

## Métodos analíticos aproximados para el cálculo en geotecnia

E. Núñez

*enunezgeo@yahoo.com.ar*

*Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires*

**RESUMEN:** Los programas complejos de Geotecnia Computacional son empleados en forma creciente. Sin embargo, el uso de métodos analíticos aproximados de cálculo es útil cuando los valores y el significado específico de los parámetros geotécnicos básicos no resultan de simple determinación. Se presentan tres ejemplos significativos: A) La estimación de la deformación de la pantalla de hormigón armado en una presa CFRD para el primer llenado del embalse; B) La relación carga-asentamiento de bases en arcillas compactas; y C) El significado de “Coeficiente de Seguridad”.

**Palabras clave:** anisotropía – módulos – ecuaciones constitutivas – asentamientos – coeficiente de seguridad

**ABSTRACT:** The use of involved computational programs in Geotechnics is growing. However, simple approximate analytical calculations are useful when the specific meaning and values of the basic geotechnical parameters are not easy to determine. Three significant examples are presented: A) The concrete face deformation of CFRD after first impoundment; B) The load-settlement relationship for shallow footings resting on stiff clays; and C) the meaning of the “Safety Factor”.

**Key Words:** anisotropy – stiffness moduli – constitutive equations – settlements – safety factor

### 1 INTRODUCCIÓN

Cada vez son más numerosos los programas de Geotecnia Computacional disponibles en la Ingeniería. La solución exitosa de los problemas involucrados depende fundamentalmente de la introducción de adecuadas ecuaciones constitutivas que describan apropiadamente el comportamiento mecánico o hidrodinámico pertinentes al tema que se

estudia, como así también el preciso significado de los términos empleados en el examen. Por ejemplo, y en cada caso, el significado de “coeficiente de seguridad”, u otros conceptos de similar importancia.

En muchas oportunidades, las soluciones analíticas disponibles pueden ser utilizadas sin emplear mayores recursos instrumentales; esto resulta particularmente de aplicación cuando los parámetros de entrada son de difícil valoración. Los métodos numéricos cuya implementación requieren

el uso de computadoras son probablemente el recurso que en el futuro se empleará en forma casi exclusiva; sin embargo, una aproximación previa empleando soluciones analíticas relativamente simples pero adecuadas, puede ser de gran auxilio, a veces como metodología de primera aproximación necesaria. A continuación se comentan tres casos que pueden resultar de interés.

La notación es: el subíndice  $h$  indica dirección horizontal,  $v$  indica dirección vertical.  $k$  es permeabilidad,  $K$  es módulo de reacción y  $E$  es módulo de deformación.

## 2 DEFORMACIÓN DE LA PANTALLA DE HºAº EN UNA PRESA CFRD PARA EL PRIMER LLENADO DEL EMBALSE

### 2.1 El medio anisotrópico

El empleo del FEM puede conducir a buenos resultados cuando se dispone de muy buenos valores para los parámetros de entrada, adecuadas ecuaciones constitutivas de los materiales de la presa y fundación, y buenos datos de la morfología de la presa.

Pero también pueden efectuarse evaluaciones aproximadas empleando recursos tan simples como estudiar el comportamiento de bielas equivalentes [1]. Como los materiales compactados siempre son anisotrópicos, en general ortotrópicos, es preciso definir valores para los módulos direccionales según el posicionamiento de las bielas. En particular, si se quiere efectuar un tanteo sobre la deformación

máxima normal a la pantalla, se puede recurrir a la aproximación de Fitzpatrick [2].

Para estimar el valor del correspondiente módulo direccional es posible valerse de un modelo muy simple de una biela con módulo  $E_d$  evaluado como se muestra en la Fig. 1. Si las tensiones de corte son nulas en las caras, la presión es la misma en los planos horizontal y vertical ( $p = p_h = p_v$ ) y las deformaciones son isotrópicas ( $\varepsilon = \varepsilon_h = \varepsilon_v$ ), por lo que, si  $\beta$  es el ángulo del talud, queda

