HOJA
1

TEMA

TP8

GEOMETRIA DE LAS MASAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

19 DE FEBRERO 2021

GEOMETRIA DE LAS MASAS – PARTE 1
TRABAJO PRÁCTICO Nº8

CURSO 4 – CARNICER – PARENTE

SEGUNDO CUAT. 2020
MODALIDAD ONLINE

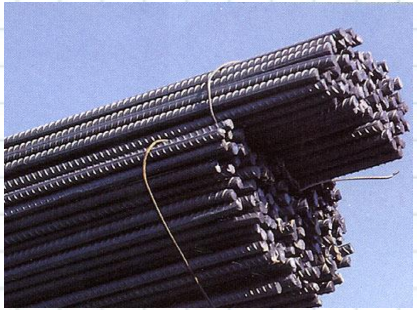
depto. Estabilidad

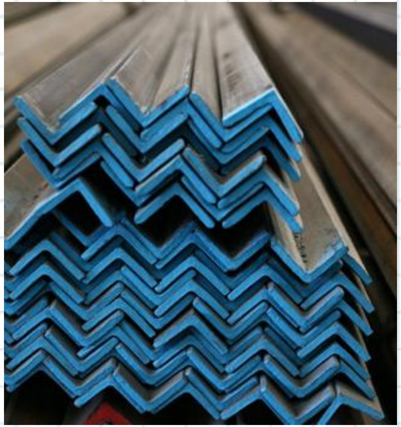
.UBAfiuba FACULTAD DE INGENIERÍA

www.ingenieria.uba.ar

Secciones

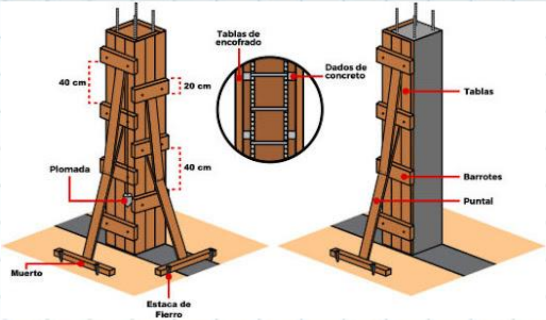
Normalizadas





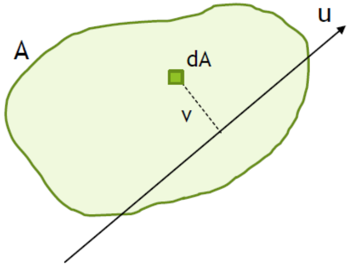
Secciones

A medida de las necesidades



Momento estático

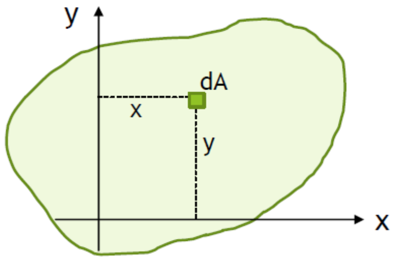
Momento de primer orden



$$S_u = \int_A v.dA$$

Considerando la superficie plana de área **A** y una recta **u** en el plano de la superficie, que puede o no cortarla, se define **Su** como momento estático, siendo **v** la distancia al eje.
Si la coordenada **v** es positiva de un lado de la recta **u** y negativa al otro, entonces según sea la posición relativa de la recta respecto de la superficie **Su** será: negativo positivo o nulo.

- **Unidades: [S]=m^2.m=m^3**
- **El área es positiva, el signo del momento estático depende de la coordenada.**
- **Puede ser positivo, negativo o nulo.**

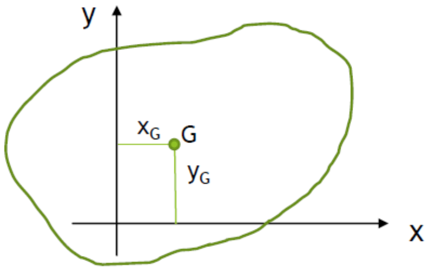


$$\begin{cases} S_x = \int_A y.dA \\ S_y = \int_A x.dA \end{cases}$$

Si se toma un sistema de referencia ortogonal, cartesiano y arbitrario x, y, la expresión de momento de primer orden respecto de estos ejes es:

Baricentro

Se define como Baricentro, centro de masas, centroide de la sección a un punto G:
- cuya masa es igual a la suma de las masas que componen el sistema
- y cuyo momento estático respecto a un eje es igual a la suma de los momentos estáticos respecto a dicho eje de las masas que componen el sistema.



$$\begin{cases} S_x = A.y_G \\ S_y = A.x_G \end{cases} \; ; \; \begin{cases} S_x = \int_A y.dA \\ S_y = \int_A x.dA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A.y_G = \int_A y.dA \\ A.x_G = \int_A x.dA \end{cases}$$

$$A = \int_A dA$$

Coordenadas del baricentro

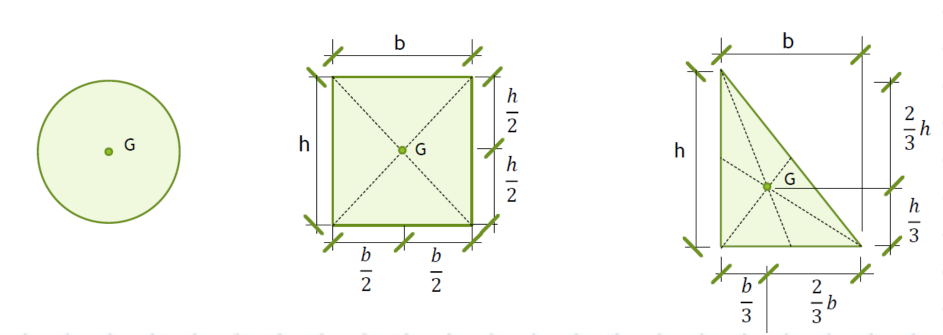
$$\begin{cases} y_G = \dfrac{\int_A y.dA}{A} = \dfrac{S_x}{A} \\ x_G = \dfrac{\int_A x.dA}{A} = \dfrac{S_y}{A} \end{cases}$$

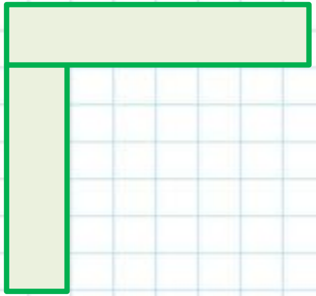
Unidades: m

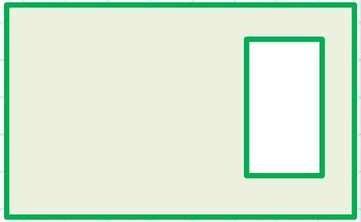
Cualquier recta que pase por el baricentro se denomina recta o eje baricéntrico. Respecto ella el momento estático es 0.

