HOJA
1

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

FUERZAS CONCENTRADAS – PARTE 1
TRABAJO PRÁCTICO Nº1

CURSO 4 – CARNICER – PARENTE

SEGUNDO CUAT. 2020
MODALIDAD ONLINE

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

depto. Estabilidad

.UBAfiuba FACULTAD DE INGENIERÍA

www.ingenieria.uba.ar

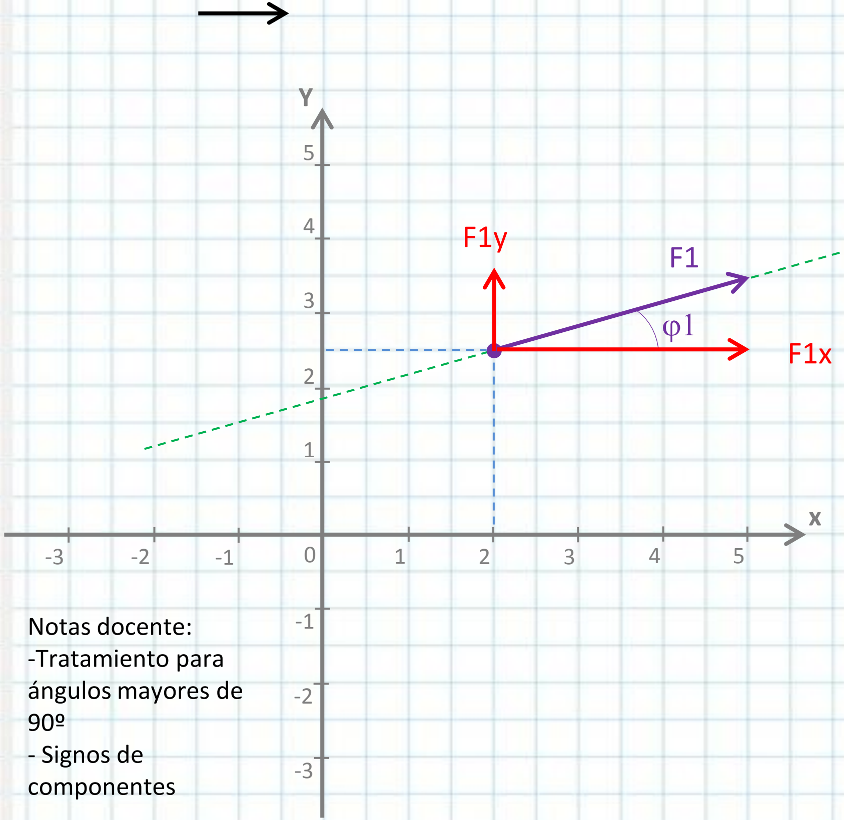
Descomposición de una fuerza en el plano

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

10kN = 1cm
Escala de fuerzas 10 kN/cm



Dada una fuerza F1 que forma un ángulo φ1 con la horizontal, encontrar las componentes de la fuerza en dirección de x e y.

Datos:
F1=30kN
φ1 =18.43º
Punto de aplicación de la fuerza (2;2.5)

$$F1x = F1 \cdot \cos(\varphi_1) =$$
$$= 30kN \cdot \cos(18.43^o) = +28.5kN$$

$$F1y = F1 \cdot sen(\varphi_1) =$$
$$= 30kN \cdot sen(18.43^o) = +9.5kN$$

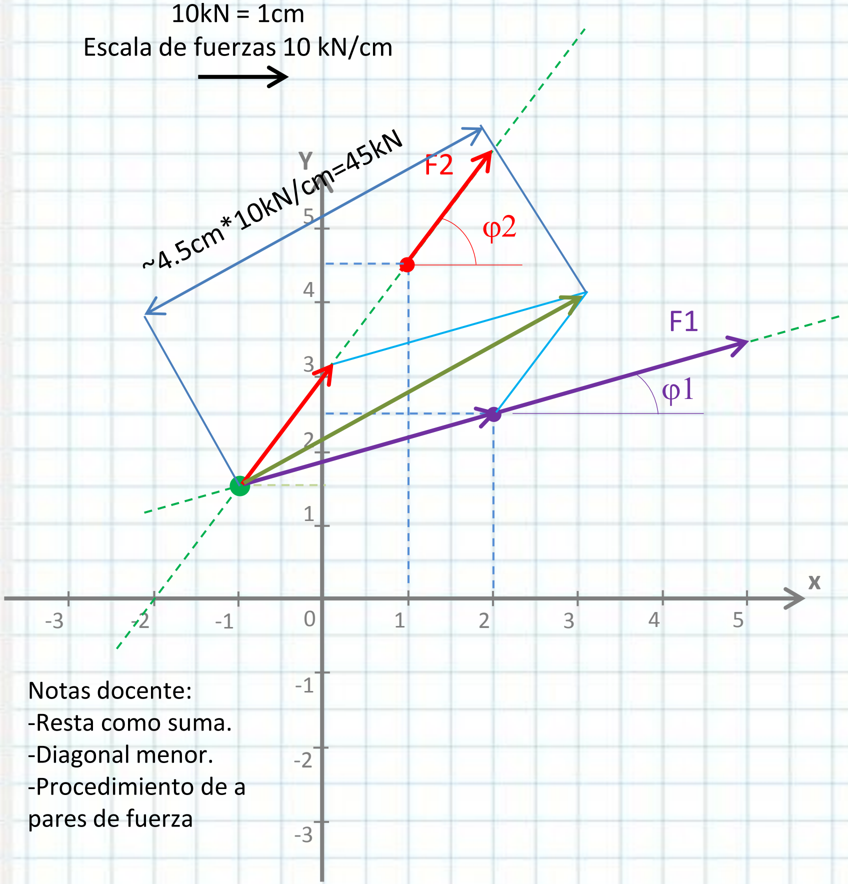
Notas docente:
-Tratamiento para ángulos mayores de 90º
- Signos de componentes

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Suma de fuerzas en el plano



A la F1 de la lamina anterior, queremos sumarle una fuerza F2.

Datos:
F2=18kN
φ2 =56.3º
Punto de aplicación de la fuerza (1;4.5)

Manera gráfica: Principio del paralelogramo.

-Encuentro el punto de intersección de las dos rectas de acción.
-Traslado de fuerzas hasta ese punto (Principio de transmisibilidad)
-Realizar paralelas para formar el paralelogramo. Trazar diagonal superior.
-Medir, escala de fuerzas.

Notas docente:
-Resta como suma.
-Diagonal menor.
-Procedimiento de a pares de fuerza

HOJA
4

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

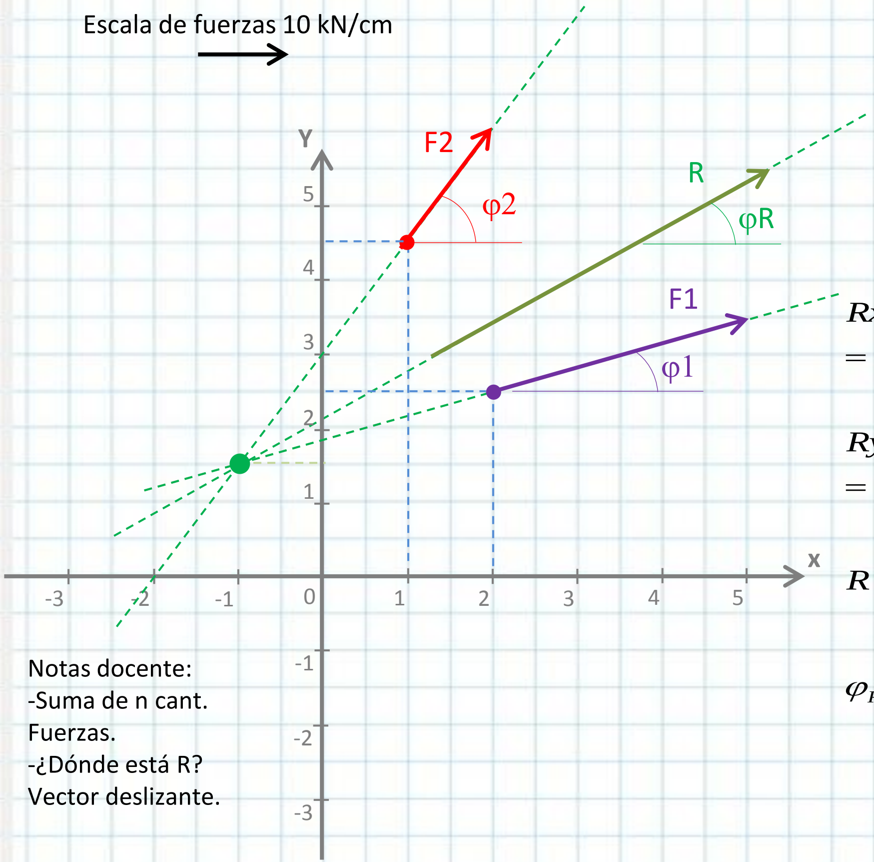
F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Suma de fuerzas en el plano

10kN = 1cm
Escala de fuerzas 10 kN/cm



F1=30kN
φ1 =18.43º
P=(2;2.5)

F2=18kN
φ2 =56.3º
P= (1;4.5)

Manera analítica:

Llamamos R = F1+F2

$$Rx = F1 \cdot \cos(\varphi_1) + F2 \cdot \cos(\varphi_2) =$$
$$= 30kN \cdot \cos(18.43^\circ) + 18kN \cdot \cos(56.3^\circ) = 38.45kN$$

$$Ry = F1 \cdot sen(\varphi_1) + F2 \cdot sen(\varphi_2) =$$
$$= 30kN \cdot sen(18.43^\circ) + 18kN \cdot sen(56.3^\circ) = 24.45kN$$

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = \sqrt{(38.45kN)^2 + (24.45kN)^2} = 45.56kN$$

$$\varphi_R = \tan^{-1}\left(\frac{Ry}{Rx}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{24.45kN}{38.45kN}\right) = 32.45^\circ$$

Notas docente:
-Suma de n cant. Fuerzas.
-¿Dónde está R? Vector deslizante.

HOJA

5

TEMA

TP1

FUERZAS

CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

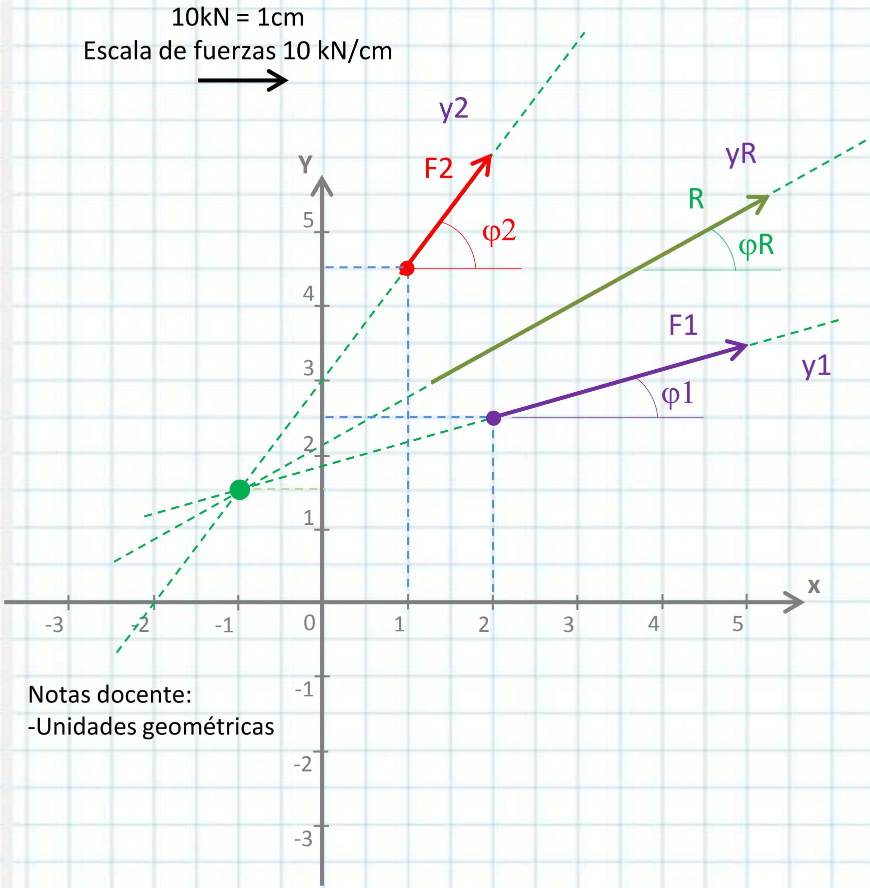
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

Suma de fuerzas en el plano



Notas docente:

-Unidades geométricas

Encontrar el punto de intersección "A"

Un poco de matemática…

La pendiente de una recta, es la razón de variación de y sobre x. Que es lo mismo a la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\varphi)$$

Además contamos con un punto de aplicación de cada fuerza: F1 y F2. Por lo que tenemos sus ecuaciones.