$$p = p_h \cdot \sin^2 \beta + p_v \cdot \cos^2 \beta \quad (1)$$

$$E_d = E_h \cdot \sin^2 \beta + E_v \cdot \cos^2 \beta \quad (2)$$

$$\frac{E_d}{E_v} = (1 + n \cdot \tan^2 \beta) \cdot \cos^2 \beta \quad (3)$$

donde  $n = E_h/E_v$ . También puede escribirse

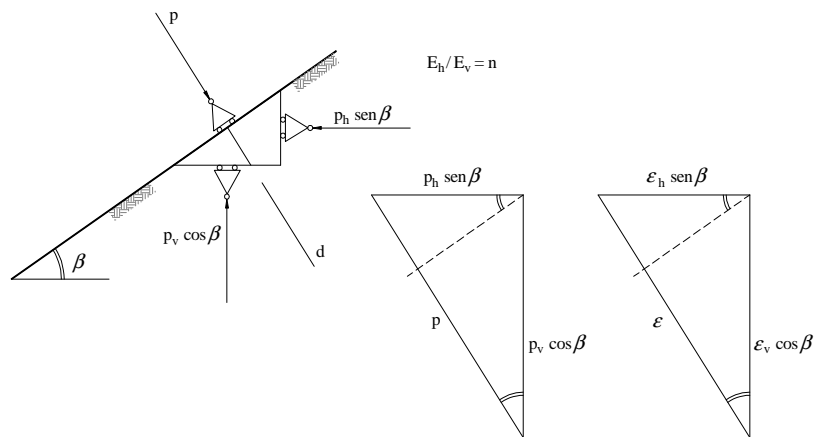
$$\varepsilon = \varepsilon_h \cdot \sin^2 \beta + \varepsilon_v \cdot \cos^2 \beta \quad (4)$$

por lo que

$$\frac{1}{E_d} = \frac{\sin^2 \beta}{E_h} + \frac{\cos^2 \beta}{E_v} \quad (5)$$

resultando

$$\frac{E_d}{E_v} = \frac{1}{\left(\frac{1}{n} \cdot \tan^2 \beta + 1\right) \cdot \cos^2 \beta} \quad (6)$$



**Figura 1:** Modelo muy simplificado de bielas.

También puede recurrirse a la analogía del flujo de agua a través de un medio anisotrópico, para el cual la permeabilidad  $k_I$  en el sentido del flujo (inclinado un ángulo  $\alpha$ ) resulta

$$\frac{1}{k_I} = \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{k_h} + \frac{\sin^2 \alpha}{k_v}} \quad (7)$$

Considerando el valor de la permeabilidad en la dirección del gradiente se tiene

$$k_2 = k_h \cdot \cos^2 \alpha + k_v \cdot \sin^2 \alpha \quad (8)$$

y para una dada dirección  $\theta$

$$\frac{k_2}{k_1} = 1 + \left( \frac{k_v}{k_h} + \frac{k_h}{k_v} - 2 \right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \quad (9)$$

En la sección transformada  $k = (k_h \cdot k_v)^{1/2}$ , por lo que, si  $k_h/k_v = n$ ,  $k/k_v = n^{1/2}$ . Sustituyendo  $k$  por  $E$  en cada caso, tenemos las mismas ecuaciones que en a). Empleando la misma analogía para la transformada a un campo isotrópico tenemos  $k = (k_h \cdot k_v)^{1/2}$  o  $E = (E_h \cdot E_v)^{1/2} = E_v \cdot n^{1/2}$ . En la transformación, la longitud de la biela equivalente cambia a

$$I^* = I \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \left( \arctan \left( \frac{\tan \beta}{n^{1/2}} \right) \right)} \quad (10)$$

por lo que se puede escribir, a los efectos del cálculo del acortamiento de la biela

$$\left. \frac{E_d}{E_v} \right|^* = \frac{E_d}{E_v} \cdot \frac{I^*}{I} \quad (11)$$

El análisis de un modelo mecánico desarrollado por Sfriso [3] conduce al valor máximo del cociente

$$\frac{E_d}{E_v} = (1 + n \cdot \tan^2 \beta) \cdot \cos^2 \beta \quad (12)$$

y que coincide con la ecuación 3. Por otra parte, un desarrollo tensorial desarrollado por A. Verri [4] para una biela friccional muestra una relación

$$\frac{E_d}{E_v} = \frac{n}{\sin^4 \beta + n \cdot \cos^4 \beta + \psi \cdot \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta} \quad (13)$$

