF = \int_0^h b_y y dy. \quad [4.41]$$

Pero, por semejanza de triángulos, se tiene que

$$b_y = b \frac{y}{h} \quad [4.42]$$

de donde

$$\int_0^h b_y y dy = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^2}{3} \quad [4.43]$$

y reemplazando en [4.41]

$$F y'_G = \frac{bh^2}{3}. \quad [4.44]$$

Pero, para el triángulo $F = \frac{1}{2}bh$, por lo que, reemplazando en la anterior y despejando y'_G resulta finalmente:

$$y'_G = \frac{2}{3}h \quad [4.45]$$

Es decir, que el baricentro de la superficie de un triángulo se encuentra ubicado a $2/3$ de la altura, medidos desde un vértice, o bien, a $1/3$ de dicha distancia, medida a partir de la base considerada.

b) Baricentro de la superficie del trapecio (figs. 4.13 y 4.14).

Para la determinación del baricentro de la superficie de un trapecio existen diversos procedimientos gráficos, aparte del planteo general analítico. Nos ocuparemos de sólo dos de ellos, ambos gráficos. Del primero, porque si bien no es común utilizarlo en el caso del trapecio, es de aplicación general para determinar el baricentro de la superficie de un cuadrilátero cualquiera, y del segundo, por cuanto es el que utilizaremos en lo sucesivo, en los casos en que se presente este problema.

Sea el trapecio de la figura 4.13, que supongamos dividido en dos triángulos mediante el trazado de la diagonal BC . El baricentro del triángulo ABC será el punto G_1 , ubicado en la intersección de dos de las medianas, conforme con lo visto anteriormente. Análogamente, en el triángulo BCD , su baricentro

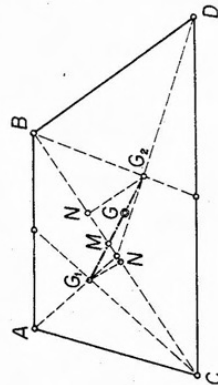


Fig. 4.13.

G_2 se encontrará en la intersección de las correspondientes medianas. El baricentro G del trapecio, considerado ahora como centro de las masas

aplicadas en los puntos G_1 y G_2 , se debe encontrar sobre la recta determinada por éstos, y para el mismo se debe cumplir la relación

$$F_1 \cdot G_1 G = F_2 \cdot G_2 G \quad [4.46]$$

donde F_1 y F_2 son, respectivamente, las masas aplicadas en G_1 y G_2 , y corresponden a las áreas de los triángulos ABC la primera, y BCD la segunda.

Por tratarse de dos triángulos de base común, sus áreas serán proporcionales a las respectivas alturas y, por ende, a los tercios de las mismas. Como los segmentos $G_1 N$ y $G_2 N$ también son proporcionales al tercio de las correspondientes alturas, resulta, en consecuencia, que F_1 y F_2 serán proporcionales a $G_1 N$ y $G_2 N$ respectivamente. Luego, reemplazando en [4.46] y trasponiendo términos, resulta

$$\frac{G_1 G}{G_2 G} = \frac{G_2 N}{G_1 N} = \frac{F_2}{F_1} \quad [4.47]$$

Pero, por otra parte, se tiene también que:

$$\frac{G_2 N}{G_2 M} = \frac{G_1 N}{G_1 M}, \quad [4.48]$$

por lo que resulta finalmente

$$\frac{G_1 G}{G_2 G} = \frac{G_2 M}{G_1 M} = \frac{F_2}{F_1} \quad [4.49]$$

En consecuencia, bastará llevar sobre $G_1 G_2$ y a partir de G_2 , un segmento $G_2 G = G_1 M$, cuyo extremo define el baricentro G buscado. Este procedimiento, como dijéramos, es aplicable también al caso general de un cuadrilátero cualquiera, ya que, en las consideraciones efectuadas, no se ha tenido para nada en cuenta el paralelismo de los lados AB y CD . En cambio, el método que explicaremos a continuación, sólo es lícito emplearlo para la determinación del baricentro de la superficie del trapecio.

Sea el trapecio de la figura 4.14. Su baricentro debe necesariamente encontrarse sobre la mediana MN del mismo, por constituir éste un elemento de simetría oblicua.

Dividiendo uno de los lados no paralelos, por ejemplo el BD , en tres partes iguales, quedan determinados los puntos S y T . Uniendo A con S y C con T , dichas rectas prolongadas determinan en su inter-

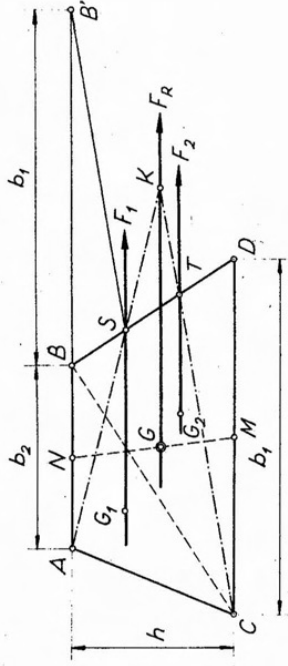


Fig. 4.14.

sección un punto K . Trazando ahora por este último punto una paralela a las bases del trapecio, dicha paralela, en su intersección con la mediana define el baricentro G buscado.

Para justificar la construcción anterior, dividamos el trapecio mediante la diagonal BC en los triángulos ABC y BCD . De utilizarse para la división la otra diagonal, la demostración sería semejante. Como se sabe, los baricentros respectivos G_1 y G_2 , se encuentran ubicados a distancias de las bases iguales a los tercios de la altura h del trapecio. Trazando por cada baricentro una recta paralela a las bases, dichas rectas intersectarán el lado BD precisamente en los puntos S y T . Supongamos actuando sobre dichas rectas dos fuerzas F_1 y F_2 , proporcionales a las áreas de los triángulos ABC y BCD respectivamente. La resultante de dichas fuerzas ideales, F_R , pasará por el baricentro buscado, el que quedará determinado por la intersección de la recta de acción de aquélla con la mediana NM .

Por tratarse de dos triángulos de igual altura, sus áreas resultan proporcionales a las correspondientes bases b_1 y b_2 . Llevando a partir de B un segmento $BB' = b_1$, podemos imaginar a AB y BB' como vectores representativos de las fuerzas F_1 y F_2 respectivamente. Si elegimos el punto S como polo del polígono de fuerzas ABB' , los rayos polares resultan ser AS , BS y $B'S$, y la poligonal $ASTC$ será el correspondiente polígono funicular. En efecto, el primer lado AS es paralelo al primer rayo polar por coincidir con éste. Lo mismo ocurre con el segundo lado ST con respecto al segundo rayo polar. En cuanto al tercer lado, consideremos los triángulos $BB'S$ y CDT . Ambos son semejantes por tener, por construcción, dos lados paralelos y de igual longitud (BB' y DC ; BS y TD). Y consecuentemente, los lados SB' y CT resultan ser también paralelos. Y como SB' es el tercer rayo polar, CT será el tercer lado del polígono funicular de las fuerzas

F_1 y F_2 , cuya resultante F_R pasará por el punto K , intersección de los lados extremos AS y CT , quedando con ello justificada la construcción utilizada para determinar el baricentro.

En ciertos problemas prácticos, interesa a algunas veces conocer la distancia del baricentro del trapecio a una de sus bases, la mayor por ejemplo. Para hallarla, aplicamos la expresión que establece que la suma de los momentos estáticos de un sistema de masas respecto de un eje, es igual al momento estático de la masa total respecto del mismo eje. Consideremos el trapecio de la figura 4.15, del que queremos conocer la distancia de su baricentro a la base mayor. Hagamos coincidir el eje z de un par de ejes coordenados con la base mayor, y dividamos el trapecio en dos triángulos parciales ABC y BCD mediante una diagonal. Los baricentros de los triángulos quedan ubicados así: el del ABC a $\frac{2}{3} \cdot h$ desde la base mayor, y el de BCD a $\frac{1}{3} \cdot h$ desde la misma base. En consecuencia, llamando F_1 y F_2 las áreas de las superficies de los dos triángulos y F_R la superficie del trapecio, resulta

$$F_R \cdot y_G = F_1 \cdot \frac{2}{3} h + F_2 \cdot \frac{1}{3} h. \quad [4.50]$$

Pero, $F_R = \frac{1}{2} \cdot (b_1 + b_2) \cdot h$; $F_1 = \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h$ y $F_2 = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h$. En consecuencia, reemplazando en [4.50], y despejando y_G :

$$y_G = \frac{(2b_2 + b_1)}{3(b_1 + b_2)} \cdot h \quad [4.51]$$

c) Baricentro del sector circular (fig. 4.16).

Sea el sector circular AMB de centro O y radio r , del que se pide hallar el baricentro. Para ello, consideremos en el mismo un sector elemental que, sin mayor error, podemos asimilar a un triángulo de base dS y altura r . El baricentro de dicho triángulo se halla ubicado a $\frac{2}{3} r$ del centro O del sector. Asimilando ahora la superficie del sector a una sucesión de infinitos sectores elementales, sus respectivos baricentros se encontrarán a $\frac{2}{3} r$ de O . El lugar geométrico de dichos baricentros será,

en consecuencia, un arco de circunferencia de radio $r' = \frac{2}{3} \cdot h$. Podemos admitir que el área de la superficie del sector se encuentre concentrada a lo largo de dicho arco, asimilándolo a una línea pesada, con lo que la determinación del baricentro del sector circular se reduce a la determinación del correspondiente al arco de circunferencia $A'M'B'$, problema resuelto en 4.1.5 b).

d) Baricentro de la superficie delimitada por un arco de parábola (figura 4.17).

Sea la parábola de la figura 4.17 que, referida a los ejes x, y , responde a la ecuación

$$y^2 = 2pz \quad [4.52]$$

Fig. 4.16.

Consideremos la superficie delimitada por dicha parábola y una recta normal al eje z ubicada a una distancia f del vértice de la misma. El baricentro de la superficie considerada se encontrará sobre el eje z , por cuanto constituye un eje de simetría y su distancia al vértice; es decir, su abscisa z_G , debe cumplir la relación:

$$z_G F = \int z dF. \quad [4.53]$$

Llamando b la base del segmento parabólico y f la flecha de la parábola, el área valdrá

$$F = \frac{2}{3} \cdot b \cdot f. \quad [4.54]$$

Consideremos ahora una superficie elemental, normal al eje z , de espesor dz y altura $2y$. El momento estático de dicha faja respecto del eje y será

$$z dF = 2yz dz. \quad [4.55]$$

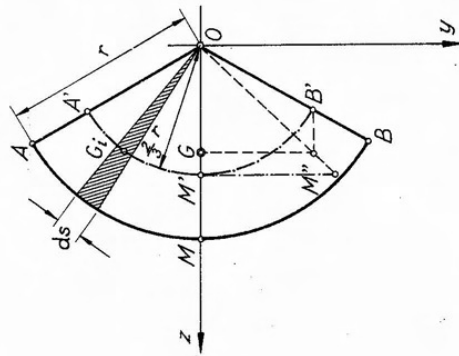


Fig. 4.15.

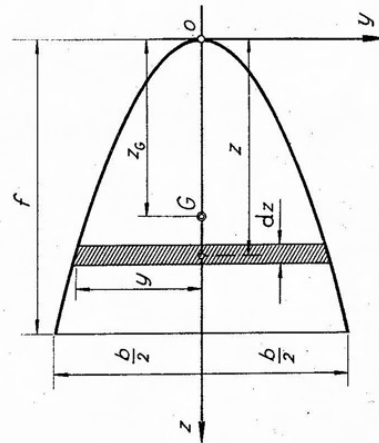
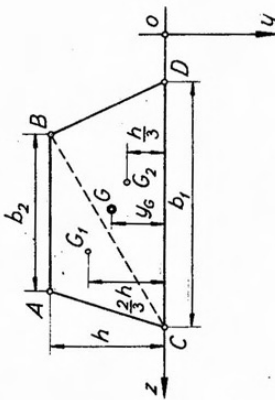


Fig. 4.17.

Pero, de [4.52] resulta $y = \sqrt{2pz}$. Reemplazando este valor y el de F dado por la [4.54], en la [4.53] e integrando se tiene:

$$z_G \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot f = 2\sqrt{2p} \int_0^f z^{3/2} \cdot dz = \frac{4}{5} \sqrt{2p} f^{5/2}. \quad [4.56]$$

Considerando que $\frac{1}{2} \cdot b = \sqrt{2pf}$ (ecuación [4.52]), reemplazando en [4.56] y despejando z_G , resulta finalmente

$$z_G = \frac{3}{5} f. \quad [4.57]$$

4.1.7. Teoremas de Pappus.

Los teoremas de Pappus, denominados también teoremas de *Guldin* por algunos autores, se refieren al área lateral y volumen de sólidos de revolución. El primero de ellos permite calcular el área de la superficie lateral de sólidos de revolución y su enunciado es el siguiente:

1º Teorema de Pappus. El área de la superficie engendrada por una línea plana que gira alrededor de un eje coplanar sin cortarlo, es igual al producto de la longitud de la línea por la longitud del arco descrito por su baricentro.

Para demostrar el enunciado anterior, consideremos, figura 4.18, una línea AB ubicada en el plano xz , que gira alrededor del eje z un cierto ángulo α , generando una superficie. Sea dS un elemento infinitésimo de la longitud de la línea y x su distancia al eje z . Al girar la línea, el elemento dS generará una superficie elemental, cuya área será igual al producto de dS por la longitud del arco recorrido; es decir,

$$dF = \alpha \cdot x \cdot dS. \quad [4.58]$$

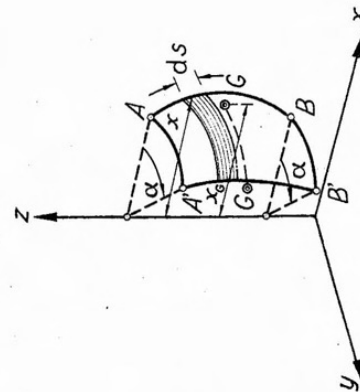


Fig. 4.18.

La superficie total generada por la línea al girar del ángulo α , será igual a la suma de las superficies elementales generadas por los infinitos elementos de línea dS ; es decir:

$$F = \int \alpha x dS. \quad [4.59]$$

Siendo α constante puede salir fuera de la integral. Por otra parte $\int x dS$ representa la suma de los momentos estáticos respecto del eje z de los infinitos elementos dS , suma que, conforme con la definición de baricentro, será igual al producto de la longitud S de la línea por la distancia x_G de su baricentro al eje z . En consecuencia, podemos escribir:

$$F = \alpha \int x dS = \alpha x_G S. \quad [4.60]$$

Pero αx_G corresponde al arco recorrido por el baricentro de la línea, arco que llamaremos s_G . En consecuencia, resulta

$$F = s_G \cdot S. \quad [4.61]$$

que es lo que queríamos demostrar.

El segundo teorema de Pappus se refiere al volumen que engendra una superficie al girar alrededor de un eje de su plano, siendo su enunciado el siguiente:

2º Teorema de Pappus.

El volumen engendrado por una superficie que gira alrededor de un eje de su plano, sin cortarlo, es igual al producto del área de la superficie por la longitud del arco descrito por su baricentro.