F1=30kN φ1 =18.43º P=(2;2.5)	$y1 = \tan(\varphi_1)\cdot x + b$ $2.5 = \tan(18.43^o)\cdot 2 + b$ $b = 1.83$	$y2 = \tan(\varphi_2)\cdot x + b$ $4.5 = \tan(56.3^o)\cdot 1 + b$ $b = 3$
F2=18kN φ2 =56.3º P= (1;4.5)	$y1 = 0.33\cdot x + 1.83$	$y2 = 1.5\cdot x + 3$

Buscamos la intersección de dos rectas, sistema de ecuaciones lineales.

$$y1 = 0.33\cdot x + 1.83 \qquad x = -1$$

$$y2 = 1.5\cdot x + 3 \qquad y = 1.5$$

Finalmente con el ángulo de la resultante, más el punto de aplicación. Encontramos la ecuación de la recta de acción de R: $yR = 0.64\cdot x + 2.14$

HOJA
6

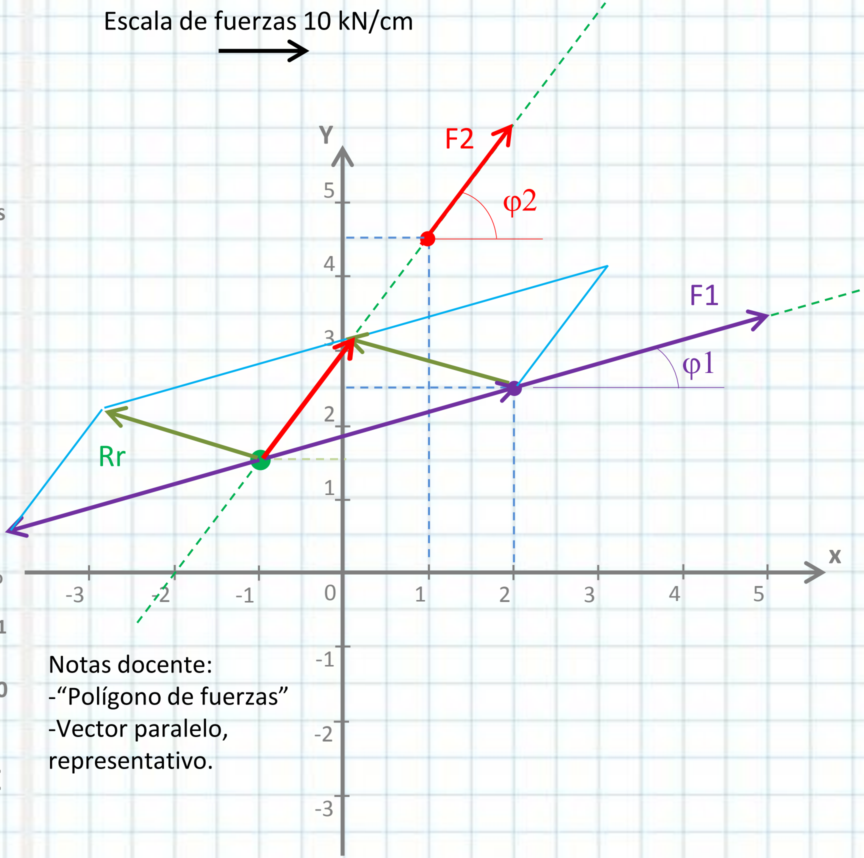
TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

Resta de fuerzas en el plano

10kN = 1cm
Escala de fuerzas 10 kN/cm



Notas docente:
-“Polígono de fuerzas”
-Vector paralelo, representativo.

Rr=F2-F1

Analíticamente:

Rr=(10,15)kN-(28.5,9.5)kN=(-18,5.5)kN

Interpretación geométrica

Rr=F2-F1 = (F2) + (-F1)

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

HOJA

7

Momento de fuerza en el plano

Definición: El momento de una fuerza respecto a un punto o eje proporciona una medida de la tendencia de la fuerza a ocasionar que un cuerpo gire entorno del punto o eje.

TEMA

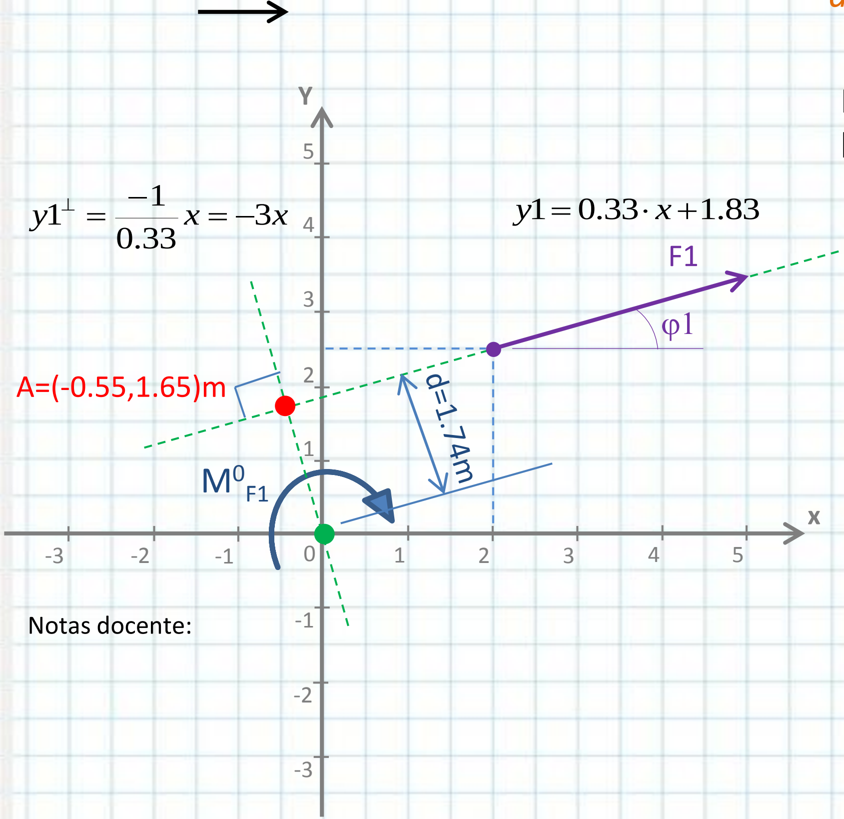
TP1

FUERZAS

CONCENTRADAS

10kN = 1cm

Escala de fuerzas 10 kN/cm



Para la F1 de ejercicios anteriores calcular el momento de la misma respecto al origen.

$$\left|M^0_{F1}\right| = d \cdot F1 = 1.74m \cdot 30kN = 52.2kNm$$

En terna derecha, signo correspondiente.

$$M^0_{F1} = -52.2kNm$$

El vector momento representativo es perpendicular al plano de trabajo (Eje Z).

Procedimiento posible, pero no el más práctico.

Si el centro de momentos se encuentra sobre la recta de acción de F (d=0) el momento es nulo.

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

ESTABILIDAD 1

Notas docente:

2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

HOJA
8

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

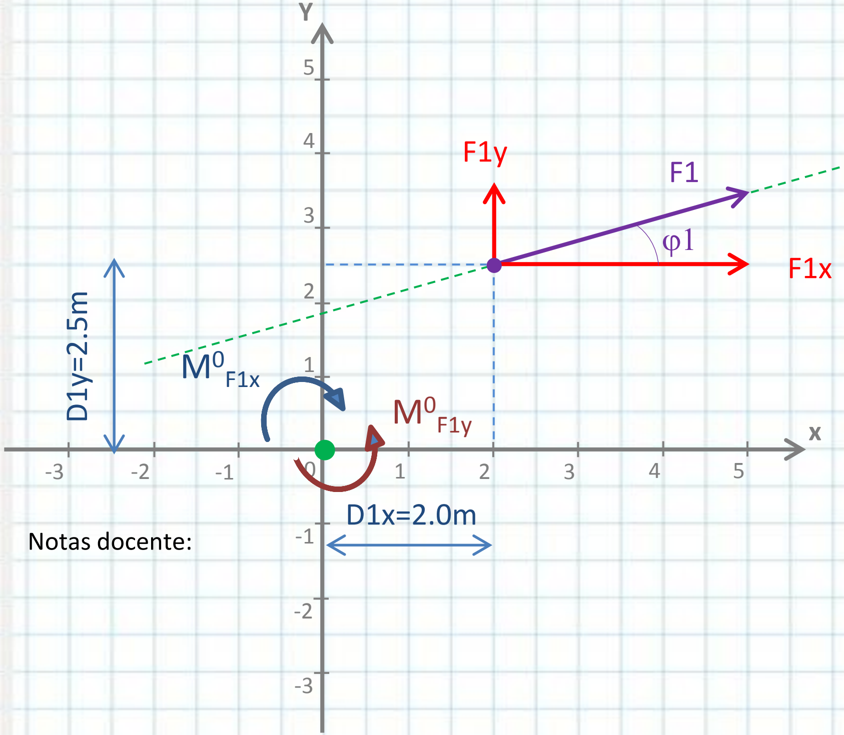
F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Momento de fuerza en el plano

10kN = 1cm
Escala de fuerzas 10 kN/cm



Notas docente:

Teorema de Varignon: El momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza respecto al punto.

Para la F1 de ejercicios anteriores calcular el momento de la misma respecto al origen.
Ahora solo nos interesan sus componentes en x e y.

$$\left|M^{0}_{F1x}\right| = d_{1y} \cdot F1x = 2.5m \cdot 28.5kN = 71.25kNm$$

$$M^{0}_{F1x} = -71.25kNm$$ *En terna derecha, signo correspondiente.*

$$\left|M^{0}_{F1y}\right| = d_{1x} \cdot F1y = 2.0m \cdot 9.5kN = 19kNm$$

$$M^{0}_{F1y} = +19kNm$$ *En terna derecha, signo correspondiente.*

$$M^{0}_{F1} = M^{0}_{F1x} + M^{0}_{F1y} = -71.25kNm + 19kNm = -52.25kNm$$

Procedimiento más práctico. En problemas planos, nos va interesar trabajar por componentes.