Los valores resultantes de la relación  $E_d/E_v$  para casos específicos con  $\tan \beta = 1.5$ , que se denomina coeficiente  $C_I$ , son

Tabla 1. Relaciones de rigidez

n	Ec. 3	Ec. 6	Ecs. (3+6) / 2	Ec. 11	Ec. 13 $\psi = 2$
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	1.18	1.31	1.25	1.30	1.35
3	1.26	1.61	1.44	1.54	1.53
4	1.30	1.92	1.61	1.75	1.64
5	1.33	2.23	1.78	1.94	1.71

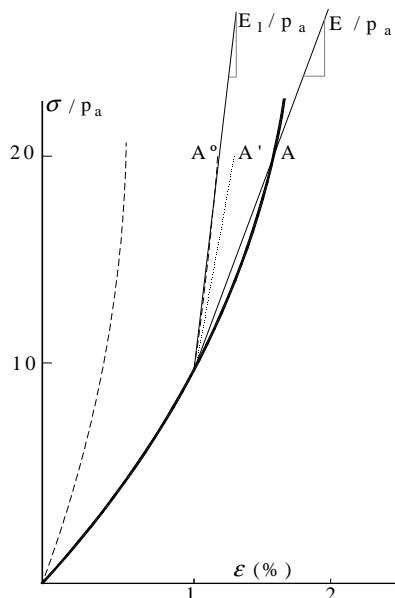
$$\text{siendo } \psi = f(E_v, G, v_{vh}) = \frac{E_v}{G} - 2 \cdot v \quad (14)$$

## 2.2 Rotación de la dirección de las tensiones con el llenado del embalse

Cuando se llena el embalse, la dirección de las tensiones principales se modifica, reduciendo el valor  $N = \tan^2 (45^\circ + \phi_m/2)$ .

En la Fig. 2 la línea de trazos indica la deformación unitaria con el incremento de la presión en una condición isotrópica de confinamiento con trayectoria  $N = \sigma_1/\sigma_3 = 1$ . La línea llena O-A indica una trayectoria  $N > 1$  (por ej., la correspondiente a una condición edométrica  $N_0 = 1/K_0$ ). Las trayectorias de esfuerzos en la presa para puntos localizados sobre una misma línea recta oblicua partiendo desde la cresta, tienden a líneas con  $N = \text{cte}$ . Las trayectorias tensión-deformación típicas para líneas  $N = \text{cte}$  (o  $K_0 = \text{cte}$ ) pueden verse en [5]. Para un punto ubicado a una profundidad  $z$  respecto del nivel de relleno situado a una altura  $h$  respecto de la fundación, cuando se produce el llenado del embalse la trayectoria de esfuerzos tiende a una situación  $N = 1$ ; para esta situación, se llegaría al punto A°. En general la trayectoria se desvía y conduce al punto A¹. De cualquier manera, el módulo secante  $E_s$  es mayor a  $E$ , por lo que el módulo direccional de cálculo  $E_d$

aumenta respecto del módulo vertical  $E_v$  que hubiera podido ser medido “in situ”. La influencia de este efecto será considerado mediante un coeficiente  $C_2$ , con un valor del orden de  $1 < C_2 < 2$ .



**Figura 2:** Trayectorias tensión-deformación.

### 2.3 Influencia de la forma de valle

Cuando el valle determina una relación para la presa  $L/H$  (largo / altura) menor a un número del orden de 4, la influencia de los estribos aumenta y la presión vertical en el centro de la presa es menor a la que correspondería a una presa ancha, o sea que la presión vertical  $p_v$  en un punto ubicado a una altura  $h$  de la fundación y a una profundidad  $z$  respecto de la superficie del relleno, es tanto menor que  $\gamma \cdot z$  cuanto mayor es el efecto arco determinado por la forma del valle. Este efecto será considerado mediante la introducción de un coeficiente

$$C_3 = \frac{A}{B + H/L} \quad (15)$$

siendo, para un valle rectangular,  $A = 1$  y  $B = 3/4$ , y para un valle triangular  $A = 1/2$  y  $B = 3/8$ . Por tanto, para una biela equivalente de longitud  $l$ ,

$$\frac{E_d}{E_v} = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \quad (16)$$

Por ejemplo, para un valle triangular con  $L/H = 2$   $\tan \beta = 1.40$ ;  $n = 4$ , el valor promedio de  $C_1$  resulta  $C_1 = 1.65$ ; el de  $C_2 = 1.5$ ; y  $C_3 = 1/2 / (3/8 + 1/2) = 1/1.75$ , por lo que  $E_d/E_v = 1.65 \times 1.5 / 1.75 = 1.40$ .