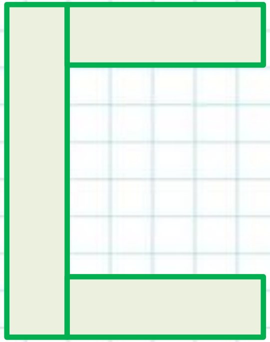
Baricentro

- La posición del baricentro es una propiedad de la superficie. Es única e independiente del sistema coordenado
- Puede pertenecer o no la superficie.
- Si hay un eje de simetría el mismo será baricéntrico.
- Si hay dos ejes de simetría entonces el baricentro estará en la intersección de los mismos.

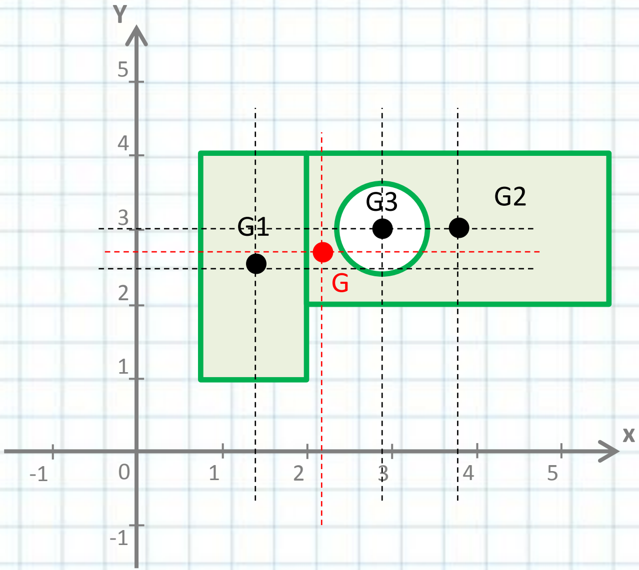


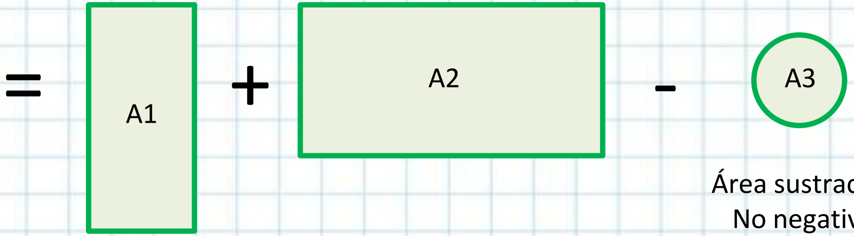






Sección compuesta





Área sustractiva
No negativa.

$$A_{TOTAL} = \int_A dA = A1 + A2 - A3$$

$$y_G = \frac{\int_A y \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{y_{G1} \cdot A1 + y_{G2} \cdot A2 - y_{G3} \cdot A3}{A1 + A2 - A3}$$

$$x_G = \frac{\int_A x \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{x_{G1} \cdot A1 + x_{G2} \cdot A2 - x_{G3} \cdot A3}{A1 + A2 - A3}$$

TEMA

TP8

GEOMETRIA
DE LAS MASAS

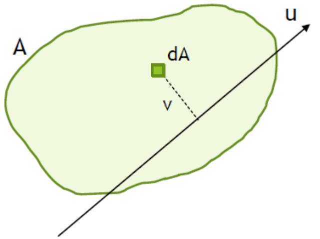
F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

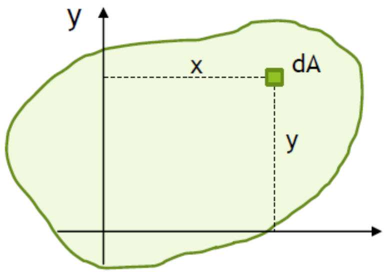
Momento de inercia

Momento de segundo orden



$$I_u = \int_A v^2 . dA$$

- Unidades: [I] ó [J]=$m^2 . m^2 = m^4$
- El área es positiva, magnitud de distancia al cuadrado siempre positiva.
- el signo del momento de inercia SIEMPRE positivo y nunca NULO.