En efecto, consideremos, figura 4.19, una superficie F contenida en el plano xz , que gira alrededor del eje z un cierto ángulo α . Un elemento dF de la misma, al girar, engendrará un volumen elemental $dV = \alpha \cdot x \cdot dF$, siendo α el ángulo girado y x la distancia del elemento de superficie al eje de rotación z . Al girar la superficie, los infinitos elementos dF , de la misma engendrarán un volumen cuya expresión será:

$$V = \int dV = \int \alpha x dF = \alpha \int x dF. \quad [4.62]$$

Pero $\int x dF$ corresponde a la suma de los momentos estáticos de los elementos de superficie respecto del eje z , suma que, de acuerdo con la definición de baricentro, es igual al momento estático de la superficie total respecto del mismo eje, es decir:

$$\int x dF = x_G F \quad [4.62]$$

donde x_G es la distancia al eje z del baricentro G de la superficie y F el área de esta última.

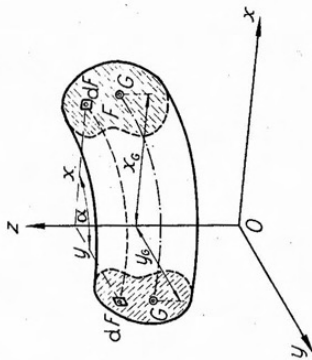
Luego, reemplazando en la [4.62] resulta:

$$V = \alpha x_G F. \quad [4.64]$$

Pero, αx_G es la longitud del arco o recorrido por el baricentro G , longitud que llamaremos s_G , teniendo finalmente:

$$V = s_G F \quad [4.65]$$

Fig. 4.19.



4.2. Momentos de segundo orden de superficies.

4.2.1. Definiciones.

Sea la superficie de la figura 4.20 a, y dos ejes cualesquiera z , y de su plano. Consideremos un elemento dF de superficie, cuyas distancias a los ejes indicados sean z e y . Se define como momento de segundo orden del elemento de superficie respecto del par de ejes z , y , al producto del área de la superficie elemental por las distancias a ambos ejes, es decir:

$$dJ_{zy} = zy \cdot dF. \quad [4.66]$$

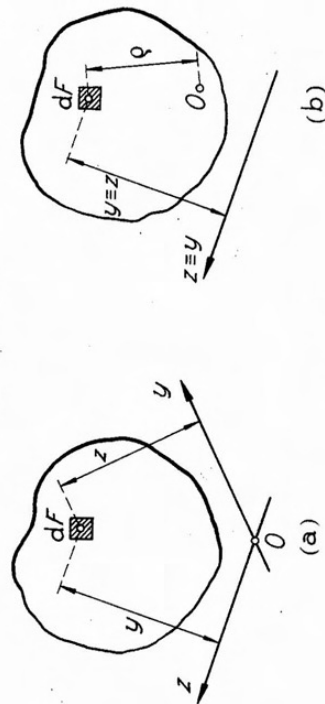


Fig. 4.20.

Integrando esta expresión sobre toda la superficie, tendremos el momento de segundo orden de la superficie respecto de los ejes considerados

$$J_{zy} = \int_F zy \cdot dF \quad [4.67]$$

denominado corrientemente **momento centrífugo** de la superficie. Algunos autores acostumbran llamar *producto de inercia* al momento centrífugo, pero, en lo que sigue, adoptaremos la primera denominación.

Siendo las superficies magnitudes positivas, el momento centrífugo tendrá un signo que dependerá de los signos de las coordenadas de los elementos de superficie; es decir, que será función de los semiejes positivos adoptados. Así, por ejemplo, el momento centrífugo de la superficie de la figura 4.21 a, es positivo, por cuanto tanto las ordenadas y como las abscisas z de los infinitos elementos de superficie dF , son positivos.

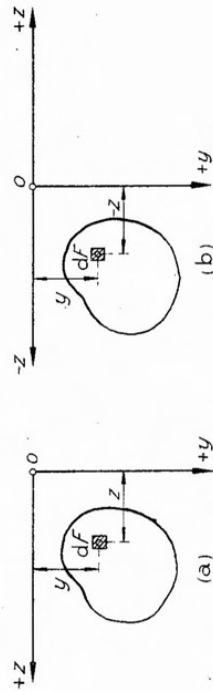


Fig. 4.21.

En cambio, si el semieje z lo orientamos hacia la izquierda, las abscisas z son todas negativas y , en consecuencia, también lo serán los productos zy , y por ende el momento centrífugo de la superficie.

Supongamos ahora que en la figura 4.20 a hacemos girar el eje y alrededor de O hasta superponerlo con el eje z , es decir, la situación de la figura 4.20 b. La distancia z del elemento dF al eje y coincidirá con la distancia y al eje z , por cuanto ambos ejes son coincidentes y , en consecuencia, la expresión [4.67] se transforma en

$$J_z = \int_F y^2 dF \quad [4.68]$$

que define el *momento de inercia de la superficie* respecto del eje z . Es decir que el momento de inercia de una superficie respecto de un eje cualquiera de su plano es igual a la integral del producto del elemento diferencial de superficie por el cuadrado de su distancia al eje.

El momento de inercia es siempre positivo. En efecto, cualquiera sea el signo de la distancia del elemento de superficie al eje considerado, su cuadrado será siempre positivo y, en consecuencia, el momento de inercia, ya que las superficies son positivas. Excepcionalmente, podrá su ponerse negativo un momento de inercia, al considerarla como elemento sustractivo para facilitar el cálculo del momento de inercia de una figura compuesta, como se verá más adelante.

Consideremos ahora en la figura 4.20 b un punto O y sea q la distancia al mismo del elemento dF de superficie. Se denomina *momento de inercia polar* del elemento dF respecto del punto O , al producto de dF por el cuadrado de la distancia q , es decir:

$$dJ_P = q^2 \cdot dF \quad [4.69]$$

y la integral de esta expresión nos dará el *momento de inercia polar* de la superficie respecto del punto O , que se suele llamar *polo*.

$$J_P = \int q^2 dF \quad [4.70]$$

Por análogas razones que las aducidas en el caso del momento de inercia, el momento de inercia polar siempre es positivo.

El momento de inercia es el producto de una superficie por el cuadrado de una distancia; en consecuencia, estando medidas las áreas de las superficies en cm^2 ($o m^2$) y las distancias en cm ($o en m$), la unidad resultante para el momento de inercia (y , en general, para los momentos de segundo orden), será cm^4 ($o m^4$).

Sentado lo anterior, establezcamos el cociente entre el momento de inercia de una superficie y el área de la misma. Estando medida la primera magnitud en cm^4 , por ejemplo, y la segunda en cm^2 , el cociente entre ambas resultará medido en cm^2 ; es decir, será una magnitud que podremos interpretar como el cuadrado de una cierta longitud, que llamaremos *radio de giro de la superficie respecto del eje considerado*, e indicaremos con i , es decir

$$i^2 = \frac{J}{F} \quad [4.71]$$

de donde

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}}. \quad [4.72]$$

Despejando el valor del momento de inercia de la [4.71] tenemos

$$J = F \cdot i^2; \quad [4.73]$$

es decir, que el momento de inercia de una superficie respecto de un eje puede concebirse como el producto de su área, supuesta concentrada en un cierto punto ubicado a una distancia del eje igual al correspondiente radio de giro, por el cuadrado de dicha distancia.

4.2.2. Momentos de segundo orden de superficies con respecto a ejes paralelos.

Supongamos la superficie de la figura 4.22, referida a un par de ejes ortogonales z, y , de origen O , y consideremos otro par de ejes z_0, y_0 , paralelos a los anteriores y cuyo origen coincide con el bari-centro G de la superficie. Llamemos a y b las distancias que separan respectivamente a los ejes z_0 é y_0 .

Llamando z é y las coordenadas de un elemento de superficie dF respecto de los ejes z, y , el momento centrífugo de la superficie respecto de este par de ejes tendrá por expresión

$$J_{zy} = \int z y dF. \quad [4.74]$$

Pero, de la figura 4.22 se tiene:

$$\left. \begin{aligned} y &= b + y_0 \\ z &= a + z_0 \end{aligned} \right\}. \quad [4.75]$$

Multiplicando entre sí ambas expresiones resulta:

$$zy = y_0 z_0 + ab + ay_0 + bz_0. \quad [4.76]$$

Introduciendo la expresión de zy dada por la [4.76] en la [4.74], y separando integrales se llega a

$$J_{zy} = \int z_0 y_0 dF + ab \int dF + a \int y_0 dF + b \int z_0 dF. \quad [4.77]$$

Pero

$$\int z_0 y_0 dF = J_{z_0 y_0}; \int dF = F; \int y_0 \cdot dF = 0 \quad y \quad \int z_0 \cdot dF = 0$$

por representar las dos últimas integrales el momento estático de la superficie respecto de ejes baricéntricos. Reemplazando en la [4.77] llegamos a

$$J_{xy} = J_{z_0 y_0} + F \cdot a \cdot b. \quad [4.78]$$

Es decir, que el momento centrífugo (o, en general, el momento de segundo orden) de una superficie respecto de un par de ejes cualesquiera, es igual al momento centrífugo respecto de un par de ejes baricéntricos, paralelos a los anteriores más el producto del área de la superficie por las distancias que separan a los ejes.

Particularmente, cuando los pares de ejes son coincidentes, el momento centrífugo se transforma en el momento de inercia, y la expresión [4.78] toma la forma genérica

$$J = J_G + F \cdot d^2 \quad [4.79]$$

donde J es el momento de inercia respecto de un eje cualquiera, J_G el correspondiente a un eje baricéntrico paralelo al anterior y d la distancia que separa ambos ejes. La expresión [4.79] se conoce con el nombre de *Teorema de Steiner*, cuyo contenido reza:

El momento de inercia de una superficie respecto de un eje cualquiera de su plano, es igual al momento de inercia de la misma respecto de un eje baricéntrico paralelo al anterior más el producto del área de la superficie por el cuadrado de la distancia que separa ambos ejes.

Dividiendo la expresión [4.79] por el área de la sección F , se tiene:

$$\frac{J}{F} = \frac{J_G}{F} + d^2; \quad [4.80]$$

pero, por definición de radio de giro, $J/F = i^2$. En consecuencia

$$i^2 = i_G^2 + d^2 \quad [4.81]$$

expresión que define el radio de giro de una superficie respecto de un eje en función del correspondiente a un eje baricéntrico paralelo al dado.

La expresión [4.81], interpretada gráficamente, nos dice que el radio de giro de una superficie respecto de un eje puede obtenerse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos correspondan: uno al radio de giro respecto de un eje baricentro paralelo al dado, y el otro a la distancia que separa ambos ejes (figura 4.23).

Como consecuencia resulta que, dada una superficie y un eje cualquiera de su plano, el radio de giro de la misma respecto del eje considerado es siempre mayor que la distancia del baricentro de la superficie, al mismo eje.

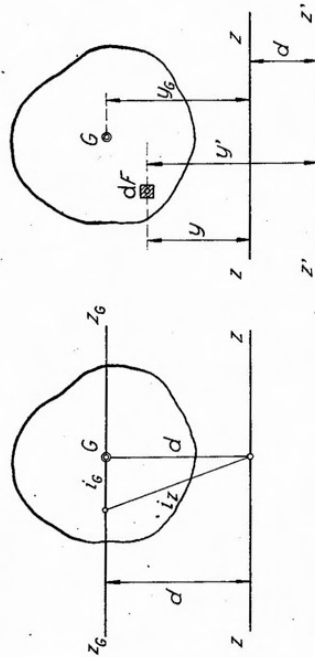


Fig. 4.23.

Deduiremos a continuación, la expresión del momento de inercia de una superficie respecto de un eje cualquiera en función del momento de inercia de otro eje, paralelo al anterior pero que no sea baricéntrico. Para ello consideremos la superficie de la figura 4.24 y los ejes z y z' , paralelos entre sí y separados de una distancia d . Supongamos conocido J_z . Si dF es un elemento de superficie, con la notación de la figura, se tiene:

$$J_{z'} = \int y'^2 dF \quad [4.82]$$

pero $y' = y + d$. Luego, elevando al cuadrado y reemplazando en [4.82], resulta:

$$J_{z'} = \int y^2 dF + 2d \int y dF + d^2 \int dF. \quad [4.83]$$

Siendo $\int y dF = S_z$, momento estático de la superficie respecto del eje z , $\int y^2 dF = J_z$ y $\int dF = F$, se tiene:

$$J_z = J_z + 2dS_z + Fd^2 \quad [4.84]$$

Dividiendo la expresión anterior por F , y recordando que $S_z = F \cdot y_G$, se llega a la siguiente expresión del radio de giro respecto del eje z' en función del correspondiente al eje z :

$$i_{z'}^2 = i_z^2 + 2dy_G + d^2. \quad [4.85]$$

4.2.3. Momentos de inercia y radios de giro polares.

En 4.2.1 definimos al momento de inercia polar de una superficie como la integral de los productos de los elementos de superficie dF por sus respectivas distancias a un punto del plano denominado polo. Consideremos ahora la superficie de la figura 4.25 y el par de ejes coordenados z, y . El momento de inercia polar de la misma respecto del polo O , origen de coordenadas, será:

$$J_P = \int \rho^2 dF. \quad [4.86]$$

Pero, de la figura se tiene

$$\rho^2 = z^2 + y^2; \quad [4.87]$$

luego reemplazando en [4.86]

$$J_P = \int z^2 dF + \int y^2 dF \quad [4.88]$$

es decir

$$J_P = J_z + J_y \quad [4.89]$$

Dividiendo la [4.89] por F se llega a

$$i_P^2 = i_z^2 + i_y^2, \quad [4.90]$$

expresión que nos permite calcular el radio de giro polar partiendo de los radios de giro correspondientes a dos ejes ortogonales que pasen por el polo.

El radio de giro polar $i_P = \sqrt{J_P/F}$ puede interpretarse como el radio de una circunferencia con centro en el polo, lugar geométrico de puntos en los cuales puede suponerse concentrada el área de la superficie que, multiplicada por dicho radio elevado al cuadrado, nos da el momento de inercia polar.

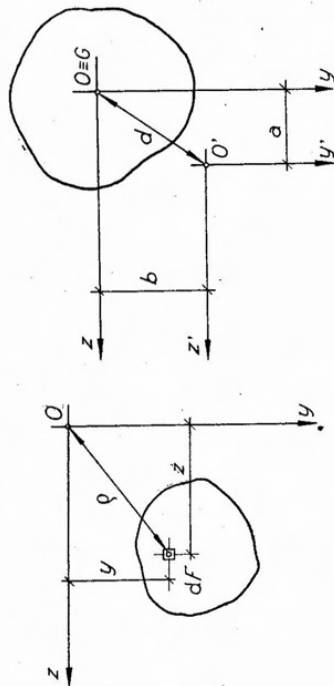


Fig. 4.25.

Fig. 4.26.

Sea ahora la superficie de la figura 4.26 y el par de ejes baricéntricos ortogonales z, y . Conocidos los momentos de inercia de la superficie respecto de ambos ejes, queda determinado el momento de inercia polar respecto del origen de los mismos, mediante la expresión

$$J_P = J_y + J_z.$$

Supongamos otro polo O' , y ubiquemos un segundo par de ejes ortogonales z', y' , paralelos a los anteriores y cuyo origen coincida con O' . De acuerdo con el teorema de Steiner tenemos:

$$\left. \begin{aligned} J_{z'} &= J_z + F \cdot b^2 \\ J_{y'} &= J_y + F \cdot a^2 \end{aligned} \right\} \quad [4.91]$$

Sumando miembro a miembro las [4.91] resulta

$$J_{z'} + J_{y'} = J_z + J_y + F(a^2 + b^2). \quad [4.92]$$

De acuerdo con la [4.89], $J_{z'} + J_{y'} = J_{P'}$ y $J_z + J_y = J_P$. Además, de la figura resulta $a^2 + b^2 = d^2$, siendo d la distancia que

separa ambos polos (uno de ellos, baricentro de la figura). En consecuencia, reemplazando en [4.71] se tiene:

$$J_{P'} = J_P + F \cdot d^2; \quad [4.93]$$

expresión que nos dice que el momento de inercia polar respecto de un polo que diste una distancia d del baricentro, es igual al momento de inercia polar baricéntrico más el producto del área de la superficie por el cuadrado de la distancia que separa ambos polos. Este enunciado puede considerarse como una extensión del Teorema de Steiner al caso de los momentos de inercia polares.

