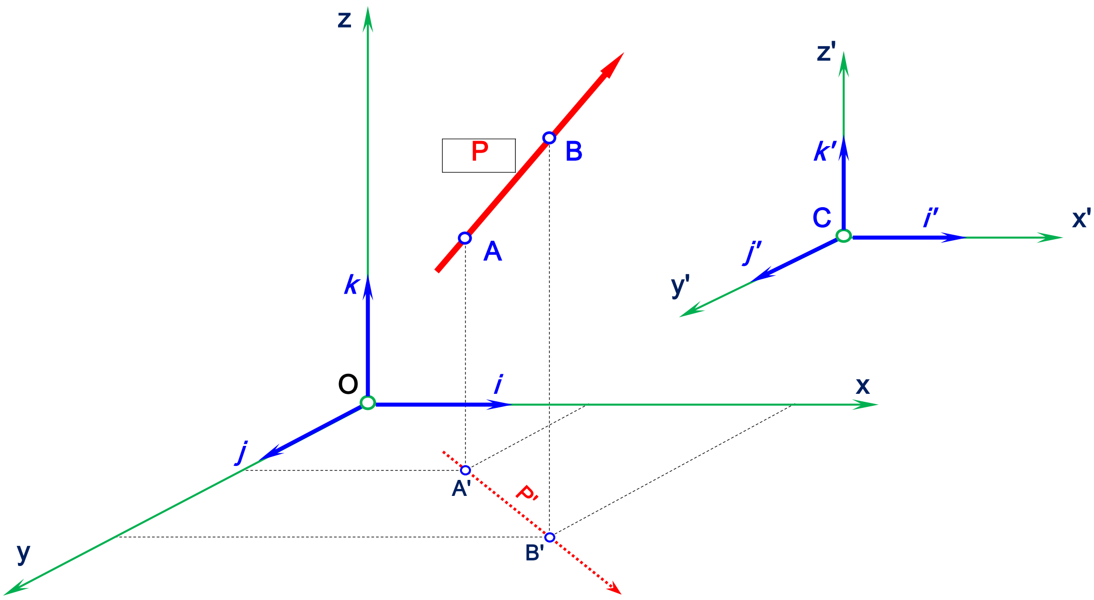
Ejercicio N°: 1. 01

* Dados la fuerza P, los sistemas de ejes coordenados de referencia x, y, z y x', y', z' y las coordenadas de los puntos A, B y C, se pide:

1 Determinar los Cosenos Directores de la fuerza P.
2 Determinar las proyecciones de la fuerza P sobre los dos sistemas de ejes de referencia.
3 Determinar el momento de la fuerza P con respecto al punto O.
4 Determinar el momento de la fuerza P con respecto al punto C.
5 Determinar los momentos de la fuerza P con respecto a cada uno de los ejes de los dos sistemas de referencia dados.



DATOS									
Fuerza	Punto A			Punto B			Punto C		
P	x_A	y_A	z_A	x_B	y_B	z_B	x_C	y_C	z_C
[kN]	[m]			[m]			[m]		
100	2,00	4,00	8,00	5,00	8,00	12,00	10,00	-2,00	2,00

RESOLUCIÓN

1 Cosenos Directores de la fuerza P

Recordemos que los *ángulos directores* de un vector, a los que les corresponden los *cosenos directores* que tenemos que determinar, son los ángulos que aquél forma con cada uno de los tres ejes coordenados de referencia.

Por lo tanto, si consideramos al segmento AB como segmento orientado en el espacio (vector), la proyección sobre los ejes coordenados de su origen y de su extremo definirán las de dicho vector sobre cada uno de ellos y, en consecuencia, la relación de cada proyección con el módulo del vector nos dará el valor del coseno del ángulo formado por el vector y el respectivo eje.

En consecuencia, tendremos lo siguiente:

$$\Delta x = x_B - x_A = (5{,}00 - 2{,}00) = 3{,}00 \text{ m}$$
$$\Delta y = y_B - y_A = (8{,}00 - 4{,}00) = 4{,}00 \text{ m}$$
$$\Delta z = z_B - z_A = (12{,}00 - 8{,}00) = 4{,}00 \text{ m}$$

$$\Delta s = \text{raiz } [\ (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\ ] = 6{,}403 \text{ m}$$

$$\cos \alpha_P = \Delta x \ / \ \Delta s = 3{,}00 \ / \ 6{,}403 = 0{,}46852$$
$$\cos \beta_P = \Delta y \ / \ \Delta s = 4{,}00 \ / \ 6{,}403 = 0{,}62470$$
$$\cos \gamma_P = \Delta z \ / \ \Delta s = 4{,}00 \ / \ 6{,}403 = 0{,}62470$$

$\boxed{\cos \alpha_P = 0{,}46852}$ $\boxed{\cos \beta_P = 0{,}62470}$ $\boxed{\cos \gamma_P = 0{,}62470}$

2 Proyecciones de la fuerza P sobre los dos sistemas de ejes de referencia

Dado que ambas ternas de referencia son paralelas, los cosenos directores de la fuerza son iguales, por lo tanto, también lo serán las proyecciones correspondientes. Tendremos, entonces, que:

$$Px = Px' = P \ . \ \cos \alpha = 100 \text{ kN} \ . \ 0{,}46852 = 46{,}85 \text{ kN}$$
$$Py = Py' = P \ . \ \cos \beta = 100 \text{ kN} \ . \ 0{,}62470 = 62{,}47 \text{ kN}$$
$$Pz = Pz' = P \ . \ \cos \gamma = 100 \text{ kN} \ . \ 0{,}62470 = 62{,}47 \text{ kN}$$

$\boxed{Px = 46{,}9 \text{ kN}}$ $\boxed{Py = 62{,}5 \text{ kN}}$ $\boxed{Pz = 62{,}5 \text{ kN}}$

3 Momento de la fuerza P con respecto al punto O

Con el objetivo de compactar los cálculos, plantearemos la ecuación de momentos vectorialmente, en lugar de hacerlo con las tres ecuaciones cartesianas correspondientes.