HOJA

9

Par de fuerzas o cupla en el plano

TEMA

TP1

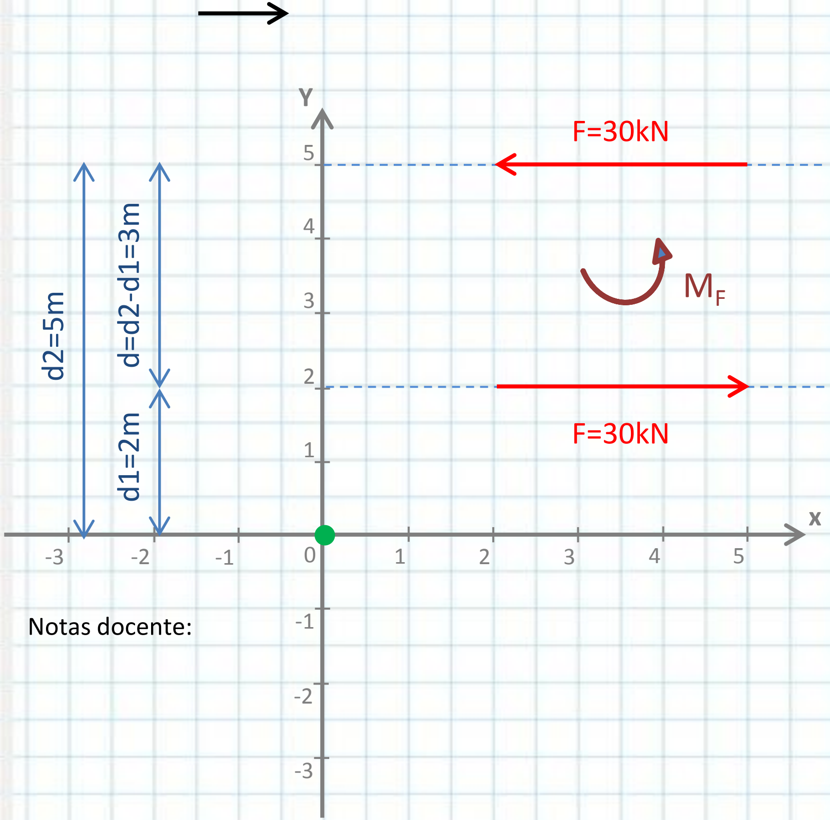
FUERZAS

CONCENTRADAS

Cupla o par de fuerzas: Son dos fuerzas paralelas de igual intensidad y sentido contrario.

10kN = 1cm

Escala de fuerzas 10 kN/cm



Dada la cupla del gráfico, encontrar el momento que genera.

En terna derecha, signo correspondiente.

$$M_F = d2 \cdot F - d1 \cdot F = (d2 - d1) \cdot F = d \cdot F$$

$$M_F = 3m \cdot 30kN = 90kNm$$

Depende de la intensidad y la distancia entre ellas. El momento es un vector libre, siempre es perpendicular al plano.

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

ESTABILIDAD 1

Notas docente:

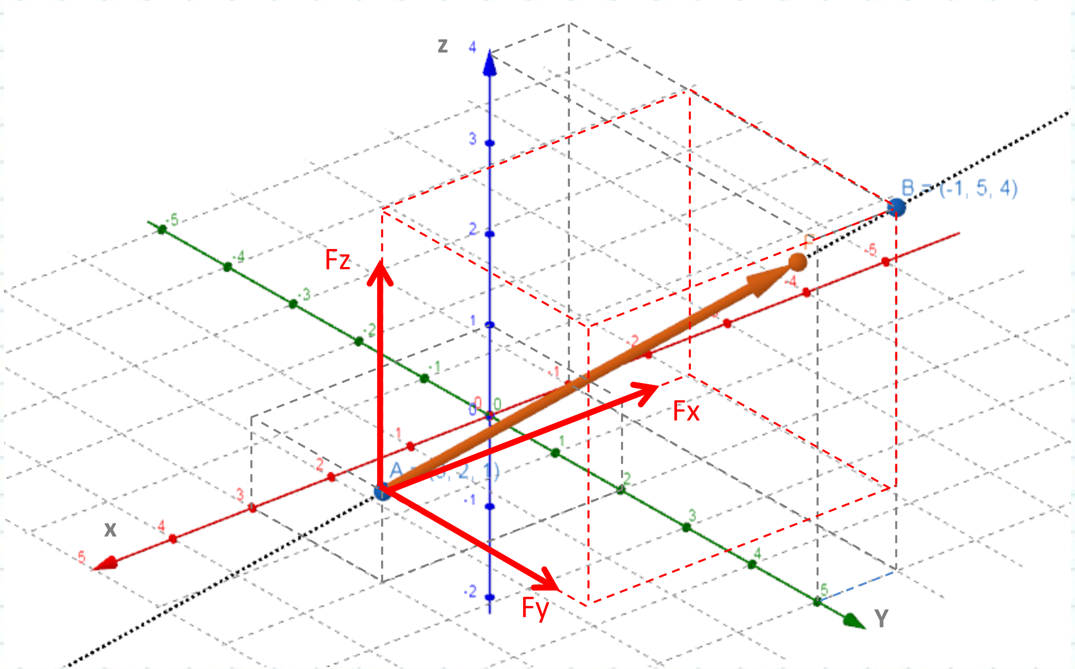
2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

Descomposición de fuerza en el espacio

Para problemas espaciales trabajaremos con álgebra vectorial, sin embargo la interpretación grafica es fundamental para chequear resultados.



(*) Esquema desarrollado en Geogebra y adaptado

Ejemplo:

Una fuerza F de intensidad 4kN está aplicada en el punto A de coordenadas (3,2,1)m. La recta de acción de la fuerza pasa también por el punto B de coordenadas (-1,5,4)m.

Se pide: encontrar al expresión vectorial de la fuerza y los ángulos directores de la fuerza.

HOJA

11

TEMA

TP1

FUERZAS

CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

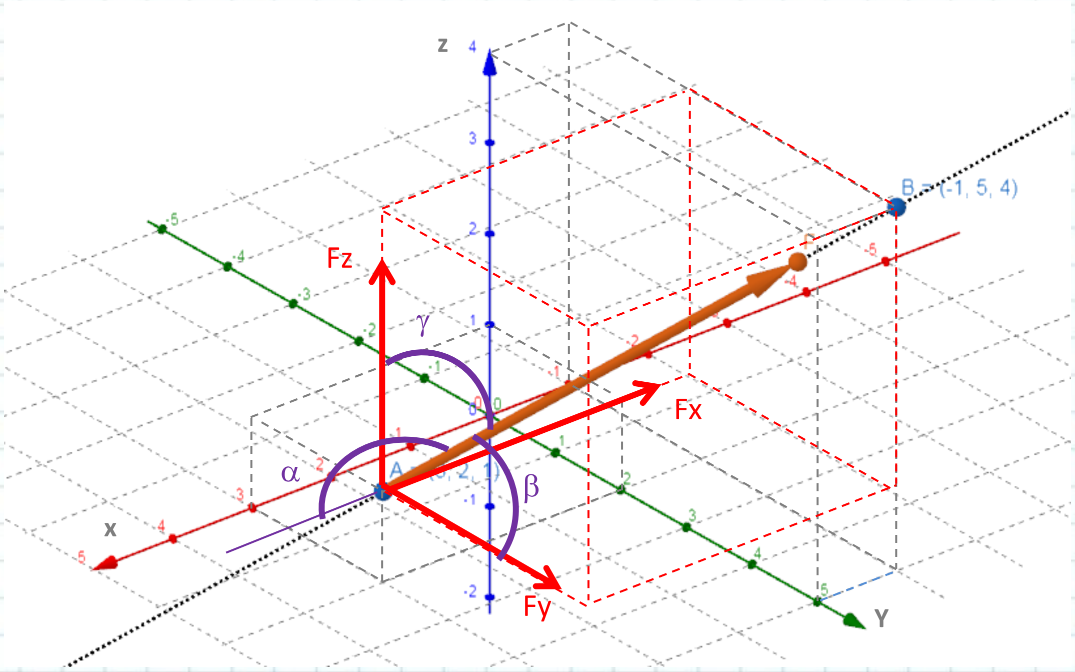
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

Descomposición de fuerza en el espacio



(*) Esquema desarrollado en Geogebra y adaptado

** Desarrollado en MathCAD*

Coordenadas de los puntos:

$$A := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} m \qquad B := \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} m$$

Módulo de Fuerza: $F1 := 4kN$

Vector B-A y su módulo:

$$BA := B - A = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} m \qquad |BA| = 5.831\,m$$

Versor BA:

$$v_{BA} := \frac{BA}{|BA|} = \begin{pmatrix} -0.686 \\ 0.514 \\ 0.514 \end{pmatrix}$$

Cada componente son los cosenos directores

Ángulos directores, rad y deg:

Suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1.

$$\alpha := acos\left(v_{BA_0}\right) = 2.327 \qquad \alpha = 133.314\,deg$$

$$\beta := acos\left(v_{BA_1}\right) = 1.03 \qquad \beta = 59.036\,deg$$

$$\gamma := acos\left(v_{BA_2}\right) = 1.03 \qquad \gamma = 59.036\,deg$$

Expresión vectorial de la Fuerza:

$$F1_v := F1 \cdot v_{BA} = \begin{pmatrix} -2.744 \\ 2.058 \\ 2.058 \end{pmatrix} kN$$

HOJA

12

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

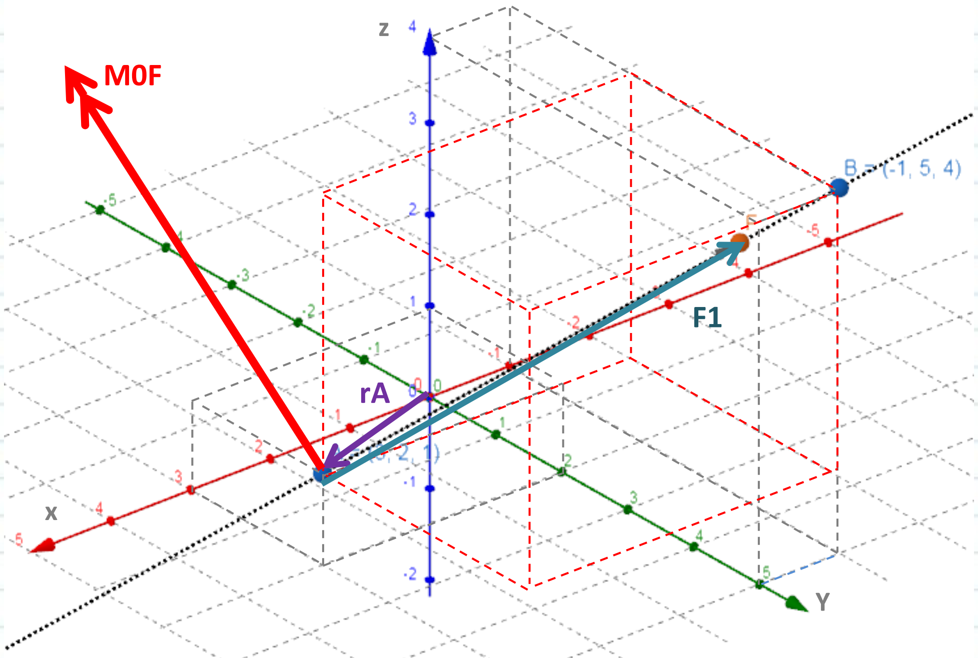
2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Momento de una fuerza en el espacio

Ejemplo:

Dada la fuerza del ejemplo anterior, calcular su momento respecto al origen.



Planteando el producto vectorial entre el radio vector que une el punto A con el origen y la fuerza.

$$M0_F = r \times F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ rx & ry & rz \\ Fx & Fy & Fz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ry.Fz - rz.Fy \\ rz \cdot Fx - rx \cdot Fz \\ rx \cdot Fy - ry \cdot Fx \end{pmatrix}$$

$$r_A := A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} m \qquad M0_F := r_A \times F1_v = \begin{pmatrix} 2.058 \\ -8.918 \\ 11.662 \end{pmatrix} kN \cdot m$$

Obtenemos el **vector momento:**

-El cual es perpendicular al plano que contiene el radio vector y la fuerza.

-Cada componente representa el momento de la fuerza respecto a un eje pasante por el origen.