Si se tratara de dos polos, ninguno de los cuales fuera baricéntrico, caso de la figura 4.27, la expresión a que se llega es semejante a la [4.84], como veremos a continuación. Con la notación de la figura y teniendo presente la [4.84] resulta:

$$\left. \begin{aligned} J_{z'} &= J_z + 2a S_z + F a^2 \\ J_{y'} &= J_y + 2b S_y + F b^2 \end{aligned} \right\} [4.94]$$

Sumando miembro a miembro, teniendo en cuenta la [4.89] y recordando que $S_z = F \cdot y_G$ y $S_y = F \cdot z_G$, resulta finalmente

$$J_{P'} = J_P + 2F(ay_G + bz_G) + Fd^2 \quad [4.95]$$

como expresión del momento de inercia polar respecto del polo O' , en función del correspondiente al polo O .

4.2.4. Momentos de segundo orden con respecto a ejes de un mismo origen.

Sea la superficie de la figura 4.28 y consideremos un par de ejes coordenados z, y , de origen O . Para un elemento de superficie dF , de coordenadas z, y , se tiene:

$$dJ_z = y^2 dF; \quad dJ_y = z^2 dF; \quad dJ_{zy} = zy dF. \quad [4.96]$$

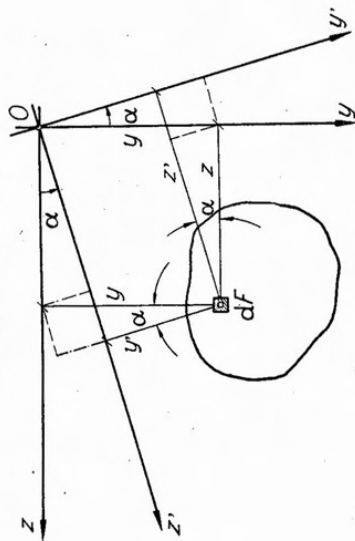


Fig. 4.28.

Integrando sobre toda la superficie, resulta

$$J_z = \int y^2 dF; \quad J_y = \int z^2 dF; \quad J_{zy} = \int zy dF. \quad [4.97]$$

Giremos ahora los ejes, manteniéndolos ortogonales, un ángulo α , de modo que pasen a ocupar la posición z', y' .

Con respecto a los nuevos ejes, las coordenadas de dF , en función de z é y resultan:

$$\left. \begin{aligned} z' &= z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\ y' &= y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\} [4.98]$$

Los momentos de segundo orden respecto de los ejes z', y' serán

$$\left. \begin{aligned} J_{y'} &= \int z'^2 dF \\ J_{z'} &= \int y'^2 dF \\ J_{z'y'} &= \int z' y' dF \end{aligned} \right\} [4.99]$$

Reemplazando en las [4.99] los valores de z' é y' dados por las [4.98] se tiene:

$$\left. \begin{aligned} J_{y'} &= \int z^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot dF + \int y^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot dF + 2 \int zy \sin \alpha \cos \alpha dF \\ J_{z'} &= \int y^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot dF + \int z^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot dF - 2 \int zy \sin \alpha \cos \alpha dF \\ J_{z'y'} &= \int y^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha dF - \int z^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha dF + \\ &\quad (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int zy \cdot dF \end{aligned} \right\} [4.100]$$

es decir, de acuerdo con las [4.97], y teniendo en cuenta que

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \quad \text{y} \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha:$$

$$\left. \begin{aligned} J_{y'y'} &= J_y \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha \\ J_{z'z'} &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha \\ J_{z'y'} &= J_{zy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(J_z - J_y) \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \begin{matrix} 70 \\ 30 \\ 50 \end{matrix} \quad [4.101]$$

Estas expresiones nos dan los momentos de segundo orden de la superficie respecto de los ejes ortogonales z' , y' , en función de los correspondientes a los ejes z , y .

Si en la segunda ecuación de las [4.101] hacemos $\alpha = 45^\circ$ resulta:

$$J_{45^\circ} = \frac{1}{2}(J_z + J_y) - J_{zy} \quad [4.102]$$

de donde

$$J_{zy} = \frac{1}{2}(J_z + J_y) - J_{45^\circ} \quad [4.103]$$

expresión que permite calcular el momento centrífugo respecto de dos ejes ortogonales en función de tres momentos de inercia.

Analizando las ecuaciones [4.101], vemos que las mismas son función de α . Variando el ángulo que forman entre sí los dos pares de ejes, variarán los momentos de segundo orden. En lo que respecta a los momentos de inercia, nunca podrán anularse, ni admitir valores negativos, pero sí alcanzarán valores máximos o mínimos. En cambio, los momentos centrífugos, que pueden ser negativos, podrán tener valores nulos.

Aquellos pares de ejes para los cuales el momento centrífugo se anula, se denominan *ejes conjugados de inercia*. Existen infinitos pares de ejes conjugados de un mismo origen, y entre ellos un par ortogonal.

4.2.5. Ejes principales de inercia.

Se denominan ejes principales de inercia el par de ejes conjugados ortogonales. Para dicho par de ejes, los momentos de inercia alcanzan valores máximos o mínimos.

Consideremos la segunda de las expresiones [4.101], que nos da el valor de $J_{z'}$ en función de α . La función de $J_{z'}$, pasará por un máximo (o mínimo) cuando

$$\frac{dJ_{z'}}{d\alpha} = 0 \quad [4.104]$$

Derivando la correspondiente expresión de $J_{z'}$ e igualando a cero, tenemos:

$$\left(\frac{dJ_{z'}}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_1} = J_y \cdot 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - J_z \cdot 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - 2 \cos 2\alpha_1 J_{zy} = 0 \quad [4.105]$$

de donde

$$(J_y - J_z) \sin 2\alpha_1 - 2J_{zy} \cos 2\alpha_1 = 0 \quad [4.106]$$

y finalmente

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} \quad [4.107]$$

Existen dos valores del ángulo $2\alpha_1$ que satisfacen la [4.107] y que difieren entre sí de 180° . En consecuencia habrá también dos valores α_1 , que difiriendo 90° también la satisfacen. Los ejes que corresponden a estos dos últimos valores de α_1 serán, pues, ortogonales, siendo $J_{z'}$ máximo para uno de ellos y mínimo para el restante.

Dichos ejes se denominan *ejes principales de inercia*, y los momentos de inercia correspondientes, *momentos principales de inercia*.

La determinación del valor de los momentos principales de inercia en función de los momentos de segundo orden, correspondientes a un par de ejes ortogonales, se efectúa del modo siguiente:

Recordando que

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad [4.108]$$

y reemplazando estos valores en la segunda de las [4.101] se tiene:

$$J_{z'} = \frac{1}{2}(J_z + J_y) + \frac{1}{2}(J_z - J_y) \cos 2\alpha - J_{zy} \sin 2\alpha \quad [4.109]$$

y teniendo en cuenta la [4.107]

$$\begin{aligned} J_{z'} &= \frac{1}{2}(J_z + J_y) + \frac{1}{2}(J_z - J_y) \cos 2\alpha \left[1 - \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} \operatorname{tg} 2\alpha \right] = \\ &= \frac{1}{2}(J_z + J_y) + \frac{1}{2}(J_z - J_y) \cos 2\alpha (1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{2}(J_z + J_y) \pm \frac{1}{2}(J_z - J_y) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} \end{aligned} \quad [4.110]$$

Reemplazando el valor de $\operatorname{tg} 2\alpha$ dado por la [4.107], y teniendo en cuenta los dos signos del radical se llega a:

$$\left\{ \begin{aligned} J_1 &= J_{\max} = \frac{1}{2}(J_z + J_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \\ J_2 &= J_{\min} = \frac{1}{2}(J_z + J_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \end{aligned} \right\} \quad [4.111]$$

que corresponden a los valores de los momentos principales de inercia. Si en la tercera de las [4.101] reemplazamos el valor de $\operatorname{tg} 2\alpha$ dado por la [4.107], tenemos:

$$J_{1,2} = J_{zy} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} + \frac{J_z - J_y}{2} \cdot \frac{J_y - J_z}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = 0 \quad [4.112]$$

es decir que el momento centrífugo respecto de un par de ejes principales de inercia es nulo. Se deduce de ello, que estos ejes constituyen el único par de ejes conjugados ortogonales, entre los infinitos pares que pasan por un punto. Veamos ahora para qué pares de ejes el momento centrífugo alcanza valores extremos. Para ello, igualemus a cero la primera derivada de la tercera ecuación de las [4.101]. Tendremos:

$$\left[\frac{dJ_{z'y'}}{d\alpha} \right]_{\alpha=\alpha_2} = -2J_{zy} \sin 2\alpha_2 + (J_z - J_y) \cos 2\alpha_2 = 0 \quad [4.113]$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = -\frac{J_y - J_z}{2J_{zy}}; \quad [4.114]$$

expresión que se satisface para dos valores de 2α que difieren 180° , y por ende, para valores de α que difieren 90° . Por otra parte, siendo

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_1} \quad [4.115]$$

α_1 y α_2 diferirán entre sí 45° ; es decir, que el par de ejes para los cuales el momento centrífugo es máximo o mínimo, bisecará el ángulo que forman entre sí los ejes principales de inercia.

Calcularemos a continuación los valores máximo y mínimo del momento centrífugo. Para ello, expresemos en la tercera de las [4.101] $\cos 2\alpha$ y $\sin 2\alpha$ en función de $\operatorname{tg} 2\alpha$, recordando para ello que

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \\ \cos 2\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \end{aligned} \right\} \quad [4.116]$$

Se tiene así:

$$J_{z'y'} = \frac{J_{zy}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} + \frac{\frac{1}{2}(J_z - J_y) \operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \quad [4.117]$$

Reemplazando en la anterior $\operatorname{tg} 2\alpha$ por su valor dado por la [4.114] se llega a

$$\left. \begin{aligned} J_{1'2'} &= +\sqrt{4J_{zy}^2 + (J_z J_y)^2} & (\text{máximo}) \\ J_{1''2''} &= -\sqrt{4J_{zy}^2 + (J_z J_y)^2} & (\text{mínimo}) \end{aligned} \right\} \quad [4.118]$$

expresiones de los momentos centrífugos máximo y mínimo en función de los momentos de segundo orden respecto de un par de ejes ortogonales.

Si una figura admite un eje de simetría, el mismo es, a la vez, eje principal de inercia. En efecto, sea el caso de figura 4.29 y consideremos el par de ejes coordenados z , y , habiendo coincidir el eje y con el eje de simetría. A cada elemento de superficie dF ubicado a una abscisa z y ordenada y , le corresponderá su simétrico, de igual ordenada que el anterior, pero de abscisa $-z$. En consecuencia, a cada producto $zydF$, que representa el momento centrífugo elemental le corresponderá otro producto $-zydF$. y, al establecer la suma de todos ellos, es decir, la integral extendida a la superficie, se anularán mutuamente los productos, resultando con ello nula la integral. Como esta integral representa el momento centrífugo respecto del par de ejes ortogonales dados, al ser nulo, los ejes serán conjugados y , como sólo existe un par de ejes conjugados ortogonales que son precisamente los ejes principales de inercia, queda así demostrado que cuando una figura admite un eje de simetría, el mismo es, a la vez, principal de inercia.

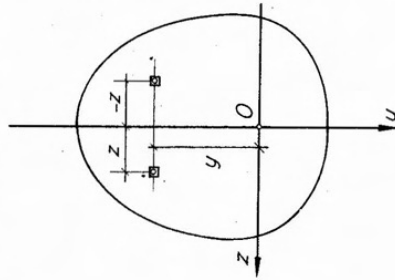


Fig. 4.29.

4.2.6. Momentos de segundo orden respecto de ejes oblicuos.

Sea la superficie de la figura 4.30 y consideremos un par de ejes ortogonales z , y , con el mismo origen, dos ejes u y v , que formen

con el eje z los ángulos α y β respectivamente. De la figura tenemos:

$$\left. \begin{aligned} v &= y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha \\ u &= z \cdot \sin \beta - y \cdot \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad [4.119]$$

Por otra parte, sabemos que $J_u = \int v^2 \cdot dF$; $J_v = \int u^2 dF$ y $J_{uv} = \int uv dF$. Reemplazando en éstas los valores de u y v dados por las [4.119], resulta:

$$\left. \begin{aligned} J_u &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha \\ J_v &= J_z \cos^2 \beta + J_y \sin^2 \beta - J_{zy} \sin 2\beta \end{aligned} \right\} \quad [4.120]$$

$$J_{uv} = J_{zy}(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) - J_z \cos \alpha \cos \beta - J_y \sin \alpha \sin \beta.$$

Cuando u y v son ejes conjugados, el momento centrífugo respecto de los mismos es nulo. Si, dado un eje cualquiera u , queremos conocer la dirección del eje conjugado, es decir, el ángulo β que forma con el eje de las z , bastará para ello hacer igual a cero la tercera de las ecuaciones [4.120], y despejar el valor de $\tan \beta$.

Una vez igualada a cero la expresión de J_{uv} , dividiéndola por $\cos \alpha \cos \beta$ y simplificando, llegamos a

$$J_{zy}(\tan \alpha + \tan \beta) - J_z - J_y \tan \alpha \cdot \tan \beta = 0 \quad [4.121]$$

Finalmente, despejando $\tan \beta$:

$$\tan \beta = \frac{J_z - \tan \alpha J_{zy}}{J_{zy} - \tan \alpha J_y} \quad [4.122]$$

expresión que define la dirección β , conjugada de la α .

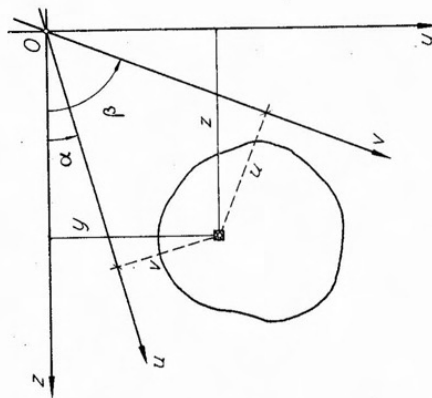


Fig. 4.30.

4.2.7. Determinación de momentos de inercia de figuras de contorno irregular.

Nos ocuparemos en primer término de la determinación de los momentos de inercia de figuras de contorno irregular; es decir, aquéllas cuyo contorno no responde a ley alguna.

El problema se puede resolver por métodos numéricos o gráficos, como veremos a continuación.

a) Solución numérica.

Para calcular el momento de inercia de la superficie de la figura 4.31 respecto del eje z indicado en la misma, comenzaremos por dividirla en fajas paralelas a la dirección del eje, de reducido espesor, y en forma que las superficies resultantes sean tales que la determinación de su baricentro sea posible en forma simple, y cuyas áreas sean fáciles de calcular. Es así que las dos superficies parciales extremas, en el caso que nos ocupa, pueden sin mayor error asimilarse a sectores parabólicos, y las restantes a trapecios. Éstos, a su vez, pueden reemplazarse por rectángulos de igual área, por cuanto, dada su pequeña altura, la diferencia de ubicación de los baricentros es despreciable.

