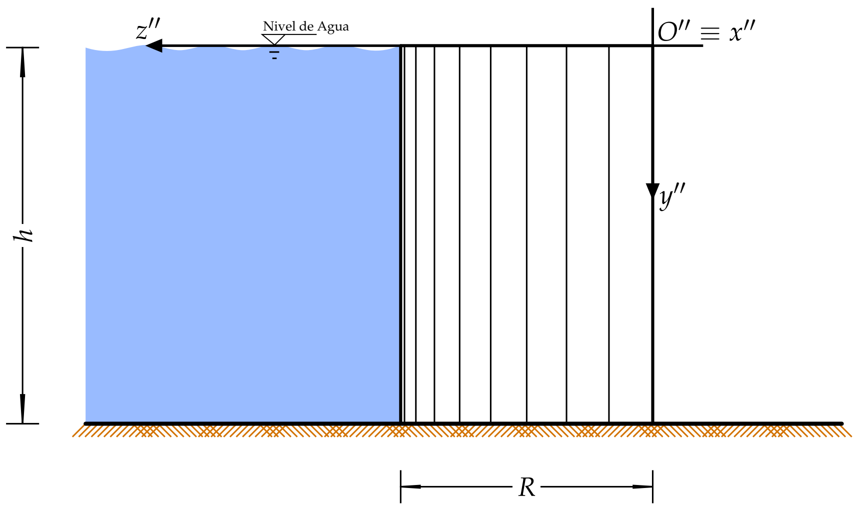
Fuerzas Distribuidas

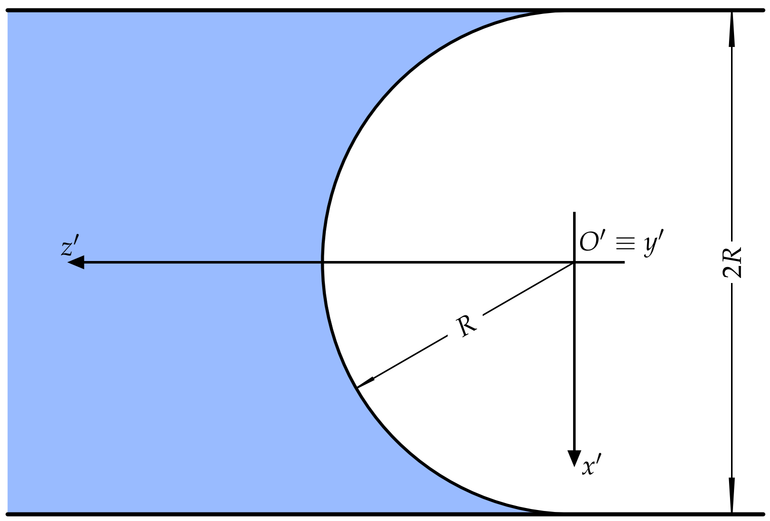
1. Enunciado

Determinar, para la presa esquematizada en la figura, la intensidad y la posición del *empuje hidrostático resultante*.

