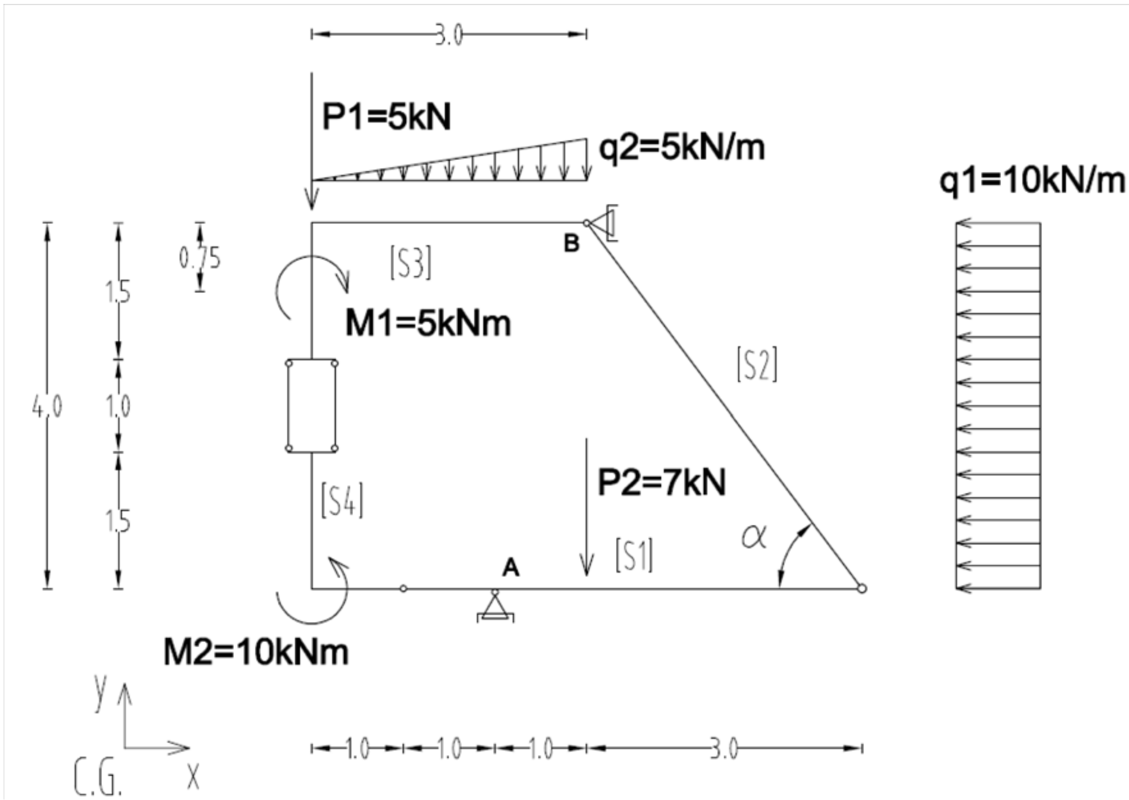
Ejercicio Esfuerzos Caracterísitcos



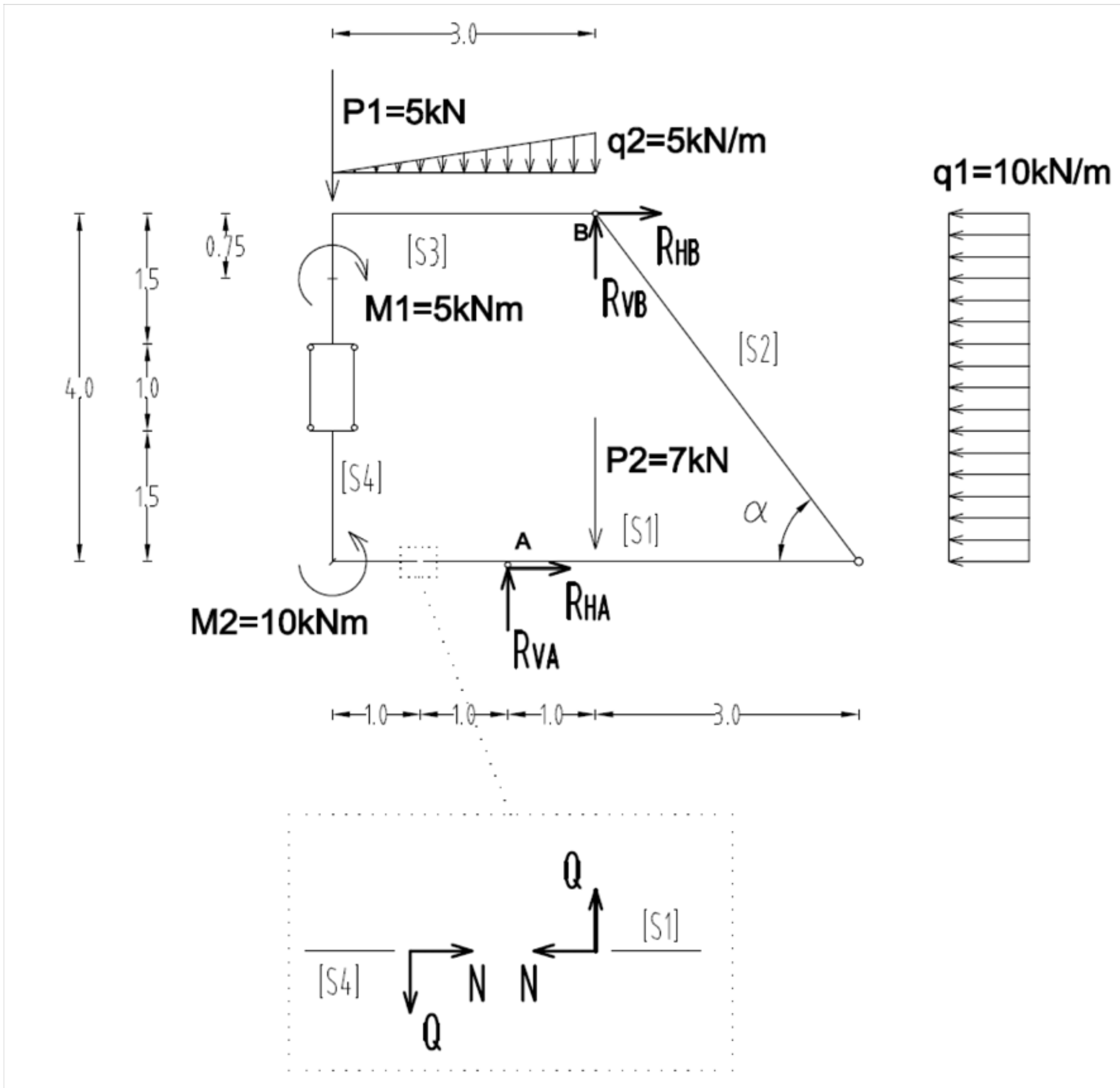
Datos:

$P_1 := 5kN$ $\quad q_1 := 10\dfrac{kN}{m}$ $\quad M_1 := 5kN \cdot m$ $\quad \alpha := atan\left(\dfrac{4}{3}\right) = 53.13 \cdot deg$

$P_2 := 7kN$ $\quad q_2 := 5\dfrac{kN}{m}$ $\quad M_2 := 10kN \cdot m$ $\quad \cos(\alpha) = 0.6 \quad \sin(\alpha) = 0.8$

DETERMINACIÓN DE REACCIONES DE VÍNCULO:

Se ponen en evidencia las reacciones de vínculo externo en A y B y se abre la cadena en la Articulación A1,2, dejando en evidencia los esfuerzos Normal N (o axil) y de corte Q.