En cambio, para un valle de forma trapezoidal con  $L/H = 4$ ,  $C_1 = 1.65$ ,  $C_2 = 1.75$ ;  $C_3 = 1/2 (1+0.8) = 0.9$  por lo que  $E_d/E_v = 1.65 \times 1.75 \times 0.9 = 2.6$ .

Aproximadamente la altura respecto de una fundación rocosa a la cual la deformación es máxima resulta aproximadamente  $0.4xH$ , por lo que el desplazamiento normal a la pantalla es

$$\delta = \frac{\gamma_w}{4 \cdot E_d \cdot \cos \beta} \cdot H^2 \quad (17)$$

Para una presa de 100m de altura fundada en roca, el desplazamiento máximo normal a la pantalla de hormigón resulta entonces aproximadamente: para el primer caso con  $E_v = 600 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\delta = 36\text{cm}$  y para el segundo caso, con  $E_v = 350 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\delta = 34 \text{ cm}$ . Los valores de  $E_v$  pueden obtenerse a medida que se construye la presa.

Esta estimación puede establecerse antes del primer llenado; se requiere un trabajo de cálculo rápido y simple. Desde ya que si se pueden emplear datos de entrada confiables, el método de la elementos finitos aplicado para el cálculo de las deformaciones de la presa permitiría una evaluación más general y ajustada de las deformaciones esperables, y resulta siempre de interés la comparación de los resultados correspondientes para ambas estimaciones.

Es de señalar que para este caso, expertos de muy reputado prestigio preconizan que no resultan necesarias ni investigaciones de laboratorio ni la implementación de modelos matemáticos, siendo suficiente la estimación del orden probable de las deformaciones teniendo en cuenta las mediciones efectuadas en otras presas CFRD [6].

### 3 RELACIÓN “CARGA – ASENTAMIENTO” DE BASES DE CIMENTACIÓN

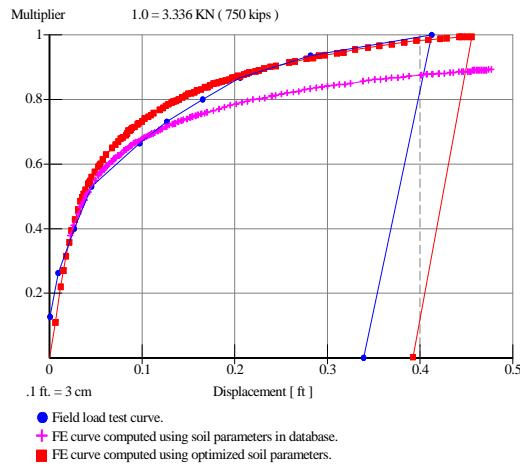
En Noviembre del 2003 se redactó el siguiente texto para ser publicado en el Boletín de la SAIG, cosa que no fue posible debido a las dificultades de impresión de la revista, cuya inclusión aquí se considera de interés por las razones expuestas en la Introducción.

### 3.1 Relación "Carga - Asentamiento" de bases en arcillas compactas a muy compactas

En [7] se muestra el resultado de un análisis efectuado con el programa Plaxis sobre el comportamiento de una base de sección circular  $B = 2.5\text{m}$  implantada a  $2.5\text{m}$  de profundidad en una arcilla moderada-mente fisurada, compacta a muy compacta, saturada. La cimentación fue construida como un cilindro de base expandida, se minimizó la fricción sobre el fuste, y se efectuó un ensayo de carga a compresión. Las características del terreno situado en un área de ensayo de la Universidad de Texas se pueden examinar en [8].