$$\begin{cases} I_x = \int_A y^2 . dA \\ I_y = \int_A x^2 . dA \end{cases}$$

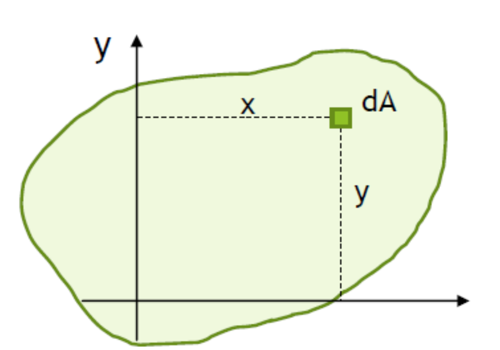
TEMA

TP8

GEOMETRIA
DE LAS MASAS

Momento centrífugo

Momento de segundo orden



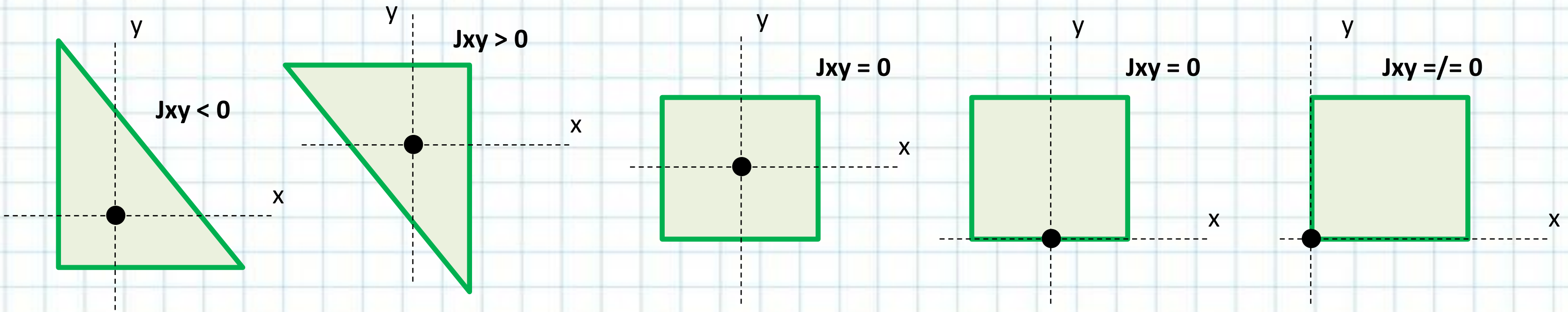
$$I_{xy} = \int_A x.y.dA$$

- Unidades: [Ixy] ó [Jxy]=m.m. m^2=m^4
- El área es positiva, las distancia dependen del sistema de coordenadas.
- el signo del momento de centrifugo puede ser positivo, negativo o nulo.

- Si el Momento Centrífugo es nulo, se dice que el <u>par de ejes</u> (x e y) son Conjugados de Inercia.

- Si además de ser Conjugados, el <u>par de ejes</u> son ortogonales entre sí, se los denomina Ejes Principales de Inercia.

- Si uno de los ejes es de simetría, cualquiera sea el otro eje, el Momento Centrífugo será nulo.



HOJA

10

TEMA

TP8

GEOMETRIA DE LAS MASAS

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

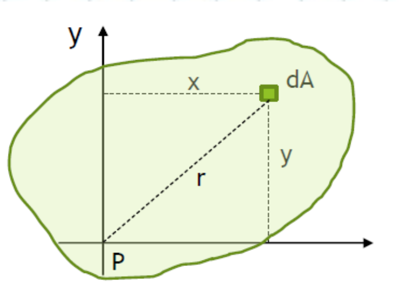
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

Momento polar y radio de giro



$$I_P = \iint r^2 . dA$$

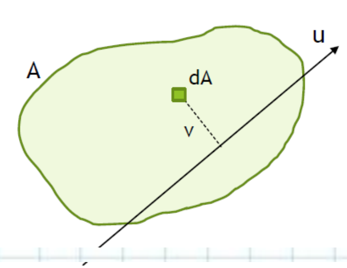
Si los ejes son ortogonales:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

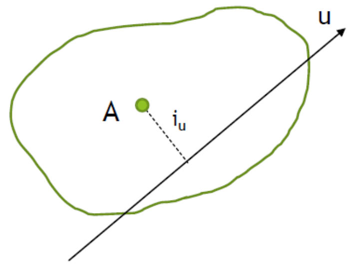
Por lo tanto: $$I_P = \iint (x^2 + y^2) dA = \iint x^2 dA + \iint y^2 dA = Ix + Iy$$

$$\boxed{I_P = Ix + Iy}$$

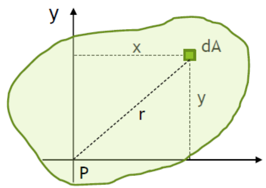
- Unidades: [Ip] ó [Jp]=m².m²=m⁴
- Para todo par dejes ortogonales que pasen por el polo P, el valor del momento Polar es invariante.
- Es positivo y no nulo.



$$I_u = \int_A v^2 . dA$$



$$I_u = {i_u}^2 . A$$



$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}$$

$$\begin{cases} i_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{A}} \\ i_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}} \end{cases}$$

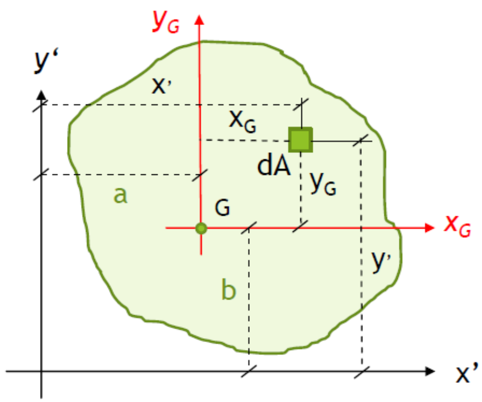
$$i_P = \sqrt{\frac{I_P}{A}}$$

- Unidades: [i]=m

Teorema de Steiner

Teorema de Steiner, cuyo contenido reza:

El momento de inercia de una superficie respecto de un eje cualquiera de su plano, es igual al momento de inercia de la misma respecto de un eje baricéntrico paralelo al anterior más el producto del área de la superficie por el cuadrado de la distancia que separa ambos ejes.



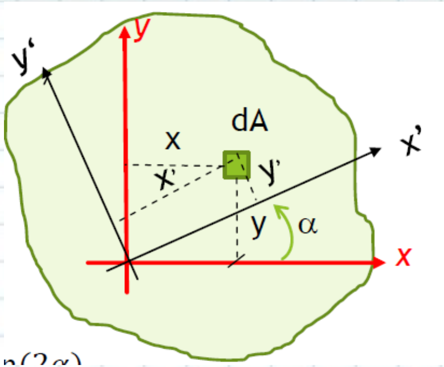
$$\boxed{I_{x'y'} = I_{xGyG} + a.b.A}$$

$$\boxed{I_{x'} = I_{xG} + b^2.A}$$

$$\boxed{I_{y'} = I_{yG} + a^2.A}$$

HOJA
12

Ejes principales de inercia



$$\begin{cases} x' = x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha) \\ y' = y.\cos(\alpha) - x.\sin(\alpha) \end{cases}$$

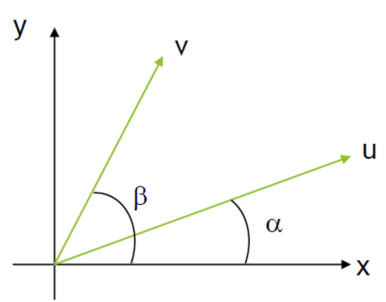
$$\boxed{I_{x'y'} = \cos(2\alpha)\, I_{xy} - \frac{\sin(2\alpha)}{2}(I_y - I_x)}$$

$$\boxed{I_{x'} = \sin(\alpha)^2 . I_y + \cos(\alpha)^2 . I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy}}$$

$$\boxed{I_{y'} = \cos(\alpha)^2 . I_y + \sin(\alpha)^2 . I_x + \sin(2\alpha)\, I_{xy}}$$

Se desea hallar el valor del ángulo β tal que el Momento Centrífugo Juv sea nulo, es decir, se desea hallar el Eje Conjugado del eje u.