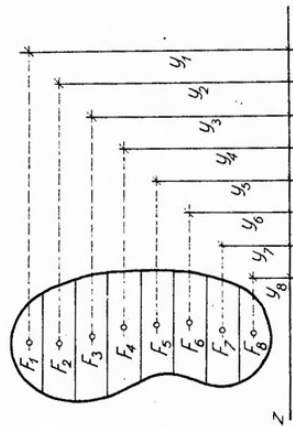


Fig. 4.31.

Calculadas las superficies parciales F_i , y determinadas las distancias y_i de cada baricentro al eje z , se establecen los productos $F_i \cdot y_i^2$, cuya suma nos da el momento de inercia buscado; es decir,

$$J_z = \sum_i F_i y_i^2. \quad [4.123]$$

El momento de inercia calculado mediante la expresión [4.123] es sólo aproximado. En efecto, el momento de inercia de la figura es igual a la suma de los momentos de inercia de las figuras parciales en que se la ha dividido. La expresión exacta del momento de inercia de una faja

i genérica, respecto del eje z , es, de acuerdo con el Teorema de Steiner, la siguiente:

$$J_z^i = J_{G_i}^i + F_i y_i^2$$

donde $J_{G_i}^i$ es el momento de inercia de la faja respecto de su propio eje baricéntrico paralelo al dado, F_i su área e y_i la distancia de su baricentro al eje z .

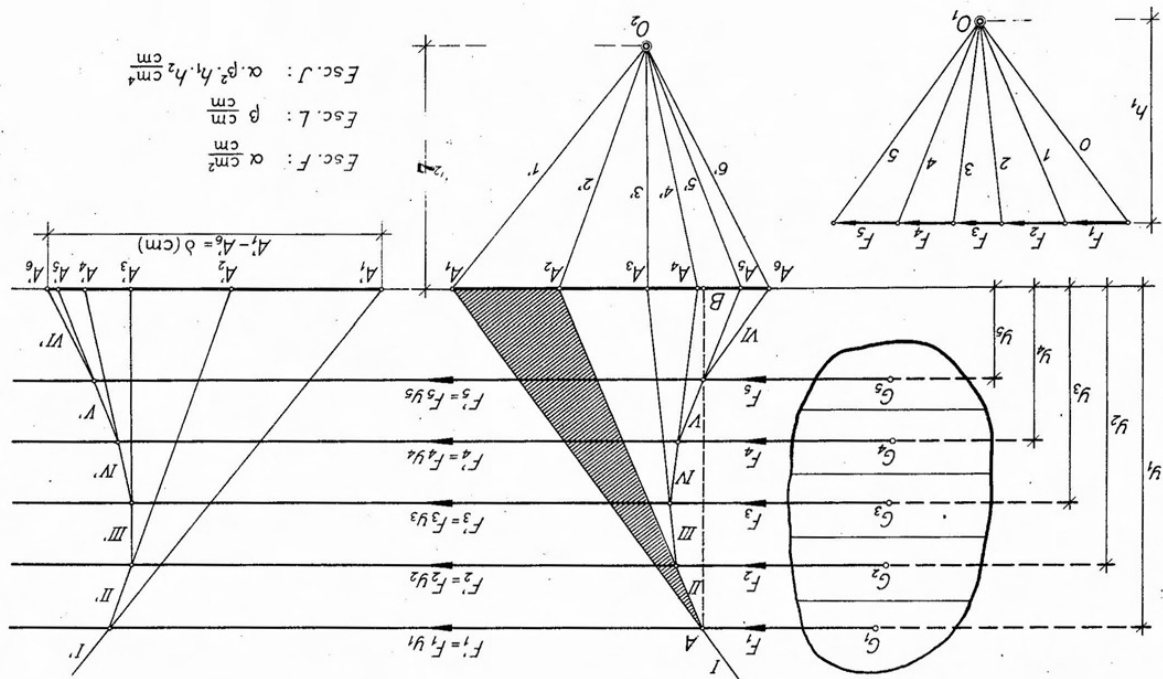
En consecuencia, la expresión exacta del momento de inercia de la figura respecto del eje z será:

$$J_z = \sum_{i=1}^n J_z^i = \sum_{i=1}^n J_{G_i}^i + \sum_{i=1}^n F_i y_i^2 \quad [4.125]$$

Ahora bien, cuanto mayor sea el número de fajas en que se ha dividido la figura; o bien, cuanto menor sea la altura de cada una de ellas, o cuanto más alejado se encuentre el eje z del baricentro de cada faja, tanto menor será el valor relativo del término $J_{G_i}^i$ frente al de J_z . En consecuencia, si la figura se divide en un número suficiente de fajas paralelas de reducido espesor, $J_{G_i}^i$ será despreciable, y la fórmula [4.125] puede reemplazarse sin mayor error por la [4.123].

b) Solución gráfica de Culmann.

El procedimiento gráfico de Culmann para la determinación de momentos de inercia, consiste en la interpretación gráfica de la fórmula aproximada [4.123]. Dividida la superficie (figura 4.32) en fajas paralelas a la dirección del eje respecto del cual se desea calcular el momento de inercia, y determinados los correspondientes baricentros, aplicamos en los mismos y paralelamente al eje, fuerzas F_i cuyas intensidades correspondan a las áreas de las fajas respectivas. Si en una escala de fuerzas $\alpha \text{ cm}^2/\text{cm}$ llevamos vectores representativos de dichas fuerzas, y con polo O_1 y la distancia polar h_1 trazamos un primer polígono funicular I, II, ..., VI, la intersección de dos lados consecutivos, el I y II, por ejemplo, con el eje respecto del cual se busca el momento de inercia, determina un segmento A_1, A_2 , que en la escala correspondiente representa el momento estático $F_1 y_1$ de la fuerza con respecto al eje. Supongamos ahora aplicadas en los baricentros nuevas fuerzas, cuyas intensidades correspondan a los respectivos momentos estáticos $F_i y_i$, y tracemos un polígono funicular de las mismas I', II', ..., VI'. Para el trazado de este segundo polígono funicular usamos como polígono de fuerzas directamente los segmentos $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_5 A_6$, determinados sobre el eje



por la intersección con el mismo de los sucesivos lados del primer funicular, por cuanto dichos segmentos representan, en una cierta escala, los momentos estáticos que corresponden precisamente a las intensidades de las nuevas fuerzas ideales.

Trazado el nuevo funicular, dos lados consecutivos del mismo determinan sobre el eje un segmento, $A'_1 A'_2$ por ejemplo, que en la escala correspondiente representa, a su vez, el momento estático de la nueva fuerza aplicada en el baricentro, es decir $F'_1 \cdot y_1$.

Pero, por ser $F'_1 = F_1 \cdot y_1$, el segmento $A'_1 A'_2$ leído en la escala correspondiente, representa el valor $F_1 y_1^2$, y, en consecuencia, el segmento intersectado entre el primero y último lados del segundo funicular sobre el eje dado, $A'_1 A'_n = \delta$ (cm), representará en la escala correspondiente, $\sum_1^n F_1 y_1^2$. La escala de momentos de inercia será igual a la escala de fuerzas en que se han representado las fuerzas ideales F'_i , multiplicada por la escala de longitudes y por la distancia polar h_2 del segundo polígono funicular. Pero la escala de fuerzas indicada es, a su vez, la escala en que leíamos los segmentos $A_1 A_2$, etc., determinados por el primer polígono funicular; es decir, una escala de momentos estáticos igual al producto de la escala de fuerzas en que se representaron los vectores F_i : multiplicada por la escala de longitudes y por la primera distancia polar h_1 . En consecuencia, reemplazando esta segunda escala en la primera, resulta, en definitiva:

$$\text{Escala } J = \text{Esc. } F \cdot \overline{\text{Esc. } L}^2 \cdot h_1 \cdot h_2. \quad [4.126]$$

Esta escala se suele denominar escala de *Culmann*.

En consecuencia, en el caso de la figura 4.32, el momento de inercia de la superficie respecto del eje z dado será igual a:

$$J_z = \delta(\text{cm}) \cdot \left[\alpha \cdot \beta^2 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}} \right]. \quad [4.127]$$

c) Solución gráfica de Mohr.

Consideremos la misma superficie de la figura 4.32. Una vez trazado el polígono funicular con polo O_1 de las fuerzas F_i , representativas de las superficies parciales en que se ha dividido la figura, prolonguemos los dos primeros lados del mismo hasta cortar el eje z , con respecto al cual se busca el momento de inercia. Queda determinado así el triángulo $AA_1 A_2$, rayado en la figura, cuya superficie Ω , tendrá un área

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot A_1 A_2 \cdot AB. \quad [4.128]$$

$$\text{Pero } A_1 A_2 \cdot \text{Esc. Mom. Estáticos} = F_1 \cdot y_1 \quad [4.129]$$

y además

$$AB \cdot \text{Esc. Longitudes} = y_1. \quad [4.130]$$

En consecuencia, reemplazando en [4.128] resulta:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1 y_1}{\text{Esc. Mom. Est.}} \cdot \frac{y_1}{\text{Esc. Long.}}. \quad [4.131]$$

de donde

$$F_1 y_1^2 = \Omega_1 \cdot 2 \cdot \text{Esc. Mom. Est.} \times \text{Esc. Long.} \quad [4.132]$$

Ahora bien, la expresión [4.132] representa el momento de inercia con respecto a z , de la superficie de la primera faja en que dividiéramos la figura. Dicho momento de inercia está dado por el área de la superficie encerrada entre los dos primeros lados del polígono funicular y el eje z , leído en la escala correspondiente. Evidentemente, si queremos hallar el momento de inercia total, bastará sumar las áreas de los sucesivos triángulos formados con el eje z por dos lados consecutivos del polígono funicular. En otras palabras, de acuerdo con el procedimiento de Mohr, el momento de inercia de una figura respecto de un eje de su plano, se obtiene determinando el área de la superficie comprendida entre el polígono funicular del sistema de fuerzas representativas de las superficies parciales, el primer lado del mismo y el eje respecto del cual se calcula el momento de inercia. Dicha área, debe leerse en la denominada *escala de Mohr*, que surge de reemplazar la escala de momentos estáticos de la expresión [4.132] por sus escalas constituyentes, teniendo en consecuencia:

$$\text{Escala de Mohr} = 2 \text{ Esc. } F \times \overline{\text{Esc. } L}^2 \times h \quad [4.133]$$

donde h es la distancia polar del único polígono de fuerzas utilizado. Finalmente, llamando Ω al área de la superficie encerrada entre el funicular, su primer lado y el eje z , el momento de inercia buscado será

$$J_z = \Omega(\text{cm}^2) \left[2 \cdot \alpha \cdot \beta^2 \cdot h \cdot \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}^2} \right]. \quad [4.134]$$

El método de Mohr, lo mismo que el de Culmann, en la forma que se ha aplicado, conduce a resultados aproximados, por cuanto se desprecian en el mismo los momentos de inercia de cada una de las fajas respecto

de sus propios ejes baricéntricos. El error cometido está dado por el área de la superficie comprendida entre el polígono funicular y la curva inscrita en el mismo y tangente a éste en los puntos en que las rectas que dividen la superficie, cortan los sucesivos lados del funicular. En efecto, a medida que aumentamos el número de fajas en que se divide la figura, se incrementa el número de lados del polígono funicular. En el límite, para infinitas fajas de espesor infinitésimo, el polígono funicular, como veremos en capítulos posteriores, se transforma en una curva denominada curva funicular, inscrita en el primero. El área encerrada entre la curva funicular, el eje con respecto al cual se calcula el momento de inercia y la primera tangente, que en este caso corresponde al primer lado del polígono funicular, leída en su correspondiente escala, nos da el momento de inercia buscado, esta vez en forma exacta. Como en la práctica la curva se sustituye por el polígono funicular, la diferencia de áreas nos da el error cometido, que será tanto menor cuanto mayor sea el número de fajas en que se divide la figura.

d) Solución graficonumérica de Baumann.

Sea la figura de contorno irregular de la figura 4.33 a de la que se pide calcular el momento de inercia respecto de un cierto eje de su plano. Hagamos coincidir con dicho eje el eje z de un par ortogonal, y dividamos la figura en fajas de ancho Δz , paralelas al eje y . Por ser Δz reducido, las fajas, sin mayor error, pueden asimilarse a rectángulos elementales de base Δz y la altura ($y_{1i} - y_{2i}$), donde y_{1i} é y_{2i} corresponden a las ordenadas extremas del rectángulo elemental. Como ver-

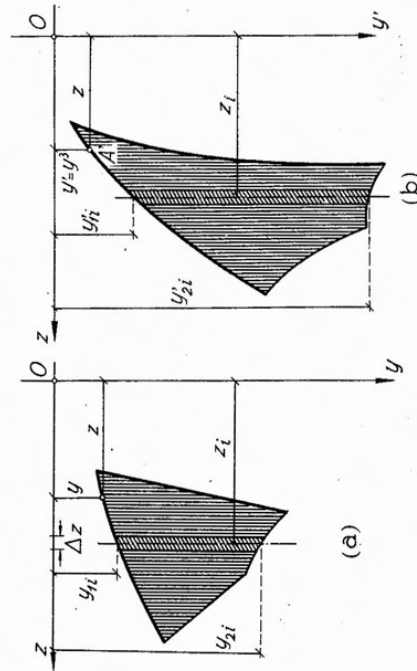


Fig. 4.33.

mos en detalle al considerar el momento de inercia de un rectángulo respecto de un eje no baricéntrico, el momento de inercia del rectángulo elemental, respecto del eje z está dado por la expresión:

$$\Delta J_z = \frac{\Delta z}{3} \cdot (y_{2i}^3 - y_{1i}^3). \quad [4.135]$$

El momento de inercia total de la figura será igual a la suma de los correspondientes a los rectángulos elementales en que se la ha dividido, es decir:

$$J_z = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \Delta z \cdot (y_{2i}^3 - y_{1i}^3). \quad [4.136]$$

El procedimiento de Baumann consiste en trazar una figura (fig. 4.33 b), en la que las coordenadas de cada punto de su contorno sean $z' = z$ de la figura dada, e $y' = y^3$. En consecuencia, dividiendo la nueva figura en fajas verticales de ancho Δz , resultarán rectángulos elementales de ancho Δz y altura ($y_{2i}' - y_{1i}'$), cuyas superficies tendrán un área

$$\Delta F = \Delta z (y_{2i}' - y_{1i}'); \quad [4.137]$$

pero como por construcción $y_{2i}' = y_{2i}^3$ e $y_{1i}' = y_{1i}^3$,

reemplazando en [4.137] resulta:

$$\Delta F_i = \Delta z (y_{2i}^3 - y_{1i}^3) = 3 \Delta J_{z_i}. \quad [4.138]$$

En consecuencia, el área de la segunda figura corresponde, en la escala que resulte, al triple del momento de inercia buscado, es decir,

$$J_z = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \frac{1}{3} F. \quad [4.139]$$

4.2.8. Momentos de inercia de figuras geométricas.

Para la determinación de momentos de inercia de figuras geométricas, son de aplicación los procedimientos gráficos y graficonuméricos analizados en el párrafo anterior. Sin embargo, tratándose de figuras geométricas simples como el rectángulo, triángulo, sector parabólico, etc., es preferible emplear la solución analítica, reservando los procedimientos gráficos para el caso de figuras compuestas.

a) Momento de inercia del rectángulo.