En la Fig. 3 se muestra el resultado del ensayo, el resultado del análisis por elementos finitos empleando los parámetros básicos definidos para el sitio, y el ajuste correspondiente a los valores reales de rotura obtenidos en el ensayo.

Como Plaxis emplea la aproximación hiperbólica, la relación presión  $p$  - deformación  $\delta$  en el diagrama  $K = p/\delta - p$  es una recta, como se muestra en la Fig. 4.



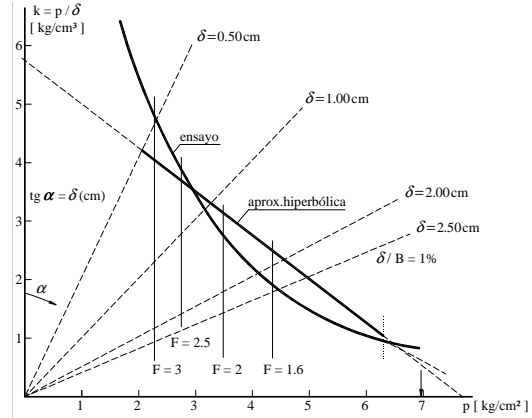
**Figura 3:** Curvas carga-desplazamiento de Plaxis.

Un escrutinio algo más detallado de los valores obtenidos en el ensayo muestra sin embargo una relación de tipo parabólico. En las unidades del gráfico

$$p = 3.05 \cdot \delta^{0.38} \quad (18)$$

o, si se adimensionaliza ( $\gamma_w$ : peso unitario del agua)

$$K/\gamma_w = 99 (\delta/B)^{-0.62} \quad (19)$$



**Figura 4:** Valores experimentales y transformación hiperbólica.

Este tipo de relación tensión-deformación también se obtuvo ensayando bases en arenas en la misma Universidad de Texas; un comentario al respecto, de quien escribe esta nota, se incluyó en [9].

Quien escribe ha empleado ajustes diferentes, con expresiones algebraicas sencillas: una de ellas es la hipérbola. Pero siempre se cuidó de señalar que en los extremos en que la presión  $p \rightarrow 0$  y  $p \rightarrow \text{rotura}$  la relación no resultaba válida; en particular, la aproximación hiperbólica permite definir una carga última cuyo valor puede ser expresado numéricamente como  $p_u = p_{rot}/d_R$ .

La aproximación parabólica no define un valor  $p_u$ . En este último caso se podría decir, teóricamente, que la resistencia crece indefinidamente con la deformación.

Para el caso de una base cargada, si se emplean los coeficientes de seguridad a rotura  $F$ , se observa que para valores  $F = 2.5$  las dos aproximaciones son prácticamente coincidentes; para  $F > 2.5$  la aproximación hiperbólica conduce a valores mayores de  $\delta$  y para  $F < 2.5$  los valores de  $\delta$  previstos son menores. Para valores de  $\delta$  cercanos a  $0.9 \cdot p_{rot}$  los  $\delta$  son similares.

Por otra parte, una previsión que tuviera en cuenta los datos simples suministrados hubiera permitido tomar como presión de ruptura  $q_{rot}$ ;  $250\text{kPa}$  (para stiff clay,  $q_{min}$ ;  $100\text{kPa}$ ; para very stiff clay,  $q_{min}$ ;  $400\text{kPa}$ ; valor medio  $q_{rot}$ ;  $250\text{kPa}$ ).

Por tanto, para condiciones no drenadas (que son las del ensayo), la cohesión  $c = 1/2 \cdot q_u$ ;  $150kPa$ , por lo que la presión de ruptura

$$p_{rot}; 6 \cdot c + \sigma'_{v0} = 6 \cdot 125kPa + 40kPa; 790kPa \quad (20)$$

y tomando  $d_R \square 0.95$ , resulta  $p_u$ ;  $830kPa$ ; de la misma manera

$$K_i; 2 \cdot \frac{E_i}{B} = 2 \cdot \frac{300 \cdot 250kPa}{250cm}; 60 \frac{MN}{m^2} \quad (21)$$

En este caso los parámetros hiperbólicos hubieran resultado muy similares a los empleados en el párrafo 2.