Se conocen todos los Momentos de Segundo Orden referidos a los ejes x-y, y el ángulo α que forma el eje u con dicho sistema.



$$\tan(\beta) = \frac{I_x - I_{xy}.\tan(\alpha)}{I_{xy} - I_y.\tan(\alpha)}$$

Definición:

Un par de ejes son conjugados de inercia si el momento centrifugo respecto a dichos ejes es nulo. Respecto a un punto existen infinitos pares de ejes conjugados.

Existe un único par de ejes conjugados que son ortogonales entre sí, a estos se los denomina principales de inercia.

TEMA

TP8

GEOMETRIA DE LAS MASAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

HOJA

13

TEMA

TP8

GEOMETRIA DE LAS MASAS

Ejes principales de inercia

Un par de ejes son conjugados de inercia si el momento centrifugo respecto a dichos ejes es nulo. Respecto a un punto existen infinitos pares de ejes conjugados.

Existe un único par de ejes conjugados que son ortogonales entre sí, a estos se los denomina principales de inercia.

Para los ejes principales de inercia, los momentos de inercia alcanzan los valores máximo y mínimo. Obviamente el centrifugo es nulo por que son conjugados.

Todo eje de simetría es principal de inercia

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = 0 \qquad \text{Ó bien,} \qquad \frac{dI_{y'}}{d\alpha} = 0$$

$$\boxed{\tan(2\alpha_0) = \frac{2.\,I_{xy}}{(I_y - I_x)}}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2 J_{zy}}{J_y - J_z}. \qquad [4.107]$$

Existen dos valores del ángulo $2\alpha_1$ que satisfacen la [4.107] y que difieren entre sí de 180°. En consecuencia habrá también dos valores α_1, que difiriendo 90° también la satisfacen. Los ejes que corresponden a estos dos últimos valores de α_1 serán, pues, ortogonales, siendo $J_{z'}$ máximo para uno de ellos y mínimo para el restante.

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}{}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}{}^2}$$

$$\boxed{I_{I,II} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}{}^2}}$$

$$\alpha_1$$

$$J_I = sen(\alpha_1)^2 \cdot J_x + \cos(\alpha_1)^2 \cdot J_y - sen(2\alpha_1) \cdot J_{xy}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^o$$

$$J_{II} = sen(\alpha_2)^2 \cdot J_x + \cos(\alpha_2)^2 \cdot J_y - sen(2\alpha_2) \cdot J_{xy}$$

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

HOJA
14

TEMA

TP8

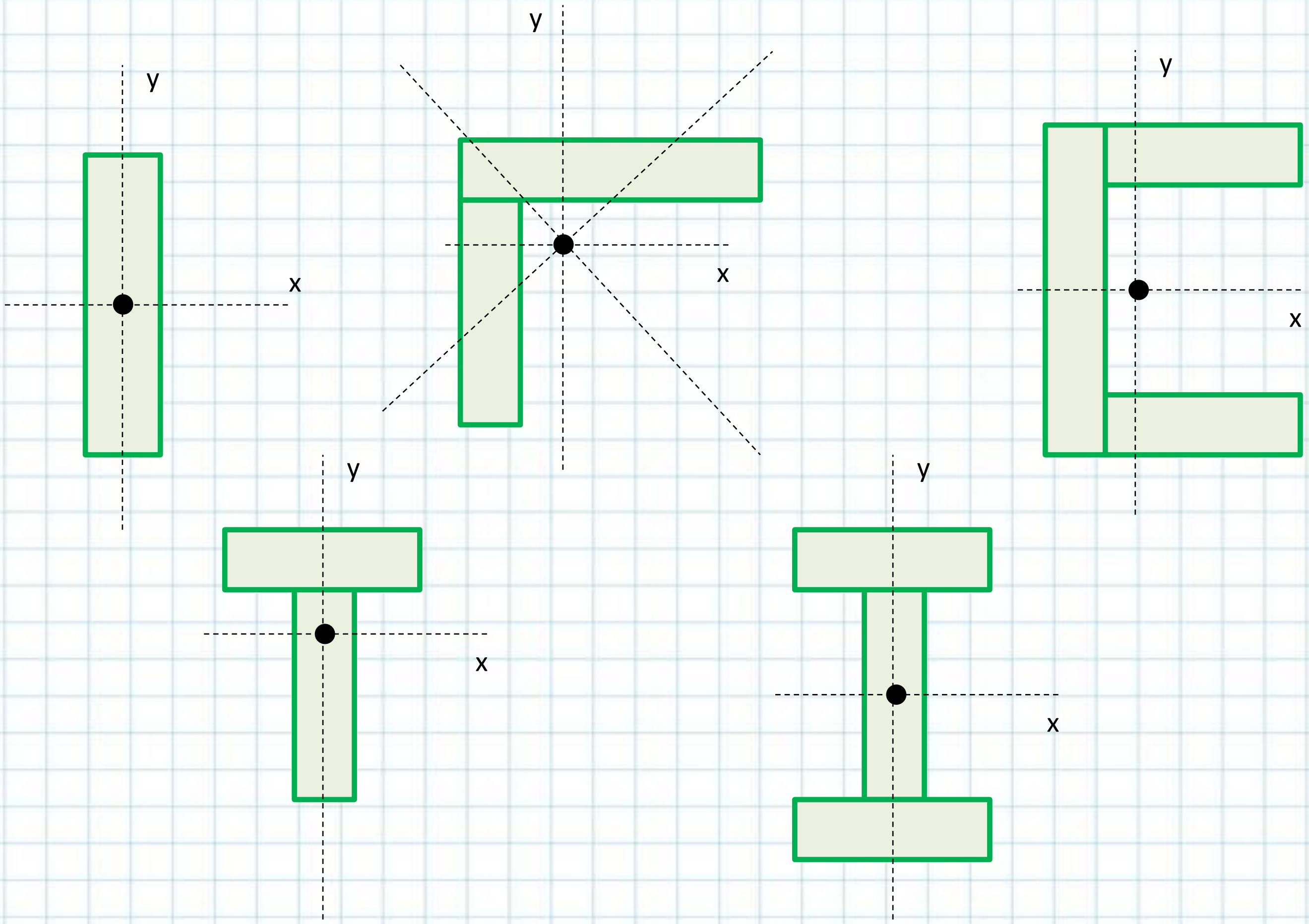
GEOMETRIA
DE LAS MASAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Ejes principales de inercia



