CUERPOS VINCULADOS

EJERCICIO CADENA ABIERTA DE 3 CHAPAS

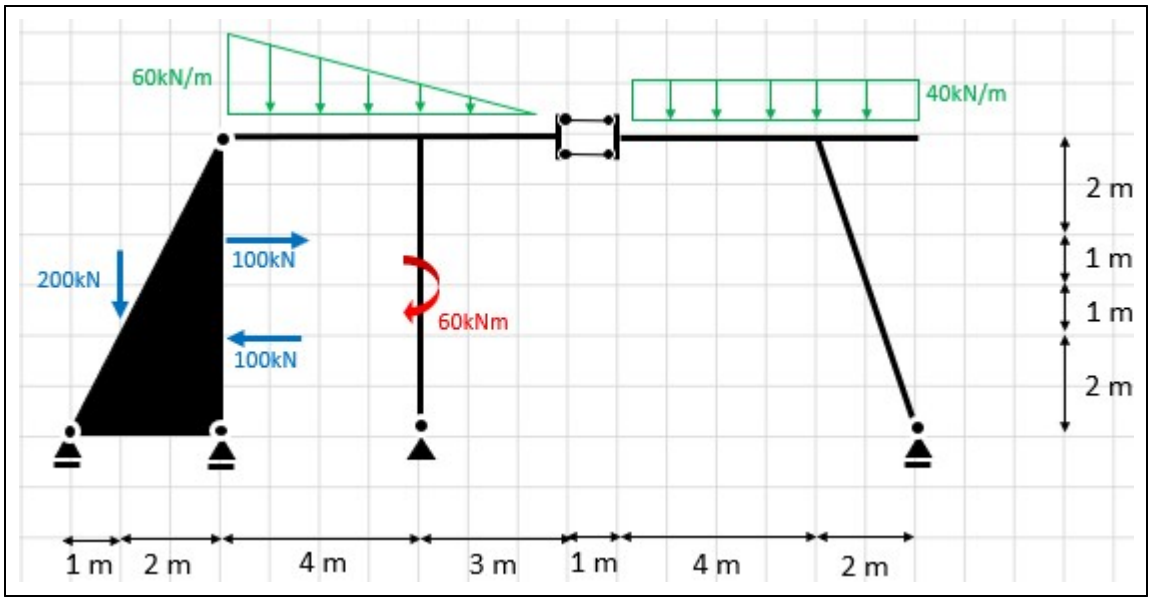

Figura 1. Estructura a analizar.

1.1. ANÁLISIS CINEMÁTICO

1.1.1. ISOESTATICIDAD DE LA ESTRUCTURA

La estructura es una cadena abierta de 3 chapas. La cantidad de grados de libertad se calculan a partir del número de chapas :

$N_{chapas} := 3 \qquad N_{GL} := N_{chapas} + 2 = 5$

La estructura presenta un apoyo fijo y tres apoyos móviles, es decir, 5 condiciones de vínculo. Como el número de condiciones de vínculo es igual a la cantidad de grados de libertad, la estructura se clasifica como isostática.

La figura 2 señala cada una de las chapas y muestra el punto fijo ,B, que pertenece a la chapa S2 y el punto fijo A que pertenece a la chapa S1 en el impropio vertical. Esto último significa que la chapa S1 no puede desplazarse verticalmente, solo horizontalmente.