M0x=2.058kNm

M0y=-8.918kNm

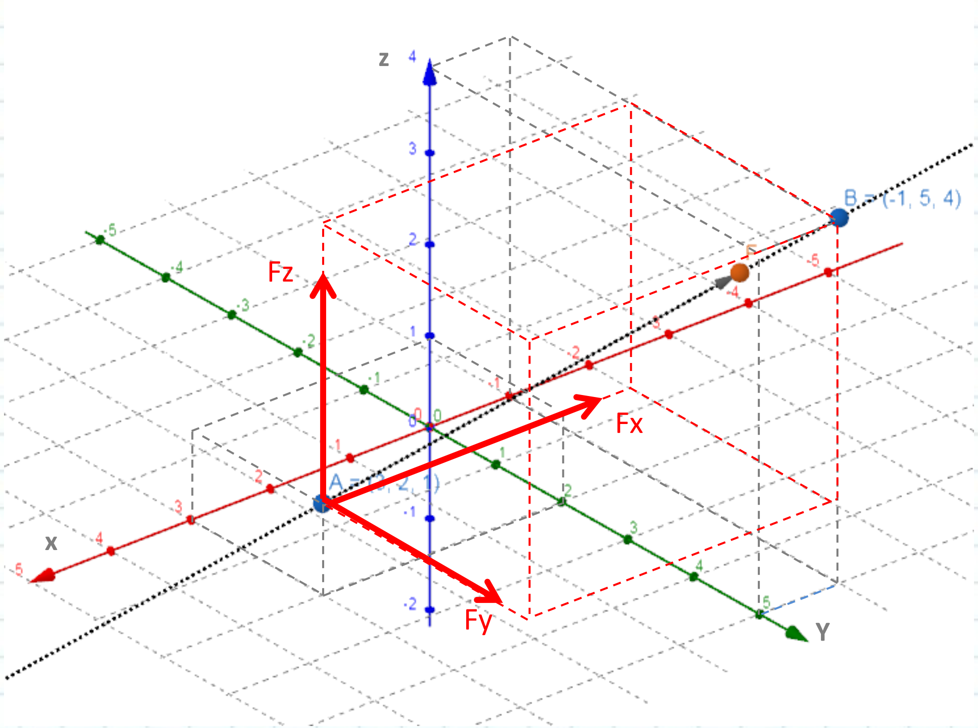
M0z=11.662kNm

Podría tomar cualquier punto que pertenece a la recta de acción de la fuerza y el momento de ella respecto al origen es el mismo. rAxF=rBxF

Momento de una fuerza en el espacio

Ejemplo:

Dada la fuerza del ejemplo anterior, calcular su momento respecto al origen.



Ahora vamos a resolverlo de manera manual.

Teniendo en cuenta que el momento de una fuerza respecto a un eje es nulo cuando:

-La recta de acción de la fuerza corta al eje.
-Cuando la recta de acción de la fuerza es paralela al eje.

$$M_x^0 = -1m \cdot |Fy| + 2m \cdot |Fz| =$$
$$= -1m \cdot |2.058kN| + 2m \cdot |2.058kN| = 2.058kN$$
$$M_y^0 = -1m \cdot |Fx| - 3m \cdot |Fz| =$$
$$= -1m \cdot |-2.744kN| - 3m \cdot |2.058kN| = -8.918kN$$
$$M_z^0 = +2m \cdot |Fx| + 3m \cdot |Fy| =$$
$$= +2m \cdot |-2.744kN| + 3m \cdot |2.058kN| = 11.662kN$$

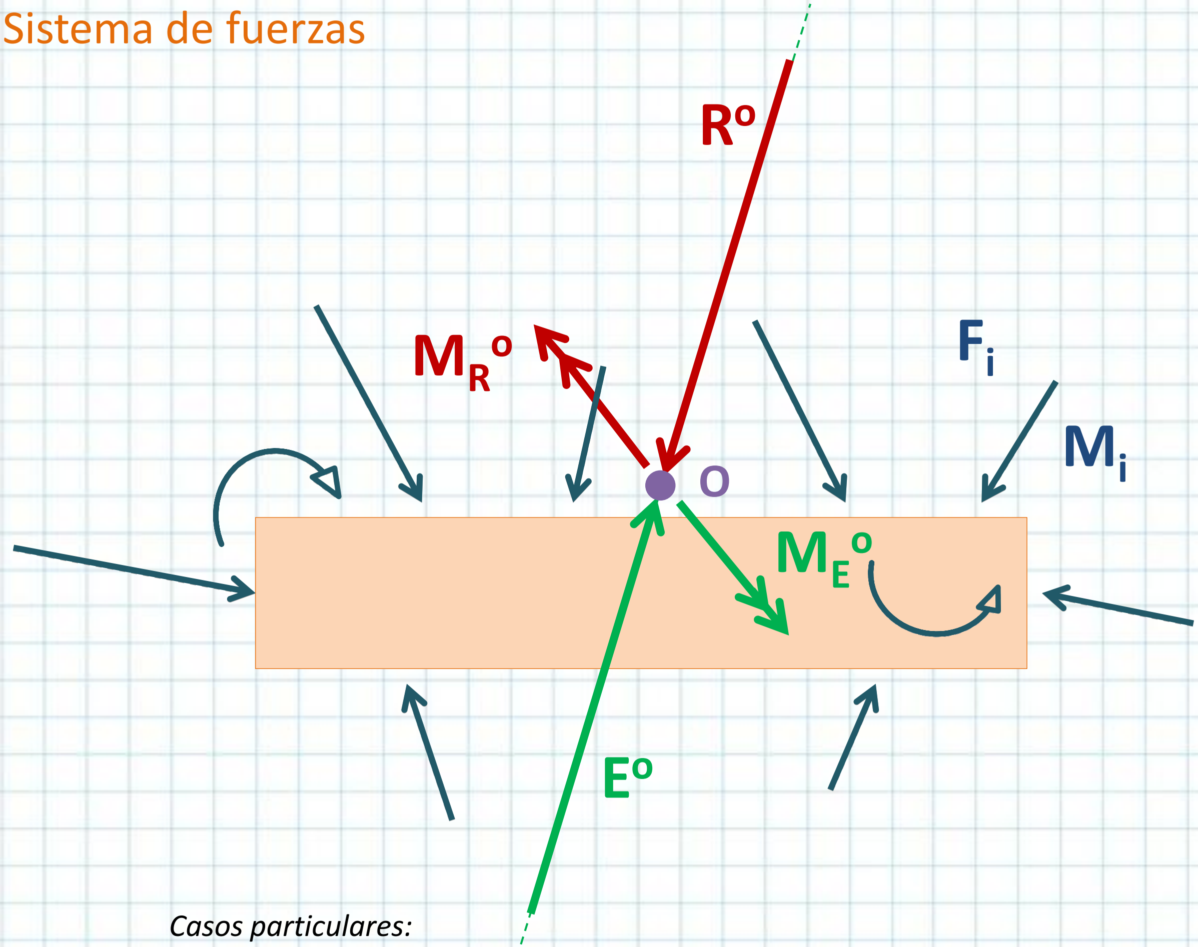
Notar que cada ecuación corresponde al producto cruzado del producto vectorial.

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

Sistema de fuerzas



CUERPO RIGIDO

SISTEMA DE FUERZAS EXTERNAS

PUNTO DE REDUCCION

RESULTANTE

EQUILIBRANTE

SISTEMA EN EQUILIBRIO

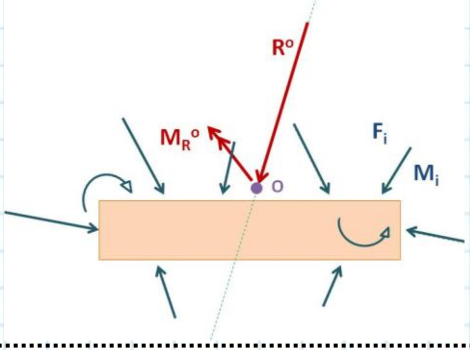
Casos particulares:
-En problemas planos, existe un punto de reducción donde MR=0.
-En problemas espaciales existe un punto de reducción donde los vectores R y MR son colineales. (Llave)

Resultante o Equilibrio

Antes de empezar a resolver un ejercicio debemos tener en claro si estamos frente a un problema de encontrar la resultante o la equilibrante del sistema.

Ecuaciones vectoriales | *Ecuaciones por coordenadas*

Resultante



$$\overline{R_0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

Plano (R2): 2 Ecuaciones.
Espacio (R3): 3 Ecuaciones.

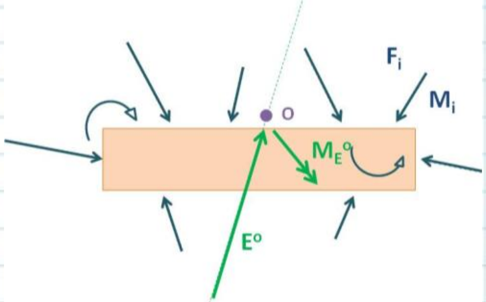
$$\overline{M_R^0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F}_i$$

Plano (R2): 1 Ecuación.
Espacio (R3): 3 Ecuaciones.

$$\overline{E_0} = -\overline{R_0}$$

$$\overline{M_E^0} = -\overline{M_R^0}$$

Equilibrio



$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i + \overline{E_0} = 0$$

Plano (R2): 2 Ecuaciones.
Espacio (R3): 3 Ecuaciones.

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F}_i + \overline{M_E^0} = 0$$

Plano (R2): 1 Ecuación.
Espacio (R3): 3 Ecuaciones.

Estas ecuaciones son genéricas, más adelante veremos que dependiendo del tipo de sistema de fuerzas podemos utilizar otras ecuaciones: otras estrategias de resolución.

Clasificación de los sistemas de fuerzas

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

Además de entender si es un problema de resultante o equilibrio, debemos clasificar el sistema de manera correcta para saber cuantas ecuaciones (incógnitas a resolver) nos va proveer la estática para la resolución.
Recordatorio: Trabajamos con sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados.

Clasificación por concurrencia:

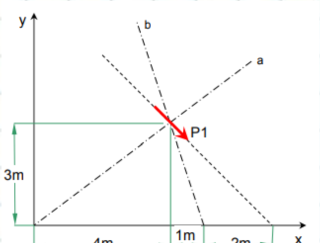
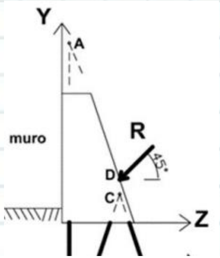
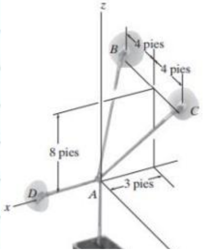
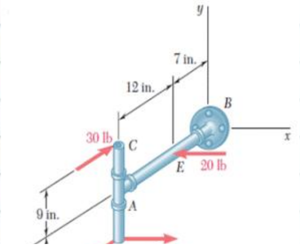
-SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES:
Cuando las rectas de acción de todas las fuerzas que intervienen concurren a un punto.

-SISTEMAS DE FUERZAS NO CONCURRENTES:
Cuando las rectas de acción de todas las fuerzas que intervienen NO concurren a un punto.

Clasificación por naturaleza:

-SISTEMAS DE FUERZAS PLANOS:
Cuando todas las fuerzas que intervienen están contenidas en un plano.

-SISTEMAS DE FUERZAS ESPACIALES:
-Cuando todas las fuerzas que intervienen NO están contenidas en un plano.