HOJA

15

TEMA

TP8

GEOMETRIA DE LAS MASAS

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

ESTABILIDAD 1

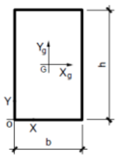
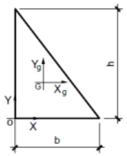
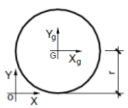
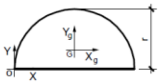
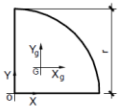
2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

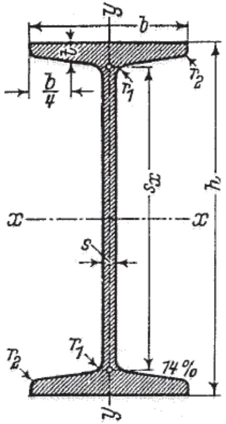
Tablas

Figuras geométricas

	$x_g = \frac{b}{2}$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$	$J_{xg} = \frac{b \cdot h^3}{12}$
	$y_g = \frac{h}{2}$	$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$	$J_{yg} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$
	$F = b \cdot h$	$Jxy = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$	$J_{xyg} = 0$
	$x_g = \frac{b}{3}$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$J_{xg} = \frac{b \cdot h^3}{36}$
	$y_g = \frac{h}{3}$	$J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$	$J_{yg} = \frac{b^3 \cdot h}{36}$
	$F = \frac{b \cdot h}{2}$	$Jxy = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$	$J_{xyg} = \frac{-b^2 \cdot h^2}{72}$
	$x_g = r$	$J_x = \frac{5\,\pi \cdot r^4}{4} = \frac{5\,\pi \cdot D^4}{64}$	$J_{xg} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$
	$y_g = r$	$J_y = \frac{5\,\pi \cdot r^4}{4} = \frac{5\,\pi \cdot D^4}{64}$	$J_{yg} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$
	$F = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$	$Jxy = \pi \cdot r^4 = \frac{\pi \cdot D^4}{16}$	$J_{xyg} = 0$
	$x_g = r$	$J_x = \frac{\pi \cdot r^4}{8} = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$	$J_{xg} = r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$
	$y_g = \frac{4r}{3\pi}$	$J_y = \frac{5\,\pi \cdot r^4}{8} = \frac{5\,\pi \cdot D^4}{128}$	$J_{yg} = \frac{\pi \cdot r^4}{8} = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$
	$F = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot D^2}{8}$	$Jxy = \frac{2r^4}{3}$	$J_{xyg} = 0$
	$x_g = \frac{4r}{3\pi}$	$J_x = \frac{\pi \cdot r^4}{16} = \frac{\pi \cdot D^4}{256}$	$J_{xg} = r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)$
	$y_g = \frac{4r}{3\pi}$	$J_y = \frac{\pi \cdot r^4}{16} = \frac{\pi \cdot D^4}{256}$	$J_{yg} = r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)$
	$F = \frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{\pi \cdot D^2}{16}$	$Jxy = \frac{r^4}{8}$	$J_{xyg} = r^4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)$

Tablas

Perfiles normalizados



F = Sección

G = Peso

U = Superficie exterior por m de pieza

J = Momento de inercia } referido al eje correspondiente de flexión

W = Momento resistente } referido al eje correspondiente de flexión

$i = \sqrt{\dfrac{J}{F}}$ = Radio de giro

S_x = Momento estático de media sección de la I

$s_x = \dfrac{J_x}{S_x}$ Separación entre los centros de tracción y compresión

Datos sobre largos, ejemplos de designación, de pedidos, y tolerancias, *ver capítulo 2.9.*

Material : Preferentemente clases de acero según DIN 17 100

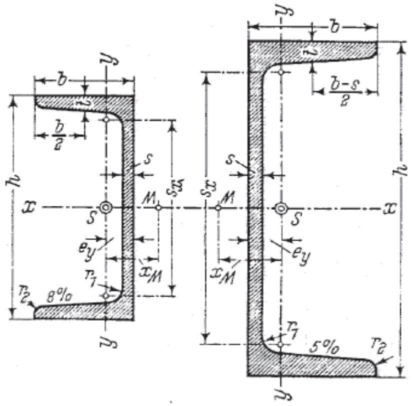
Designación I	Dimensiones en mm					F	G	U	Para el eje de flexión x — x			Para el eje de flexión y — y			S_x	s_x
	h	b	$s = r_1$	t	r_2	cm²	kg/m	m²/m	J_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	J_y cm⁴	W_y cm³	$i_y = i_1$ (min) cm	cm³	cm
80	80	42	3,9	5,9	2,3	7,57	5,94	0,304	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	6,84
100	100	50	4,5	6,8	2,7	10,6	8,34	0,370	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	8,57
120	120	58	5,1	7,7	3,1	14,2	11,1	0,439	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	10,3
140	140	66	5,7	8,6	3,4	18,2	14,3	0,502	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	47,7	12,0
160	160	74	6,3	9,5	3,8	22,8	17,9	0,575	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	13,7
180	180	82	6,9	10,4	4,1	27,9	21,9	0,640	1 450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	15,5
200	200	90	7,5	11,3	4,5	33,4	26,2	0,709	2 140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	17,2

HOJA

17

Tablas

Perfiles normalizados



Para ⊏ ≤ 300 Para ⊏ > 300

F = Sección

G = Peso

U = Superficie exterior por m de pieza

J = Momento de inercia

W = Momento resistente

$i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ = Radio de giro

(referido al eje correspondiente de flexión)