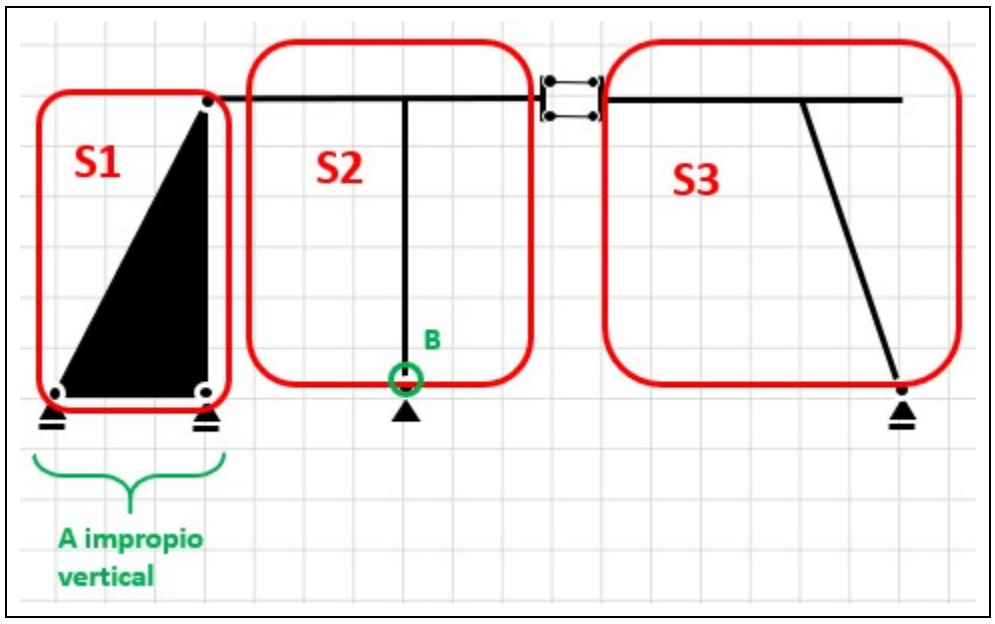

Figura 2. Denominación de chapas y puntos fijos.

1.1.2. ANÁLISIS DE VÍNCULACIÓN APARENTE

Como la chapa S1 presenta un punto fijo en el impropio vertical, el único desplazamiento posible es el desplazamiento horizontal. Por otro lado, la chapa S2, como presenta un punto fijo en B, solo puede rotar en torno a este.

El punto C corresponde a la articulación que vincula la chapa S1 y S2 y por lo tanto pertenece a ambas, por lo que debe cumplir con las dos condiciones.

La figura 3 muestra los desplazamientos posibles del punto C según la chapa S1 (rojo) y la chapa S2 (azul). Ambos movimientos son incompatibles, ya que no puede realizar uno sin violar el otro, por lo que el punto C necesariamente está fijo.

El sistema conformado por las chapas S1 y S2 articuladas en el punto C corresponde a un arco triarticulado.

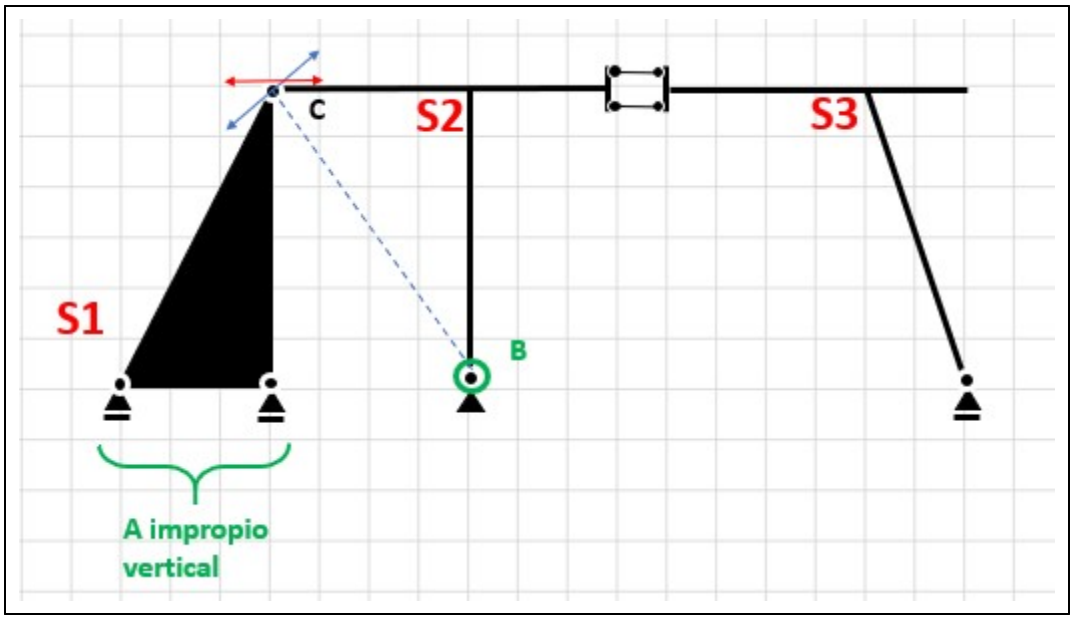

Figura 3. Análisis cinemático de las chapas S1 y S2.