El caso examinado es interesante porque muestra con claridad que cuando se estudian fenómenos de muy pequeñas deformaciones, el parámetro que caracteriza una hipérbola debe ser muy diferente del que resulta para grandes deformaciones. Por otra parte, si se estudian fenómenos en un dominio en donde se manifiestan regiones plastificadas significativas, la interacción con el resto de la porción estudiada puede ser importante y las predicciones localizadas alejadas de la realidad del fenómeno que se quiere cuantificar.

#### 4 EL SIGNIFICADO DE “COEFICIENTE DE SEGURIDAD”

El coeficiente de seguridad  $F$  es la relación entre la resistencia a rotura del material y las solicitaciones aplicadas. En Mecánica de Suelos, el coeficiente de seguridad es la relación entre la resistencia al corte disponible en el plano de rotura y las tensiones tangenciales actuantes sobre dicho plano. Como se aprecia en la Fig. 5, el estado de tensiones para un suelo incoherente representado en el gráfico de Mohr permite calcular la tensión de rotura  $\tau_f$  actuante sobre el plano de rotura que forma un ángulo  $\alpha = 45^\circ + \phi_m/2$  con respecto a la tensión principal menor y la tensión tangencial actuante en dicho plano para un estado de tensiones crecientes.

El coeficiente  $F^* = \tau_f / \tau_m$  (ver definiciones en la Fig. 5) no es igual al verdadero coeficiente de seguridad  $F$ . Las expresiones que siguen permiten visualizar las correspondientes definiciones; pueden seguirse con ayuda de la Fig. 5. La Fig. 6, que

muestra la trayectoria de tensiones del ensayo de corte directo, permite apreciar que la definición de  $F^*$  es aplicable a este caso.

$$F = \frac{\tau_f}{\tau} = \frac{\sigma_f - \sigma}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\sigma_{df}}{\sigma_d} = \frac{N_\phi - 1}{N_{\phi_m} - 1} \quad (22)$$

$$F^* = \frac{\tau_f}{\tau_m} = \frac{\tau_f}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \cos(\phi_m)} \neq F \quad (23)$$

$$\frac{F^*}{F} = \frac{\tau/\tau_f}{\tau_m/\tau_f} = \frac{\sin(90^\circ - \phi)}{\cos(\phi_m)} \quad (24)$$

Además, tampoco  $\tan \phi / \tan \phi_m = F_{\phi_m}$  es igual a  $F$  como se prueba a continuación.

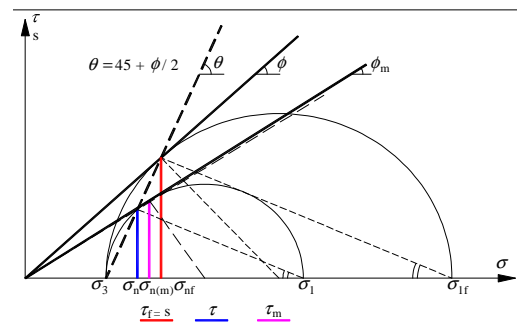
$$\begin{aligned} F_{\phi_m} &= \frac{\tan \phi}{\tan \phi_m} = \frac{N_{\phi_m} + 1}{N_\phi + 1} \cdot \frac{F^2}{F^*} \\ &= \frac{N_{\phi_m} + 1}{N_\phi + 1} \cdot \frac{\cos \phi_m}{\sin(90^\circ - \phi)} \cdot F \end{aligned} \quad (25)$$

por lo que

$$\frac{F_{\phi_m}}{F} = \frac{N_{\phi_m} + 1}{N_\phi + 1} \cdot \frac{\cos \phi_m}{\sin(90^\circ - \phi)} \quad (26)$$

y

$$\frac{F^*}{F} = \frac{\sin(90^\circ - \phi)}{\cos \phi_m} \quad (27)$$



**Figura 5:** Definiciones de  $\tau$ ,  $\tau_f$  y  $\tau_m$ .

Como se observa, el coeficiente que corresponde al cociente entre la tangente del ángulo de fricción de rotura  $\phi$  y la tangente de un ángulo de fricción

movilizado  $\phi_m$  no es igual a  $F$  ni a  $F^*$ . Por tanto, los programas que emplean relaciones tensión - deformación no lineales, si utilizan las deformaciones crecientes como ángulos equivalentes crecientes de fricción movilizada, deberán compatibilizar el significado de lo que se denomina "coeficiente de seguridad".