S_x = Momento estático de media sección ⊏

$s_x = \frac{J_x}{S_x}$ = Separación entre los centros de compresión y tracción

x_M = Distancia del centro del esfuerzo cortante al eje y-y

Datos sobre largos, ejemplos de designación, de hojas de pedido, y tolerancias, *ver capítulo 2.9.*

Material: Preferentemente clases de acero según DIN 17 100

80	80	45	6	8	4	11,0	8,64	0,312	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	6,65	1,45	2,67
100	100	50	6	8,5	4,5	13,5	10,6	0,372	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	8,42	1,55	2,93
120	120	55	7	9	4,5	17,0	13,4	0,434	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	10,0	1,60	3,03
140	140	60	7	10	5	20,4	16,0	0,489	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	11,8	1,75	3,37
160	160	65	7,5	10,5	5,5	24,0	18,8	0,546	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	13,3	1,84	3,56
180	180	70	8	11	5,5	28,0	22,0	0,611	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	15,1	1,92	3,75
200	200	75	8,5	11,5	6	32,2	25,3	0,661	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	16,8	2,01	3,94
220	220	80	9	12,5	6,5	37,4	29,4	0,718	2690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	18,5	2,14	4,20
240	240	85	9,5	13	6,5	42,3	33,2	0,775	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	20,1	2,23	4,39
260	260	90	10	14	7	48,3	37,9	0,834	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	21,8	2,36	4,66
280	280	95	10	15	7,5	53,3	41,8	0,890	6280	448	10,9	399	57,2	2,74	266	23,6	2,53	5,02
300	300	100	10	16	8	58,8	46,2	0,950	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	25,4	2,70	5,41

<u>TEMA</u>

TP8

GEOMETRIA DE LAS MASAS

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

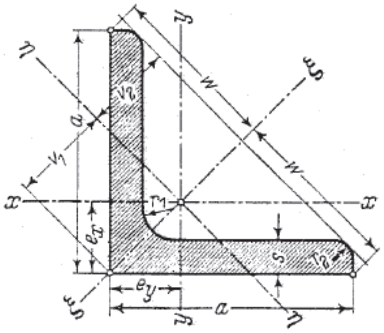
CURSO 4

PARENTE

Tablas

HOJA 18

Perfiles normalizados



F = Sección
G = Peso
U = Superficie exterior por 1 m de longitud
J = Momento de inercia — referido al eje correspondiente de flexión
W = Módulo resistente — referido al eje correspondiente de flexión
$i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ = radio de giro — referido al eje correspondiente de flexión

$r_2 = \frac{r_1}{2}$ = (redondeado al mm o medio mm, resp.)

El eje $\xi - \xi$ es la bisectriz.

Datos sobre largos, ejemplos de designación, ejemplos de pedido y tolerancias admisibles, *ver cap. 2.9.*

Material: Preferentemente calidades de acero según DIN 17 100

Abreviatura ∟	Dimensiones en mm para: a	s	r_1	r_2	F cm²	G kg/m	U m²/m	Distancias para los ejes: $e_x = e_y$ cm	w cm	v_1 cm	v_2 cm	Referido al eje de flexión, $x-x = y-y$: $J_x = J_y$ cm⁴	$W_x = W_y$ cm³	$i_x = i_y$ cm	$\xi - \xi$: J_ξ cm⁴	i_ξ cm	$\eta - \eta$: J_η cm⁴	W_η cm³	$i_\eta = i_1$ (min) cm
20 × 3	20	3	3,5	2	1,12	0,88	0,077	0,60	1,41	0,85	0,70	0,39	0,28	0,59	0,62	0,74	0,15	0,18	0,37
20 × 4		4			1,45	1,14		0,64		0,90	0,71	0,48	0,35	0,58	0,77	0,73	0,19	0,21	0,36
25 × 3	25	3	3,5	2	1,42	1,12	0,097	0,73	1,77	1,03	0,87	0,79	0,45	0,75	1,27	0,95	0,31	0,30	0,47
25 × 4		4			1,85	1,45		0,76		1,08	0,89	1,01	0,58	0,74	1,61	0,93	0,40	0,37	0,47
25 × 5		5			2,26	1,77		0,80		1,13	0,91	1,18	0,69	0,72	1,87	0,91	0,50	0,44	0,47
30 × 3	30	3	5	2,5	1,74	1,36	0,116	0,84	2,12	1,18	1,04	1,41	0,65	0,90	2,24	1,14	0,57	0,48	0,57
30 × 4		4			2,27	1,78		0,89		1,24	1,05	1,81	0,86	0,89	2,85	1,12	0,76	0,61	0,58
30 × 5		5			2,78	2,18		0,92		1,30	1,07	2,16	1,04	0,88	3,41	1,11	0,91	0,70	0,57
35 × 3	35	3	5	2,5	2,04	1,60	0,136	0,96	2,47	1,36	1,23	2,29	0,90	1,06	3,63	1,34	0,95	0,70	0,68
35 × 4		4			2,67	2,10		1,00		1,41	1,24	2,96	1,18	1,05	4,68	1,33	1,24	0,88	0,68
35 × 5		5			3,28	2,57		1,04		1,47	1,25	3,56	1,45	1,04	5,63	1,31	1,49	1,10	0,67
35 × 6		6			3,87	3,04		1,08		1,53	1,27	4,14	1,71	1,04	6,50	1,30	1,77	1,16	0,68

TEMA

TP8

GEOMETRIA DE LAS MASAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Problema, figura compuesta

Dada la figura compuesta, encontrar los ejes principales baricéntricos. Medidas en metros.