Se demostró que la chapa S1 y la chapa S2 presentan dos puntos fijos cada una (puntos A y C para S1 y puntos B y C para S2), por lo que ambas se encuentran fijas.

Como el sistema conformado por las chapas S1 y S2 está fijo, el único movimiento que podría realizar la chapa S3 es un desplazamiento vertical. Sin embargo, se encuentra impedido por el apoyo movil que posee, por lo que la chapa S3 está fija.

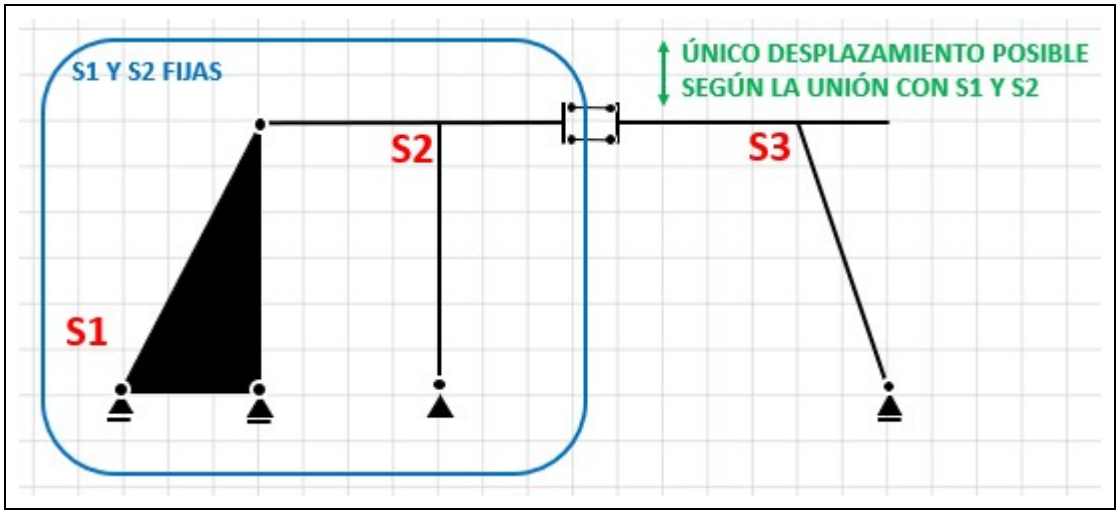

Figura 3. Análisis cinemático de las chapas S1 y S2.

El sistema es isostático y no presenta vinculación aparente.

1.2. REACCIONES DE VÍNCULO EXTERNO

La figura 4 muestra las reacciones de vínculo externo de la estructura.