Tabla 2. Comparación entre coeficientes  $F$ .

$\square_f$	$\square_m$	$F$	$F^*/F$	$F_m/F$
30	10	4.76	0.88	0.69
30	20	1.92	0.92	0.82
30	30	1.00	1.00	1.00
45	15	6.91	0.73	0.54
45	30	2.41	0.82	0.72
45	45	1.00	1.00	1.00

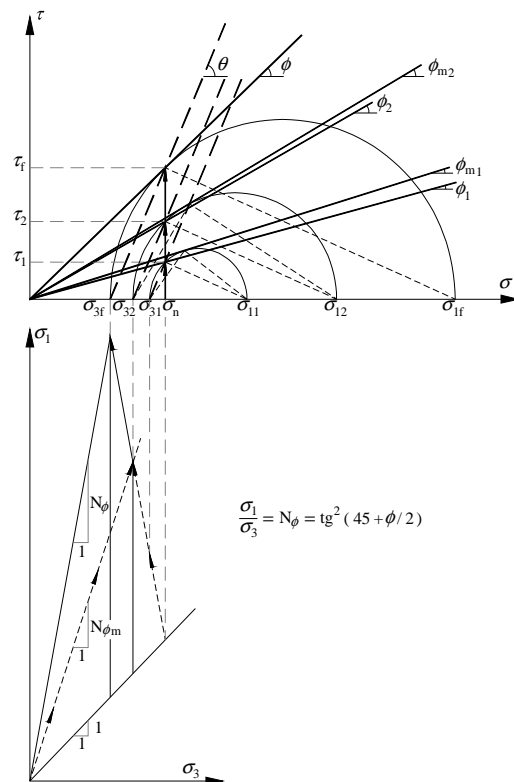


Figura 6: Trayectoria de tensiones en los ensayos de corte directo.

## 5 CONCLUSIONES

La aplicación de los métodos numéricos que implementan los modelos de comportamiento de los suelos será de aplicación corriente y creciente en el futuro. Pero siempre es conveniente estimar previamente los resultados esperables mediante métodos analíticos simples que utilicen buenas hipótesis para evaluar los parámetros de entrada.

## 6 AGRADECIMIENTOS

El Autor quiere manifestar su agradecimiento a los Profesores Alejo Sfriso y Alejandro Verri por su permanente disposición para la discusión crítica de muchos de los temas aquí examinados.

## 7 REFERENCIAS

- [1] Núñez E. 1999. Deformaciones de la Pantalla de Hormigón en una Presa de materiales sueltos. Boletín de la SAIG, N° 38 Mayo - Buenos Aires.
- [2] Fitzpatrick M. et al. 1985. Design of Concrete Face Rockfill Dam. Design, Construction and Performance, ASCE, 410-434.
- [3] Núñez E. 2007. Arthur Casagrande Lecture. Uncertainties and Approximations in Geotechnics. PanAmerican Conference XIII PCSMGE.
- [4] Núñez E., Vardé, O. 1968. La compresibilidad de los suelos como fenómeno asociado al desarrollo de su resistencia. 1ª Reunión Argentina de Mecánica de Suelos e Ing. de Fundaciones. La Plata, Argentina.
- [5] Verri A. 2008. Comunicación personal.
- [6] Pinto S., de Marques Filho, P. 1998. Estimating the maximum face deflection in CFRDs. The Internacional Journal on Hydropower&Dams, Vol.5, Issue 6.
- [7] Tand, W. y O. Neill 2003. Comparison of Computed vs. Measured Load/Settlement Response of a Footing Bearing on Stiff to Very Stiff Clay. Plaxis Bulletin.
- [8] Yazdanbod, A., Sheik, S. y O' Neill, M. 1987. Uplift of Shallow Underreams in Jointed Clay. ASCE Geotechnical Special Publication N° 8.
- [9] Núñez E. 1997. Bases cimentadas en arenas. Boletín de la SAMS N° 34, Diciembre, Buenos Aires.