	FUERZAS CONCURRENTES	FUERZAS NO CONCURRENTES
PLANOS	 2 ECUACIONES	 3 ECUACIONES
ESPACIALES	 3 ECUACIONES	 6 ECUACIONES

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Sistema plano de fuerza concurrentes

Para sistemas planos de fuerzas concurrentes podemos plantear DOS ecuaciones.

a) *Dos ecuaciones de proyección. (El más utilizado)*

b) *Una ecuación de proyección y una de momento (respecto a un punto distinto al de concurrencia)*

c) *Dos ecuaciones de momentos, los puntos respecto a los que tomo momento y el punto de concurrencia NO deben estar alineados.*

HOJA

18

TEMA

TP1

FUERZAS

CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

ESTABILIDAD 1

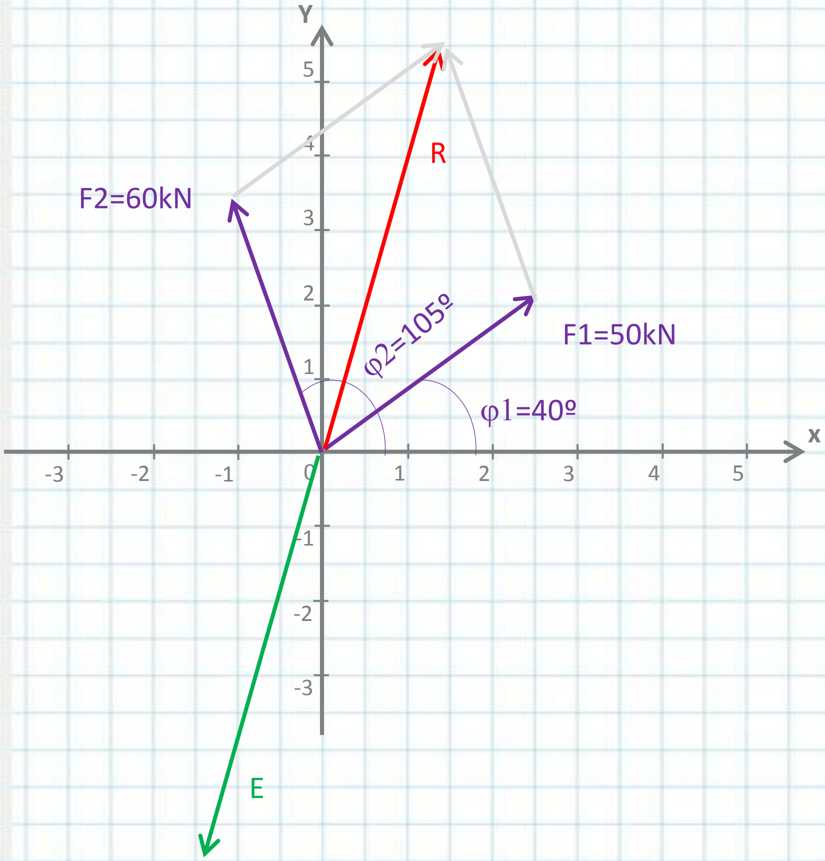
2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

Problema Sistema plano de fuerzas concurrentes

Dadas las dos fuerzas de la figura, se pide encontrar una fuerza que equilibre



Datos:

$F1 := 50kN$ $\quad \phi_1 := 40deg$ $\quad F2 := 60kN$ $\quad \phi_2 := 105deg$

Calculo de equilibrante (E):

Estrategia a) Sabiendo que la E = - R, puedo calcular R gráficamente por el principio del paralelogramo y luego cambiarle el sentido a R, y obtengo la equilibrante.

Estrategia b) Encuentro la Resultante de manera analítica y luego cambio su sentido para obtener la equilibrante.

Sistema de fuerzas concurrentes en el plano. Puedo plantear dos ecuaciones, eligo dos de proyección:

Cálculo de resultante:

$$Rx := F1\cdot\cos(\phi_1) + F2\cdot\cos(\phi_2) = 22.773kN$$

$$Ry := F1\cdot\sin(\phi_1) + F2\cdot\sin(\phi_2) = 90.095kN$$

$$R := \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = 92.929kN \qquad \phi_R := \mathrm{atan}\left(\frac{Ry}{Rx}\right) = 75.815\,deg$$

Módulo de Equilibrante: $E := R = 92.929kN$

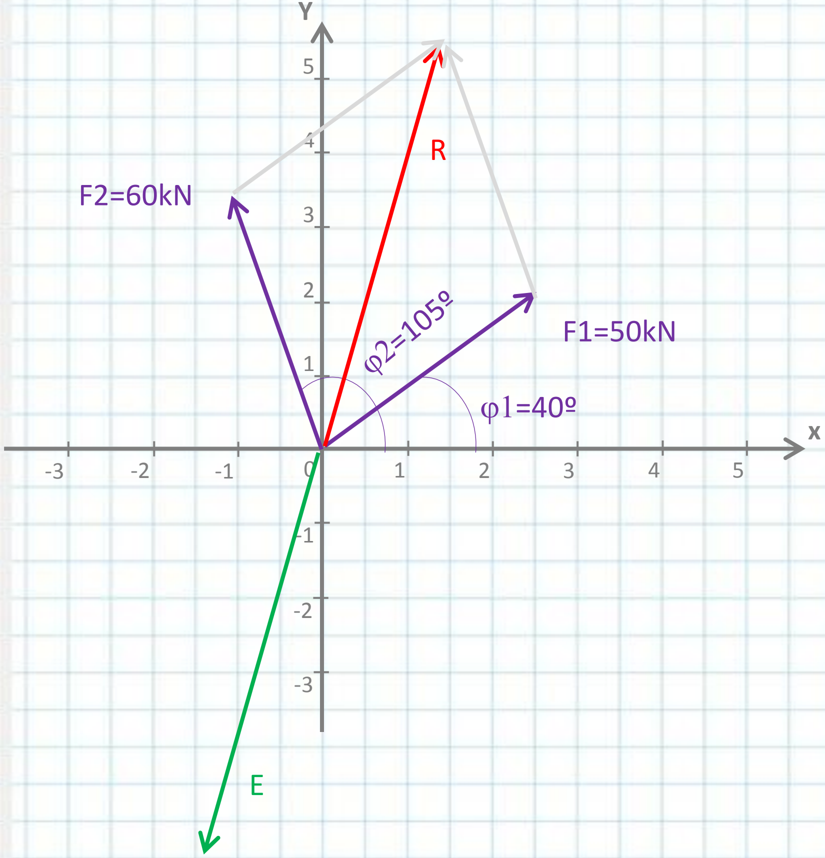
Ángulo de equilibrante: $\phi_E := \phi_R + 180deg = 255.815\,deg$ (Cambio de sentido)

Componentes de equilibrante: $Ex := E\cdot\cos(\phi_E) = -22.773kN$

$Ey := E\cdot\sin(\phi_E) = -90.095kN$

Problema Sistema plano de fuerzas concurrentes

Dadas las dos fuerzas de la figura, se pide encontrar una fuerza que equilibre



Estrategia c) Cálculo la equilibrante directamente planteando ecuaciones de equilibrio.

Calculo de equilibrante:

Given $\quad Ex := 0kN \quad Ey := 0kN$ — Definiciones de MathCAD.

$$Ex + F1 \cdot \cos(\phi_1) + F2 \cdot \cos(\phi_2) = 0$$

$$Ey + F1 \cdot \sin(\phi_1) + F2 \cdot \sin(\phi_2) = 0$$

Ecuaciones de equilibrio

$E := \text{find}(Ex, Ey)$ — Resolución

$Ex := E_0 = -22.773\,kN \qquad Ey := E_1 = -90.095\,kN$

$|E| = 92.929\,kN \qquad \phi_E := \text{atan}\left(\frac{Ey}{Ex}\right) = 75.815\,deg$

Estrategia d) Cálculo vectorial

$$F1_v := F1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) \\ \sin(\phi_1) \end{pmatrix} \qquad F2_v := F2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi_2) \\ \sin(\phi_2) \end{pmatrix}$$

$$R_v := F1_v + F2_v \qquad E_v := -R_v \qquad E_v = \begin{pmatrix} -22.773 \\ -90.095 \end{pmatrix} kN$$

HOJA
20

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

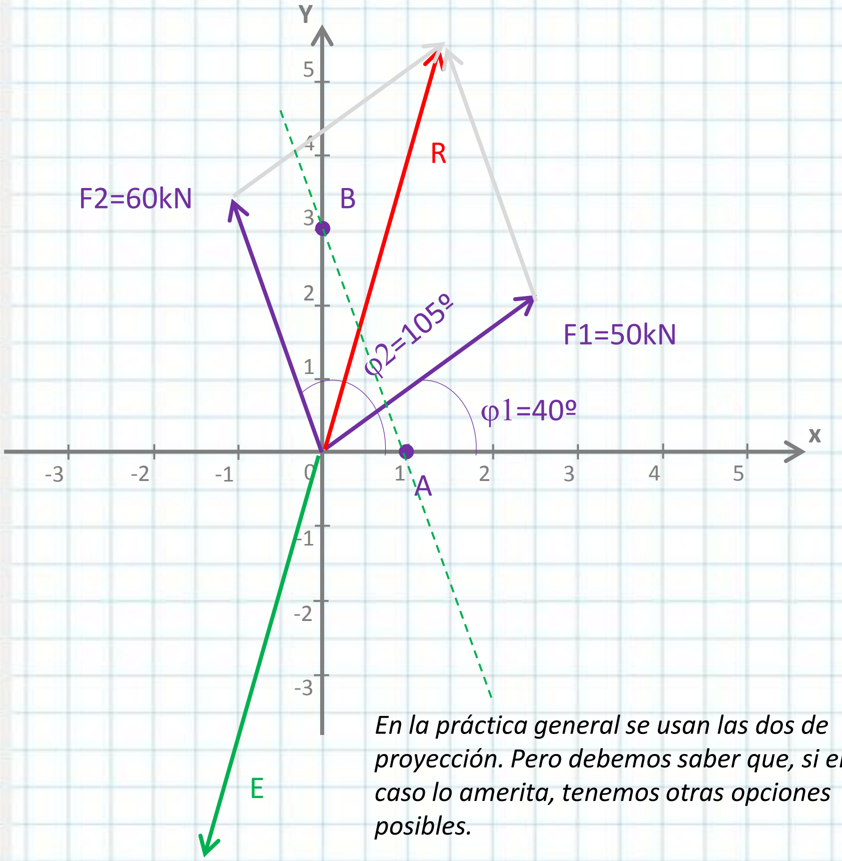
F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Problema Sistema plano de fuerzas concurrentes

Dadas las dos fuerzas de la figura, se pide encontrar una fuerza que equilibre



En la práctica general se usan las dos de proyección. Pero debemos saber que, si el caso lo amerita, tenemos otras opciones posibles.

Otras opciones para plantear ecuaciones:

Una ecuación de proyección en x y una de momento respecto a A:

Given $\quad Ex := 0kN \quad Ey := 0kN$

$Ex + F1\cdot\cos(\phi_1) + F2\cdot\cos(\phi_2) = 0$ Ecuación de proyección en X

$-Ey\cdot 1m - F1\cdot\sin(\phi_1)\cdot 1m - F2\cdot\sin(\phi_2)\cdot 1m = 0$ Ecuación de momento respecto a A

$E := \text{Find}(Ex, Ey)$

$Ex := E_0 = -22.773\,kN \qquad Ey := E_1 = -90.095\,kN$

$|E| = 92.929\,kN \qquad \phi_E := \text{atan}\left(\frac{Ey}{Ex}\right) = 75.815\,deg$

Dos ecuaciones de momento respecto a A y B, puntos no alineados con el origen:

Given $\quad Ex := 0kN \quad Ey := 0kN$

$Ex\cdot 3m + F1\cdot\cos(\phi_1)\cdot 3m + F2\cdot\cos(\phi_2)\cdot 3m = 0$ Ecuación de momento respecto a B

$-Ey\cdot 1m - F1\cdot\sin(\phi_1)\cdot 1m - F2\cdot\sin(\phi_2)\cdot 1m = 0$ Ecuación de momento respecto a A

$E := \text{Find}(Ex, Ey)$

$Ex := E_0 = -22.773\,kN \qquad Ey := E_1 = -90.095\,kN$

$|E| = 92.929\,kN \qquad \phi_E := \text{atan}\left(\frac{Ey}{Ex}\right) = 75.815\,deg$

Sistema espacial de fuerzas concurrentes

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

Para sistemas espaciales de fuerzas concurrentes podemos plantear TRES ecuaciones.

a) Tres ecuaciones de proyección. (El más utilizado)

b) Dos ecuaciones de proyección y una de momento respecto a un eje.

c) Una ecuación de proyección y dos de momento respecto a dos ejes.

d) Tres de momento respecto a tres ejes.