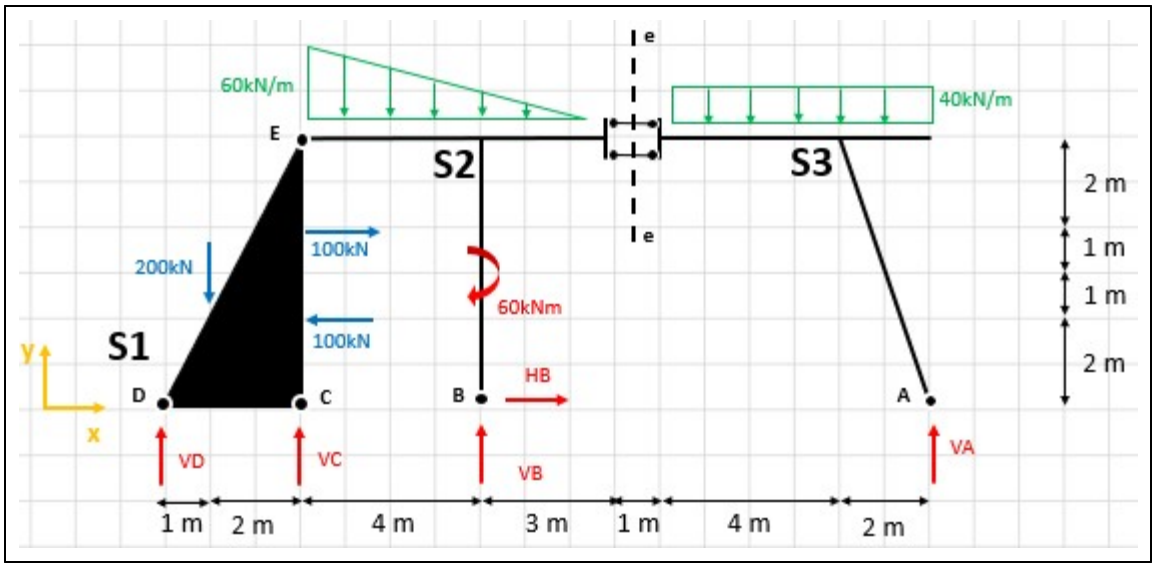

Figura 4. Reacciones de vínculo externo puestas en evidencia.

1.2.1. ECUACIONES DE EQUILIBRIO DISPONIBLES

La estructura se encuentra en equilibrio, y por lo tanto, se pueden utilizar ecuaciones de equilibrio global y equilibrio relativo para determinar las reacciones de vínculo.

Las ecuaciones de equilibrio global que se pueden plantar son las siguientes.

$$\sum_i Fx_i = 0$$ Proyección en el eje X

$$\sum_i Fy_i = 0$$ Proyección en el eje Y

$$\sum_i M_P^{(S1+S2+S3)} = 0$$ Momentos respecto a un punto P

Se debe destacar que también se pueden utilizar 2 ecuaciones de momento y una de proyección o 3 ecuaciones de momento considerando los límites que poseen.

Las ecuaciones equilibrio relativo que se pueden plantear para este ejercicio son:

$\sum_i M_E^{(S1)} = 0$ Momentos respecto a la articulacion E para las fuerzas de la chapa S1

$\sum_i M_E^{(S2+S3)} = 0$ Momentos respecto a la articulación E para las fuerzas de las chapas S2 y S3

$\sum_i Fe^{(S1+S2)} = 0$ Proyección sobre el eje e-e para las fuerzas de las chapas S1 y S2

$\sum_i Fe^{(S3)} = 0$ Proyección sobre el eje e-e para las fuerzas de la chapa S3

Se deben determinar 5 reacciones de vínculo, por lo que se necesitaran utilizar solamente 5 expresiones.
Se debe tener precaución de no tomar una expresión que sea una combinación lineal de otras previamente seleccionadas. Por ejemplo la suma de las dos últimas expresiones corresponde a la ecuación de proyección en el eje X.