2. Datos



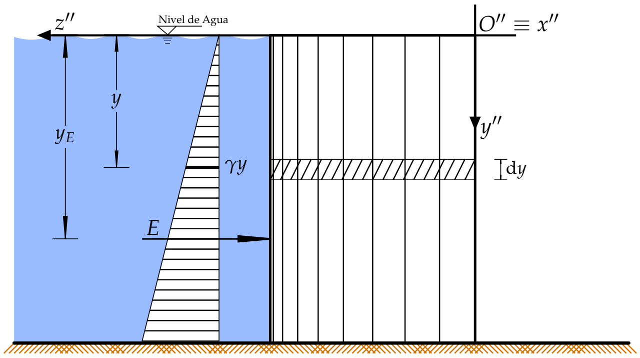
VISTA

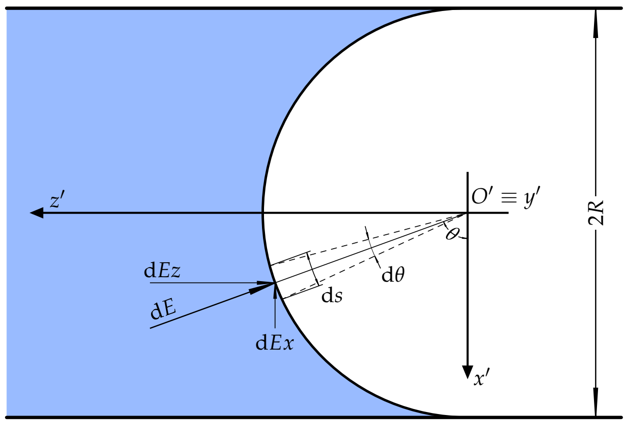


PLANTA

3. Resolución

3.1. Figura de Análisis





3.2. Intensidad del Empuje

Consideremos, a una profundidad cualquiera y, una banda elemental de altura $\mathrm{d}y$, y seleccionemos sobre ella un elemento diferencial de superficie genérico $\mathrm{d}F$, cuya ubicación definimos por medio del ángulo θ que forma su radio vector con el eje x. Se tendrá entonces lo siguiente:

$$\text{Presión hidrostática: } p_y = \gamma y \tag{1}$$

$$\text{Área elemento de superficie: } \mathrm{d}F = \mathrm{d}s\,\mathrm{d}y = R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y \tag{2}$$

$$\text{Empuje elemental: } \mathrm{d}E = p_y\,\mathrm{d}F = \gamma y R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

donde $\gamma = 10\,\mathrm{kN/m^3}$ es el peso específico del agua.

El empuje elemental $\mathrm{d}\mathbf{E}$ admite dos componentes: una según la dirección del eje z y otra según la dirección del eje x, cuyas intensidades son:

$$\mathrm{d}E_z = -\,\mathrm{d}E\,\mathrm{sen}\,(\theta) \tag{4}$$

$$\mathrm{d}E_x = -\,\mathrm{d}E\cos(\theta) \tag{5}$$

A cada elemento de superficie $\mathrm{d}F$ como el que estamos analizando le corresponde otro, simétricamente dispuesto respecto del eje z, para el que puede hacerse un análisis idéntico al que ya se ha llevado a cabo. Se observa así que las componentes paralelas al eje x tienen *la misma recta de acción, iguales intensidades y sentidos opuestos*, por lo que su suma es igual a cero, mientras que las componentes paralelas al eje z constituyen un *par de fuerzas paralelas de la misma intensidad*, por lo que su resultante elemental estará contenida en el plano de simetría yz.

Dado que la consideración anterior puede extenderse a lo largo de toda la banda elemental bajo análisis, se concluye que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \mathrm{d}E_x &= 0 && (6)\\ \mathrm{d}E_R = \int_0^{\pi} \mathrm{d}E_z &= -\int_0^{\pi} \gamma R y\, \mathrm{d}y \operatorname{sen}(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= -\gamma R y\, \mathrm{d}y \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= -\gamma R y\, \mathrm{d}y \left(-\cos(\theta)\right)\Big|_0^{\pi} \\ \mathrm{d}E_R &= -2\gamma R y\, \mathrm{d}y && (7) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el empuje elemental resultante —correspondiente a la banda elemental que estamos analizando— está contenido en el plano yz y su intensidad $\mathrm{d}E_R$ es igual al producto que surge de multiplicar el valor de la presión hidrostática de ese nivel (γy) por el área de la superficie de la banda elemental *proyectada* sobre el plano xy $(2R\,\mathrm{d}y)$; podemos observar, además, que varía linealmente en función de la profundidad.

En consecuencia, la *intensidad del empuje total resultante* (que también estará contenido en el plano zy) será igual a:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{h} \mathrm{d}E_R \\ &= 2\gamma R \int_0^{h} y\, \mathrm{d}y \\ &= 2\gamma R \frac{y^2}{2}\Big|_0^{h} \\ &= 2\gamma R \frac{h^2}{2} \\ E &= \frac{2Rh\gamma h}{2} && (8) \end{aligned}$$

Podemos constatar rápidamente que *el valor del empuje coincide con el área del diagrama de cargas*, que en este caso resulta triangular (base = $2Rh\gamma$ y altura = h).