HOJA
22

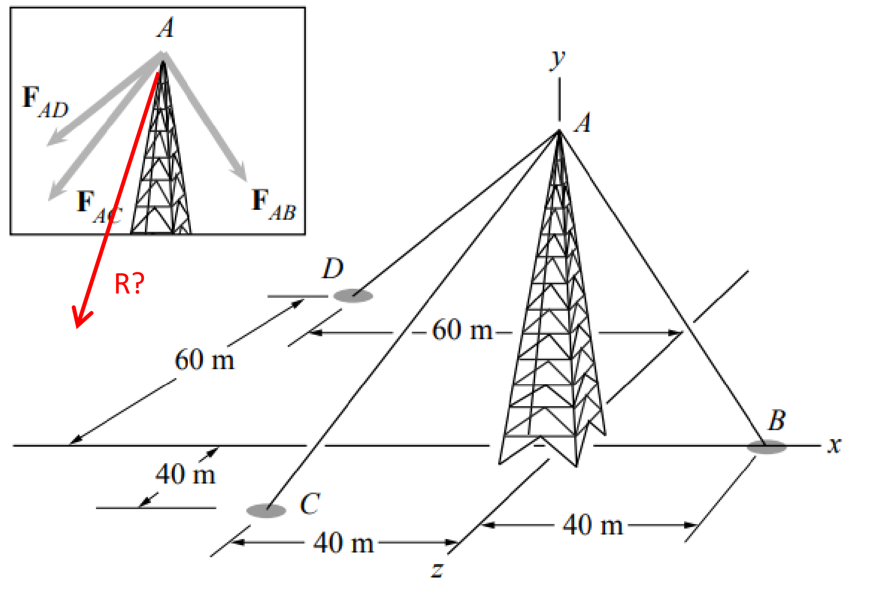
TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

Problema Sistema espacial de fuerzas concurrentes

Problema 2.93 Bedford: Una torre de 70 metros de altura es soportada por tres cables que toman el punto superior de la torre, cada fuerza del cable FAB, FAC y FAD es de magnitud 2 KN. Expresar la fuerza total ejercida sobre la torre.

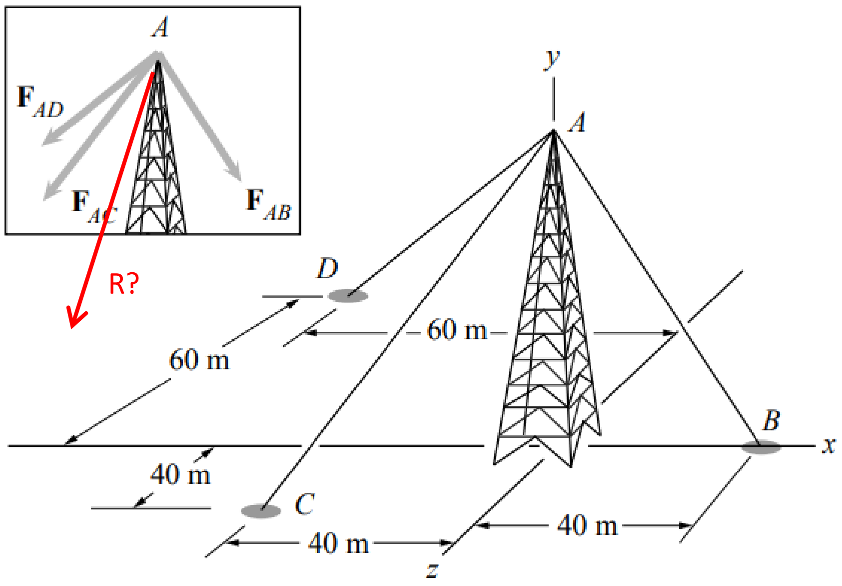


Problema Sistema espacial de fuerzas concurrentes

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS



En los casos espaciales, es más práctico trabajar de manera vectorial.

Datos del problema:

$F_{AB} := 2kN \quad F_{AC} := 2kN \quad F_{AD} := 2kN$

Coordenadas de puntos geométricos:

$c_A := \begin{pmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix} m \quad c_B := \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \quad c_C := \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} m \quad c_D := \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ -60 \end{pmatrix} m$

Cálculo de versores de las fuerzas

$$v_{AB} := \frac{(c_B - c_A)}{|c_B - c_A|} = \begin{pmatrix} 0.496 \\ -0.868 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{AC} := \frac{(c_C - c_A)}{|c_C - c_A|} = \begin{pmatrix} -0.444 \\ -0.778 \\ 0.444 \end{pmatrix}$$

$$v_{AD} := \frac{(c_D - c_A)}{|c_D - c_A|} = \begin{pmatrix} -0.545 \\ -0.636 \\ -0.545 \end{pmatrix}$$

Cálculo de resultante, una ecuación vectorial (3 ecuaciones de proyección):

$$R := F_{AC} \cdot v_{AB} + F_{AC} \cdot v_{AC} + F_{AD} \cdot v_{AD} = \begin{pmatrix} -0.988 \\ -4.565 \\ -0.202 \end{pmatrix} kN$$

HOJA
24

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

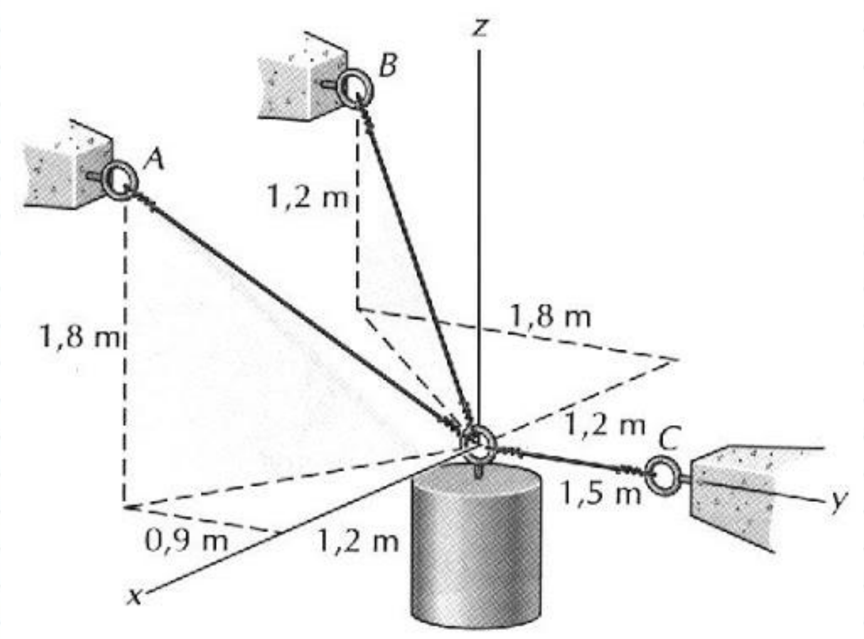
2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Problema Sistema espacial de fuerzas concurrentes

Se sostiene un peso de 20kN con tres cables como se indica en la figura, encontrar las fuerzas de cada cable.

Es un problema de equilibrio, espacial de fuerzas concurrentes.



HOJA

25

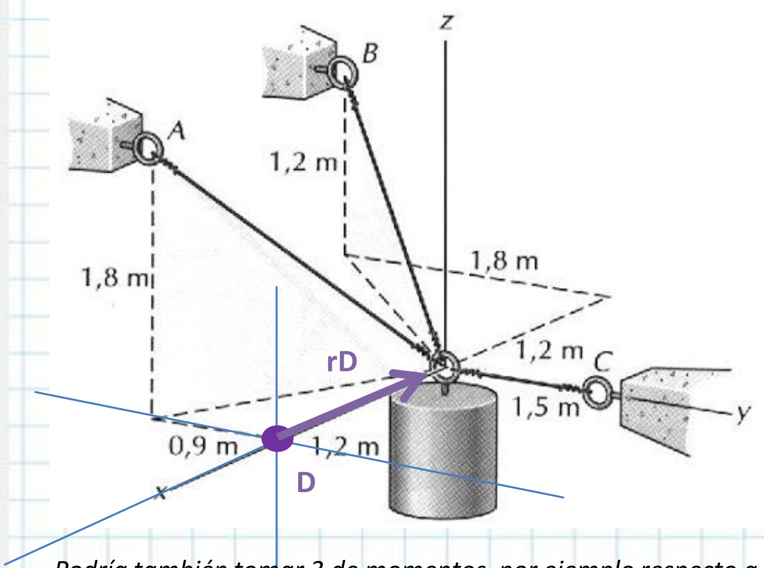
Problema Sistema espacial de fuerzas concurrentes

TEMA

TP1

FUERZAS

CONCENTRADAS



Podría también tomar 3 de momentos, por ejemplo respecto a los ejes paralelos a los coordenados que pasan por D

$$\overline{r}_D \times \overline{F}_A + \overline{r}_D \times \overline{F}_B + \overline{r}_D \times \overline{F}_C + \overline{r}_D \times \overline{P} = 0$$

No es lo habitual en estos casos, si en sistemas NO concurrentes que veremos más adelante.

Datos del problema: $P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} kN$

Coordenadas de puntos geométricos:

$c_A := \begin{pmatrix} 1.2 \\ -0.9 \\ 1.8 \end{pmatrix} m \quad c_B := \begin{pmatrix} -1.2 \\ -1.8 \\ 1.2 \end{pmatrix} m \quad c_C := \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} m \quad c_o := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m$

Cálculo de versores de las fuerzas

$v_A := \frac{(c_A - c_o)}{|c_A - c_o|} = \begin{pmatrix} 0.512 \\ -0.384 \\ 0.768 \end{pmatrix} \quad v_B := \frac{(c_B - c_o)}{|c_B - c_o|} = \begin{pmatrix} -0.485 \\ -0.728 \\ 0.485 \end{pmatrix}$

$v_C := \frac{(c_C - c_o)}{|c_C - c_o|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Equilibrio, una ecuación vectorial (3 ecuaciones de proyección):

Given $\quad FA := 0kN \quad FB := 0kN \quad FC := 0kN$

$FA \cdot v_A + FB \cdot v_B + FC \cdot v_C + P = 0$ Ecuación vectorial de equilibrio

$Sol := find(FA, FB, FC)$ Vector solución

$FA := Sol_0 = 15.62 kN \quad FB := Sol_1 = 16.492 kN \quad FC := Sol_2 = 18 kN$

Equivalencia de ecuaciones de proyección:

$FA \cdot v_{Ax} + FB \cdot v_{Bx} + FC \cdot v_{Cx} + Px = 0$

$FA \cdot v_{Ay} + FB \cdot v_{By} + FC \cdot v_{Cy} + Py = 0$

$FA \cdot v_{Az} + FB \cdot v_{Bz} + FC \cdot v_{Cz} + Pz = 0$

Chequeo de equilibrio (error de aproximación de MathCAD)

$FA \cdot v_A + FB \cdot v_B + FC \cdot v_C + P = \begin{pmatrix} 0 \\ -0 \\ -0 \end{pmatrix} kN$ **Hay equilibrio!**

F.I.U.B.A.