1.2.2. DETERMINACIÓN DE REACCIONES DE VINCULO EXTERNO

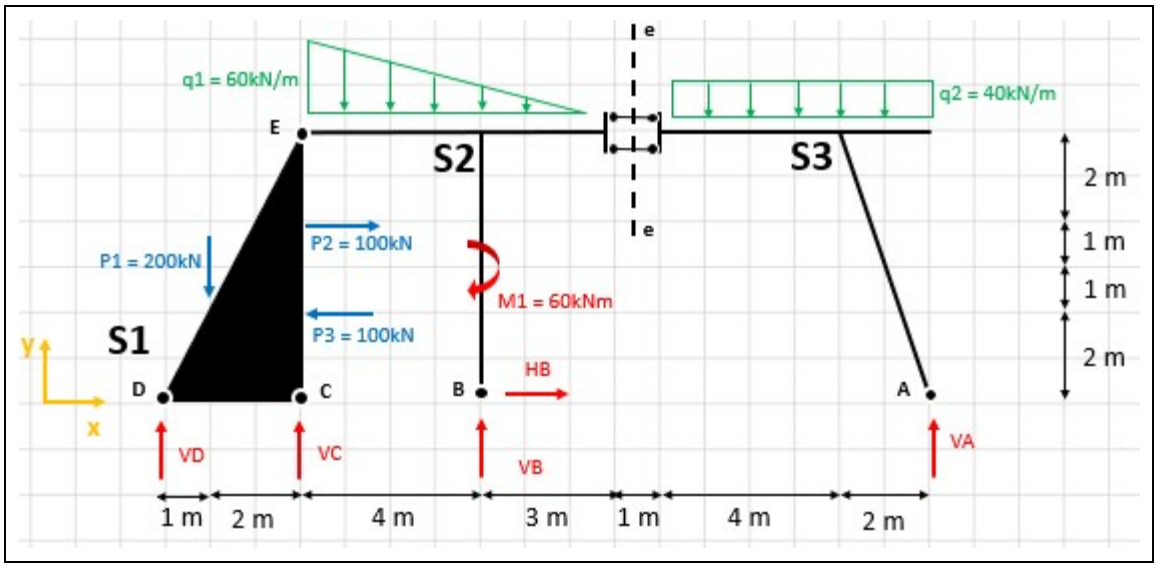

Figura 4. Denominación de las fuerzas y momentos.

Se definen las fuerzas que actúan en la estructura.

$P1 := 200kN$ $P2 := 100kN$ $P3 := 100kN$

$M1 := 60kN \cdot m$ $q_1 := 60\frac{kN}{m}$ $q_2 := 40\frac{kN}{m}$

Se plantean las siguientes ecuaciones de equilibrio global:

$$\sum_i Fx_i = 0 \qquad HB + P2 - P3 = 0$$

$$\sum_i Fy_i = 0 \qquad VA + VB + VC + VD - 200kN - \frac{q_1 \cdot 7m}{2} - q_2 \cdot 6m = 0$$

y las siguientes con respecto a equilibrio relativo:

$$\sum_i Fe^{(S3)} = 0 \qquad VA - q_2 \cdot 6m = 0$$

$$\sum_i M_E^{(S1)} = 0 \qquad -VD \cdot 3m + P1 \cdot 2m - P3 \cdot 4m + P2 \cdot 2m = 0$$

$$\sum_i M_E^{(S2+S3)} = 0 \qquad -M1 - \left(\frac{q_1 \cdot 7m}{2}\right) \cdot \frac{7m}{3} - \left(q_2 \cdot 6m\right) \cdot 11m + VA \cdot 14m + VB \cdot 4m + HB \cdot 6m = 0$$

$$\text{Find}(VA, VB, HB, VC, VD) = \begin{pmatrix} 240 \\ -42.5 \\ 0 \\ 385.833 \\ 66.667 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$VA := 240kN$
$VB := -42.5kN$
$HB := 0kN$
$VC := 385.833kN$
$VD := 66.667kN$

Se verifican los resultados obtenidos con una ecuación de equilibrio global.

$$\sum_i M_A^{(S1+S2+S3)} = 0$$

$$Q1 := \frac{q_1 \cdot 7m}{2} = 210 \cdot kN \qquad Q2 := q_2 \cdot 6m$$

$$Q2 \cdot 3m - VB \cdot 10m - M1 + Q1 \cdot \frac{35}{3}m - P2 \cdot 4m + P3 \cdot 2m + P1 \cdot 16m - VD \cdot 17m - VC \cdot 14m = -1 \times 10^{-3} \cdot kN \cdot m$$

La figura 5 muestra los valores de las reacciones de vínculo externo y su correcto sentido.