Una conclusión muy importante que podemos extraer de la expresión (8) es que la *intensidad del empuje total* puede hallarse también calculando el producto que surge de multiplicar el área de la superficie proyectada $(2Rh)$ por el valor de la presión en correspondencia con su baricentro $(\gamma\, {}^{h}/_{2})$.

3.3. Posición del Empuje

Para determinar la ubicación del empuje total emplearemos el **teorema de Varignon** que nos dice que el momento de la resultante de un sistema plano de fuerzas con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las fuerzas componentes con respecto al mismo punto; adoptaremos como centro de momentos al punto O, origen del sistema de coordenadas.

El momento del empuje elemental $\mathrm{d}E_R$ con respecto a O es igual a:

$$\mathrm{d}M^O = -\,\mathrm{d}E_R y = -(\gamma y 2R\, \mathrm{d}y) y = -\gamma y^2 2R\, \mathrm{d}y \qquad (9)$$

con lo que la suma de los momentos de todas las fuerzas elementales será:

$$\begin{aligned} M^O &= \int_0^{h} \mathrm{d}M^O \\ &= \int_0^{h} -\gamma y^2 2R\, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\gamma 2R \int_0^h y^2 \, \mathrm{d}y \\
&= -\gamma 2R \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^h \\
M^O &= -\gamma 2R \frac{h^3}{3} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, el *momento del empuje total* será igual a:

$$M_E^O = -\gamma h^2 R y_E \qquad (11)$$

De acuerdo con lo expresado al comenzar este punto, debe ser $M^O = M_E^O$; por tanto, tendremos:

$$\gamma 2R \frac{h^3}{3} = \left(\gamma h^2 R\right) y_E \qquad (12)$$

de donde concluimos:

$$y_E = 2\frac{h}{3} \qquad (13)$$

Verificamos, así, que *la recta de acción del empuje total pasa por el baricentro del diagrama de cargas* (en este caso, triangular).

Si volvemos sobre la expresión (9), vemos que puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\mathrm{d}M^O = \mathrm{d}E_R y = (\gamma y 2R \, \mathrm{d}y) y = \gamma y^2 \, \mathrm{d}F$$

con lo que resulta:

$$M^O = -\int_0^h \gamma y^2 \, \mathrm{d}F = -\gamma \int_0^h y^2 \, \mathrm{d}F \qquad (14)$$

donde la integral corresponde al *momento de inercia de la superficie proyectada con respecto al eje x.*

La expresión (11) puede reescribirse de la siguiente manera, si se multiplica y divide por 2 el segundo miembro:

$$M_E^O = -\gamma h^2 R y_E = -\gamma 2Rh \frac{h}{2} y_E$$

donde $2Rh = F'$ es el área de la superficie proyectada y $\frac{h}{2} = y_G$. Luego, se tiene:

$$
\begin{aligned}
M_E^O &= E y_E \\
&= -\gamma \left(F' y_G\right) y_E \\
M_E^O &= -\gamma \left(S_x^{F'}\right) y_E \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Igualando ahora las expresiones (14) y (15) obtenemos:

$$-\gamma J_x^{F'} = -\gamma S_x^{F'} y_E$$

de donde se concluye:

$$y_E = \frac{J_x^{F'}}{S_x^{F'}} \qquad (16)$$

4. Resumen

1. La intensidad del empuje hidrostático total es igual al área del diagrama de cargas.
2. La intensidad del empuje hidrostático total es igual al producto que surge de multiplicar el área de la superficie proyectada por el valor de la presión en correspondiencia con su baricentro.
3. La recta de acción del empuje hidrostático total pasa por el baricentro del diagrama de cargas.
4. La ubicación del empuje hidrostático total es igual al cociente que se obtiene dividiendo el momento de inercia de la superficie proyectada con respecto al eje x por el momento estático de la misma superficie respecto al mismo eje.