Recordemos que, por definición de *momento de una fuerza respecto de un punto*, el *producto vectorial* que debemos plantear lo es entre la *fuerza* en cuestión (***P*** en este caso) y *un vector posición* ***r***, que *tiene como origen un punto de la recta de acción de la fuerza P y como extremo el punto elegido como centro de momentos*. Recordemos también que el resultado de este producto vectorial *cambia de sentido al modificar la terna de referencia,* por lo que, formalmente, se dice habitualmente que el momento de una fuerza respecto de un punto es un *pseudo-vector*.

En el problema que nos ocupa, la terna de referencia es una *terna izquierda* y el punto de la recta de acción de la fuerza ***P*** que elegiremos para establecer el vector posición será el punto A.

Tendremos, entonces, que:

$$M_P^O = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 46{,}85 & 62{,}47 & 62{,}47 \\ -2{,}00 & -4{,}00 & -8{,}00 \end{vmatrix} = -249{,}9\ \boldsymbol{i} + 249{,}9\ \boldsymbol{j} - 62{,}5\ \boldsymbol{k}$$

$$|M_P^O| = \sqrt{[(Mx_P^O)^2 + (My_P^O)^2 + (Mz_P^O)^2]} = 358{,}9 \text{ kN.m}$$

$$\cos\alpha_{Mo} = Mx_P^O \ / \ |M_P^O| = -0{,}69631$$
$$\cos\beta_{Mo} = My_P^O \ / \ |M_P^O| = 0{,}69631$$
$$\cos\gamma_{Mo} = Mz_P^O \ / \ |M_P^O| = 0{,}17408$$

y, resumiendo:

$$\boxed{\mathbf{M_P^O = -249{,}9\ \boldsymbol{i} + 249{,}9\ \boldsymbol{j} - 62{,}5\ \boldsymbol{k} \quad [kN.m]}} \quad \text{(vector)}$$

o bien:

$$\boxed{\mathbf{|M_P^O| = 358{,}9 \quad kN.m}} \quad \text{(módulo)}$$

$$\boxed{\mathbf{\cos\alpha_{Mo} = -0{,}69631}} \quad \boxed{\mathbf{\cos\beta_{Mo} = 0{,}69631}} \quad \boxed{\mathbf{\cos\gamma_{Mo} = 0{,}17408}}$$

4 Momento de la fuerza P con respecto al punto C

Este punto es similar al anterior; sólo debemos cambiar las coordenadas del centro de momentos:

$$M_P^C = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 46{,}85 & 62{,}47 & 62{,}47 \\ 8{,}00 & -6{,}00 & -6{,}00 \end{vmatrix} = 0\ \boldsymbol{i} + 780{,}9\ \boldsymbol{j} - 780{,}9\ \boldsymbol{k}$$

$$|M_P^C| = \sqrt{[(Mx_P^C)^2 + (My_P^C)^2 + (Mz_P^C)^2]} = 1104{,}3 \text{ kN.m}$$

CG

$\cos\alpha_{MC} = Mx_P^C \;/\; |M_P^C| = 0{,}00000$

$\cos\beta_{MC} = My_P^C \;/\; |M_P^C| = 0{,}70711$

$\cos\gamma_{MC} = Mz_P^C \;/\; |M_P^C| = -0{,}70711$

O sea que resulta:

$$\boxed{M_P^C = 0{,}0\; i + 780{,}9\; j - 780{,}9\; k \quad [\mathrm{kN.m}]} \quad \text{(vector)}$$

o bien:

$$\boxed{|M_P^C| = 1104{,}3 \;\; \mathrm{kN.m}} \quad \text{(módulo)}$$

$$\boxed{\cos\alpha_{Mo} = 0{,}00000} \quad \boxed{\cos\beta_{Mo} = 0{,}70711} \quad \boxed{\cos\gamma_{Mo} = -0{,}70711}$$

5 Momento de la fuerza P con respecto a los ejes de referencia

Para responder este punto es necesario recordar que los momentos de la fuerza ***P*** con respecto a cada uno de los ejes son las componentes del vector ***M*** determinado en los apartados (3) y (4).

Por lo tanto, tendremos directamente que:

M_P^x	=	$(M_P^O)_x$	= -	249,9	*i*	kN.m
M_P^y	=	$(M_P^O)_y$	= +	249,9	*j*	kN.m
M_P^z	=	$(M_P^O)_z$	= -	62,5	*k*	kN.m
$M_P^{x'}$	=	$(M_P^C)_{x'}$	=	0,0	*i*	kN.m
$M_P^{y'}$	=	$(M_P^C)_{y'}$	= +	780,9	*j*	kN.m
$M_P^{z'}$	=	$(M_P^C)_{z'}$	= -	780,9	*k*	kN.m

----oOo----