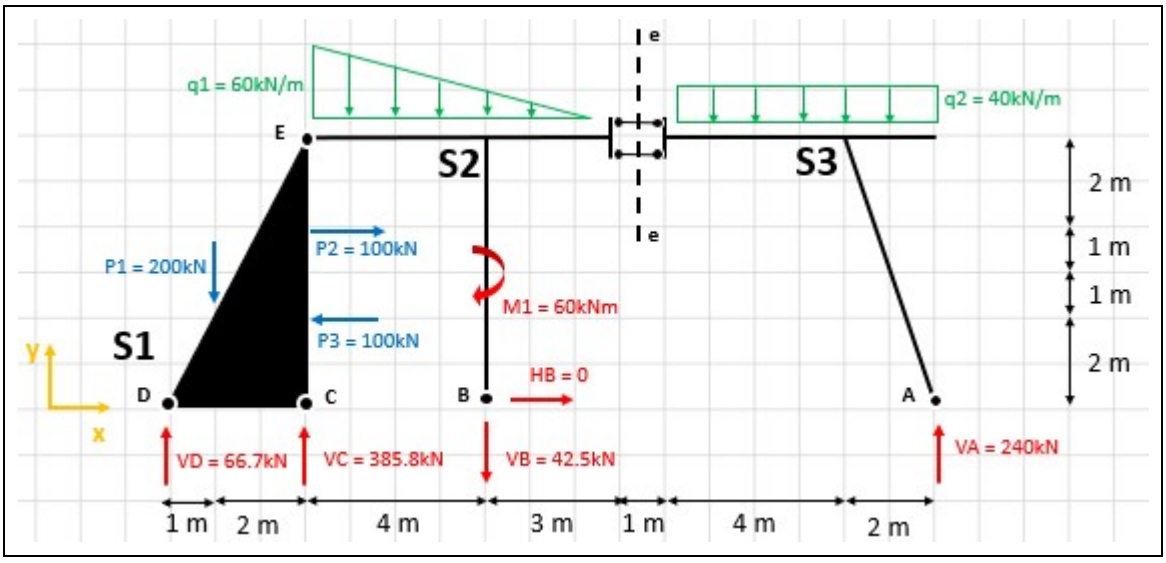

Figura 5. Sentidos correctos de las reacciones de vínculo externo

1.3 DESPIECE DE LA ESTRUCTURA

1.3.1. CHAPA S1

La figura 6 muestra la chapa S1 aislada de la estructura. Las fuerzas V12 y H12 corresponden a las reacciones de vínculo interno entre las chapas S1 y S2.

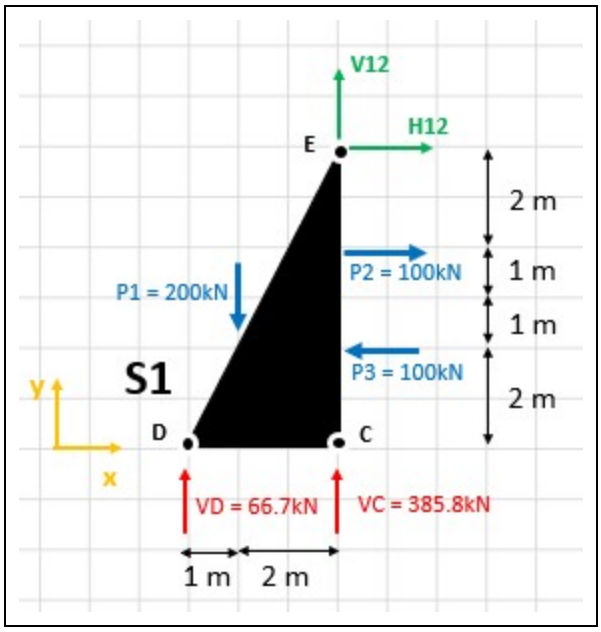

Figura 6. Despiece de la chapa S1

Las reacciones V12 y H12 pueden obtenerse planteando el equilibrio de la chapa S1.

$$\sum_i Fx_i = 0 \qquad P2 - P3 + H12 = 0$$

$$\sum_i Fy_i = 0 \qquad VD + VC - P1 + V12 = 0$$

$$\text{Find}(H12, V12) = \begin{pmatrix} 0 \\ -252.5 \end{pmatrix} \cdot kN \qquad \begin{aligned} H12 &:= 0kN \\ V12 &:= -252.5kN \end{aligned}$$