Para el rectángulo, interesa principalmente conocer el valor de su momento de inercia respecto de ejes paralelos a cualquiera de las bases, por cuanto, conocidos éstos, es fácil pasar al correspondiente a un eje de dirección cualquiera, mediante las fórmulas de giro de ejes [4.101] o bien dividiéndolo en triángulos parciales. Comenzaremos determinando el momento de inercia de un rectángulo de base b y altura h , respecto de un eje coincidente con una de las bases. Sea para ello el rectángulo de la figura 4.34 y consideremos una faja elemental de ancho b , altura dy y ordenada y , medida desde la base del rectángulo. La superficie elemental tendrá por área

$$dF = b \cdot dy \quad [4.140]$$

y el momento de inercia de la misma respecto de z

$$dJ_z = b \cdot y^2 \cdot dy \quad [4.141]$$

Integrando entre 0 y h (límites de variación de y), se tiene:

$$J_z = \int_0^h b \cdot y^2 \cdot dy = \frac{1}{3} b \cdot h^3. \quad [4.142]$$

Conocido el momento de inercia respecto del eje z coincidente con una de las bases, mediante la aplicación de la fórmula derivada del teorema de Steiner, podemos calcular el correspondiente a un eje baricéntrico paralelo a las bases. En efecto, la distancia del baricentro del rectángulo a las bases es $\frac{1}{2}h$. En consecuencia

$$J_{z_0} = J_z - bh \cdot \left(\frac{1}{2}h\right)^2 = \frac{1}{3}bh^3 - \frac{1}{4}bh^3 = \frac{1}{12}bh^3. \quad [4.143]$$

El teorema de Steiner nos permite determinar el momento de inercia del rectángulo respecto de un eje cualquiera paralelo a las bases. Para ello bastará sumar al valor dado por la [4.143], el producto del área del rectángulo (bh) por el cuadrado de la distancia d que separa el eje considerado del eje paralelo baricéntrico.

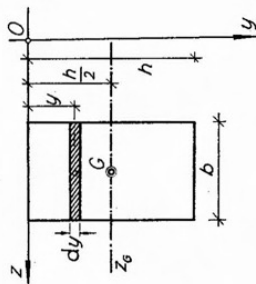


Fig. 4.34.

En el caso particular del *cuadrado*, donde $b = h = a$ = lado del cuadrado, la fórmula [4.143], se transforma en

$$J_{z_0} = \frac{1}{12} a^4. \quad [4.144]$$

Además, para el eje baricéntrico orientado en una dirección cualquiera, el momento de inercia no cambia, siendo igual siempre a $a^4/12$.

En efecto, consideremos el cuadrado de la figura 4.35 y los ejes z , y baricéntricos. Para ambos, el momento de inercia valdrá $1/12 \cdot a^4$; es decir, $J_z = J_y$.

Si deseamos conocer el momento de inercia respecto de un eje z' que forma un ángulo cualquiera α con z , aplicamos la segunda de las [4.101]. Pero, teniendo en cuenta que $J_z = J_y$, resulta

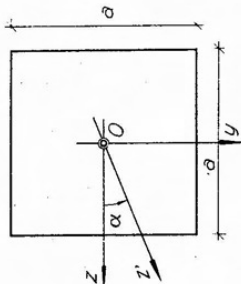


Fig. 4.35.

$$J_{z'} = J_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = J_z; \quad [4.145]$$

es decir, que para el cuadrado, el momento de inercia con respecto a cualquier eje baricéntrico es constante e igual a $a^4/12$.

b) Momento de inercia del triángulo.

En el caso del triángulo, interesa fundamentalmente conocer los momentos de inercia respecto de ejes que, siendo paralelos a una de las bases, coincidan con ella, sean baricéntricos o pasen por el vértice opuesto a la base considerada. El momento de inercia respecto de cualquier otro eje paralelo a una de las bases se obtiene una vez conocido el correspondiente a un eje baricéntrico paralelo, por aplicación del teorema de Steiner.

Sea el triángulo de la figura 4.36 y z un eje paralelo a una de las bases que pase por el vértice opuesto. Consideremos una faja elemental de espesor dy , a una distancia y del eje considerado, y sea b_y su ancho variable. El momento de inercia del triángulo respecto de z será:

$$J_z = \int_0^h b_y \cdot y^2 \cdot dy \quad [4.146]$$

pero, por semejanza de triángulos, $b_y = b/h \cdot y$; luego, reemplazando

$$J_z = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{1}{4} b h^3. \quad [4.147]$$

Aplicando el teorema de Steiner, y teniendo en cuenta que el baricentro del triángulo dista del vértice $\frac{2}{3} \cdot h$, obtenemos el momento de inercia respecto del eje z_0 , baricéntrico y paralelo al anterior:

$$J_{z_0} = \frac{1}{4} b \cdot h^3 - \frac{1}{2} b \cdot h \cdot \left(\frac{2}{3} h\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad [4.148]$$

Finalmente, considerando el eje z' , coincidente con una base y paralelo a los anteriores, que dista del baricentro $\frac{1}{3} \cdot h$, por aplicación del Teorema de Steiner obtenemos el correspondiente momento de inercia:

$$J_{z'} = \frac{b \cdot h^3}{36} + \frac{1}{2} b \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3} h\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad [4.149]$$

En el caso de la figura 4.37 en que el eje con respecto al cual se desea conocer el momento de inercia no es paralelo a ninguna de las bases del triángulo, se procede a dividir la figura en triángulos parciales de bases paralelas al eje dado.

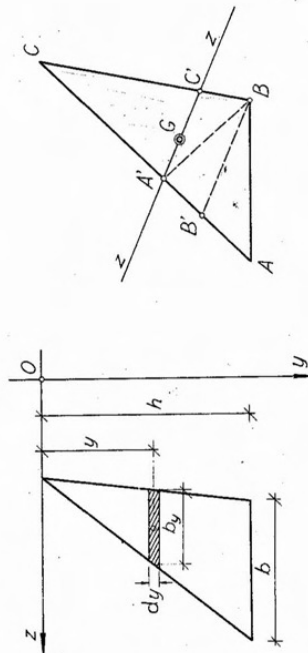


Fig. 4.36.

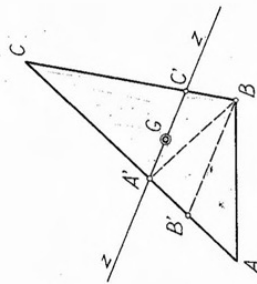


Fig. 4.37.

En el ejemplo de la figura 4.37 resultan los triángulos parciales $A'CC'$; $A'BB'$; $BA'C'$ y $BB'A$. Se determinan luego los momentos de inercia de cada uno de los triángulos respecto del eje z , y la suma de los momentos de inercia parciales nos dará el momento de inercia buscado. Para los triángulos $A'BC'$ y $A'CC'$ se aplica directamente la fórmula [4.149]. En cambio, para el $BA'B'$ corresponde utilizar la [4.147] y en el BAB' la [4.148], aplicando luego en este último la fórmula derivada del teorema de Steiner.

c) Momento de inercia de un trapecio.

La determinación del momento de inercia de un trapecio se obtiene por división de la figura en triángulos parciales, o triángulos y rectángulos según el caso, de bases paralelas al eje dado. Por ser muy simple la solución, no entraremos en el detalle del desarrollo, limitándonos a indicar las expresiones del momento de inercia de un trapecio de bases b' y b'' y altura h , respecto de ejes coincidentes con las bases.

$$\left. \begin{aligned} J_z &= \frac{h^3}{12} (b' + 3b'') & (z = \text{base mayor}) \\ J_{z'} &= \frac{h^3}{12} (3b' + b'') & (z = \text{base menor}) \end{aligned} \right\} [4.150]$$

siendo b' la base mayor y b'' la base menor.

d) Momento de inercia del círculo.

La determinación del momento de inercia del círculo respecto de un eje baricéntrico se simplifica por la circunstancia de admitir un centro de simetría. En efecto, con respecto a cualquier eje que pase por el centro de simetría, el momento de inercia es siempre el mismo. Luego, si para el círculo de radio r de la figura 4.38, trazamos el par de ejes ortogon-

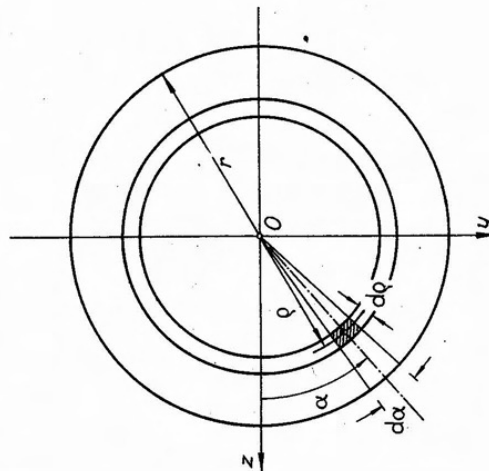


Fig. 4.38.

nales z, y , haciendo coincidir su origen con el centro O del círculo, tendremos $J_z = J_y$.

Recordando que $J_p = J_z + J_y$ resulta finalmente:

$$J_z = J_y = \frac{1}{2} J_p \quad [4.151]$$

Es decir, que el momento de inercia de un círculo respecto de un eje baricéntrico cualquiera es igual a la mitad de su momento de inercia polar respecto del centro.

Para hallar el momento de inercia polar, consideremos un elemento de superficie delimitado por dos círculos concéntricos separados $d\varrho$ y dos radios que formen un ángulo central $d\alpha$. El área del elemento de superficie será, si ϱ es el radio correspondiente al baricentro del elemento:

$$dF = \varrho d\alpha d\varrho \quad [4.152]$$

El momento de inercia polar de la superficie elemental, respecto de O será

$$dJ_p = \varrho^3 d\alpha d\varrho \quad [4.153]$$

y el de la superficie total del círculo

$$J_p = \int_0^{2\pi} \int_0^r \varrho^3 d\alpha d\varrho \quad [4.154]$$

Integrando se tiene, finalmente,

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2} \quad [4.155]$$

Recordando la [4.151], y teniendo en cuenta que $r = \frac{1}{2} D$, se llega a

$$J_z = \frac{\pi D^4}{64} \quad [4.156]$$

como expresión del momento de inercia de un círculo respecto de un eje cualquiera que pase por su baricentro.

e) *Momento de inercia del segmento parabólico.*

Sea el segmento parabólico de la figura 4.39, cuya parábola límite responde a la ecuación $y^2 = 2pz$.

Consideremos un rectángulo elemental, normal al eje z , de altura $2y$ y base dz . Su momento de inercia respecto del eje z será:

$$dJ_z = \frac{1}{12} (2y)^3 dz \quad [4.157]$$

y el momento de inercia total

$$J_z = \frac{2}{3} \int_0^f y^3 dz \quad [4.158]$$

Pero como $y^2 = 2pz$, resulta en consecuencia

$$J_z = \frac{2}{3} (2p)^{3/2} \int_0^f z^{3/2} dz \quad [4.159]$$

Integrando y teniendo en cuenta que $y^3 = (2pz)^{3/2}$,

$$J_z = \frac{4}{15} f y^3 \quad [4.160]$$

Pero como para $z = f$ resulta $y = \frac{1}{2} b$, reemplazando se tiene finalmente

$$J_z = \frac{1}{30} f b^3 \quad [4.161]$$

Con respecto al eje y , el momento de inercia del rectángulo elemental será

$$dJ_y = 2y \cdot z^2 \cdot dz \quad [4.162]$$

Y para la superficie total

$$J_y = \int_0^f 2y \cdot z^2 dz \quad [4.163]$$

Recordando que $y^2 = 2pz$,

$$\begin{aligned} J_y &= 2\sqrt{2p} \int_0^f z^{3/2} dz = \\ &= \left[\frac{4}{7} \sqrt{2p} z^{7/2} \right]_0^f \quad [4.164] \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\frac{1}{4} b^2 = 2pf$, resulta

$$J_y = \frac{2}{7} b f^3 \quad [4.165]$$

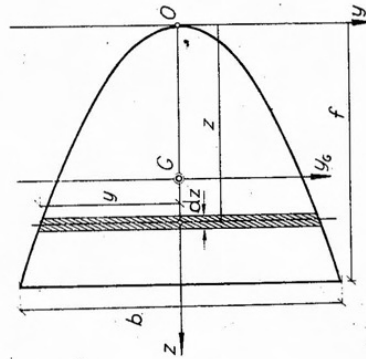


Fig. 4.39.

como expresión del momento de inercia de un segmento parabólico respecto de un eje tangente en su vértice.

Con respecto al eje y_G , baricéntrico y normal al z , el momento de inercia se obtiene, por aplicación de la fórmula derivada del teorema de Steiner:

$$J_{y_G} = 2/7 bf^3 - 2/3 bf(3/5 f)^2 = \frac{8}{175} bf^3. \quad [4.166]$$

4.2.9. Radios de giro.

Conocida la expresión del momento de inercia de una figura respecto de un eje, la obtención del correspondiente radio de giro es inmediata por la aplicación de la fórmula [4.71]. Determinaremos a continuación los radios respecto de ejes baricéntricos paralelos a las bases de las figuras analizadas en el párrafo anterior.

a) Rectángulo.

Siendo para el rectángulo, y con respecto a un eje paralelo a la base, $J = bh^3/12$, y su área $F = bh$, resulta

$$i_G^2 = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}. \quad [4.167]$$

La [4.167] nos dice que para el rectángulo, y con respecto a un eje baricéntrico paralelo a una base, el radio de giro es medio proporcional entre la mitad y un sexto de la altura. Esta propiedad permite la determinación gráfica del radio de giro baricéntrico en forma simple. Bastará para ello, figura 4.40, trazar la semicircunferencia de diámetro

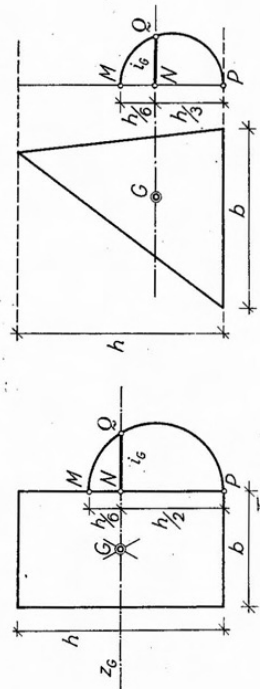


Fig. 4.40.

Fig. 4.41.

$MP = (h/2) + (h/6)$, la que cortará en Q al eje z_G . El segmento NQ , en la escala del dibujo, correspondé al radio de giro buscado.

b) Triángulo.

Para un eje baricéntrico paralelo a una base, el momento de inercia del triángulo vale $J_{z_G} = bh^3/36$. Como su área es $F = 1/2 bh$, se tiene

$$i_G^2 = \frac{2bh^3}{36bh} = \frac{h^2}{18}, \quad [4.168]$$

es decir, que i_G es media proporcional entre un tercio y un sexto de la altura del triángulo.

Para determinar i_G gráficamente, se lleva sobre una normal a la base y a partir de la misma un segmento $MP = (h/3) + (h/6)$. Luego (fig. 4.41) se traza una semicircunferencia de diámetro MP , que cortará el eje z_G en un punto Q . El segmento NQ , leído en la escala del dibujo, nos da el valor de i_G .

c) Círculo.