DTO. ESTABILIDAD

84.02 /64.11

ESTABILIDAD 1

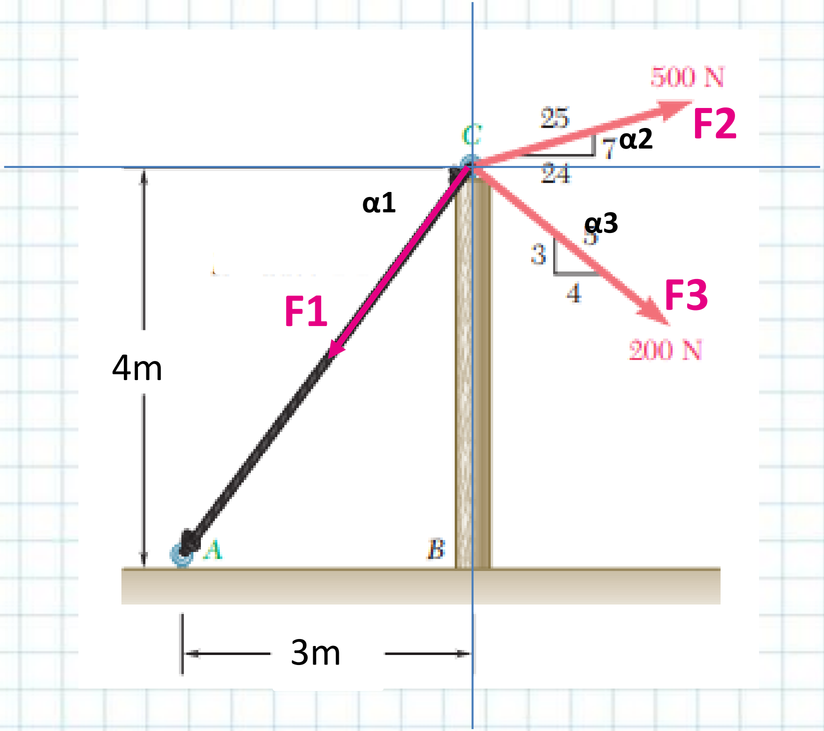
2 CUAT. 2020

CURSO 4

PARENTE

Ejemplo 1: sistema plano de fuerzas concurrentes

Sabiendo que la tensión en la soga AC es de 365N, hallar la resultante de las tres fuerzas aplicadas en el extremo C del poste.



$$F_1 := 365\ N \qquad F_2 := 500\ N \qquad F_3 := 200\ N$$

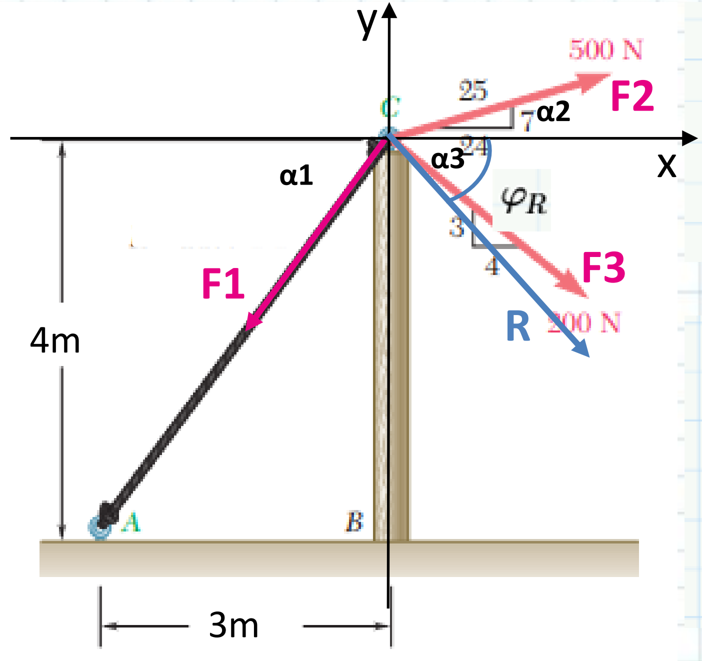
$$\alpha_1 := \operatorname{atan}\left(\frac{4\ m}{3\ m}\right) = 53.13\ deg$$

$$\alpha_2 := \operatorname{atan}\left(\frac{7}{24}\right) = 16.26\ deg$$

$$\alpha_3 := \operatorname{atan}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87\ deg$$

Ejemplo 1: sistema plano de fuerzas concurrentes

Sabiendo que la tensión en la soga AC es de 365N, hallar la resultante de las tres fuerzas aplicadas en el extremo C del poste.



$$F_{1x} := F_1 \cdot \cos(\alpha_1) = 219\ \boldsymbol{N} \qquad F_{1y} := F_1 \cdot \sin(\alpha_1) = 292\ \boldsymbol{N}$$

$$F_{2x} := F_2 \cdot \cos(\alpha_2) = 480\ \boldsymbol{N} \qquad F_{2y} := F_2 \cdot \sin(\alpha_2) = 140\ \boldsymbol{N}$$

$$F_{3x} := F_3 \cdot \cos(\alpha_3) = 160\ \boldsymbol{N} \qquad F_{3y} := F_3 \cdot \sin(\alpha_3) = 120\ \boldsymbol{N}$$

$$R_x := -F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 421\ \boldsymbol{N}$$

$$R_y := -F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} = -272\ \boldsymbol{N}$$

$$\varphi_R := \operatorname{atan}\left(\frac{R_x}{R_y}\right) = -57.134\ \boldsymbol{deg}$$

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

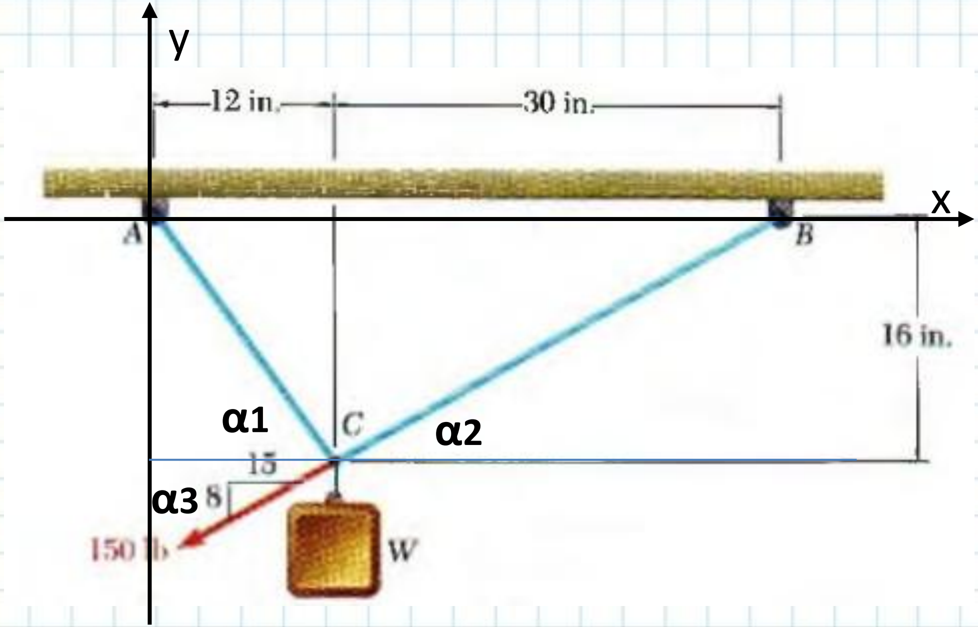
F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Ejemplo 2: sistema plano de fuerzas concurrentes

Dos cables se amarran juntos en C y son cargados como indica la figura. Si W=190lb, determine la tensión en los cables AC y BC.



$$\alpha_1 := \operatorname{atan}\left(\frac{16\ in}{12\ in}\right) = 53.13\ deg$$

$$\alpha_2 := \operatorname{atan}\left(\frac{16\ in}{30\ in}\right) = 28.072\ deg$$

$$\alpha_3 := \operatorname{atan}\left(\frac{8}{15}\right) = 28.072\ deg$$

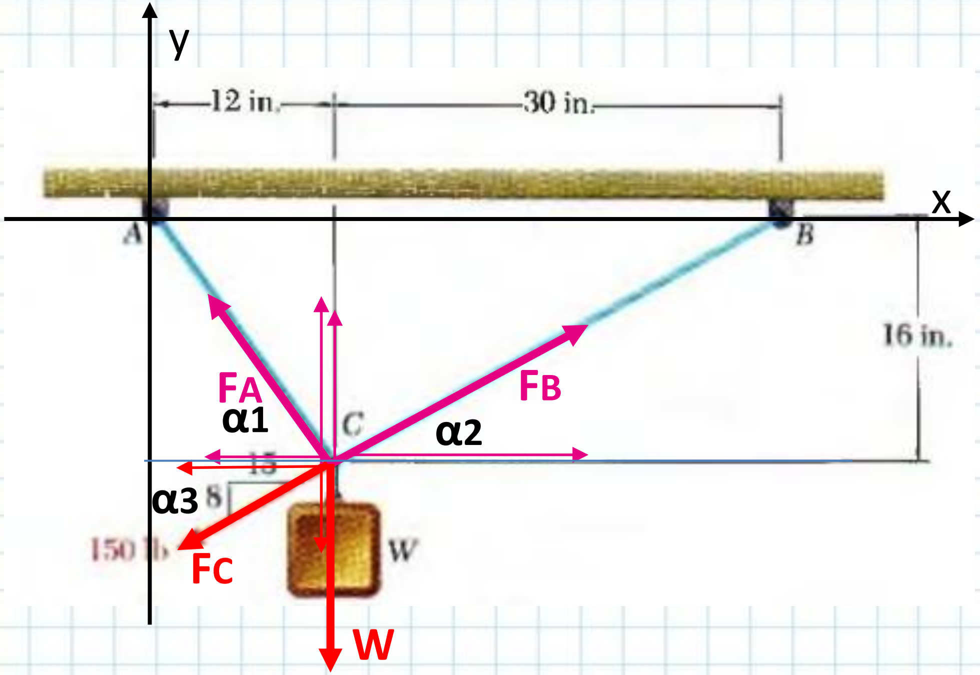
TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

Ejemplo 2: sistema plano de fuerzas concurrentes

Dos cables se amarran juntos en C y son cargados como indica la figura. Si W=190lb, determine la tensión en los cables AC y BC.



$$F_{Ax} := F_A \cdot \cos(\alpha_1)$$

$$F_{Ay} := F_A \cdot \sin(\alpha_1)$$

$$F_{Bx} := F_B \cdot \cos(\alpha_2)$$

$$F_{By} := F_B \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$F_{Cx} := 150\ lb \cdot \cos(\alpha_3) = 132.353\ lb$$

$$F_{Cy} := 150\ lb\ \sin(\alpha_3) = 70.588\ lb$$

$$W_x := 0$$

$$W_y := 190\ lb$$

F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

HOJA
30

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

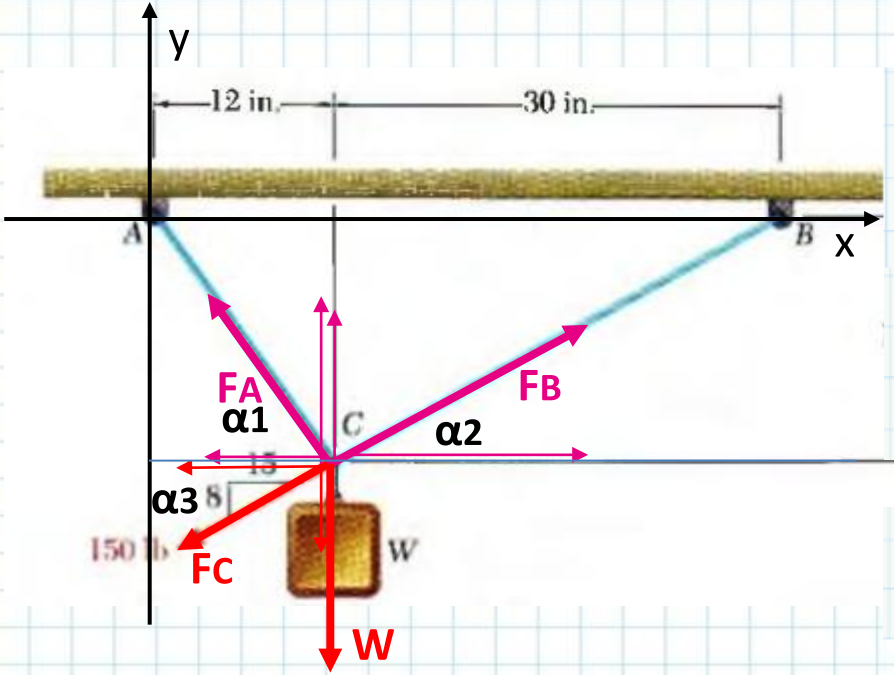
F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Ejemplo 2: sistema plano de fuerzas concurrentes

Dos cables se amarran juntos en C y son cargados como indica la figura. Si W=190lb, determine la tensión en los cables AC y BC.



Ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x := 0\ lb$$

$$\Sigma F_y := 0\ lb$$

$$\Sigma F_x = -F_{Ax} + F_{Bx} - F_{Cx} + W_x$$

$$\Sigma F_y = F_{Ay} + F_{By} - F_{Cy} - W_y$$

$$\Sigma F_x = -F_A \cdot \cos(\alpha_1) + F_B \cdot \cos(\alpha_2) - F_{Cx} + W_x$$

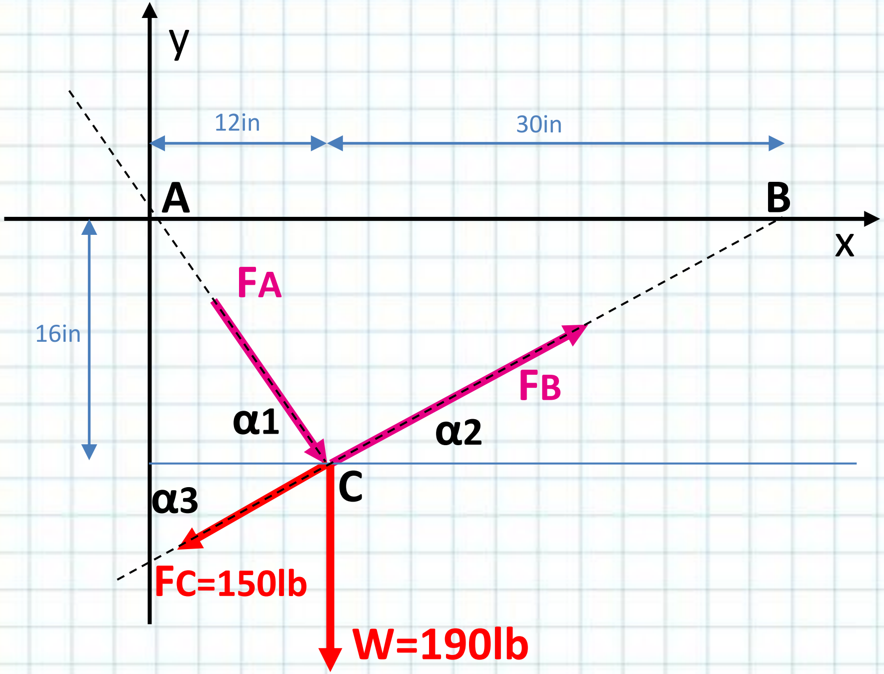
$$\Sigma F_y = F_A \cdot \sin(\alpha_1) + F_B \cdot \sin(\alpha_2) - F_{Cy} - W_y$$

$$\text{find}(F_A, F_B) = \begin{bmatrix} 169.643 \\ 265.357 \end{bmatrix}\ lb$$

Ejemplo 2: sistema plano de fuerzas concurrentes

Qué pasa si no conozco el sentido de las fuerzas? Otra versión del mismo problema

Se conocen las fuerzas Fc y W. Equilibrar el sistema con dos fuerzas de direcciones AC y BC



$$F_{Ax} := F_A \cdot \cos(\alpha_1) \qquad F_{Cx} := 150\ lb \cdot \cos(\alpha_3) = 132.353\ lb$$

$$F_{Ay} := F_A \cdot \sin(\alpha_1) \qquad F_{Cy} := 150\ lb\ \sin(\alpha_3) = 70.588\ lb$$

$$F_{Bx} := F_B \cdot \cos(\alpha_2) \qquad W_x := 0$$

$$F_{By} := F_B \cdot \sin(\alpha_2) \qquad W_y := 190\ lb$$

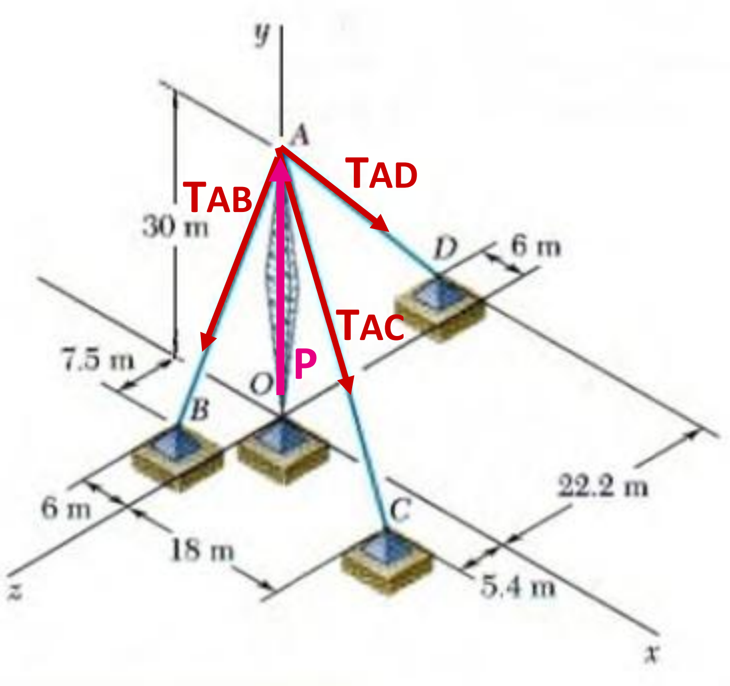
$$\Sigma F_x = F_A \cdot \cos(\alpha_1) + F_B \cdot \cos(\alpha_2) - F_{Rx} + W_x$$

$$\Sigma F_y = -F_A \cdot \sin(\alpha_1) + F_B \cdot \sin(\alpha_2) - F_{Ry} - W_y$$

$$\text{find}(F_A, F_B) = \begin{bmatrix} -169.643 \\ 265.357 \end{bmatrix} lb$$

Ejemplo 3: sistema espacial de fuerzas concurrentes

Una torre de transmisión se sostiene por medio de 3 alambres que están unidos a una punta colocada en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la tensión en el alambre AB es de 3.6kN, determine la fuerza vertical P ejercida por la torre sobre la punta puesta en A



$$A := \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix} m \quad B := \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 7.5 \end{bmatrix} m \quad C := \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 5.4 \end{bmatrix} m \quad D := \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -22.2 \end{bmatrix} m$$

$$AB := B - A = \begin{bmatrix} -6 \\ -30 \\ 7.5 \end{bmatrix} m \qquad \|AB\| = 31.5\ m$$

$$AC := C - A = \begin{bmatrix} 18 \\ -30 \\ 5.4 \end{bmatrix} m \qquad \|AC\| = 35.4\ m$$

$$AD := D - A = \begin{bmatrix} -6 \\ -30 \\ -22.2 \end{bmatrix} m \qquad \|AD\| = 37.8\ m$$

$$\left\| \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

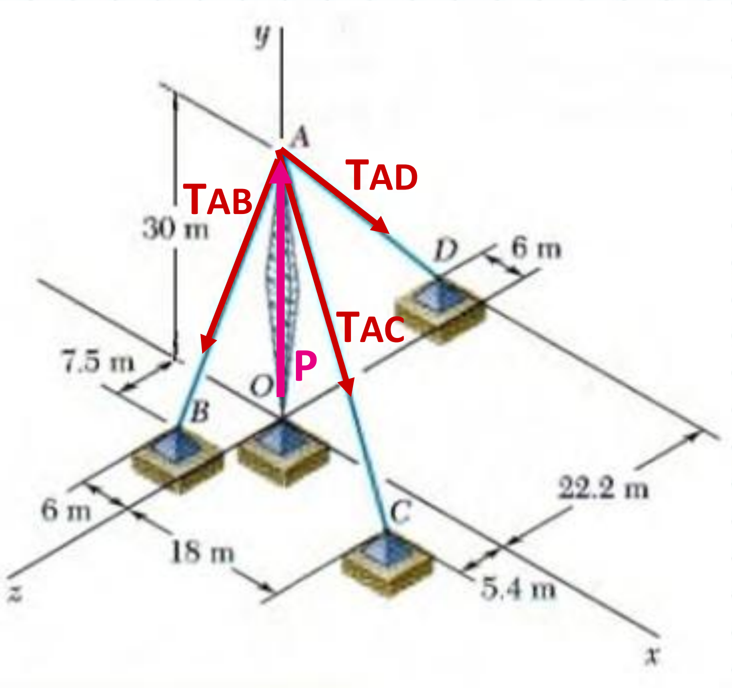
TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

Ejemplo 3: sistema espacial de fuerzas concurrentes

Una torre de transmisión se sostiene por medio de 3 alambres que están unidos a una punta colocada en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la tensión en el alambre AB es de 3.6kN, determine la fuerza vertical P ejercida por la torre sobre la punta puesta en A



$$v_{AB} := \frac{AB}{\|AB\|} = \begin{bmatrix} -0.19 \\ -0.952 \\ 0.238 \end{bmatrix}$$

$$v_{AC} := \frac{AC}{\|AC\|} = \begin{bmatrix} 0.508 \\ -0.847 \\ 0.153 \end{bmatrix}$$

$$v_{AD} := \frac{AD}{\|AD\|} = \begin{bmatrix} -0.159 \\ -0.794 \\ -0.587 \end{bmatrix}$$

$$v_P := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

HOJA
34

TEMA

TP1

FUERZAS
CONCENTRADAS

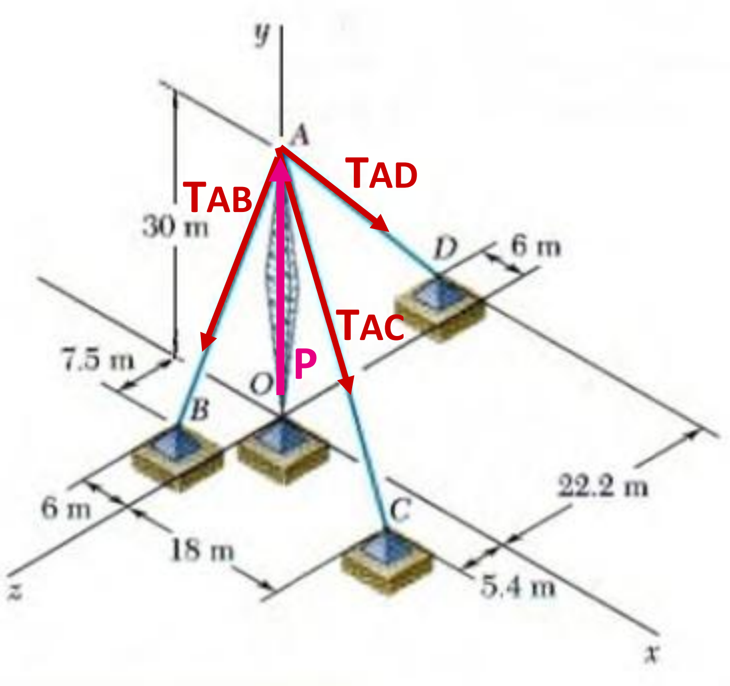
F.I.U.B.A.
DTO. ESTABILIDAD
84.02 /64.11
ESTABILIDAD 1

2 CUAT. 2020

CURSO 4
PARENTE

Ejemplo 3: sistema espacial de fuerzas concurrentes

Una torre de transmisión se sostiene por medio de 3 alambres que están unidos a una punta colocada en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la tensión en el alambre AB es de 3.6kN, determine la fuerza vertical P ejercida por la torre sobre la punta puesta en A



$$T_{AB} := 3.6\ kN$$

$$0 = T_{AB} \cdot v_{AB} + T_{AC} \cdot v_{AC} + T_{AD} \cdot v_{AD} + P \cdot v_P$$

$$\text{find}\left(T_{AC}, T_{AD}, P\right) = \begin{bmatrix} 1.963 \\ 1.969 \\ 6.655 \end{bmatrix} kN$$

$$\Sigma F_x = T_{AB} \cdot v_{ABx} + T_{AC} \cdot v_{ACx} + T_{AD} \cdot v_{ADx} + P \cdot v_{Px} = 0$$
$$\Sigma F_y = T_{AB} \cdot v_{ABy} + T_{AC} \cdot v_{ACy} + T_{AD} \cdot v_{ADy} + P \cdot v_{Py} = 0$$
$$\Sigma F_z = T_{AB} \cdot v_{ABz} + T_{AC} \cdot v_{ACz} + T_{AD} \cdot v_{ADz} + P \cdot v_{Pz} = 0$$