Se verifican los resultados obtenidos con una ecuación de equilibrio global.

$$\sum_i M_D = 0 \qquad VC \cdot 3m - P1 \cdot 1m + P3 \cdot 2m - P2 \cdot 4m - H12 \cdot 6m + V12 \cdot 3m = -1 \times 10^{-3} \cdot kN \cdot m$$

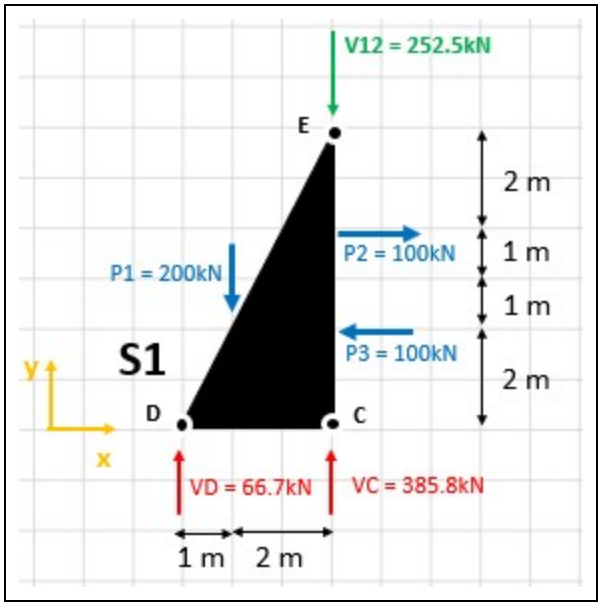

Figura 7. Chapa S1 con los sentidos correctos de las reacciones de vinculo interno.

1.3.2. CHAPA S2

La figura 8 muestra la chapa S2 aislada de la estructura. Las fuerzas b1 y b2 corresponden a las reacciones de vínculo interno entre las chapas S2 y S3.

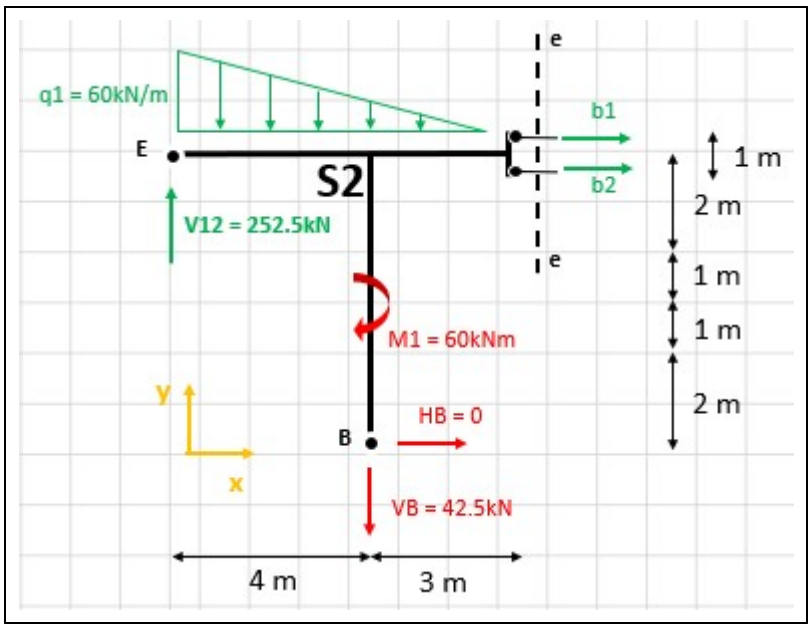

Figura 8. Despiece de la chapa S2

Las reacciones b1 y b2 pueden obtenerse planteando el equilibrio de la chapa S2.