Ecuaciones de Eq. Relativo:

Sumatoria de Fzas de S4 de dirección Perpendicular a las Bielas:

$$\sum_{(n-n)} F_{x.S4} = 0kN$$ Resulta: $N := 0kN$

Sumatoria de Momentos de S4 y S3 respecto de A2,3:

$$\sum M_{S4.S3}{}^{A23} = 0kN \qquad -M_1 + M_2 + P_1 \cdot 3m + q_2 \cdot \frac{3m}{2} \cdot 1m + Q \cdot 2m = 0kN \cdot m$$

$$Q := \frac{-\left(-M_1 + M_2 + P_1 \cdot 3m + q_2 \cdot \frac{3m}{2} \cdot 1m\right)}{2m}$$ Resulta: $Q = -13.75 \cdot kN$

Sumatoria de Momentos de S1 respecto de A1,2:

$$\sum M_{S1}{}^{A12} = 0kN \qquad -Q\cdot 5m - R_{VA}\cdot 4m + P_2\cdot 3m = 0kN\cdot m$$

$$R_{VA} := \frac{-Q\cdot 5m + P_2\cdot 3m}{4m}$$ Resulta: $R_{VA} = 22.438\cdot kN$

Ecuaciones de Eq. General:

Sumatoria de Momentos respecto de B:

$$\sum M^{B} = 0kN$$

$$\sum M_{S4.S3}{}^{A23} + \sum M_{S1.S2}{}^{A23} = 0kN\cdot m$$

$$0kN\cdot m + \sum M_{S1.S2}{}^{A23} = 0kN\cdot m \qquad -Q\cdot 2m - R_{VA}\cdot 1m + R_{HA}\cdot 4m - q_1\cdot 4m\cdot 2m = 0kN\cdot m$$

$$R_{HA} := \frac{-\left(-Q\cdot 2m - R_{VA}\cdot 1m - q_1\cdot 4m\cdot 2m\right)}{4m}$$ Resulta: $R_{HA} = 18.734\cdot kN$

Sumatoria de Fuerzas Verticales:

$$\sum F_y = 0kN \qquad -P_1 - P_2 - q_2\cdot\frac{3m}{2} + R_{VA} + R_{VB} = 0kN$$

$$R_{VB} := P_1 + P_2 + q_2\cdot\frac{3m}{2} - R_{VA}$$ Resulta: $R_{VB} = -2.938\cdot kN$

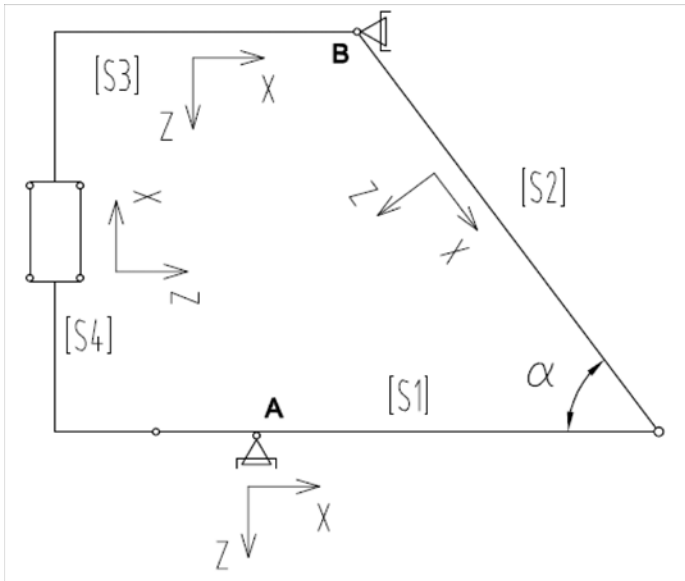
Sumatoria de Fuerzas Horizontales:

$$\sum F_x = 0kN \qquad R_{HA} + R_{HB} - q_1\cdot 4m = 0kN$$

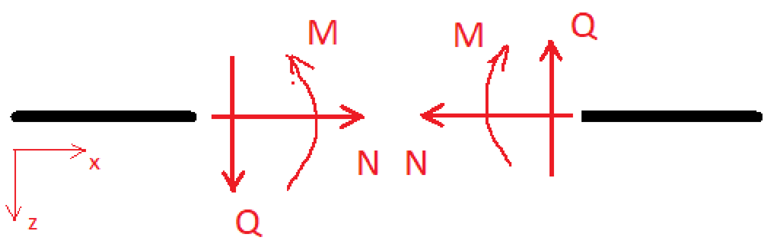
$$R_{HB} := -R_{HA} + q_1\cdot 4m$$ Resulta: $R_{HB} = 21.266\cdot kN$

DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS Y TRAZADO DE DIAGRAMAS:

CONVENCIÓN DE EJES LOCALES:



CONVENCIÓN ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS POSITIVOS:

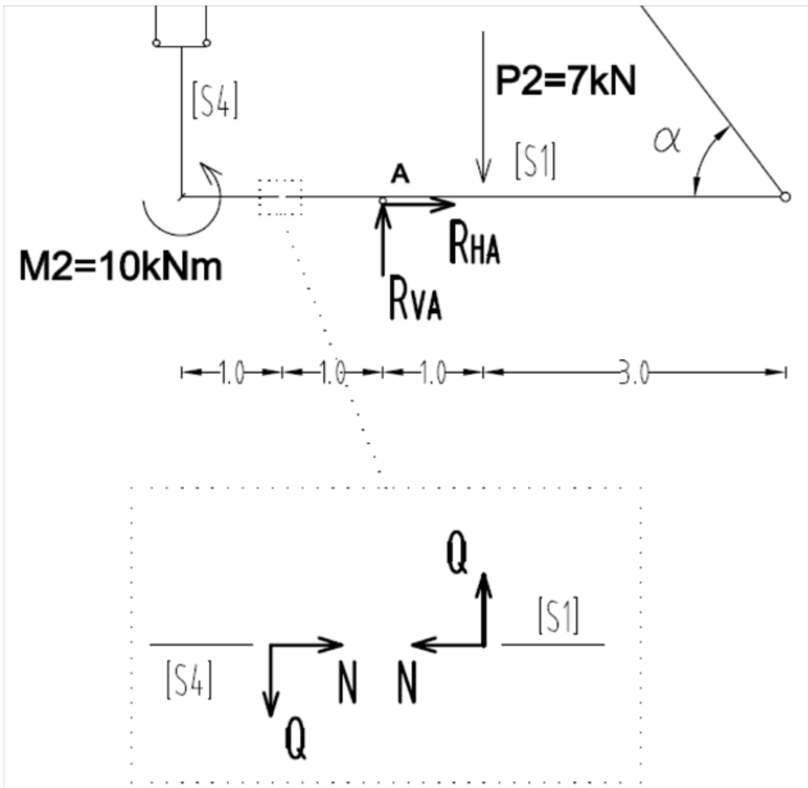


NOTA ACLARATORIA: EN LA RESOLUCIÓN DEL EJERCICIO SE MUESTRAN LOS GRÁFICOS CON EL SENTIDO DE LAS FLECHAS DE N, Q y M SEGÚN LA CONVENCIÓN DE POSITIVOS. SI SE INDICA QUE EL ESFUERZO ES NEGATIVO, EL SENTIDO DE LA FLECHA ES CONTRARIO AL GRAFICADO.

ESFUERZO NORMAL:

Comenzamos por donde abrimos la cadena: A14.

$N = 0 \cdot kN \qquad Q = -13.75 \cdot kN$

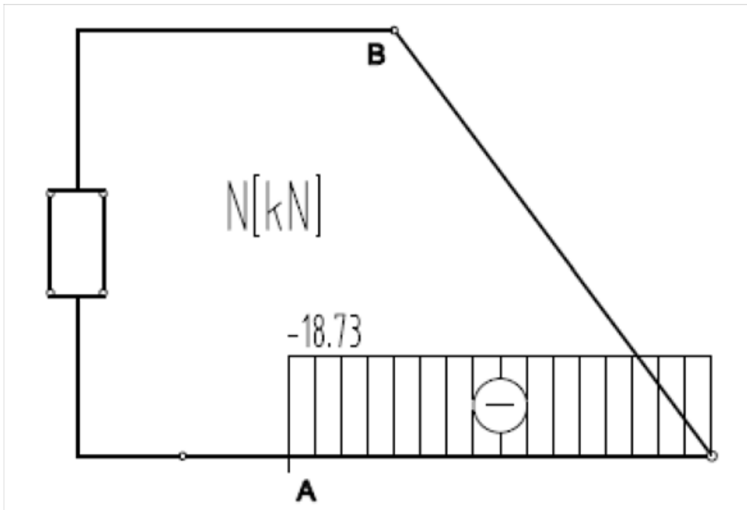


Fuerzas axiles actuantes en S1:

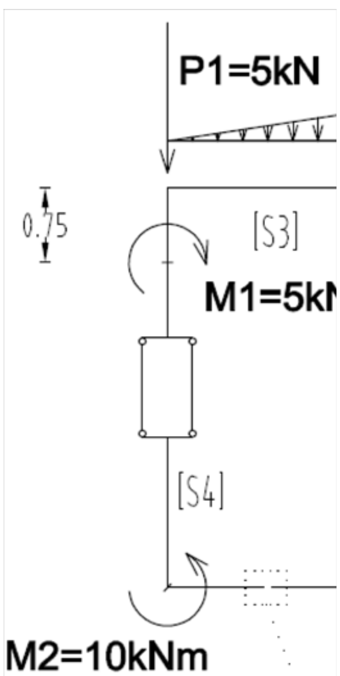
$R_{HA} = 18.734 \cdot kN$

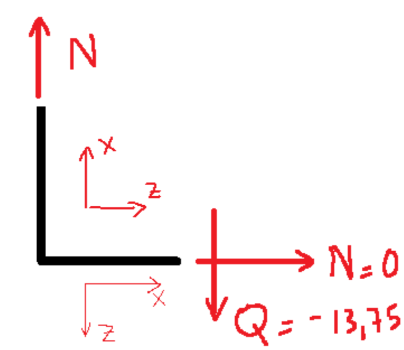
Entre A14 y A, el esfuerzo normal es nulo. Pasando A, el Esfuerzo Normal que equilibra tiene sentido contrario a la convención de Esfuerzo Normal positivo.

Resulta: $N = -R_{HA}$ La barra esá comprimida.



Conitnuamos el análisis por S4 a partir de la articulación A14 y luego del nudo hacia S3:



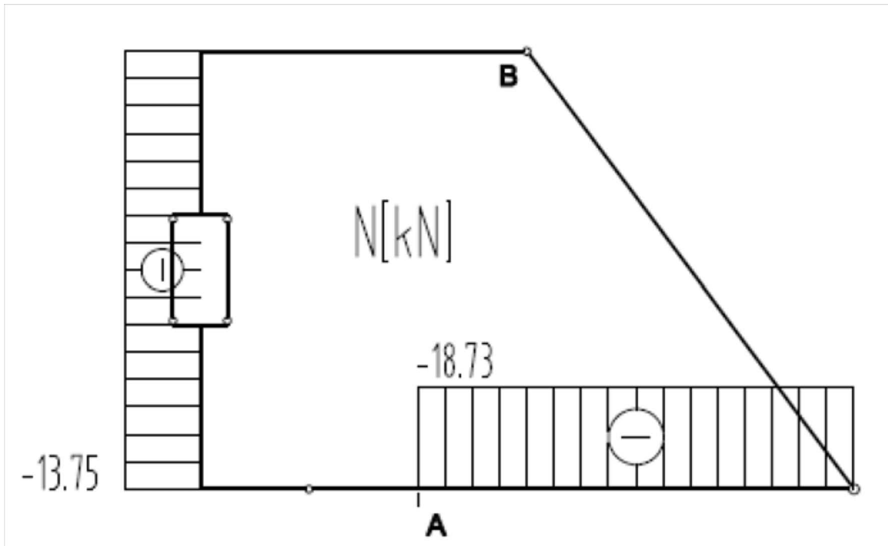


En el tramo horizontal, el Esfuerzo Normal es nulo en A12, y no hay cargas axiles entre dicho punto y el nudo. Con lo cual el esfuerzo Axil es Nulo en este tamo.

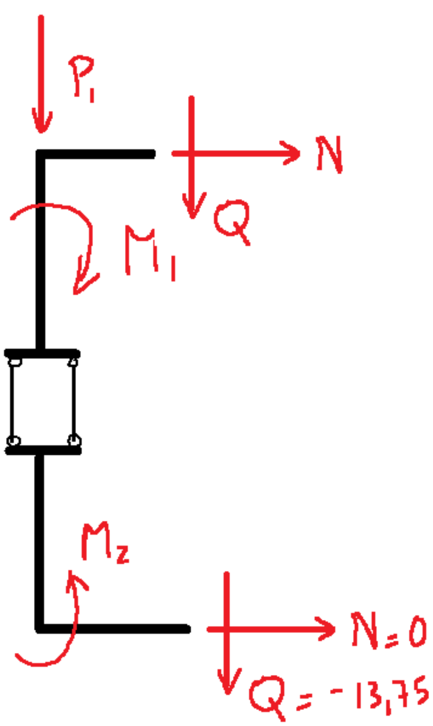
En el tramo vertical, el Esfuerzo Normal que equilibra el Nudo es:

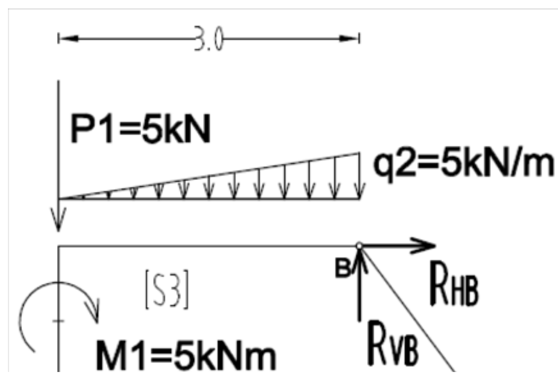
$N = -13.75 \mathrm{kN}$ N es negativo por tener signo contrario a la convención de positivos, el tramo vertical de S4 se encuentra comprimido.

Al no haber cargas axiles hasta el Nudo de S3, el esfuerzo Normal se mantiene constante.



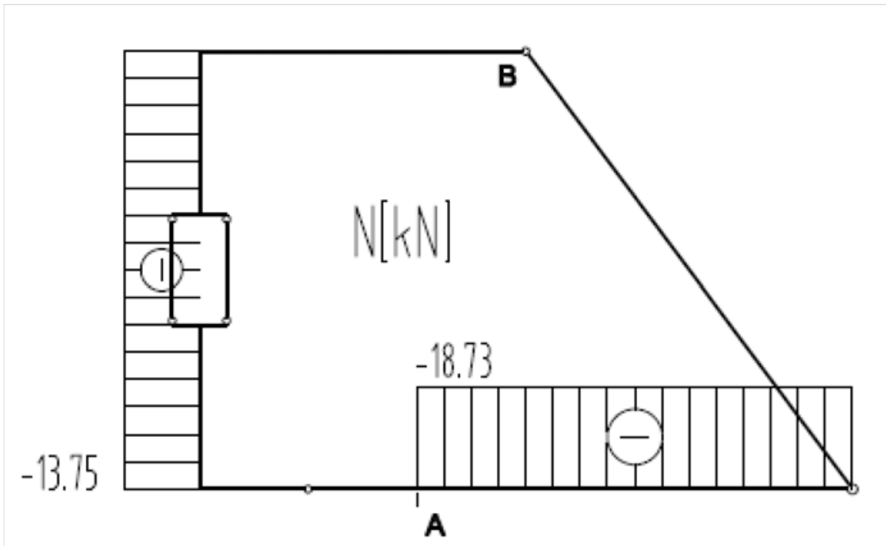
Conitnuamos el análisis por S3 a partir del nudo en sentido de x:





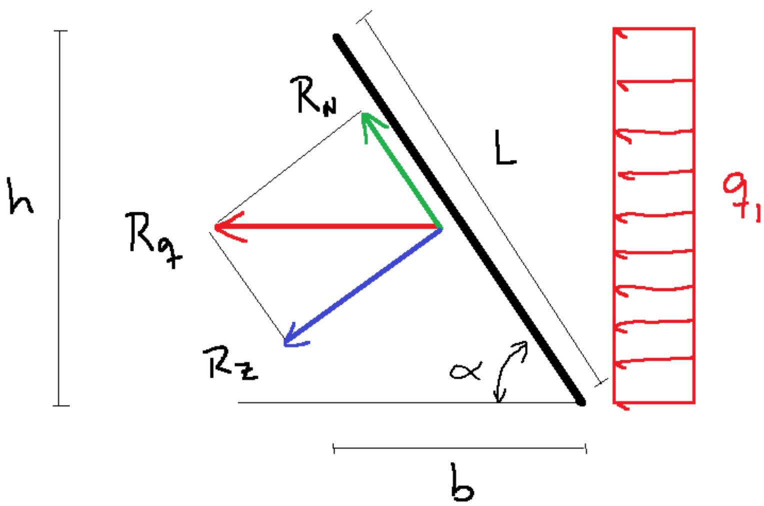
El equilibrio de Fuerzas horizontales requiere que N en el Nudo de S3 sea 0kN. Luego a lo largo de la barra no hay esfuerzos axiles, con lo cual el Esfuerzo axil se mantienen Nulo.

Las fuerzas axiles aplicadas en un punto generan saltos en el diagrama de Eesfuerzo Normal.



Análisis de S2 en sentido de x:

Descomposición de q_1 horizontal en suma de carga distribuida axil (x) y perpendicular al eje (z).



$h := 4m \qquad b := 3m$

$L := \left(h^2 + b^2\right)^{0.5} = 5\,m$

$L = \dfrac{h}{\sin(\alpha)}$

$R_q := q_1 \cdot h = 40 \cdot kN$

$R_N := R_q \cdot \cos(\alpha) = 24 \cdot kN$

$R_Z := R_q \cdot \sin(\alpha) = 32 \cdot kN$

$$q_x = \frac{R_N}{L} = \frac{R_q \cdot \cos(\alpha)}{\dfrac{h}{\sin(\alpha)}} = \frac{q_1 \cdot h \cdot \cos(\alpha)}{\dfrac{h}{\sin(\alpha)}} = q_1 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

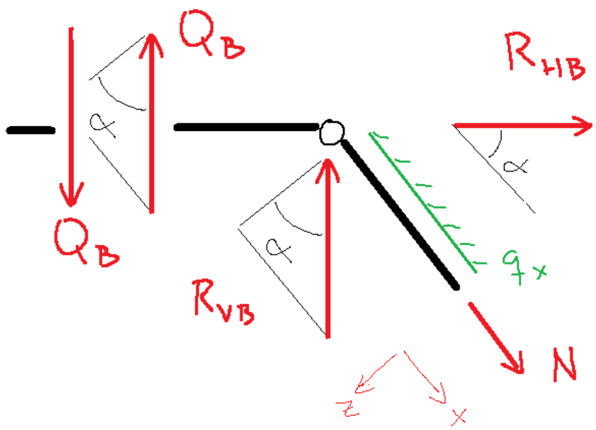
$q_x := \dfrac{R_N}{L} = 4.8 \cdot \dfrac{kN}{m}$ $\qquad$ $q_1 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = 4.8 \cdot \dfrac{kN}{m}$ $\qquad$ (dos formas de obtener la carga distribuída axil)

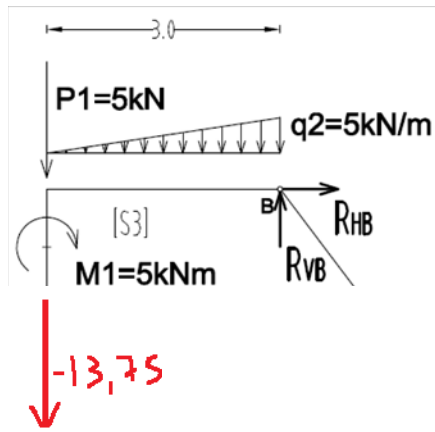
$$q_z = \frac{R_Z}{L} = \frac{R_q \cdot \sin(\alpha)}{\frac{h}{\sin(\alpha)}} = \frac{q_1 \cdot h \cdot \sin(\alpha)}{\frac{h}{\sin(\alpha)}} = q_1 \cdot (\sin(\alpha))^2$$

$$q_z := \frac{R_Z}{L} = 6.4 \cdot \frac{kN}{m} \qquad q_1 \cdot (\sin(\alpha))^2 = 6.4 \cdot \frac{kN}{m}$$

(dos formas de obtener la carga distribuída perpendicular al eje)

Comenzamos el análisis desde B (A23), para ello determino el Corte Q_B





$$Q_B := 13.75kN - P_1 - q_2 \cdot \frac{3m}{2} = 1.25 \cdot kN$$

Análisis con Equilibrio de Fuerzas en determiando un x:

(Considerando equilibrio en dirección x de las fuerzas por separado, las fuerzas que requieren un N positivo (s/conv. de signos) para ser equilibradas generan Esf. Normal positivo (suman en la función) y las que requieren un N negativo generan Esf. Normal negativo (restan en la función).

$$N(x) := Q_B \cdot \sin(\alpha) + R_{VB} \cdot \sin(\alpha) - R_{HB} \cdot \cos(\alpha) + q_x \cdot x$$

$N(0m) = -14.109 \cdot kN$ $\qquad$ $N(L) = 9.891 \cdot kN$

Una carga distribuída constante axil, genera un diagrama de Esfuerzo Normal linealmente variable con x.

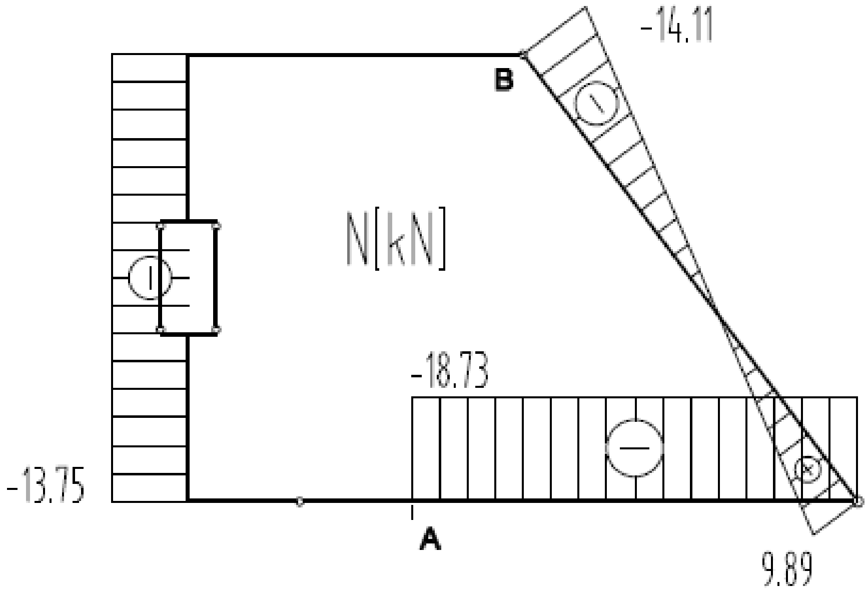
Análisis a partir de la Ecuación Diferencial:

$$\frac{dN}{dx} = -q_x$$

$$N(x) = \int -q_x \, dx = -q_x \cdot x + Cte$$

La constante será igual a
$N(0m) = -14.109\,kN$

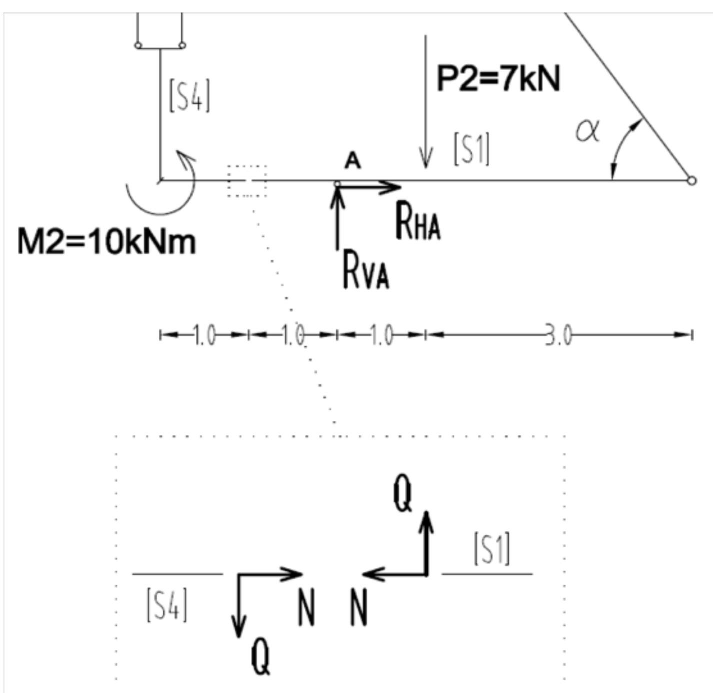
Nota: estrictamente q_x tiene sentido negativo según el eje x local, con lo que al reemplazar en la expreción queda sumando (no se le dió valor negativo a q_x en su determinación para no confundir)

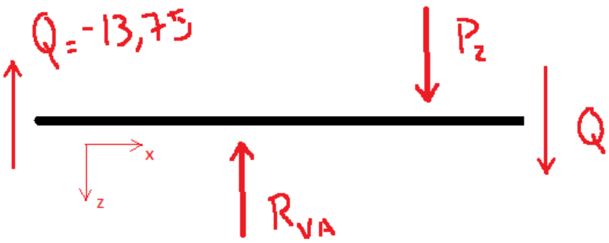


ESFUERZO de CORTE:

Comenzamos por donde abrimos la cadena: A14.

$N = 0kN \qquad Q = -13.75 \cdot kN$





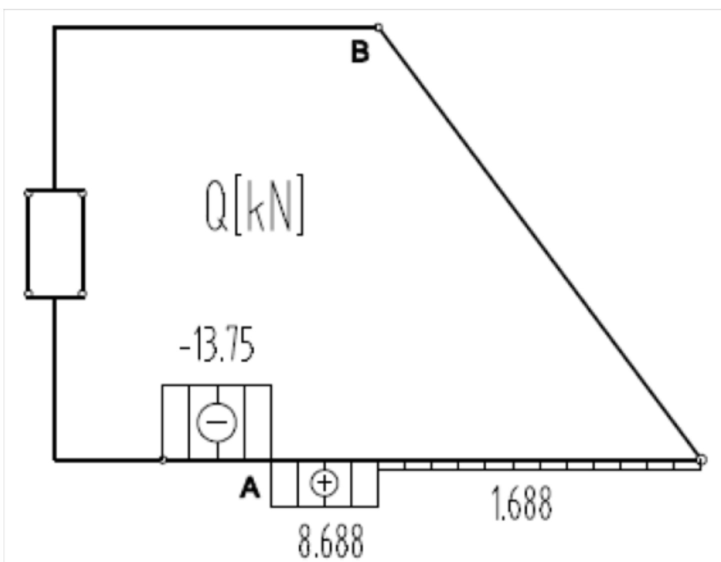
$R_{VA} = 22.438 \cdot kN \qquad P_2 = 7 \cdot kN$

Para determinar el Esfuerzo de Corte en S1, conforme se avanza según x local, las fuerzas que requieren un Q positivo (s/conv. de signos) para ser equilibradas generan corte positivo (suman en la función) y las que requieren un Q negativo generan corte negativo (restan en la función). Resulta:

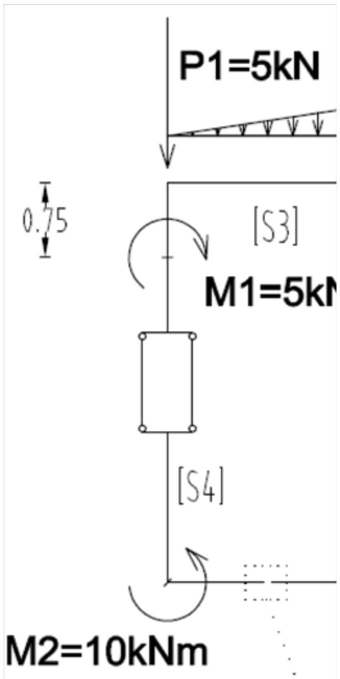
$Q_{0.1} := Q = -13.75 \cdot kN$ entre A14 y R_{VA}

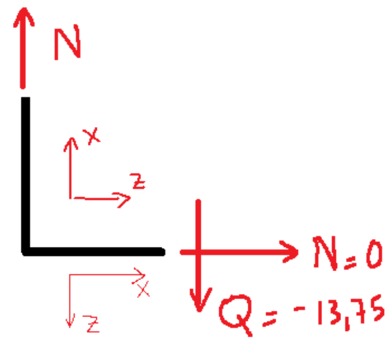
$Q_{1.2} := Q + R_{VA} = 8.688 \cdot kN$ entre R_{VA} y P_2

$Q_{2.5} := Q_{1.2} - P_2 = 1.688 \cdot kN$ entre P_2 y A12



Conitnuamos el análisis por S4 a partir de la articulación A14 y luego del nudo hacia S3:

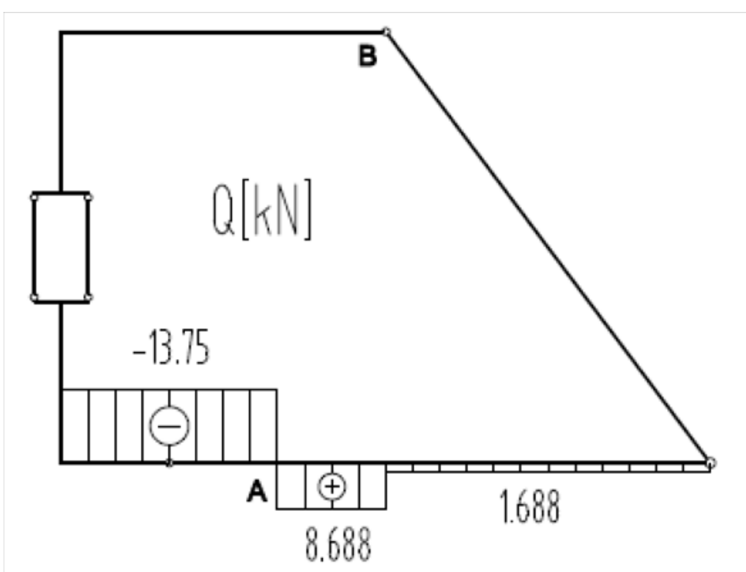




El tramo horizontal de S4 tiene un corte $Q = -13.75\text{kN}$ que se calculó al abrir la cadena para determinar las reacciones de vínculo. Entre A14 y el nudo de S4, no hay Fuerzas según la dirección z local, con lo cual Q se mantiene constante en el tramo horizontal de S4.

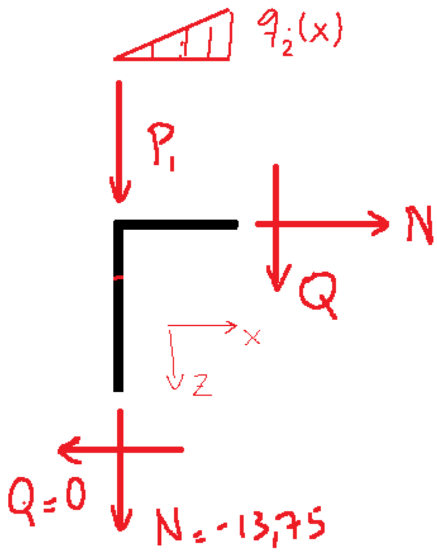
$Q = -13.75\text{kN}$ en el tramo Horizontal

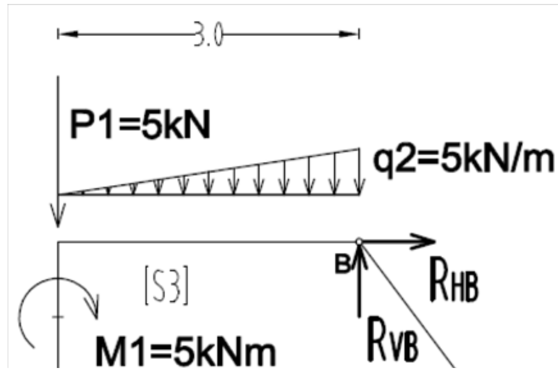
En el inicio del tramo vertical el corte es nulo debido a que N=0kN en el tramo horizontal. A lo largo del tramo vertical de S4 y S3, no hay fuerzas según la dirección z local, con lo cual el corte se mantiene nulo y constante (notar que el corte en la dirección perpendicular a las bielas debía ser nulo, lo cual se verifica).



Cargas puntuales generan saltos en el diagrama de Corte y en ausencia de cargas distribuídas de dirección z local, el corte permanece constante entre cargas puntuales.

Conitnuamos el análisis por S3 a partir del nudo en sentido de x:





Análisis con Equilibrio de Fuerzas en un determinado x:

Para determinar el Esfuerzo de Corte en el tramo horizontal de S3, conforme se avanza según x local, las fuerzas que requieren un Q positivo (s/conv. de signos) para ser equilibradas generan corte positivo (suman en la función) y las que requieren un Q negativo generan Corte negativo (resta en la función). Resulta:

$Q_0 := 13.75kN - P_1 = 8.75 \cdot kN$ en x=0m

en x, la carga distribuída triangular tiene valor: $q_2(x) := \frac{q_2}{3m} \cdot x$

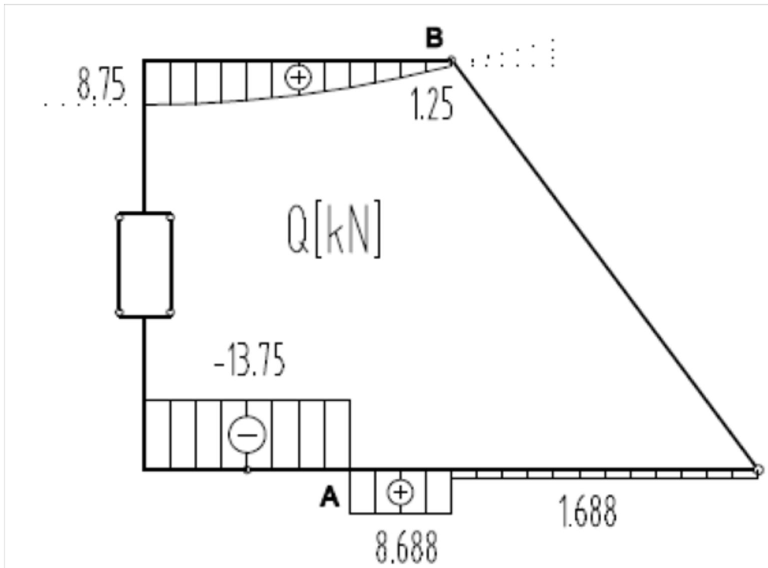
$Q(x) = Q_0 - q_2(x) \cdot \frac{x}{2}$ $\quad Q(x) := Q_0 - \frac{5kN}{6m^2} \cdot x^2$ $\quad Q(0m) = 8.75 \cdot kN$ $\quad Q(3m) = 1.25 \cdot kN$

La función de corte de una carga distribuída linealmente según el eje z local es parabólica. Si existiese una carga puntual entre el nudo (x=0m) y B, habría un salto en el diagrama de Corte y la función de Corte será partida.

Análisis a partir de la Ecuación Diferencial:

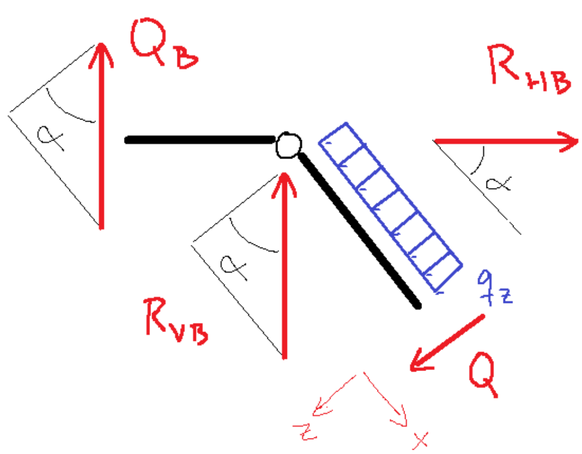
$$\frac{dQ}{dx} = -q_z \qquad Q(x) = \int -q_2(x)\,dx = \int -\frac{q_2}{3m} \cdot x\,dx = \frac{-q_2}{6m} \cdot x^2 + Cte$$

La Cte será igual a $Q_0 = 8.75\,kN$



Análisis de S2 en sentido de x:

Se había descompuesto q_1 horizontal en la suma de carga distribuida axil (x) y perpendicular al eje (z).



$Q_B = 1.25 \cdot kN$

$R_{VB} = -2.938 \cdot kN$

$R_{HB} = 21.266 \cdot kN$

$q_z = 6.4 \cdot \frac{kN}{m}$

Análisis con Equilibrio de Fuerzas en un determinado x:

Para determinar el Esfuerzo de Corte en S2, conforme se avanza según x local, las fuerzas que requieren un Q positivo (s/conv. de signos) para ser equilibradas generan Corte positivo (suman en la función) y las que requieren un Q negativo generan Corte negativo (resta en la función).
Resulta:

$$Q_0 := Q_B \cdot \cos(\alpha) + R_{VB} \cdot \cos(\alpha) + R_{HB} \cdot \sin(\alpha) = 16 \cdot kN$$

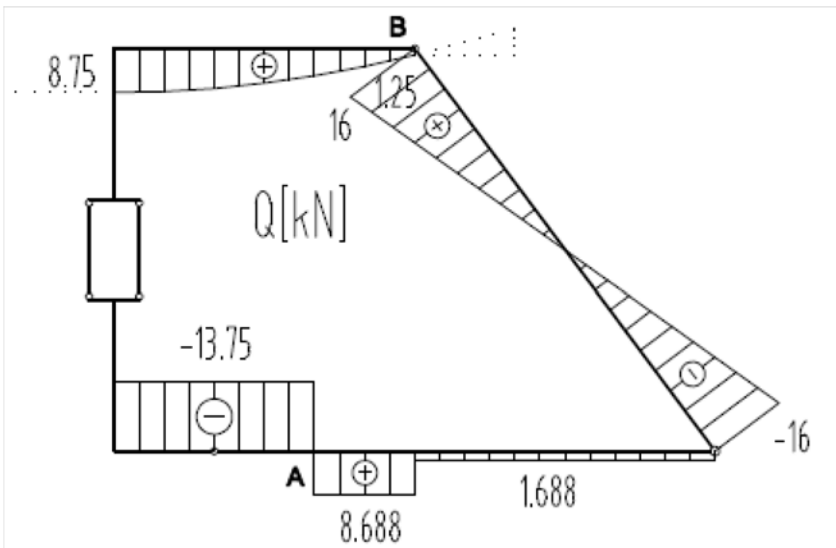
$$Q(x) := Q_0 - q_z \cdot x \qquad Q(L) = -16 \cdot kN$$

La función de corte de una carga distribuída constante según el eje z local es lineal. Si existiese una carga puntual entre el nudo (x=0m) y B, habría un salto en el diagrama de Corte y la función de Corte será partida.

Análisis a partir de la Ecuación Diferencial:

$$\frac{dQ}{dx} = -q_z \qquad Q(x) = \int_{\blacksquare}^{\blacksquare} -q_z\,dx = -q_z \cdot x + Cte$$

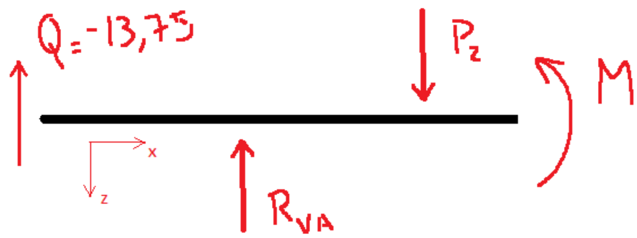
La Cte es $Q_0 = 16\,kN$

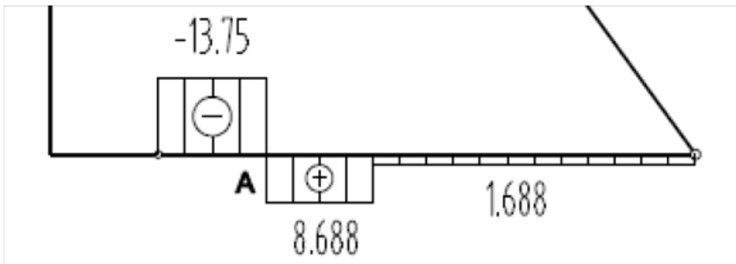


MOMENTOS:

Comenzamos por S1 en sentido de x por donde abrimos la cadena: A14.

$N = \blacksquare \cdot 0kN \quad Q = \blacksquare \cdot 0kN \qquad M = 0kN \cdot m$





Partiendo de A14 (donde el Momento es Nulo por haber una articulación) avanzando según x, las Fuerzas que requieren ser equilibradas con un Momento positivo (según la convención de positivos) generan Momento Positivo (suma en la función), y las que requieren ser equilibradas con un momento negativo generan Momento negativo (resta en la función). El momento flexor que genera una fuerza respecto de un punto x, es igual a la Fuerza por la distancia a dicho punto x considerado.

Fuerzas puntuales con dirección z local, generan una función de Momentos partida en la que la pendiente de dicha función para cierto x entre fuerzas dos fuerzas, es igual al valor del esfuerzo de corte en el punto x considerado.

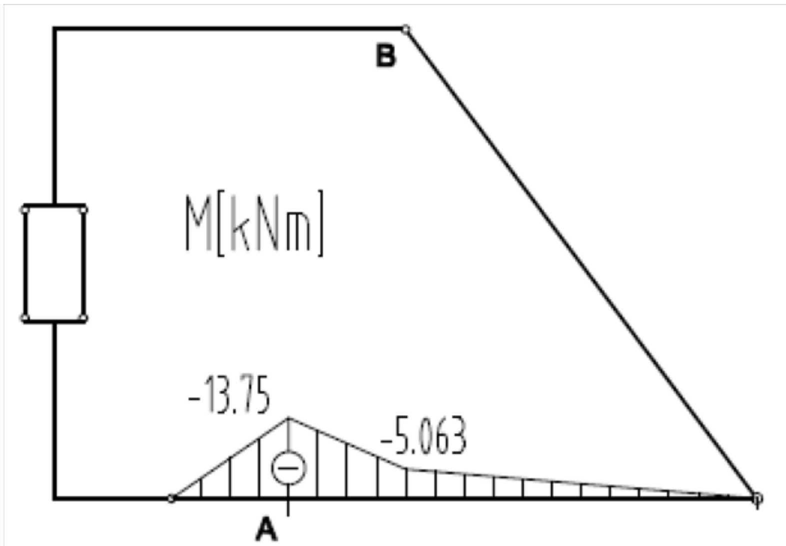
$M_0 := 0kN \cdot m$ Momento nulo en A14.

$M_{0.1}(x) := -13.75kN \cdot x$ entre A14 y x=1m

$M_{1.2}(x) := M_{0.1}(1m) + 8.6875kN \cdot (x - 1m)$ entre x=1m y 2m

$M_{2.5}(x) := M_{1.2}(2m) + 1.6875kN \cdot (x - 2m)$ entre x=2m y 5m

$M_{0.1}(1m) = -13.75 \cdot kN \cdot m$ $M_{1.2}(2m) = -5.063 \cdot kN \cdot m$ $M_{2.5}(5m) = 0 \cdot kN \cdot m$

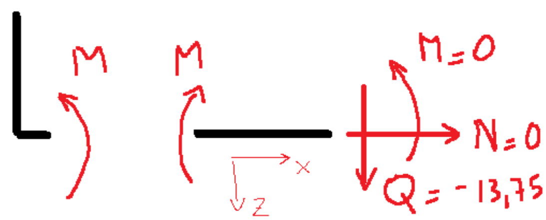


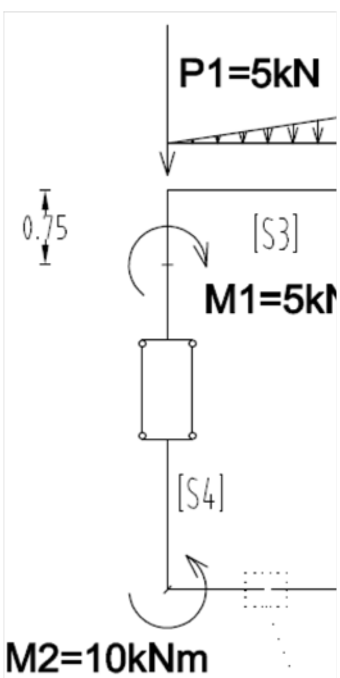
Los esfuerzos en las articulaciones son siempre Nulos. En el caso de haber un Momento puntual aplicado a una distancia infinitamente pequeña de la articulación, habrá un salto igual al valor de dicho momento en la función de momento en dicho punto.

Continuamos el análisis por S4 a partir de la articulación A14 y luego del nudo hacia S3:

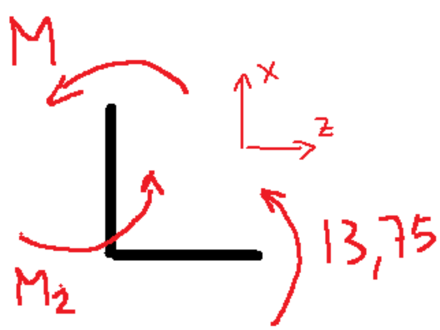
En el tramo horizontal, el momento antes del nudo resulta:

$$M_{N4} := 13.75\text{kN}\cdot 1\text{m} = 13.75\ \text{kN}\cdot\text{m}$$



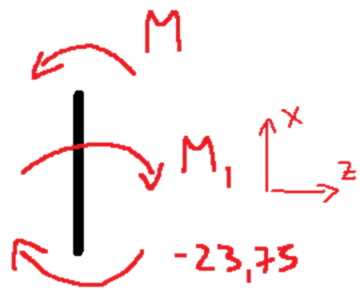


Asumiendo aplicado un infinitésimo luego del nudo, el momento en el tramo vertical junto al nudo surge del equilibrio de momentos:

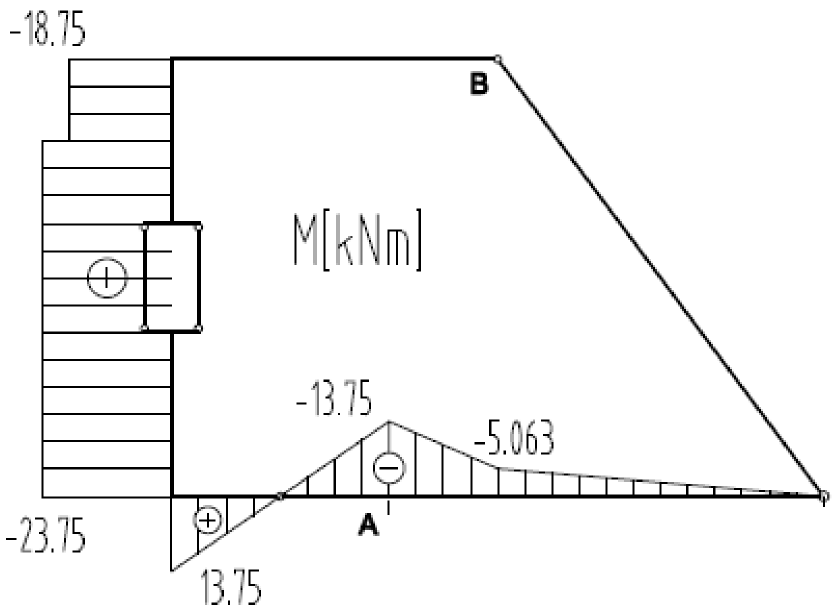


$$M := -13.75\text{kN}\cdot\text{m} - M_2 = -23.75\cdot\text{kN}\cdot\text{m}$$

Dónde se aplica M_1 hay un salto en el diagrama de Momentos:

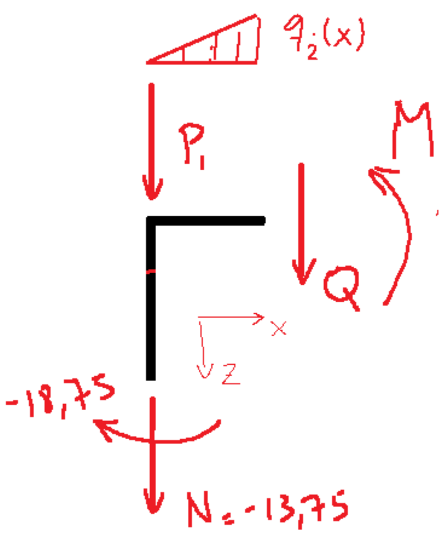


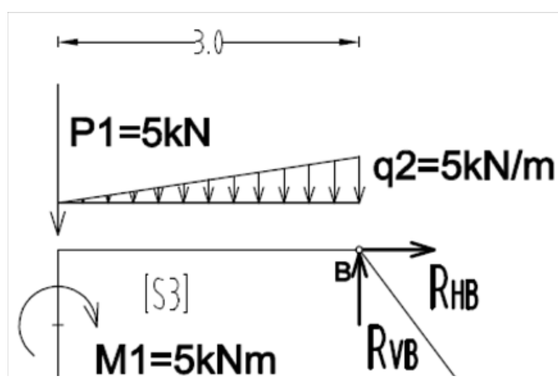
$$M := -23.75\text{kN}\cdot\text{m} + M_1 = -18.75\cdot\text{kN}\cdot\text{m}$$



En el tramo vertical de S4 y S3, donde el corte es nulo, el diagrama de Momentos es constante (la pendiente es nula, es decir la derivada que es el corte Q es nulo) y tiene saltos donde hay Momentos aplicados en un punto.

Conitnuamos el análisis por S3 a partir del nudo en sentido de x:





Análisis con Equilibrio de Momentos en un determinado x:

Para determinar la función de Momento en el tramo horizontal de S3, conforme se avanza según x local, las fuerzas que requieren un M positivo (s/conv. de signos) generan Momento Flexor positivo (suma en la función) y las que requieren un M negativo generan Momento Flexor negativo (resta en la función). Resulta:

El momento en el nudo, surge del equilibrio de Momentos:

$M_0 := -18.75 kN \cdot m$ Momento en nudo (x=0m)

A partir de las fuerzas involucradas y M_0 se puede determinar la función de Momento:

Momento de las fuerzas en x=0m respecto de un punto x:

$$\left[-P_1 - (-13.75kN)\right]x = 8.75kN \cdot x$$

Momento de la carga triangular respecto de un punto x:

carga distribuída: $q_2(x) = \frac{q_2}{3m} \cdot x$

Resultante: $q_2(x) \frac{x}{2} = \frac{q_2}{6m} \cdot x^2$

distancia de resultante respecto del punto x: $\frac{x}{3}$

Momento de la carga triangular: $-\frac{q_2}{6m} \cdot x^2 \cdot \frac{x}{3} = -\frac{q_2}{18m} \cdot x^3$

Función Momento: $M(x) = 8.75kN \cdot x - \frac{q_2}{18m} \cdot x^3 + M_0$

Análisis a partir de la Ecuación Diferencial:

Se tiene que la función del corte es:

$Q_0 := 8.75kN$ Corte en x=0m $-P_1 + 13.75kN = 8.75 \cdot kN$

$$Q(x) := Q_0 - \frac{5kN}{6m^2} \cdot x^2$$

Ecuación diferencial: $\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$

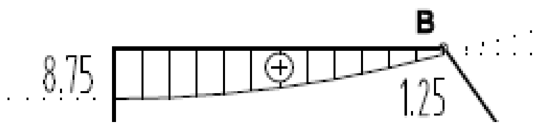
Integrando: $M(x) = \int Q(x)\,dx = Q_0 \cdot x - \frac{5kN}{18m^2} \cdot x^3 + Cte$

El valor de la Cte es $M_0 = -18.75\ kN \cdot m$ calculado en el nudo.

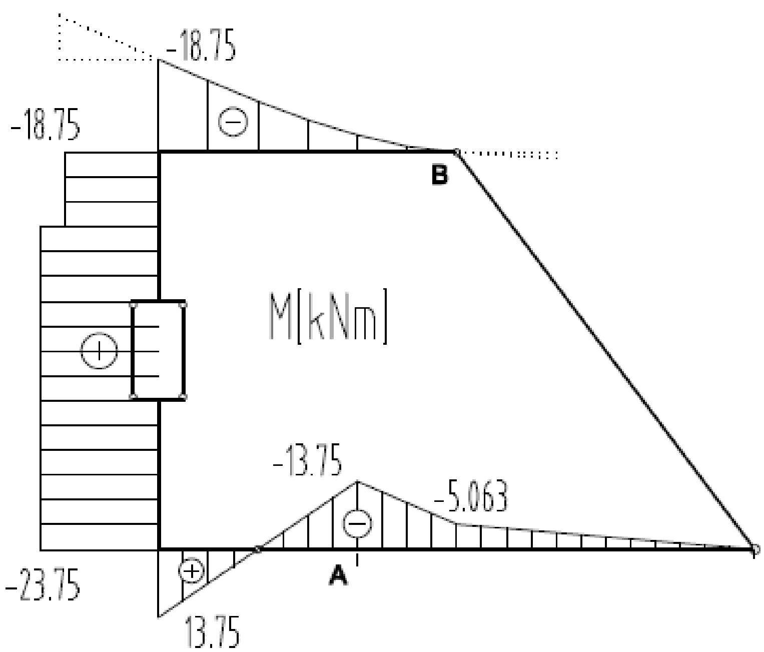
$$M(x) := Q_0 \cdot x - \frac{5kN}{18m^2} \cdot x^3 + M_0$$

$$M(3m) = 0\ m \cdot kN$$

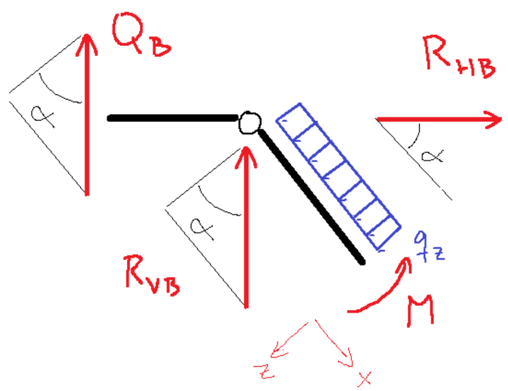
Una carga distribuída linealmente con dirección z local, genera una función de Momento cúbica (funciónd de corte cuadrática). De existir un Momento puntual aplicado en algún punto x, la función de Momentos será partida y tendrá un salto en dicho punto.
Del diagrama de corte se puede determinar para cualquier punto x la pendiente del diagrama de Momentos.



Corte en tramo Horizontal de S3
(pendiente de M)



Continuamos el análisis por S2 a partir de A23 en sentido de x:



Análisis con Equilibrio de Momentos en un determinado x:

Para determinar la función de Momento en el tramo horizontal de S2, conforme se avanza según x local, las fuerzas que requieren un M positivo (s/conv. de signos) generan Momento Flexor positivo (suma en la función) y las que requieren un M negativo generan Momento Flexor negativo (resta en la función). Resulta:

El momento en la articulación A23 es Nulo: $M_0 := 0kN \cdot m$

El corte en S2 junto a la articulación ya fue calculado:

$Q_0 := 16kN$

$M(x) := Q_0 \cdot x - q_z \cdot x \cdot \frac{x}{2}$

Análisis a partir de la Ecuación Diferencial:

Ecuación diferencial: $\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$

Integrando: $M(x) = \int Q(x)\,dx = Q_0 \cdot x - q_z \cdot \frac{x^2}{2} + M_0$

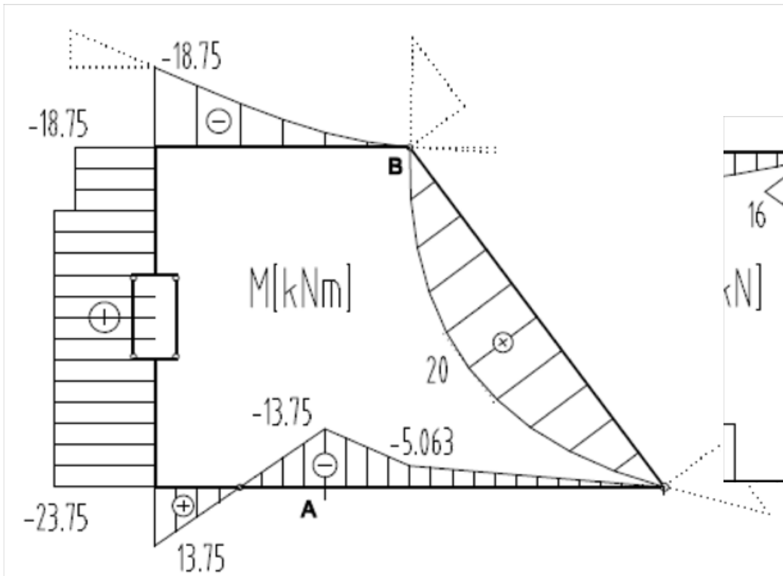
$$M(x) = Q_0 \cdot x - q_z \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M(0m) = 0\,m \cdot kN$$

$$M(2.5m) = 20\,m \cdot kN$$

$$M(5m) = 1.455 \times 10^{-14}\,m \cdot kN$$

Una carga distribuída constante con dirección z local, genera una función de Momento cuadrática (función de corte lineal). De existir un Momento puntual aplicado en algún punto x, la función de Momentos será partida y tendrá un salto en dicho punto.
Del diagrama de corte se puede determinar para cualquier punto x la pendiente del diagrama de Momentos.



Corte en S2 (pendiente de M):