Para un eje baricéntrico cualquiera, el momento de inercia de la superficie del círculo es

$$J_{z_G} = \frac{\pi D^4}{64}. \quad [4.169]$$

Siendo su área $F = 1/4 \pi D^2$, resulta:

$$i_G^2 = \frac{4D^4}{64D^2} = \frac{D^2}{16}; \quad [4.170]$$

es decir

$$i_G = 1/4 D. \quad [4.171]$$

d) Sector parabólico.

Con la notación y ejes de la figura 4.39, y recordando que para el sector parabólico $F = 2/3 b.f$ se tiene:

$$i_{z_G}^2 = \frac{3.f.b^3}{2.30.f.b} = \frac{b^2}{20} \therefore i_{z_G} = 0,224 b$$

$$i_{y_G}^2 = \frac{3.8.b.f^3}{2.175.f.b} = \frac{24.f^2}{350} \therefore i_{y_G} = 0,263 f \quad [4.172]$$

4.2.10. Determinación del momento centrífugo del triángulo respecto de un par de ejes ortogonales.

Interesa conocer la determinación del momento centrífugo de un triángulo respecto de un par de ejes ortogonales cualesquiera, por cuanto la determinación del momento centrífugo de un polígono se reduce en última instancia, por descomposición en triángulos, a la determinación del de la figura 4.42.

Consideremos el caso más general, es decir, un triángulo cualquiera y un par de ejes ortogonales de origen arbitrario. La forma más simple para determinar el momento centrífugo en forma exacta es mediante la expresión [4.103], en la que intervienen tres momentos de inercia: dos respecto de los ejes dados, y un tercero respecto de un eje a 45° con los anteriores, y cuya determinación no ofrece dificultad.

El planteo analítico del problema, es decir, la resolución de la integral

$$J_{xy} = \int xy dF \quad [4.173]$$

es, en general, complejo, conduciendo a una integral de superficie cuyos límites de integración son las funciones que definen las rectas que constituyen los lados del triángulo. Sin embargo, existe un caso en que la integración es sencilla, y del que nos ocuparemos a continuación.

Supongamos el triángulo rectángulo de la figura 4.43, y el par de ejes coordenados z, y , de origen coincidente con el ángulo recto, y con respecto a los cuales se pide hallar el momento centrífugo. Consideremos

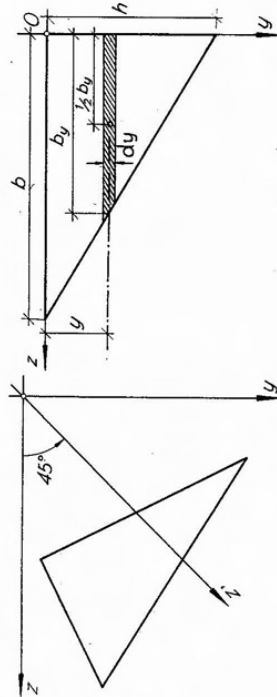


Fig. 4.42.

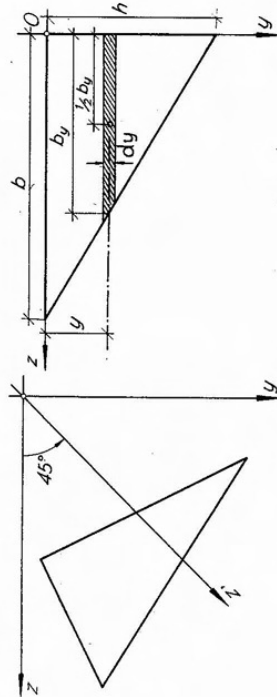


Fig. 4.43.

un rectángulo de espesor dy , de base b_y , paralelo al eje z . Siendo el área del mismo $dF = b_y dy$, el momento centrífugo elemental será:

$$dJ_{xy} = y \cdot b_y \cdot \frac{1}{2} b_y \cdot dy \quad [4.174]$$

pero, por semejanza de triángulos $b_y = b/h(h-y)$. Luego, reemplazando en [4.174] e integrando entre 0 y h , se tiene:

$$J_{xy} = \int_0^h \frac{1}{2} (b/h)^2 \cdot (h-y)^2 \cdot y \cdot dy \quad [4.175]$$

$$J_{xy} = \frac{b^2 h^3}{24} \quad [4.176]$$

Conocido J_{xy} , la obtención del momento centrífugo con respecto a un par de ejes baricéntricos paralelos a los catetos, es inmediata. En efecto, de acuerdo con la fórmula [4.78] tenemos, siendo $z_0 = b/3$ e $y_0 = h/3$:

$$J_{z_0 y_0} = \frac{b^3 h^2}{24} + \frac{1}{2} b \cdot h \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} = -\frac{b^2 h^2}{72} \quad [4.177]$$

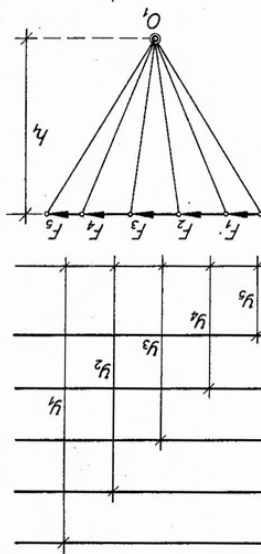
4.2.11. Determinación del momento centrífugo de una superficie de contorno irregular.

La determinación del momento centrífugo de una superficie de contorno irregular puede efectuarse numérica o gráficamente.

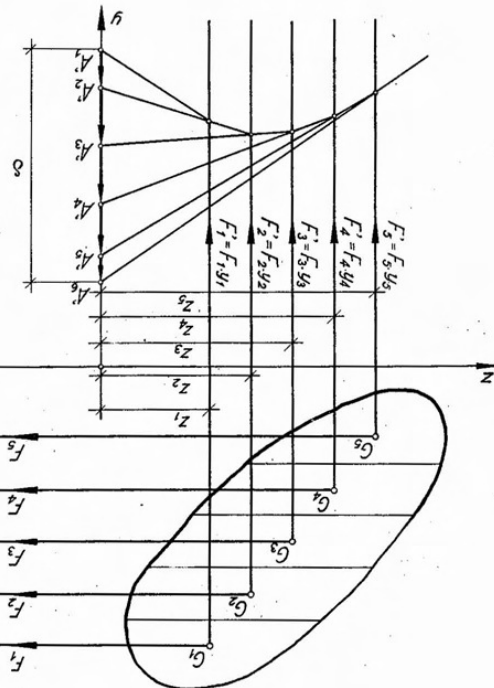
El procedimiento numérico es similar al empleado en 4.2.7 para la determinación del momento de inercia de una figura de este tipo respecto de un eje cualquiera. Consideremos la superficie de la figura 4.44 y los ejes z, y , con respecto a los cuales se pide hallar el momento centrífugo. Se divide para ello la figura en fajas paralelas a la dirección de uno de los ejes, el z por ejemplo. Luego se determinan los baricentros y se calculan las áreas F_i de dichas fajas. Conocidas las distancias z_i e y_i de cada baricentro a los ejes, se establecen los productos $F_i \cdot z_i \cdot y_i$, cuya suma algebraica nos da el momento centrífugo buscado; es decir,

$$J_{xy} = \sum_1^n F_i \cdot z_i \cdot y_i \quad [4.178]$$

En esta expresión las coordenadas de cada baricentro se introducen con el signo que les corresponda. Por otra parte, el resultado a que se



$$\begin{aligned} \text{Esc. } F &= \alpha \frac{\text{cm}}{\text{cm}^2} \\ \text{Esc. } L &= \rho \frac{\text{cm}}{\text{cm}^2} \\ \text{Esc. } J_{zy} &= h \cdot \alpha \cdot \rho^2 \frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^2} \end{aligned}$$



llega es sólo aproximado, por cuanto, análogamente a lo que ocurre en el caso de los momentos de inercia, su aplicación prescinde de considerar los momentos centrífugos de cada faja respecto de sus propios ejes baricéntricos paralelos a los dados. El error cometido será tanto menor cuanto mayor sea el número de fajas en que se haya dividido la figura.

La solución gráfica corresponde a la extensión del método gráfico de Culmann, aplicado en 4.2.7 para la determinación de momentos de inercia, al caso de los momentos centrífugos. Una vez dividida la figura en fajas paralelas a uno de los ejes (figura 4.44), se suponen aplicadas en los respectivos baricentros fuerzas ideales F_i , de intensidad igual al área de cada faja, y dirigidas paralelamente a uno de los ejes, el z por ejemplo.

Trazado un polígono funicular de estas fuerzas ideales, con polo O_1 y distancia polar h_1 , prolongando dos lados consecutivos hasta cortar el eje z , sus intersecciones con el mismo definen segmentos, A_1A_2 , por ejemplo, que, en la escala correspondiente, representan los momentos estáticos de las superficies F_i respecto del eje z , es decir $F_i y_i$.

Si aplicamos en los baricentros parciales nuevas fuerzas ideales $F'_i = F_i y_i$, actuando ahora en la dirección del eje y , y trazamos un segundo polígono funicular de polo O_2 y distancia polar h_2 , prolongando dos lados consecutivos del mismo hasta cortar el eje y , el segmento así determinado sobre este último corresponderá al momento estático de la fuerza ideal F'_i es decir, $F'_i z_i$. Pero, $F'_i = F_i y_i$, de donde

$$F'_i z_i = F_i y_i z_i. \quad [4.179]$$

La suma de los segmentos así determinados corresponderá al momento centrífugo buscado, es decir:

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n F_i y_i z_i.$$

Este segmento suma se obtiene por la intersección del primero y último lados del segundo funicular con el eje y ; es decir, $A'_1A'_6$, en la figura 4.44, cuya longitud será δ (cm).

La escala en que debemos leer dicho segmento será la misma que en el caso de la determinación de los momentos de inercia, es decir:

$$\text{Escala } J_{xy} = \text{Esc. Fuerzas} \times \text{Esc. Long.} \times h_1 \times h_2.$$

En consecuencia, de acuerdo con la figura 4.44 resulta

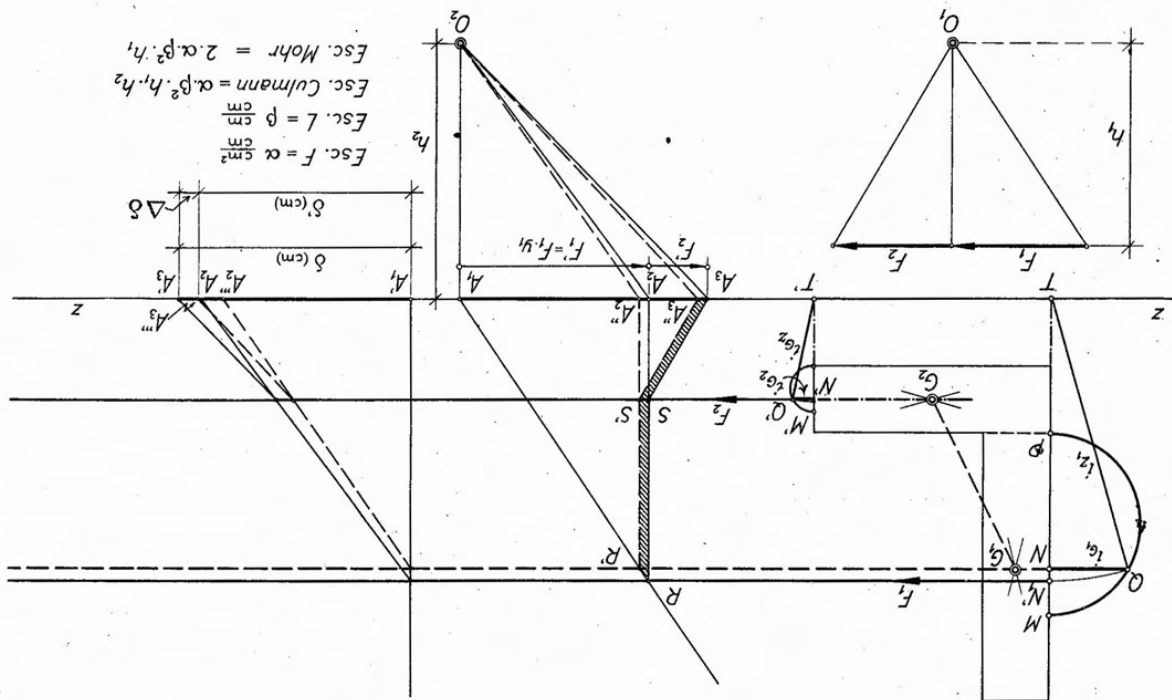
$$J_{xy} = \delta(\text{cm}) \cdot \alpha \cdot \beta^2 \cdot h_1 \cdot h_2 \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}} \quad [4.180]$$

4.2.12. Determinación gráfica exacta del momento de inercia de una figura geométrica compuesta.

Los métodos de Culmann y Mohr, aplicados a la determinación de momentos de inercia de figuras geométricas, conducen a resultados exactos si se introduce el concepto de radio de giro, como veremos a continuación. Sea la superficie de la figura 4.45, formada por dos rectángulos dispuestos en forma de L. Se pide determinar su momento de inercia respecto del eje $z-z$, paralelo a uno de los lados de la figura. Determinamos primeramente los baricentros de los rectángulos parciales, y luego calculamos sus respectivas áreas, que llamaremos F_1 y F_2 . Si aplicamos el método de Culmann en la forma descrita en 4.2.7 b, el resultado no será exacto, por cuanto se estarán despreciando los momentos de inercia de los rectángulos parciales respecto de sus propios ejes baricéntricos. Otro tanto ocurrirá, de aplicar el método de Mohr.

Recordando la expresión [4.73], vemos que ésta nos dice que el momento de inercia de una superficie respecto de un eje puede interpretarse como el producto del área de la misma por el cuadrado de una cierta distancia denominada radio de giro, o sea, que se supone la superficie concentrada en un punto, que dista del eje una distancia igual al radio de giro. En el caso de nuestro problema, si conociéramos los radios de giro de cada rectángulo parcial respecto del eje $z-z$, podríamos suponer aplicadas las dos fuerzas ideales F_1 y F_2 a distancias de $z-z$ iguales a sus correspondientes radios de giro. En esta forma, la aplicación de los procedimientos de Culmann o de Mohr, nos conducirá a resultados exactos, por cuanto ambos permiten calcular gráficamente la expresión $\sum_{i=1}^n F_i y_i^2$ que, en este caso, se transforma en $\sum_{i=1}^n F_i i_i^2$ que, de acuerdo con la [4.73], corresponde a la expresión exacta del valor del momento de inercia.

Para determinar el radio de giro de los rectángulos parciales respecto del eje $z-z$ necesitamos conocer los correspondientes a sus propios ejes baricéntricos, por cuanto, conocidos éstos, los correspondientes a $z-z$, se obtienen como hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos sean los radios de giro baricéntricos y las distancias que separan ambos ejes, conforme con los establecidos en [4.81].



Como se viera en 4.2.9, la determinación gráfica del radio de giro de un rectángulo es simple, y se reduce a la construcción de una media proporcional, por lo que no entraremos en mayores detalles.

Determinados en la figura 4.45 los radios de giro baricéntricos i_{a_1} , i_{a_2} , y construidos los triángulos rectángulos NQT y $N'Q'T'$, sus hipotenusas QT y $Q'T'$ corresponden a los radios de giro buscados. Haciendo centro en T y T' y rebatiendo sobre las verticales MT y $M'T'$, obtenemos los puntos N_1 y N'_1 ubicados a distancias de $z-z$ precisamente iguales a los respectivos radios de giro, en los que suponemos ahora actuando las fuerzas ideales F_1 y F_2 .

Puede observarse en la figura 4.45 que, para el rectángulo inferior, el punto N'_1 coincide prácticamente con el N' , es decir que en este caso, en que la altura del rectángulo es reducida con respecto a la distancia de su baricentro al eje considerado, es posible sin mayor error, considerar la fuerza ideal aplicada en el baricentro de la figura.

Completada la construcción de Culmann, el momento de inercia buscado será igual a la longitud del segmento $A'_1A'_3$ del segundo polígono funicular, leído en la correspondiente escala, es decir

$$J_z = \delta(\text{cm}) \cdot \alpha \cdot \beta^2 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}} \quad [4.181]$$

La aplicación del método de Mohr, también contemplada en la figura 4.45, nos lleva a leer en la escala de Mohr el área Ω encerrada entre el primer polígono funicular, su primer lado y el eje $z-z$ considerado; es decir,

$$J_z = 2 \Omega(\text{cm}) \cdot \alpha \cdot \beta^2 \cdot h_1 \cdot \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}} \quad [4.182]$$

El error a que conducen los métodos de Culmann y Mohr, cuando las fuerzas ideales representativas de las áreas parciales en que se divide la figura se suponen aplicadas en los respectivos baricentros, surge claramente de la figura 4.45. En efecto, en la misma, aparte de la construcción exacta que acabamos de desarrollar, hemos efectuado, superpuesta, la correspondiente a considerar las fuerzas F_1 y F_2 aplicadas en los baricentros de cada rectángulo. Para el procedimiento de Culmann, se obtiene en el segundo polígono funicular, como intersección de sus lados extremos con el eje $z-z$, $A'_1A'_3$, cuya longitud δ' (cm) es menor que δ (cm). La diferencia entre ambos, segmento $\Delta\delta$ (cm), leído en la escala correspondiente, nos da el error cometido.

En el método de Mohr, el área a considerar será $R'A_1A'_3S'$, y el error cometido estará representado por el área correspondiente a la diferencia de superficies, es decir $RR'S'A'_3A_3SR$, leída en la escala de Mohr.

4.2.13. Interpretación gráfica de las fórmulas para giro de ejes. Circunferencia de Mohr.

Existen construcciones gráficas que permiten determinar los momentos de inercia y centrífugos de una superficie correspondientes a cualquier eje o pares de ejes que pasen por un punto dado del plano. Dichas construcciones permiten determinar las direcciones de los ejes principales de inercia y además, para un eje cualquiera, la dirección conjugada del mismo. *Otto Mohr** desarrolla seis construcciones gráficas, entre ellas la conocida de la Elipse de Inercia, debida a Cauchy y Poincot. Nos limitaremos a encargar sólo una de ellas, la más práctica y simple, y que es debida a *Mohr*, aunque algunos autores la designen erróneamente como *Círculo de Land*, y otros *Círculo de Mohr-Land*.

Sea, figura 4.46, una superficie F cualquiera, un punto O de su plano, y un par de ejes z, y , arbitrarios, orientados en la forma que muestra la figura y cuyo origen coincide con O .

Si dF es un elemento de superficie su momento centrífugo respecto de z, y será

$$dJ_{zy} = zy dF \quad [4.183]$$

Llamando ϱ la distancia de dF a O , y α y β los ángulos que forman el radio vector ϱ con los ejes y y z respectivamente, resulta

$$\left. \begin{aligned} z &= \varrho \cdot \text{sen } \alpha \\ y &= \varrho \cdot \text{sen } \beta \end{aligned} \right\} \quad [4.184]$$

y reemplazando en [4.183]

$$dJ_{zy} = \varrho^2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta dF = dJ_{\varrho} \cdot \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \quad [4.185]$$

Tracemos ahora una circunferencia cualquiera, de centro C , diámetro $2R$ y que pase por O . Dicha circunferencia cortará los ejes z, y en los puntos B y D , respectivamente. Prolongando el radio vector hasta cortar en E la circunferencia, y uniendo E con D , el ángulo EDB será igual a β , por ser inscrito en la circunferencia y abarcar el arco BED , abarcado también por el ángulo BOE igual a β . Proyectando E sobre la cuerda BD , se tiene

$$EA = ED \cdot \text{sen } \beta \quad [4.186]$$

* O. MOHR. "Abhandlungen aus dem Gebiete des Technischen Mechanik". 1928. W. Ernst & Sohn.

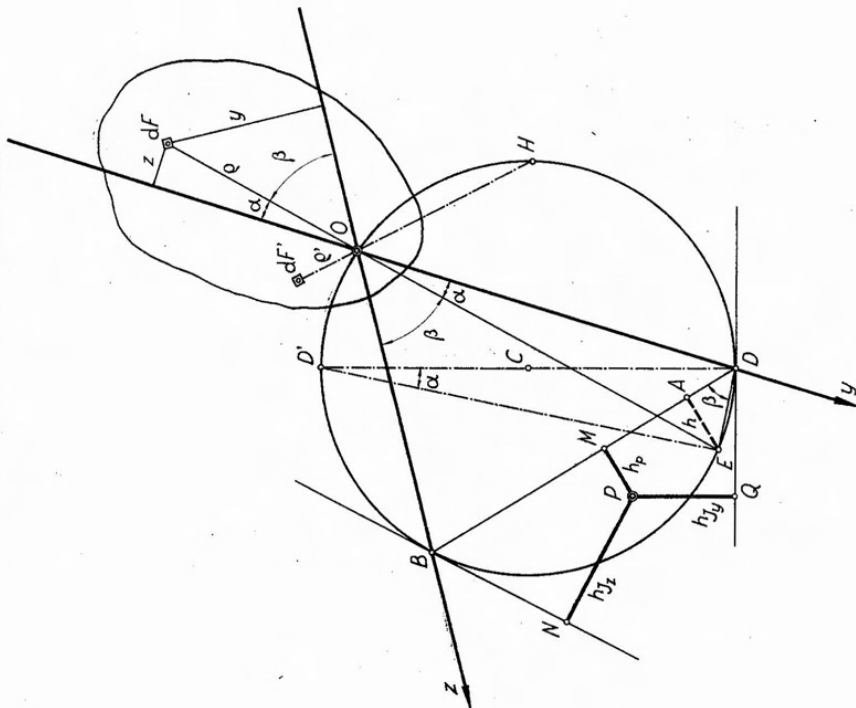


Fig. 4.46.

Trazando ahora el diámetro DD' y uniendo D' con E , el ángulo $ED'D$ será igual al α , por estar ambos inscritos en la misma circunferencia y abarcar el mismo arco ED . En consecuencia, resulta

$$ED = 2R \cdot \sin \alpha.$$

Reemplazando la $[4.187]$ en la $[4.186]$ y llamando h la distancia EA , se llega a

$$EA = h = 2R.\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta. \quad [4.188]$$

Despejando $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ de [4.188] y reemplazando en [4.185] resulta

$$dJ_{zy} = \frac{Q^2 dF}{2R} \cdot h.$$

Integrando para toda la superficie, obtenemos como expresión de su momento centrífugo respecto de z , y

$$J_{\pi l} = \int \frac{\hbar \rho^2 dF}{2R}.$$

Imaginemos ahora aplicada en E una masa ideal $q^2 dF/2R$. El producto $h \cdot q^2 dF/2R$ puede interpretarse como el momento estático de dicha masa ideal respecto de la cuerda BD . A otro elemento de superficie dF' le corresponderá una masa ideal $q'^2 dF'/2R$ aplicada en H ; es decir, que la circunferencia trazada será el lugar geométrico de un conjunto de puntos materiales de masa igual $q^2 dF_i/2R$, conjunto que admitirá un baricentro P , ubicado a una distancia $PM = h_P$ de la cuerda BD , tal que cumpla la condición

$$\int \frac{\varrho^2 dF}{2R} \cdot h = h_p \int \frac{\varrho^2 dF}{2R}.$$

Reemplazando esta expresión en [4.190] resulta

$$J_{xy} = h_p \int \frac{Q^2 dF}{2R} = h_p \cdot \frac{J_p}{2R}; \quad [4.192]$$

es decir, que el momento centrífugo de la superficie respecto del par de ejes dados es igual a la distancia del punto P a la cuerda determinada por la intersección de los ejes con la circunferencia, siempre que dicha distancia se lea en una escala igual a $J_p/2R$, siendo J_p el momento de inercia polar de la figura con respecto al origen O de los ejes, y $2R$ el diámetro de la circunferencia.

Esta circunferencia se denomina "Circunferencia de Mohr" y el punto P , polo de la circunferencia o punto principal de inercia.

De las consideraciones efectuadas para la determinación de P , surge que la posición del mismo depende de la circunferencia que se trace, pero no del par de ejes considerados. En consecuencia, una misma circunferencia nos permitirá determinar el momento centrífugo respecto de

cualquier par de ejes del mismo origen que los utilizados para el trazado, momento centrífugo que estará dado por la distancia del polo P a la cuerda correspondiente al par de ejes considerado.

Supongamos ahora que en la figura 4.46 mantenemos invariable la posición del eje z , y hacemos girar el y en torno a O . El punto D se desplazará sobre la circunferencia y , cuando y se superponga con z , D coincidirá con B , y la cuerda BD se transformará en la tangente en B a la circunferencia. Pero, cuando y y z coinciden el momento centrífugo se transforma en el momento de inercia. Por otra parte, la distancia h_p del polo a la cuerda se transforma ahora en la distancia h_y del mismo a la tangente en B a la circunferencia. En consecuencia:

$$J_z = h_y \cdot \frac{J_P}{2R} \quad [4.193]$$

Por consideraciones análogas, llegamos a que:

$$J_y = h_x \cdot \frac{J_P}{2R} \quad [4.194]$$

Consideremos ahora la circunferencia de Mohr de la figura 4.47*.

El momento centrífugo respecto del par de ejes z, y , está dado por la longitud del segmento PM , leído en la escala correspondiente. Si el par de ejes es tal que la cuerda definida por los mismos pasa por el polo, evidentemente la distancia PM se anula y, en consecuencia, el momento centrífugo con respecto a dichos ejes es también nulo. Tal el caso de los ejes $z-z'$. Ahora bien, sabemos que si para un par de ejes el momento centrífugo es nulo, los ejes son conjugados de inercia. Luego, para determinar la dirección conjugada de inercia de un eje cualquiera, bastará determinar el punto en que el eje dado corte la circunferencia (A). Uniendo dicho punto con el polo y prolongando la recta AP así determinada hasta cortar

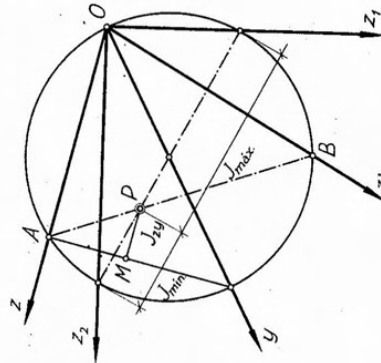


Fig. 4.47.

* Tanto en esta figura como en las subsiguientes, hemos prescindido de representar la superficie correspondiente, por resultar innecesario para los fines perseguidos.

nuevamente la circunferencia en un punto B , la recta OB define la dirección conjugada de inercia del eje z . Para una figura determinada y un punto dado O existen, como se sabe, infinitos pares de ejes conjugados de inercia. Entre ellos, un par será ortogonal, constituyendo los ejes principales de inercia. Para determinarlos, bastará trazar el diámetro que contenga P , y unir con O los puntos en que el mismo corta la circunferencia. Dichas direcciones serán las de los ejes principales de inercia, con respecto a los cuales los momentos de inercia alcanzan valores máximo y mínimo.

Analicemos ahora el caso de la figura 4.48. Construida la circunferencia de Mohr para un par de ejes cualesquiera z, y' , determinaremos el eje y , normal a z . Si ahora, manteniendo la ortogonalidad de los ejes, los giramos alrededor de O hasta que el eje z coincida con un diámetro (fig. 4.48 b), el eje y resultará tangente en O a la circunferencia. Por otra parte, el punto P permanecerá invariable, y los mo-

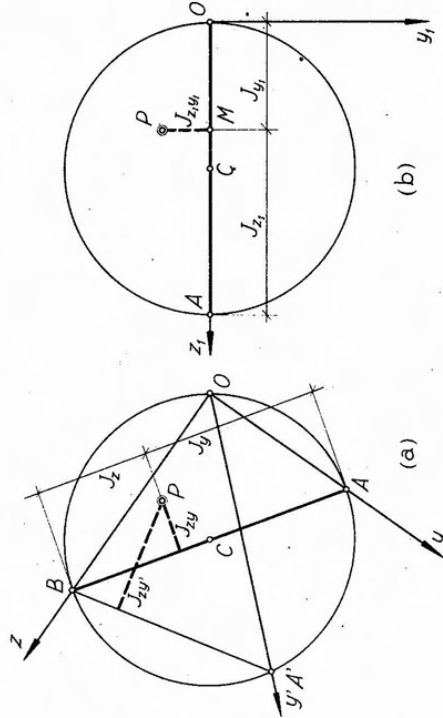


Fig. 4.48.

mentos de inercia respecto de los ejes z e y estarán dados respectivamente por los segmentos AM y MO . Además, el punto principal de inercia P se encuentra ubicado sobre la normal a z trazada por M , y a una distancia igual, en escala, a $J_{z-y'}$. En este caso, sobre el diámetro de la circunferencia, y a partir de O , aparece, en primer término, el momento de inercia respecto de y , y a continuación el relativo a z . Si hubiésemos girado los ejes hasta hacer coincidir el eje y con el diámetro

de la circunferencia, la situación se hubiese invertido, apareciendo en primer término a partir de O , el momento de inercia respecto de z .

Como consecuencia, surge la siguiente regla práctica para el trazado de la circunferencia de Mohr, cuando se conocen los momentos de inercia y centrífugo respecto de dos ejes ortogonales: A partir del punto sobre el que se desea trazar la circunferencia, se lleva sobre uno cualquiera de los ejes el momento de inercia correspondiente al otro y, a continuación, el restante, en una cierta escala. Con diámetro igual a la suma de ambos momentos de inercia, es decir, el momento de inercia polar, y con centro sobre el eje considerado, se traza una circunferencia, que será la circunferencia de Mohr buscada. El polo de la misma se encontrará sobre la vertical del punto que separa los segmentos representativos de ambos momentos de inercia y a una distancia del eje igual, en escala, al momento centrífugo. La ubicación del polo en el cuadrante que corresponda se efectuará conforme con el signo del momento centrífugo, en

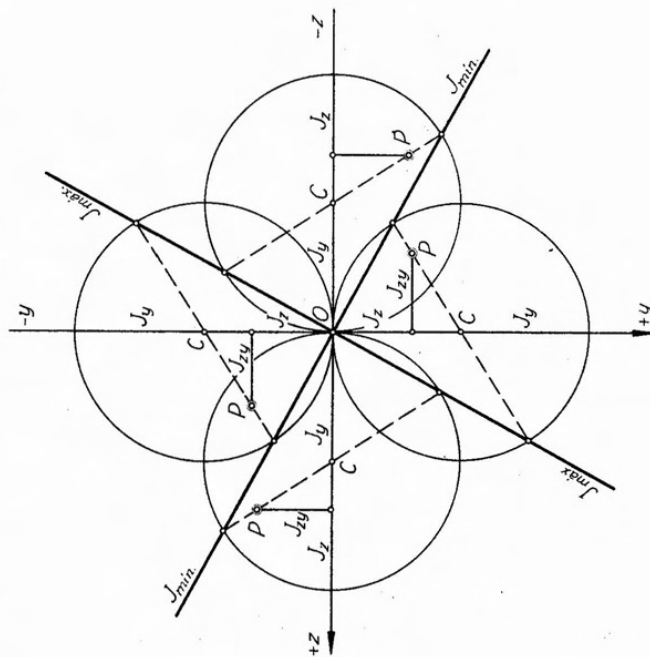


Fig. 4.49.

forma tal que el signo del producto de las coordenadas del polo corresponda al signo del momento centrífugo.