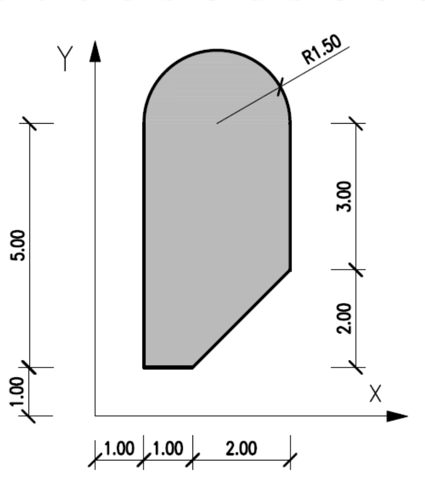
TEMA

TP8

GEOMETRIA
DE LAS MASAS

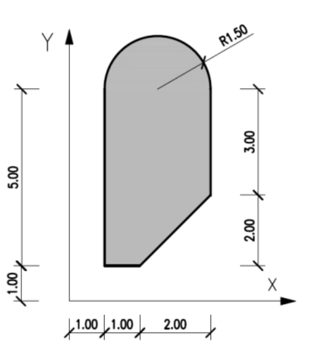
PROCEDIMIENTO:

1) *Proponer un sistema coordenado.*
2) *Reconocer y dividir la figura total en figuras conocidas. Las que suman y las que sustraen.*
3) *Calcular todas las características geométricas de cada figura individual, respecto a ejes paralelos a los coordenados y pasantes por el baricentro de cada figura.*
4) *Encontrar el área total.*
5) *Encontrar la posición del baricentro general.*
6) *Trasladar los momentos de inercia de las figuras individuales al baricentro general por Steiner.*
7) *Sumar o restar según correspondan los momentos de inercia individuales para obtener los momentos de inercia totales baricéntricos para ejes paralelos a los coordenados.*
8) *Encontrar la dirección de los ejes principales.*
9) *Encontrar los momentos de inercia principales.*
10) *Esquema general y chequear.*



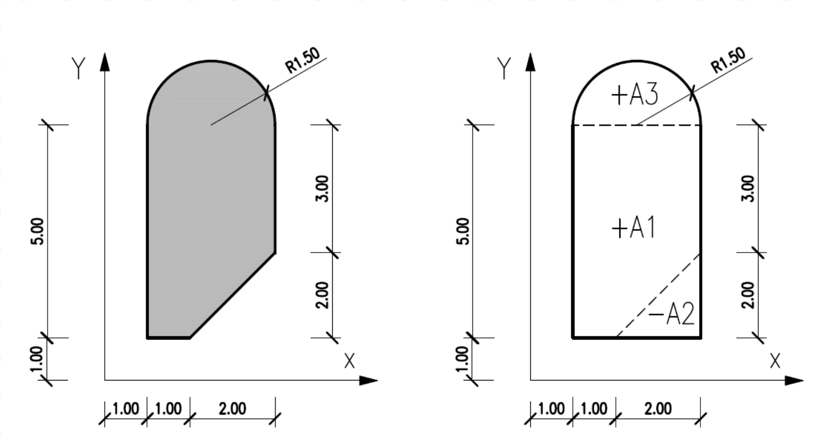
Problema, figura compuesta

Dada la figura compuesta, encontrar los ejes principales baricéntricos. Medidas en metros.



PROCEDIMIENTO:

1) *Proponer un sistema coordenado.*
2) *Reconocer y dividir la figura total en figuras conocidas. Las que suman y las que sustraen.*



HOJA
21

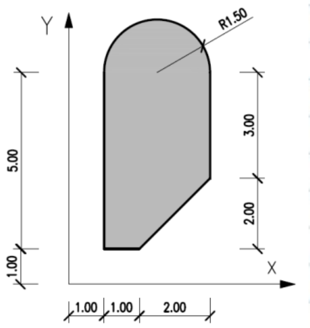
TEMA

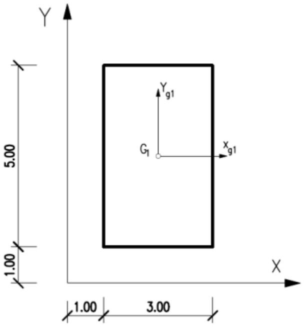
TP8

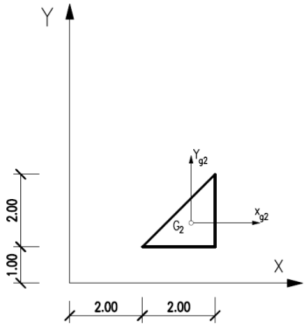
GEOMETRIA
DE LAS MASAS

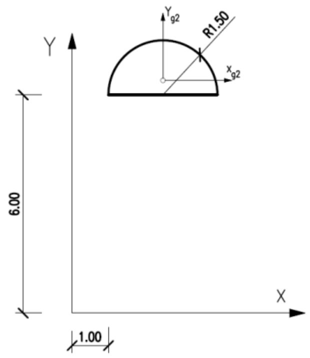
Problema, figura compuesta

Dada la figura compuesta, encontrar los ejes principales baricéntricos. Medidas en metros.









PROCEDIMIENTO:

3) *Calcular todas las características geométricas de cada figura individual, respecto a ejes paralelos a los coordenados y pasantes por el baricentro de cada figura.*

Figura 1:

$b1 := 3m \qquad h1 := 5m$

$F_1 := b1 \cdot h1 = 15\,m^2 \qquad J_{xg1} := \frac{b1 \cdot h1^3}{12} = 31.25\,m^4$

$x_{g1} := 1m + \frac{b1}{2} = 2.5\,m \qquad J_{yg1} := \frac{h1 \cdot b1^3}{12} = 11.25\,m^4$

$y_{g1} := 1m + \frac{h1}{2} = 3.5\,m \qquad J_{xyg1} := 0$

Figura 2:

$b2 := 2m \qquad h2 := 2m$

$F_2 := \frac{b2 \cdot h2}{2} = 2\,m^2 \qquad J_{xg2} := \frac{b2 \cdot h2^3}{36} = 0.44\,m^4$

$x_{g2} := 2m + \frac{2}{3} \cdot b2 = 3.33\,m \qquad J_{yg2} := \frac{h2 \cdot b2^3}{36} = 0.44\,m^4$

$y_{g2} := 1m + \frac{1}{3} \cdot h2 = 1.67\,m \qquad J_{xyg2} := \frac{b2^2 \cdot h2^2}{72} = 0.22\,m^4$

Figura 3:

$r3 := 1.5m$

$F_3 := \frac{\pi \cdot r3^2}{2} = 3.53\,m^2 \qquad J_{xg3} := r3^4 \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9 \cdot \pi}\right) = 0.56\,m^4$

$x_{g3} := 1m + r3 = 2.5\,m \qquad J_{yg3} := \frac{\pi\, r3^4}{8} = 1.99\,m^4$

$y_{g3} := 6m + \frac{4}{3} \cdot \frac{r3}{\pi} = 6.64\,m \qquad J_{xyg3} := 0$

HOJA
22

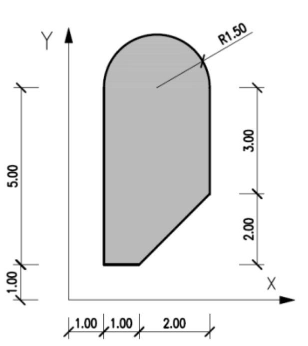
TEMA

TP8

GEOMETRIA
DE LAS MASAS

Problema, figura compuesta

Dada la figura compuesta, encontrar los ejes principales baricéntricos. Medidas en metros.