$$\sum_i Fx_i = 0 \qquad b1 + b2 = 0$$

$$\sum_i M_B = 0 \qquad -252.5\text{kN}\cdot 4\text{m} + Q1\cdot\left(4\text{m} - \frac{7\text{m}}{3}\right) - M1 - b1\cdot 6.5\text{m} - b2\cdot 5.5\text{m} = 0$$

$$\text{Find}(b1, b2) = \begin{pmatrix} -720 \\ 720 \end{pmatrix}\cdot\text{kN} \qquad b1 := -720\text{kN} \qquad b2 := 720\text{kN}$$

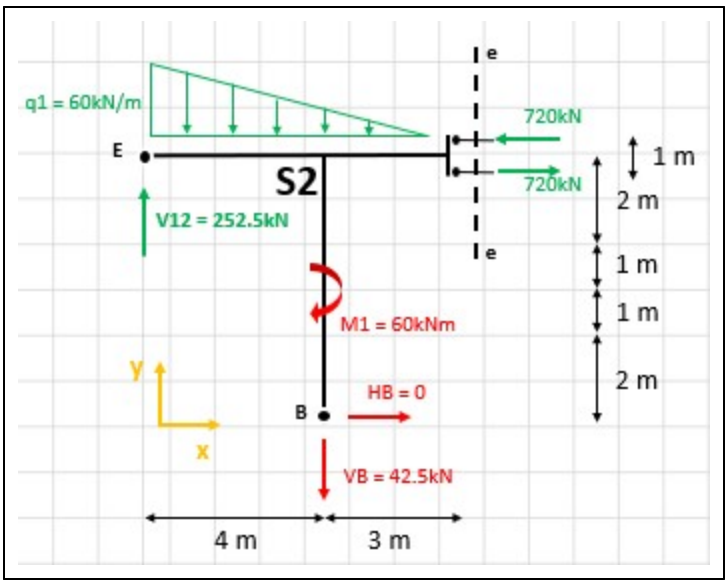

Figura 9. Chapa S2 con los sentidos correctos de las reacciones de vinculo interno.

1.3.3. CHAPA S3

La figura 10 muestra la chapa S3 aislada de la estructura. Como ya se conocen las reacciones de vínculo interno, se debe verificar el equilibrio global de esta.

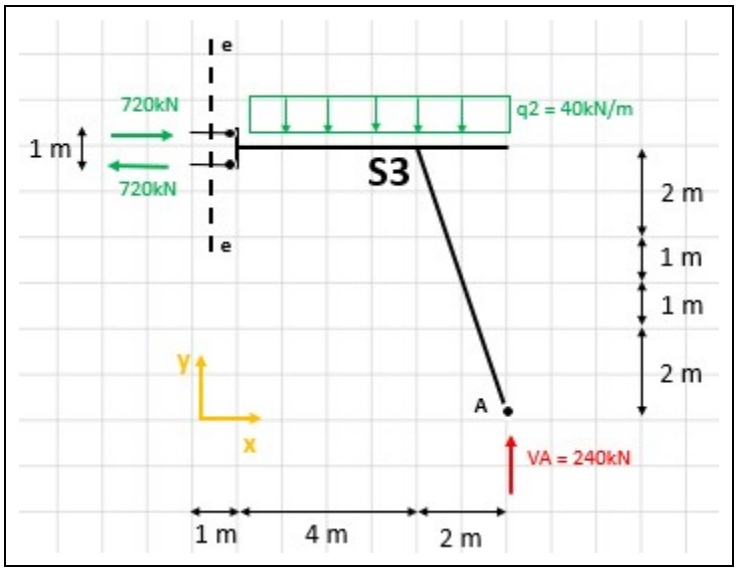

Figura 10. Despiece de la chapa S3.

$$\sum_i Fx_i = 0 \qquad 720kN - 720kN = 0 \cdot kN \qquad \sum_i Fy_i = 0 \qquad 240kN - Q2 = 0 \cdot kN$$

$$\sum_i M_A' = 0 \qquad Q2 \cdot 3m - 720kN \cdot 6.5m + 720kN \cdot 5.5m = 0 \cdot kN \cdot m$$