La circunferencia de Mohr puede construirse sobre cualquiera de los semiejes, positivos o negativos. En la figura 4.49 se ha procedido a la construcción de la circunferencia para los cuatro semiejes, determinándose en las mismas las direcciones principales de inercia, para una superficie cuyos momentos de segundo orden con respecto al par de ejes z, y , respondan a las siguientes características: $J_z < J_y$ y $J_{zy} < 0$. En los cuatro casos el polo se ha ubicado en forma tal que el signo del producto de sus coordenadas corresponda al signo de J_{zy} ; es decir, negativo.

Interesa conocer la forma de determinar el signo del momento centrífugo respecto de un par de ejes, en la circunferencia de Mohr.

Consideremos para ello la circunferencia de Mohr de la figura 4.50, construida sobre el eje z del par de ejes coordenados z, y . Sea z', y'

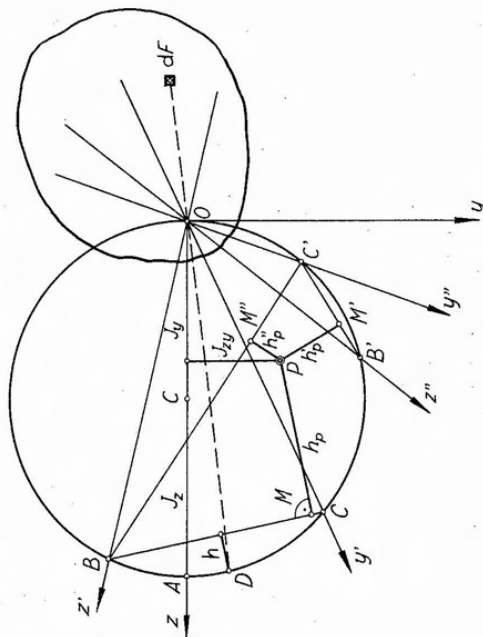


Fig. 4.50.

un par de ejes cualquiera concurrentes en O , con respecto a los cuales queremos conocer el momento centrífugo. Trazada la cuerda BC , determinada por las intersecciones de los ejes z', y' con la circunferencia de Mohr, la distancia $PM = h_p$, del polo P a la misma, nos da el valor absoluto del momento centrífugo buscado, restando sólo determinar su signo. Para ello, consideremos el elemento de superficie dF que, por

estar ubicado entre dos semiejes de igual signo, tendrá con respecto a $z'y'$ un momento centrífugo elemental positivo; es decir,

$$dJ_{z'y'} > 0. \quad [4.195]$$

Ahora bien, de acuerdo con la [4.189]

$$dJ_{z'y'} = \frac{q^2 dF}{2R} \cdot h \quad [4.196]$$

que se interpreta como el momento estático de la masa ideal $q^2 dF/2R$ aplicada en D (figura 4.50) con respecto a la cuerda BC . Siendo la masa ideal eminentemente positiva, en la [4.196] los signos de $dJ_{z'y'}$ y h se corresponderán. Por otra parte, vimos que las distancias del polo, baricentro del sistema de masas ideales, a las cuerdas determinadas por pares de ejes leídas en la escala $J_F/2R$, corresponden directamente a momentos centrífugos. Luego, h , en la escala $dJ_F/2R$, será directamente el momento centrífugo elemental, es decir, $dJ_{z'y'}$. Por ser este último valor positivo, también lo será h . Como P , polo de la circunferencia, resulta ubicado del lado opuesto a D con respecto a la cuerda CD , h_p tendrá signo contrario al de h ; es decir, será negativo, resultando en consecuencia

$$J_{z'y'} < 0. \quad [4.197]$$

En este caso, los dos semiejes que determinan la cuerda BC son positivos. Si uno de ellos hubiese sido negativo, habría inversión de signos. En efecto, el momento centrífugo elemental $dJ_{z'y'}$, hubiera resultado negativo y, en consecuencia, también lo sería la distancia h . En cambio h_p , por encontrarse ubicada del lado opuesto de la cuerda, sería positivo, y con él el momento centrífugo $J_{z'y'}$.

En el caso analizado, en que $J_{z'y'}$ es negativo, aparte de que los dos semiejes que determinan la cuerda son del mismo signo, resultan el polo P y el origen O ubicados del mismo lado de la cuerda. Lo mismo ocurre para el par de ejes $z''y''$, donde, con respecto a la cuerda $B'C'$ determinada por los mismos, el polo P y el origen O resultan ubicados de un mismo lado. Para este par de ejes, el momento centrífugo también es negativo. En cambio, para el par de ejes $z'y''$, la situación es distinta, por cuanto la cuerda BC' determinada por los mismos, separa el polo P del origen O . En tal caso el momento centrífugo será positivo. Como regla general para la determinación del signo de los momentos centrífugos tendremos: para semiejes del mismo signo cuando polo y origen resultan separados por la cuerda correspondiente, el momento centrífugo será positivo, y si quedan ubicados de un mismo lado, negativo.

Para el trazado de la circunferencia de Mohr, se requiere conocer tres momentos de segundo orden: dos momentos de inercia y un momento centrífugo respecto de un par de ejes o bien tres momentos de inercia respecto de tres ejes cualesquiera. Analizaremos a continuación los distintos casos posibles.

a) Se conocen los momentos de inercia respecto de dos ejes ortogonales y el momento centrífugo respecto del mismo par de ejes.

Es el caso más simple. Supongamos, figura 4.51, el par de ejes z , y de origen O , y admitamos conocer J_z , J_y y J_{zy} , siendo por ejemplo $J_z > J_y$; $J_{zy} < 0$. Tracemos por O una circunferencia cualquiera de diámetro $2R$, y por los puntos en que la misma corta los ejes z y y ,

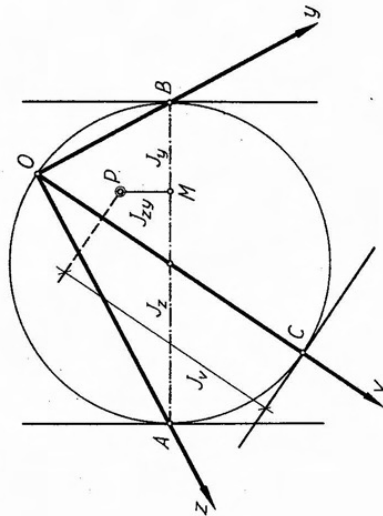


Fig. 4.51.

las tangentes a la misma. Además, unamos A con B . Por tratarse de un par de ejes ortogonales, resulta $J_P = J_z + J_y$, de donde la escala de la circunferencia resulta ser $J_z + J_y/2R$. Para definir totalmente la circunferencia de Mohr es necesario ubicar su polo P . Sabemos que éste se debe encontrar a distancia de las tangentes en A y B a la circunferencia, iguales, en la escala resultante, a J_z y J_y respectivamente. Además, la distancia de P a la cuerda AB , en la escala resultante, debe ser igual a J_{zy} .

En consecuencia, llevando sobre el diámetro y a partir de A un segmento AM tal que en la escala de la circunferencia represente J_z , el segmento MB resulta igual, en escala, a J_y . Levantando por M una normal a AB sobre la misma y a una distancia PM que en la escala corresponda a J_{zy} , se encontrará ubicado el polo P . Falta aún definir

a) a qué lado de AB debe llevarse MP . Para ello recordemos la regla general enunciada anteriormente. El círculo ha sido trazado para dos semiejes positivos (semiejes que establecen el signo de J_{xy}). En consecuencia, siendo $J_{xy} < 0$ por hipótesis, polo y origen deben encontrarse de un mismo lado de la cuerda, por lo que MP deberá llevarse hacia arriba.

b) Se conocen tres momentos de inercia, dos respecto de un par de ejes ortogonales, y el tercero respecto de otro eje cualquiera, del mismo origen.

Supongamos, figura 4.51, que se conocen los momentos de inercia respecto de los ejes z , y , y v ; es decir, J_z , J_y y J_v . Siendo z e y ortogonales, la determinación de la escala se efectúa en la misma forma que en el caso a). Conocida la escala de la circunferencia de Mohr, ubicamos sobre el diámetro AB el punto M , como antes. El polo P debe encontrarse sobre la normal a AB trazada por M . Si trazamos ahora una recta paralela a la tangente en C a la circunferencia, y a una distancia de ésta tal que en la escala correspondiente represente el tercer momento de inercia conocido J_v , la intersección de dicha paralela con la normal trazada por M , define el polo P buscado, lo que es evidente.

c) Se conocen los momentos de inercia respecto de tres ejes no ortogonales.

Sean los ejes z , y , v de la figura 4.52, concurrentes en O , con respecto a los cuales se conocen los momentos de inercia J_z , J_y y J_v . Trazada la circunferencia de diámetro $2R$, que pasa por O , ésta cortará los ejes dados en los puntos A , B y C .

No siendo ningún eje ortogonal a alguno de los restantes, no nos es posible determinar directamente la escala, por cuanto desconocemos J_p . En consecuencia, nos encontramos ante un problema con dos incógnitas: la escala de la circunferencia de Mohr, y su polo P .

El problema se resuelve ubicando primeramente el polo. Conocida la posición de P , la escala se deduce de inmediato.

Para ubicar el polo, adoptemos una escala cualquiera de momentos de inercia K . Tracemos por los puntos A , B y C , en que los tres ejes cortan la circunferencia, las correspondientes tangentes a la misma, y luego tres rectas paralelas a éstas, ubicadas a distancias tales que en la escala K adoptada, correspondan a los tres momentos de inercia conocidos.

Determinemos los puntos M y N , de intersección de las tangentes, y M' y N' , intersección de las paralelas. Uniendo M con M' y

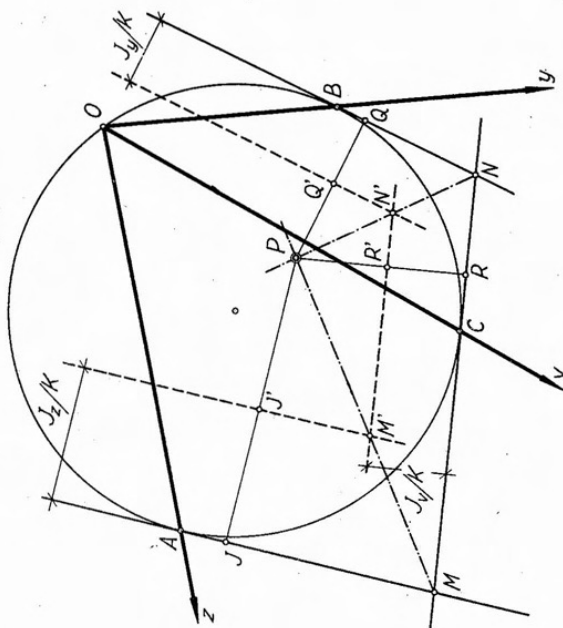


Fig. 4.52.

N con N' , la intersección de las rectas así determinadas define el punto P , polo de la circunferencia de Mohr. Para justificar lo anterior, tracemos por P rectas normales a las tres tangentes; dichas normales definirán sobre las tres tangentes los puntos J , R y Q y sobre las paralelas a las mismas, los puntos J' , R' y Q' . Ahora bien, por construcción tenemos

$$\left. \begin{aligned} JJ' \cdot K &= J_z \\ RR' \cdot K &= J_y \\ QQ' \cdot K &= J_v \end{aligned} \right\} \quad [4.198]$$

Por otra parte, por semejanza de triángulos, se llega a

$$\frac{JJ'}{JP} = \frac{RR'}{RP} = \frac{QQ'}{QP} \quad [4.199]$$

Despejando JJ' , RR' y QQ' de las [4.198] y reemplazando sus valores en la [4.199] resulta

$$\frac{J_z}{JP} = \frac{J_y}{RP} = \frac{J_v}{QP} = K_1 \quad [4.200]$$

Luego P resulta ser el polo buscado y la escala de la circunferencia de Mohr es, en consecuencia, $K_1(\text{cm}^4/\text{cm})$.

d) Se conocen los momentos de inercia respecto de dos ejes no ortogonales, y el correspondiente momento centriúguo.

En este caso, los elementos conocidos son J_z , J_y y J_{zy} , pero, al no ser ortogonales los ejes, no es posible determinar a priori la escala de la circunferencia de Mohr, por no conocerse J_p .

El problema se resuelve en forma semejante al caso anterior. Trazada una circunferencia cualquiera (figura 4.53), y las tangentes a la misma en los puntos en que corta los ejes, se elige una escala de momentos de segundo orden, arbitraria, K . Ubicada la cuerda AB , se trazan paralelas a esta última y a las dos tangentes, a distancias tales que en la escala adoptada correspondan a los valores de J_{zy} y de ambos momentos de inercia respectivamente. Se determinan luego los puntos de intersección A' y B' de las paralelas, que unidos con los puntos A y B respectivamente, determinan dos rectas que se cortan en un punto P que será el polo de la circunferencia de Mohr.

En efecto, trazando por el punto P , así determinado, rectas normales a las tangentes en A y B y a la cuerda AB , las mismas deter-

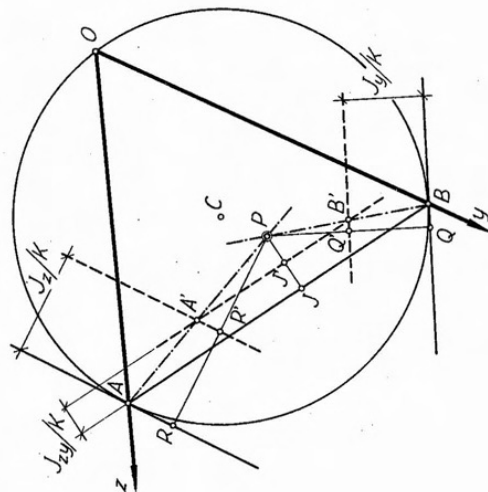


Fig. 4.53.

minan sobre éstas y sus paralelas los puntos R, R' ; JJ' ; Q y Q' . Por construcción tenemos

$$\left. \begin{aligned} J_z &= K \cdot RR' \\ J_y &= K \cdot QQ' \\ J_{zy} &= K \cdot JJ' \end{aligned} \right\} \quad [4.201]$$

Además, por semejanzas de triángulos, se llega a

$$\frac{RR'}{RP} = \frac{QQ'}{QP} = \frac{JJ'}{JP} \quad [4.202]$$

Despejando RR' , QQ' y JJ' de las [4.201], reemplazando sus valores en [4.202] y simplificando se llega finalmente a

$$\frac{J_z}{RP} = \frac{J_y}{QP} = \frac{J_{zy}}{JP} = K_1 \quad [4.203]$$

El punto P así determinado cumple con la condición de que sus distancias a las dos tangentes y a la cuerda AB , en la escala K , corresponden a J_z , J_y y J_{zy} , respectivamente. En consecuencia, será el polo buscado. La escala de la circunferencia de Mohr resulta ser

$$K_1 \left(\frac{\text{cm}^4}{\text{cm}} \right).$$