PROCEDIMIENTO:

4) *Encontrar el área total.*
5) *Encontrar la posición del baricentro general.*
6) *Trasladar los momentos de inercia de las figuras individuales al baricentro general por Steiner.*
7) *Sumar o restar según correspondan los momentos de inercia individuales para obtener los momentos de inercia totales baricéntricos para ejes paralelos a los coordenados.*

4. Calcular el Area de la superficie:

$$F := F_1 - F_2 + F_3 = 16.53\,m^2$$

5 Determinar la posición del Baricentro G, respecto de los ejes x e y:

$$x_G := \frac{F_1 \cdot x_{g1} - F_2 \cdot x_{g2} + F_3 \cdot x_{g3}}{F} = 2.4\,m$$

$$y_G := \frac{F_1 \cdot y_{g1} - F_2 \cdot y_{g2} + F_3 \cdot y_{g3}}{F} = 4.39\,m$$

6. Traslación de momentos de inercia de cada figura al baricentro general:

$$J_{xG1} := J_{xg1} + F_1 \cdot (y_G - y_{g1})^2 = 43.19\,m^4 \qquad J_{yG1} := J_{yg1} + F_1 \cdot (x_G - x_{g1})^2 = 11.4\,m^4$$

$$J_{xG2} := J_{xg2} + F_2 \cdot (y_G - y_{g2})^2 = 15.3\,m^4 \qquad J_{yG2} := J_{yg2} + F_2 \cdot (x_G - x_{g2})^2 = 2.19\,m^4$$

$$J_{xG3} := J_{xg3} + F_3 \cdot (y_G - y_{g3})^2 = 18.36\,m^4 \qquad J_{yG3} := J_{yg3} + F_3 \cdot (x_G - x_{g3})^2 = 2.02\,m^4$$

$$J_{xyG1} := J_{xyg1} + F_1 \cdot (x_G - x_{g1}) \cdot (y_G - y_{g1}) = -1.35\,m^4$$

$$J_{xyG2} := J_{xyg2} + F_2 \cdot (x_G - x_{g2}) \cdot (y_G - y_{g2}) = -4.87\,m^4$$

$$J_{xyG3} := J_{xyg3} + F_3 \cdot (x_G - x_{g3}) \cdot (y_G - y_{g3}) = 0.8\,m^4$$

7. Sumar momentos de inercia en el baricentro de la figura total:

$$J_{xG} := J_{xG1} - J_{xG2} + J_{xG3} = 46.25\,m^4$$

$$J_{yG} := J_{yG1} - J_{yG2} + J_{yG3} = 11.24\,m^4$$

$$J_{xyG} := J_{xyG1} - J_{xyG2} + J_{xyG3} = 4.32\,m^4$$

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

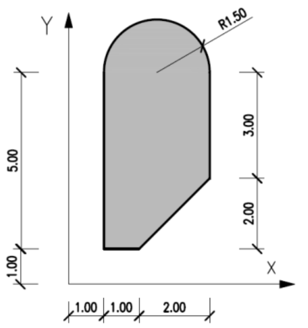
CURSO 4
PARENTE

HOJA

23

Problema, figura compuesta

Dada la figura compuesta, encontrar los ejes principales baricéntricos. Medidas en metros.



PROCEDIMIENTO:

8) *Encontrar la dirección de los ejes principales.*
9) *Encontrar los momentos de inercia principales.*
10) *Esquema general y chequear.*

8. Cálculo de la posición de ejes principales de inercia baricentricos:

$$\alpha_1 := \frac{1}{2}\,\text{atan}\left(\frac{2J_{xyG}}{J_{yG} - J_{xG}}\right) = -6.93 \cdot {}^\circ \qquad \alpha_2 := \alpha_1 + 90 \cdot {}^\circ = 83.07 \cdot {}^\circ$$

9. *Calcular el valor de los Momentos Principales de Inercia Baricéntricos J11 y J22.:*

Una forma, conociendo los ángulos principales:

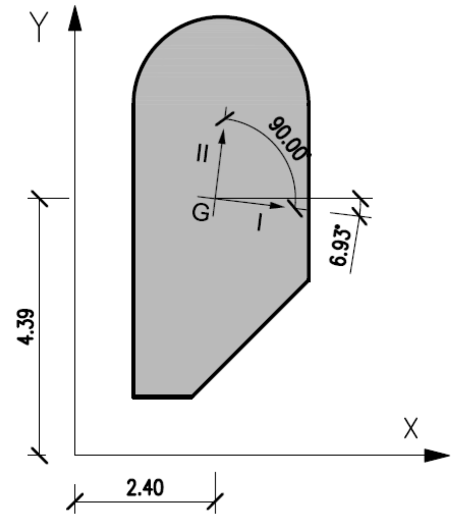
$$J_{IG} := J_{xG} \cdot \cos(\alpha_1)^2 + J_{yG} \cdot \sin(\alpha_1)^2 - J_{xyG} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_1) = 46.77\,\text{m}^4$$

$$J_{IIG} := J_{xG} \cdot \cos(\alpha_2)^2 + J_{yG} \cdot \sin(\alpha_2)^2 - J_{xyG} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_2) = 10.71\,\text{m}^4$$

Otra forma sin conocer los ángulos principales:

$$J_{IG} := \frac{J_{xG} + J_{yG}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(J_{yG} - J_{xG}\right)^2 + 4 \cdot J_{xyG}^{\,2}} = 46.77\,\text{m}^4$$

$$J_{IIG} := \frac{J_{xG} + J_{yG}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(J_{yG} - J_{xG}\right)^2 + 4 \cdot J_{xyG}^{\,2}} = 10.71\,\text{m}^4$$



TEMA

TP8

GEOMETRIA DE LAS MASAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE