

# INTERACCIÓN SUELO - ESTRUCTURA PARA EL DISEÑO DE TÚNELES

Director de Tesis: Ing. Juan Carlos Calo

Codirector de Tesis: Ing. Alejo Sfriso

Alumno: Juan Carlos Fontana

Padrón N°: 76852

Tesis de Grado de Ingeniería Civil

Universidad de Buenos Aires

2004-2005

## **INDICE:**

<b>PROLOGO</b>	<b>4</b>
<b>1.INTRODUCCIÓN</b>	<b>6</b>
<b>1.1.Introducción al Trabajo de Tesis</b>	<b>7</b>
1.1.1.Tema	8
1.1.2.Objetivos	8
<b>1.2.Teoría Clásica de Obras Subterráneas</b>	<b>9</b>
1.2.1.Descripción del proceso tenso-deformacional	9
1.2.2.Supuestos básicos de los modelos matemáticos clásicos para obras de tunelería	10
1.2.3.Descripción del Macizo Elástico	10
1.2.4.Presentación de modelos matemáticos y métodos clásicos	11
1.2.4.1.Modelo matemático de Kirsch	11
1.2.4.2.Modelo matemático de Pender	11
1.2.5.Sistema terreno revestimiento	12
<b>1.3.Modelos numéricos</b>	<b>14</b>
1.3.1.Modelos para el diseño de túneles construidos por etapas.	14
<b>2.PLANTEO</b>	<b>16</b>
<b>2.1.Cálculo por Etapas Sucesivas</b>	<b>17</b>
2.1.1 Introducción	17
2.1.2.Proceso y Desarrollo de un cálculo tipo	17
2.1.2.1. Etapas Parciales de Construcción (EPC)	17
2.1.2.2. Etapas Sucesivas de Simulación (ESS)	17
2.1.2.3. Desarrollo de las Etapas Sucesivas de Simulación (ESS)	18
2.1.2.4. Desarrollo de las Etapas Parciales de Construcción (EPC)	26
<b>2.2. Implementación del programa " Túneles "</b>	<b>27</b>
2.2.1.Introducción	27
2.2.2.Entrada	27
2.2.3.Ejecución del programa " Túneles "	27
2.2.4.Salida	29
<b>2.3. Elementos Finitos Infinitos</b>	<b>30</b>
2.3.1.Introducción	30
2.3.2.Modelación de semiespacios infinitos	31
2.3.3.Detalle de Elementos Finitos Infinitos	31
2.3.4.Funciones de forma del elemento infinito bidimensional	32
<b>2.4. Implementación del método beta</b>	<b>33</b>
<b>3.ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	<b>35</b>
<b>3.1.Comparación de resultados con la teoría Clásica</b>	<b>36</b>
3.1.1.Introducción	36
3.1.2.Objetivo	36
3.1.3.Análisis de Resultados	36
3.1.3.1.Datos del problema en análisis	36
3.1.3.2.Modelos propuestos para el análisis	37
3.1.3.3.Resultados	38

3.1.4. Conclusiones	44
<b>3.2.Comparación de resultados con el programa Plaxis</b>	<b>45</b>
3.2.1.Introducción	45
3.2.2. Objetivo	45
3.2.3. Análisis de Resultados	45
3.2.3.1. Modelo Físico	45
3.2.3.2. Modelo Numérico	46
3.2.3.3. Etapas Parciales de Construcción (EPC)	46
3.2.3.4. Etapas Sucesivas de Simulación (ESS)	47
3.2.3.5. Parámetros de entrada	49
3.2.3.6.Resultados informados	49
3.2.3.6.1. Resultados de las ESS (Etapas Sucesivas de Simulación) según "Túneles " y Plaxis.	49
3.2.3.6.2.Resultados de la EPC (Etapa Parcial de Construcción) obtenidos según " Túneles " y el Plaxis.	54
3.2.4. Conclusiones	56
<b>4.PALABRAS FINALES</b>	<b>57</b>
<b>4.1. Conclusiones Generales</b>	<b>58</b>
<b>4.2. Ventajas Computacionales y Geotécnicas del programa " Túneles "</b>	<b>59</b>
4.2.1.Ventajas de " Túneles " con respecto al Plaxis	59
4.2.2.Ventajas de " Túneles " con respecto a la Teoría Clásica	59
<b>ANEXO, TEORÍA DE ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>60</b>
<b>A.1. Introducción al Método de Elementos Finitos</b>	<b>61</b>
<b>A.2- El principio de los trabajos virtuales como forma débil de las ecuaciones de equilibrio en el análisis de los sólidos</b>	<b>65</b>
<b>A.3. Elementos Isoparametricos Bidimensionales</b>	<b>67</b>
<b>A.4.- Elementos Isoparametricos Unidireccionales</b>	<b>70</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>73</b>

## Prologo

Me gustaría compartir con ustedes la alegría que siento de haber dado este paso en mi vida, tanto en lo referente al factor técnico como al humano que se genera alrededor de cualquier trabajo de investigación.

Ahora si, quisiera tomarme unos renglones para agradecer a las personas que hicieron posible el haber logrado este objetivo, por su paciencia, por que siempre buscaron la forma de estar dispuestos para ayudarme, por su guía incondicional y por compartir su experiencia para que este trabajo salga de la mejor manera, a los Ing. Juan Carlos Calo y Ing. Alejo Oscar Sfriso, ambos directores de esta tesis. También a la profesora Dra. Ing. Marcela Goldsmith, por haberme recibido en las materias del Doctorado de la Facultad Introducción a Elementos Finitos y Análisis Tensorial, también a todos los profesores, jefes de trabajos prácticos, ayudantes y personal no docente de la Universidad de Buenos Aires que tuve a lo largo de mi carrera por compartir sus conocimientos para formar nuevos y mejores profesionales en nuestro país, me gustaría destacar ciertos profesores que dejaron huella en mi vida profesional como lo son los Ing. Carretero, Ing. Mac Donnell., Ing. Del Carril, entre otros.

Ahora bien, me gustaría también hacer una pequeña dedicatoria del esfuerzo de este trabajo dirigida a dos personas de forma especial que con su presencia, apoyo y cariño me dieron fuerza para que esto también sea posible, a Dios Padre y a mi hijo Juan Agustín, también a Ana, a mis padres Oscar y Delia, a mis hermanos Pablo y María Alejandra y a mi abuela Ángela.

## **1.Introducción**

## 1.1.Introducción al Trabajo de Tesis

En la actualidad los problemas de ingeniería relacionados con el diseño de túneles son catalogados como " obras de alta complejidad ". La Ingeniería Civil fue desarrollando a lo largo de la historia diferentes formas para poder encontrar las soluciones apropiadas. Los primeros estudios fueron los realizados por Kirsch y luego Pender, que resuelven diferentes modelos de túneles de geometría sencilla construidos en una única etapa. Estos modelos pretenden materializar, para una sección de túnel estándar, los diferentes estados de deformaciones y tensiones que se generan en el perfil del terreno una vez abierta la cavidad. Estos modelos manifiestan las siguientes limitaciones:

**1.1.a-** Unicamente se pueden resolver geometrías sencillas de la cavidad (túneles circulares, ovalados, semicirculares.).

**1.1.b-** No es posible encontrar los diferentes estados de tensiones y deformaciones de un túnel construido por etapas parciales.

**1.1.c-** Requiere un trabajo matemático muy prolongado basado en la teoría matemática de la elasticidad.

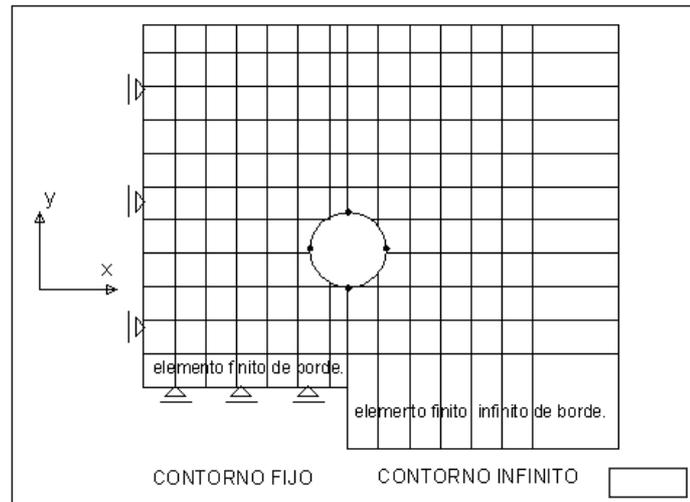
Luego surgieron estudios que relacionaban la interacción del suelo con la estructura de sostenimiento simulando la rigidez del suelo con resortes colocados alrededor de la cavidad y finalmente, gracias a la evolución de los ordenadores, comenzaron a tomar importancia los métodos numéricos. Entre los métodos de interés se presentará el Método de Elementos Finitos (MEF); del cual se manifiestan las siguientes ventajas:

**1.1.d-** Abordar la construcción de túneles con cualquier geometría.

**1.1.e-** Resolver los problemas de la construcción de túneles en etapas parciales.

**1.1.f-** Materializar de forma más exacta el perfil geológico del terreno.

En esta Tesis se quiere presentar un paso más en esta cadena por encontrar soluciones a los problemas de ingeniería relacionados con el diseño de túneles, esto consiste en imponer en el contorno de la malla de Elementos Finitos (MEF) una condición de borde elástica que simule el simiespacio infinito del suelo, lo propuesto se logrará mediante la utilización de los elementos finitos infinitos (EFI), propuestos originalmente por Bettis. (**Ver Figura. 1.1.1**). La ventaja de la utilización de estos elementos infinitos es contemplar al perfil geológico del suelo como un simiespacio de dominio infinito y reducir la cantidad de elementos finitos utilizados.



**Figura 1.1.1**

### 1.1.1.Tema

El tema de la tesis es resolver algunos de los problemas de ingeniería relacionados con el diseño de túneles mediante simulaciones numéricas, utilizando el método de Elementos finitos (MEF) y los Elementos finitos Infinitos (EFI).

### 1.1.2.Objetivos

En función del tema propuesto se plantea para ésta tesis dar solución a las siguientes cuestiones Numéricas, Geotécnicas y de Aplicación (**Ver 2. Planteo**) las cuales no son abordables utilizando el Método Clásico.

Cuestiones Numéricas:

**1.1.g.** Resolver por el Método de Elementos Finitos (MEF) en régimen elástico lineal los estados planos de deformación. (**Ver Anexos A1,A2,A3 y A4**)

**1.1.i.** Utilizar el método de elementos finitos infinitos (EFI) con el fin de simular el simiespacio infinito del suelo. (**Ver 2.3**)

Cuestiones Geotécnicas:

**1.1.j.** Resolver la interacción suelo-estructura para las Etapas Parciales de Construcción (EPC) de un túnel. (**Ver 2.1**)

**1.1.m.** Contemplar el estado tridimensional del túnel en un estado plano de deformación mediante la Implementación del " Método Beta ". (**Ver 2.4**)

Cuestiones de Aplicación:

**1.1.k.** Desarrollar un programa de computación, llamado " Túneles ", que resuelva las cuestiones Numéricas y geotécnicas mencionadas; y que posea una sencilla implementación . (**Ver 2.2**)

## 1.2. Teoría Clásica de Obras Subterráneas

### 1.2.1. Descripción del proceso tenso-deformacional

Desde un punto de vista estructural, el túnel es una cavidad abierta en un macizo, previamente tensionado sometido a un campo de tensiones, resultante en general de condiciones geológicas o de acciones externas preexistentes y que deberá preverse su evolución. El macizo es un cuerpo con ciertas ecuaciones constitutivas y con una forma dada, dentro de un campo de fuerzas (el gravitacional), sometido a un estado previo tenso-deformacional. El contorno teórico del túnel era, antes de su apertura, una superficie cerrada  $S$  que delimitaba un dominio  $D$  y sobre el cual existían unas ciertas tensiones internas  $\sigma$ . Al abrir el hueco del túnel se producen los siguientes efectos: Se modifica la conexión del espacio, eliminando el dominio  $D$  y creando el contorno  $S$ . Se anulan las tensiones sobre  $S$  proveniente del dominio  $D$  y el macizo deja de estar en equilibrio en el contorno  $S$ . El desequilibrio producido sobre  $S$  se relaja, modificándose el estado tensional. La modificación se propaga hacia el interior del macizo. Las ecuaciones de equilibrio interno de tensiones y de compatibilidad de deformaciones se verifican en todo momento. De acuerdo con las ecuaciones constitutivas se producen unos corrimientos en correspondencia con los cambios de tensión. La superficie  $S$  converge hacia una superficie  $S'$  que delimita un nuevo dominio  $D'$ . (Ver Figura 1.2.1)

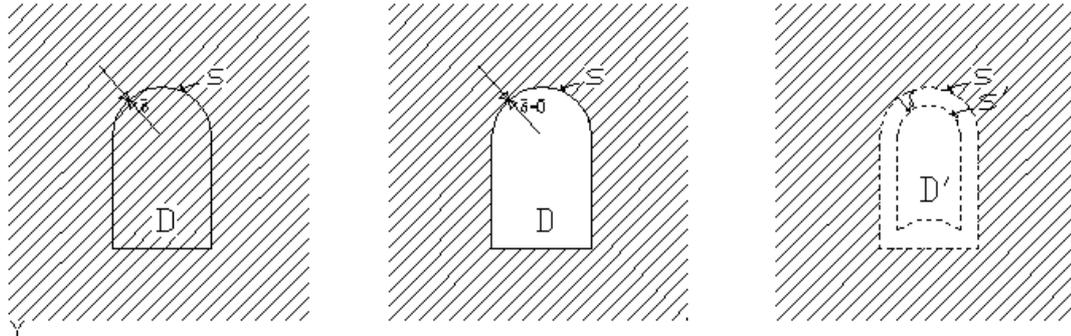


Figura 1.2.1

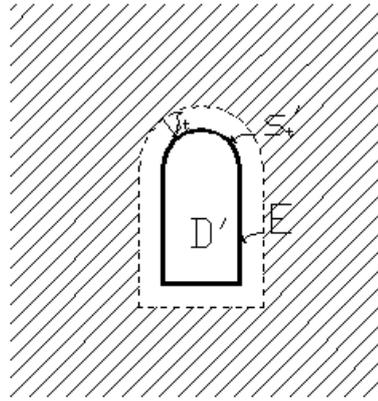
Pueden suceder dos casos:

**1.2.a.** El proceso de corrimientos es estable. Se llega a una superficie de contorno final  $S'$ .

**1.2.b.** El proceso de corrimientos no es estable. Los corrimientos crecen hasta anular el dominio  $D'$  (transformado del  $D$ ).

En el primer caso el túnel es naturalmente estable. En el segundo caso se introduce una acción que haga estable el proceso, o sea que los corrimientos sigan aumentando al principio. La estructura  $E$  comienza a deformarse de acuerdo con los nuevos incrementos de  $\delta$  (vector corrimiento), en la interfaz  $S'$  aparecen tensiones que crecen con los incrementos de  $\delta$  con lo cual se llega así a un estado final en el que el macizo, con su contorno final  $S'$  y las tensiones sobre él, está en equilibrio con sus deformaciones compatibilizadas. En algunos casos, el material es tal, por su

anisotropía, su resistencia o su deformabilidad, que pueden formarse zonas de rotura en que dejen de verificarse las ecuaciones de compatibilidad que junto con las de equilibrio interno rigen el fenómeno. **(Ver Figura. 1.2.2)**



**Figura 1.2.2**

### **1.2.2. Supuestos básicos de los modelos matemáticos clásicos para obras de tunelería**

Las consideraciones a tener en cuenta en los modelos matemáticos tradicionales, son las enumeradas en el siguiente listado:

- Se considerará al túnel lo suficientemente largo, como para que se pueda admitir que las secciones alejadas de los extremos están en deformación plana y que por lo tanto se pueden estudiar con un análisis bidimensional.
- El estado inicial de tensiones es conocido con gran incertidumbre.
- El análisis teórico del proceso de deformación es muy complejo y para llegar a resultados es necesario introducir simplificaciones drásticas mediante modelos teóricos muy simples de los procesos de apertura de la excavación. Estos modelos simulan etapas de excavación y la influencia de cada una de las etapas sobre las ecuaciones constitutivas del material.

### **1.2.3. Descripción del Macizo Elástico**

Los estados de tensiones que se dan en el macizo son determinados mediante las ecuaciones elásticas de la mecánica del continuo. El macizo elástico puede ser descrito mediante la teoría de la matemática de la elasticidad o usando métodos numéricos. Los materiales del macizo que se tienen en cuenta son materiales definidos en un simiespacio elástico isótropo, homogéneo o heterogéneos. Existen soluciones que resuelven el problema de la matemática de la elasticidad para algunos casos concretos en el diseño de túneles, como por ejemplo los estudios realizados por Kirsch. **(Ver 1.2.4.1)**

## 1.2.4. Presentación de modelos matemáticos y métodos clásicos

### 1.2.4.1. Modelo matemático de Kirsch

Suponiendo un medio elástico isotrópico y homogéneo, y considerando un sistema plano de deformaciones, podemos calcular las tensiones, según la figura de la derecha. El primer paso será definir el parámetro  $K_0$  (ec. 1.2.1), que relaciona las tensiones verticales con las tensiones horizontales.

$$K_0 = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (\text{ec. 1.2.1})$$

Finalmente las tensiones  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  quedan detalladas según las (ec. 1.2.2), (ec. 1.2.3) y (ec. 1.2.4).

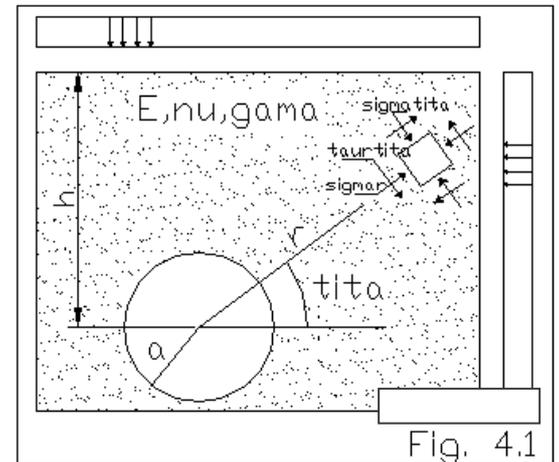


Fig. 4.1

$$\sigma_r(r, \theta) = \left( \frac{\delta.h.(1+K_0)}{2} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\delta.h.(1-K_0)}{2} \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{a^2}{r^2} + 3 \cdot \frac{a^4}{r^4}\right) \cdot \cos(2\theta) \right) \quad (\text{ec. 1.2.2})$$

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \left( \frac{\delta.h.(1+K_0)}{2} \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\delta.h.(1-K_0)}{2} \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{a^4}{r^4}\right) \cdot \cos(2\theta) \right) \quad (\text{ec. 1.2.3})$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = \frac{\delta.h.(1-K_0)}{2} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a^2}{r^2} - 3 \cdot \frac{a^4}{r^4}\right) \cdot \sin(2\theta) \quad (\text{ec. 1.2.4})$$

### 1.2.4.2. Modelo matemático de Pender

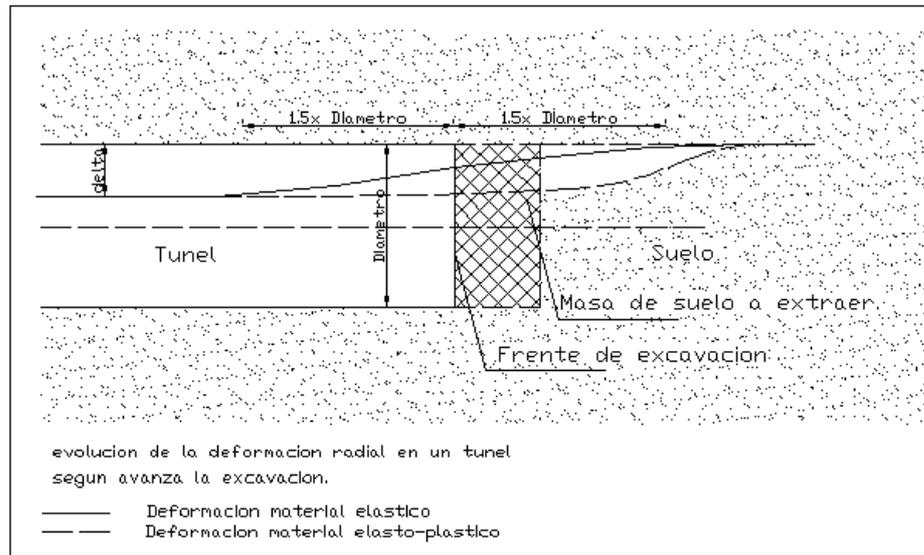
Utilizando este método podríamos calcular los desplazamientos de la cavidad si el sistema se comportase como un sólido continuo elástico isotrópico y homogéneo, teniendo en cuenta un sistema plano de deformaciones. Las ecuaciones (ec. 1.2.5), (ec. 1.2.6) describen los desplazamientos horizontales y verticales del modelo propuesto.

$$\text{Hori}(r, \theta) = \frac{(1-K_0)}{2} \cdot \left( (1-\mu^2) \cdot \left( \frac{r}{a} + 2 \cdot \frac{a}{r} + \frac{a^3}{r^3} \right) + \mu \cdot (1+\mu) \cdot \left( \frac{r}{a} - 2 \cdot \frac{a}{r} + \frac{a^3}{r^3} \right) \right) \cdot \sin(2\theta) \cdot \frac{\delta.h.a}{E} \quad (\text{ec. 1.2.5})$$

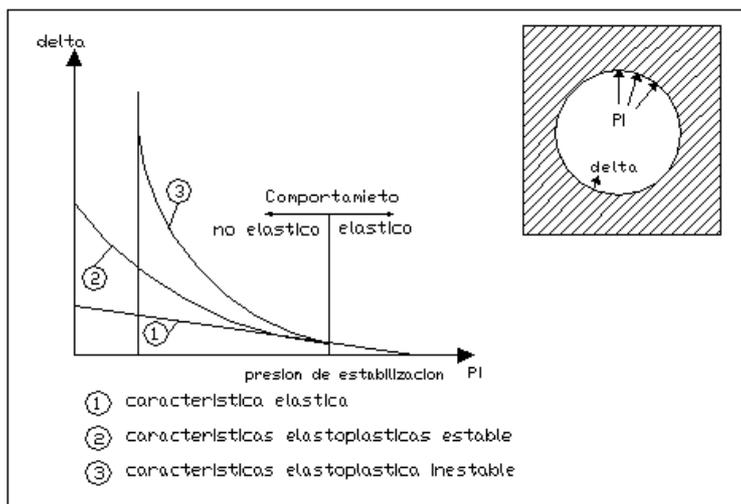
$$\begin{aligned} \text{Vert}(r, \theta) = & \left( (1-\mu^2) \cdot \left( (1+K_0) \cdot \left( \frac{r}{a} + \frac{a}{r} \right) - (1-K_0) \cdot \left( \frac{r}{a} + \frac{a^3}{r^3} + 4 \cdot \frac{a}{r} \right) \right) \cdot \cos(2\theta) \right) \cdot \frac{\delta.h.a}{E} \\ & - \mu \cdot (1+\mu) \cdot \left( (1+K_0) \cdot \left( \frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) + (1-K_0) \cdot \left( \frac{r}{a} - \frac{a^3}{r^3} \right) \right) \cdot \cos(2\theta) \cdot \frac{\delta.h.a}{E} \end{aligned} \quad (\text{ec. 1.2.6})$$

### 1.2.5. Sistema terreno revestimiento

Excavar una galería significa eliminar un núcleo de roca o suelo que de no ser propiamente estable (**Ver 1.2.b**), el equilibrio se lograra con la introducción de una estructura de sostenimiento. Durante esta operación la cavidad tiende a cerrarse, las deformaciones finales del macizo y la estructura de sostenimiento dependerán de la posición que tenga el pórtico dentro del túnel, la rigidez del mismo y el tiempo que haya transcurrido antes de su construcción. En la figura siguiente. (**Ver Figura. 1.2.3**) se muestra como la deformación radial que se inicia por delante del frente de excavación va aumentando con la distancia al mismo. Las rocas o suelos, pueden tener en parte un comportamiento reológico, las deformaciones de un túnel no revestido continúan también un cierto tiempo después de la excavación y el tiempo que dura este fenómeno es muy variable.



**Figura 1.2.3**



**Figura 1.2.4**

Para comprender el fenómeno de interacción es conveniente considerar las líneas características de la cavidad y de la estructura de sostenimiento. Los diferentes

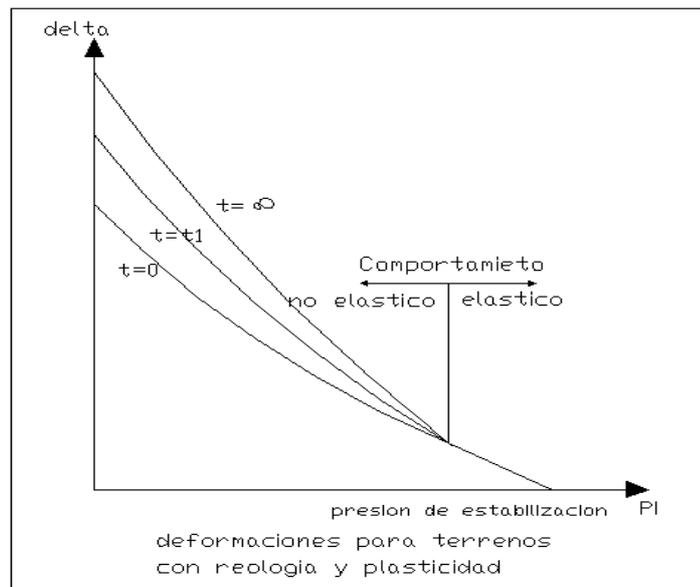
Una estructura de una cavidad subterránea estará solicitada por la presión del macizo cuando:

1- Haya sido colocado en la proximidad inmediata del frente de excavación. (**Ver Figura. 1.2.3**)

2- Por efectos reológicos del macizo.

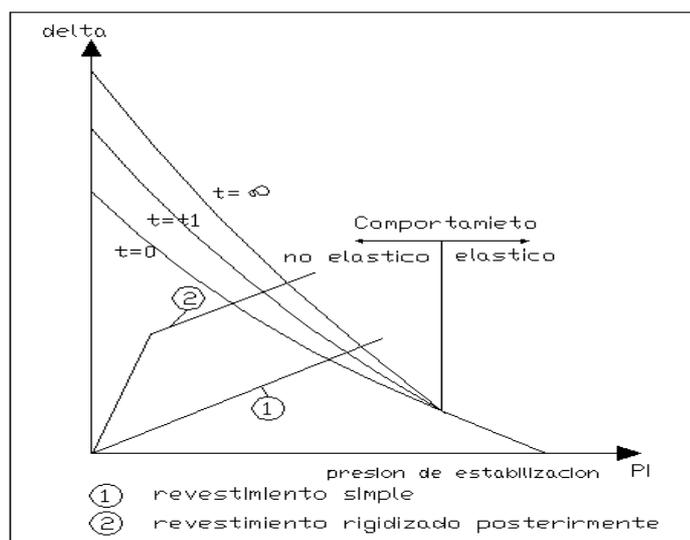
comportamientos de las deformaciones del macizo, elástico, elasto plástico estable o elasto plástico inestable se pueden ver en la **Figura. 1.2.4**.

En la **Figura. 1.2.5** se representan las deformaciones ( $\Delta$ ) del contorno de un túnel en función de la Presión interior ( $P_i$ ), según las líneas características de la cavidad para diferentes materiales que poseen un incremento de las deformaciones con el tiempo (Reología).



**Figura 1.2.5**

El punto de cruce de las dos líneas características, túnel – revestimiento, (**Ver Figura. 1.2.6**) será el punto de equilibrio del sistema y definirá la deformación y la presión sobre la estructura de sostenimiento.



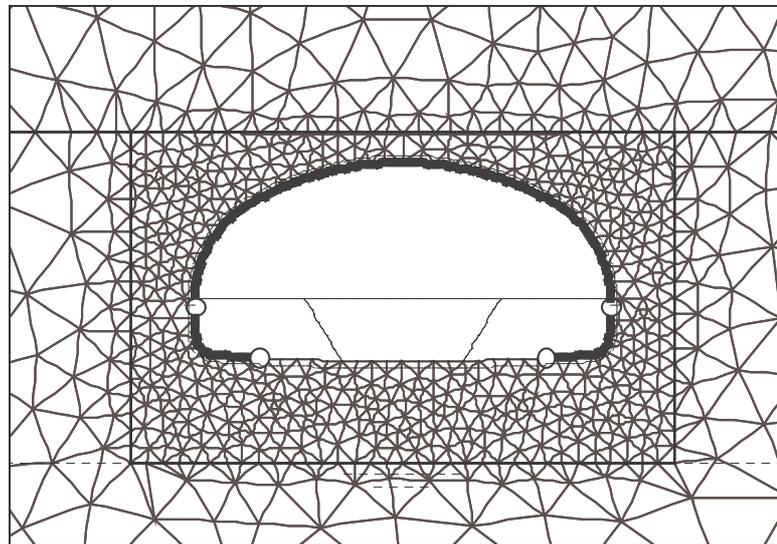
**Figura 1.2.6**

### 1.3. Modelos numéricos

#### 1.3.1. Modelos para el diseño de túneles construidos por etapas.

A continuación vamos a presentar dos posibles métodos numéricos de cálculo para un túnel construido en etapas; uno, desarrollando una simulación en una única etapa que representaría el estado definitivo de la obra; (**Ver 1.3.a.**) y un segundo, desarrollando simulaciones en etapas sucesivas cada una de ellas en coincidencia con las etapas constructivas. (**Ver 1.3.b.**) Se pretende demostrar que para un túnel construido en etapas, debe calcularse en etapas sucesivas.

**1.3.a.** El desarrollo en una única etapa podría calcularse de la siguiente manera:



Única Etapa

$$\overline{\overline{K}}_c \overline{U}_c = \overline{F}_c$$

$$\overline{\overline{K}}_c = \text{rigidez del sistema final}$$

$$\overline{U}_c = \text{desplazamiento del sistema final}$$

Los desplazamientos, según el Desarrollo en una única Etapa serían:

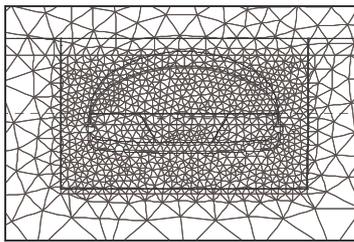
$$\overline{U}_c = \overline{\overline{K}}_c^{-1} \cdot \overline{F}_c$$

**1.3.b.** El desarrollo por Etapas Sucesivas sería como sigue:

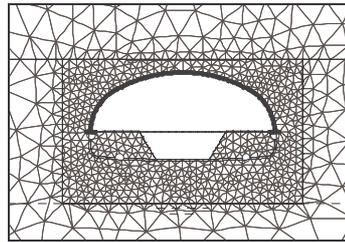
Etapa Inicial (1): En esta etapa del proyecto se simula un corte del perfil del terreno seleccionado donde se construirá el futuro túnel.

Etapa intermedia o etapas intermedias (n): Se genera una primera (luego una segunda, etc.) cavidad o túnel en el perfil del terreno.

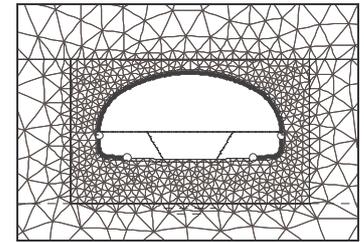
Etapa final (f): Para esta etapa se genera el perfil del estado definitivo de la obra.



Etapa 1



Etapa n



Etapa f

Donde:

$$\overline{\overline{K}}_1 \overline{U}_1 = \overline{F}_1$$

$$\overline{\overline{K}}_1 = \text{rigidez 1}$$

$$\overline{U}_1 = \text{vect. despl. etapa 1}$$

$$\overline{\overline{K}}_n \overline{U}_n = \overline{F}_n$$

$$\overline{\overline{K}}_n = \text{rigidez etapa n}$$

$$\overline{U}_n = \text{despl. etapa n}$$

$$\overline{\overline{K}}_f \overline{U}_f = \overline{F}_f$$

$$\overline{\overline{K}}_f = \text{rigidez etapa f}$$

$$\overline{U}_f = \text{despl. etapa f}$$

donde se deduce que el desplazamiento total del sistema es:

$$\overline{U}_T = \overline{U}_1 + \overline{U}_n + \overline{U}_f \text{ y que}$$

$$K_1^{-1} \neq K_n^{-1} \neq K_f^{-1} \quad (\text{ec. 1.3.1})$$

A modo de mostrar la afirmación descrita anteriormente de que el análisis **1.3.a.** es distinto al análisis **1.3.b.**, propondremos por el absurdo la posibilidad de que el análisis **1.3.a.** sea igual al Análisis **1.3.b.** Entonces:

Del análisis **1.3.a.** se deduce que:  $K_c^{-1} \cdot F_c = U_c$

Del análisis **1.3.b.**

se deduce que:  $K_1^{-1} \cdot F_1 + K_n^{-1} \cdot F_n + K_f^{-1} \cdot F_f = U_1 + U_n + U_f$

Entonces si aceptamos la igualdad podríamos escribir:

$$U_c = U_1 + U_n + U_f \quad (\text{ec. 1.3.2})$$

$$K_c^{-1} \cdot F_c = K_1^{-1} \cdot F_1 + K_n^{-1} \cdot F_n + K_f^{-1} \cdot F_f \quad (\text{ec. 1.3.3})$$

La primera igualdad podría ser verdadera a priori (**ec. 1.3.2**). Pero la segunda igualdad (**ec. 1.3.3**) es falsa, ya que para que se cumpla la igualdad tendríamos la necesidad de que las matrices de rigidez de cada una de las etapas parciales sean iguales, y eso daría por falsa la afirmación de la (**ec. 1.3.1**) o sea:  $K_1^{-1} \neq K_2^{-1} \neq K_f^{-1}$ . Por otro lado el desplazamiento calculado en una sola etapa (**Ver 1.3.a.**) no es igual a la suma de los desplazamientos previstos en el calculo en varias etapas (**Ver 1.3.b.**), o sea:  $U_c \neq U_1 + U_n + U_f$ . Esto muestra que la forma correcta de abordar el problema de la construcción de túneles por etapas parciales corresponde al estudio realizado según el desarrollo por etapas sucesivas (**Ver 1.3.b.**) en correspondencia con las etapas parciales de construcción.

## 2.Planteo

## 2.1.Cálculo por Etapas Sucesivas

### 2.1.1 Introducción

La finalidad de la modelación por etapas sucesivas es la de tener en cuenta los diferentes estados de tensión, deformación, desplazamientos, y diagramas de características que se generan en el suelo y los pórticos de sostenimiento, de manera tal de hacer un correcto dimensionamiento de las estructuras de soporte en función de su etapas parciales de construcción.

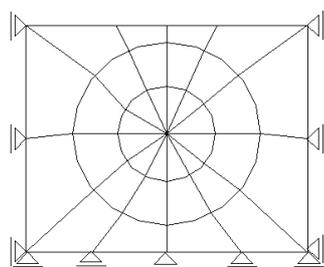
### 2.1.2.Proceso y Desarrollo de un cálculo tipo

#### 2.1.2.1. Etapas Parciales de Construcción (EPC)

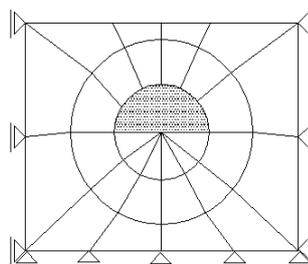
- EPC 1: Apertura de bóveda
- EPC 2: Recubrimiento de Hormigón Proyectado
- EPC 3: Apertura de Hastiales y Banco

#### 2.1.2.2. Etapas Sucesivas de Simulación (ESS)

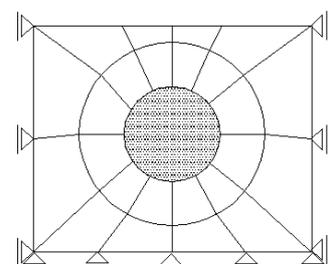
- ESS 0: Simulación del perfil geológico del suelo (Figura 2.1.1.A)
- ESS 1: Apertura de bóveda (Figura 2.1.1.B)
- ESS 2: Recubrimiento de hormigón (Gunitado)
- ESS 3: Apertura de hastiales y banco (Figura 2.1.1.C)



**Figura A**



**Figura B**



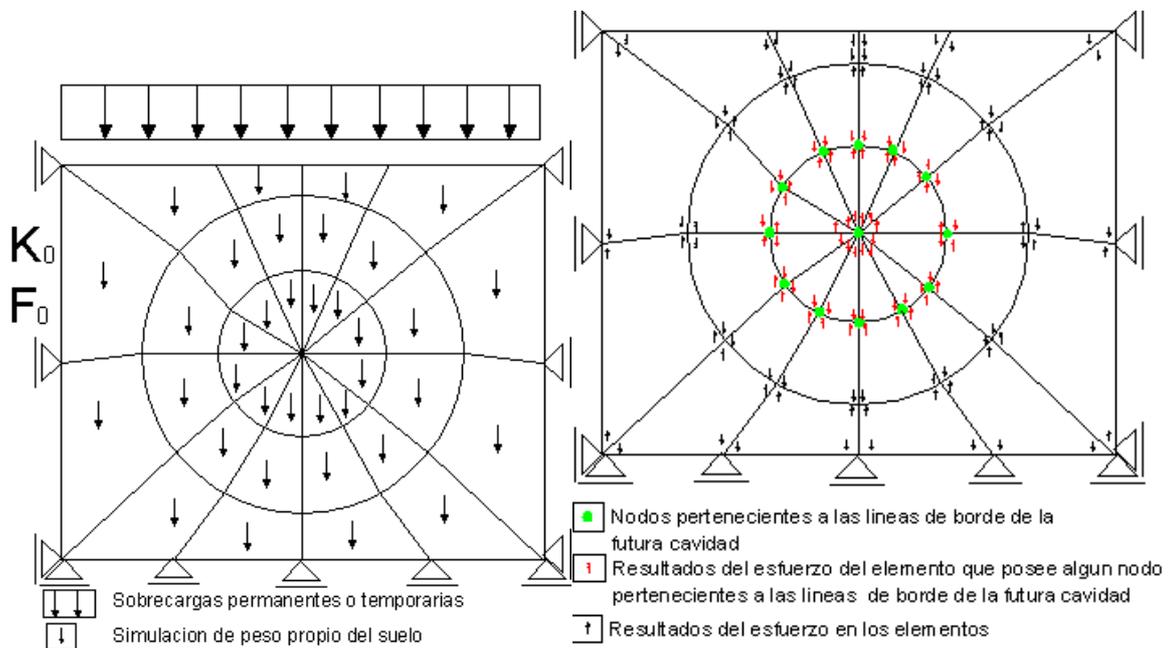
**Figura C**

**Figura 2.1.1**

### 2.1.2.3. Desarrollo de las Etapas Sucesivas de Simulación (ESS)

#### ESS 0:

Descripción de la simulación del perfil geológico del suelo.



Estado de Cargas del Sistema

**Figura A**

Estado de Resultados

**Figura B**

**Figura 2.1.2**

**a.** Armado del vector  $F_0$  a partir de las cargas de peso propio del suelo y las posibles sobrecargas permanentes y temporarias. **(Ver Figura 2.1.2.A)**

Armado de la matriz de rigidez del ESS 0 ( $K_0$ ) a partir de las propiedades mecánicas de los suelos y la geometría general del dominio.

**b.** Cálculo de los desplazamientos globales mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF): **(Ver Figura 2.1.2.B)**

$$U_0 = K_0^{-1} \cdot F_0 \quad (\text{ec. 2.1.1})$$

donde:

$K_0^{-1}$  = Matriz de rigidez global del sistema de la ESS 0.

$U_0$  = Vector de desplazamiento global de los nodos del sistema para la ESS 0.

$F_0$  = Vector de esfuerzos globales en la ESS 0.

c. Se guardarán en un vector ( $E_0$ ) los resultados de los desplazamientos ,calculados según el Método de Elementos Finitos (MEF), correspondientes a los nodos de los elementos que por lo menos posean algún nodo en coincidencia con las líneas de borde de la futura cavidad (Túnel). Los cuales figuran indicados en la figura anterior. **(Ver Figura. 2.1.2.B)**

El vector  $E_0$  se debería armar como:

$$E_0 = \sum_{j=0}^0 [U_{E(j)e(1..p)n(1..4)x(1..2)}] \quad (\text{ec. 2.1.2})$$

donde:

$E_0$  = Vector que posee la información acerca de la suma de los desplazamientos de todas las etapas anteriores y la actual de los nodos pertenecientes a los elementos que poseen por lo menos algún lado coincidente con las líneas de borde de la futura cavidad (Túnel).

$U_{E(j)e(1..p)n(1..4)x(1..2)}$  = Desplazamiento nodal, siendo los subíndices:

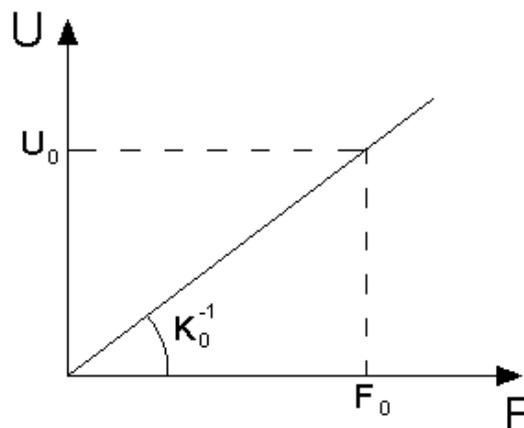
$E(j)$ = Representa la variación de las Etapas Sucesivas de Simulación (ESS).

$e(1..p)$ = Representa a los elementos que posean por lo menos algún lado en coincidencia con las líneas de borde de la futura cavidad .

$n(1..4)$ = Simbolizan a los nodos de cada uno de los elementos  $e(1..p)$ .

$x(1..2)$ = Representan a los grados de libertad de desplazamiento que posee cada nodo.

Ahora bien, en forma genérica podríamos decir que los desplazamientos serían proporcionales a los esfuerzos por estar siempre en un modelo elástico lineal. **(Ver Figura. 2.1.3).**

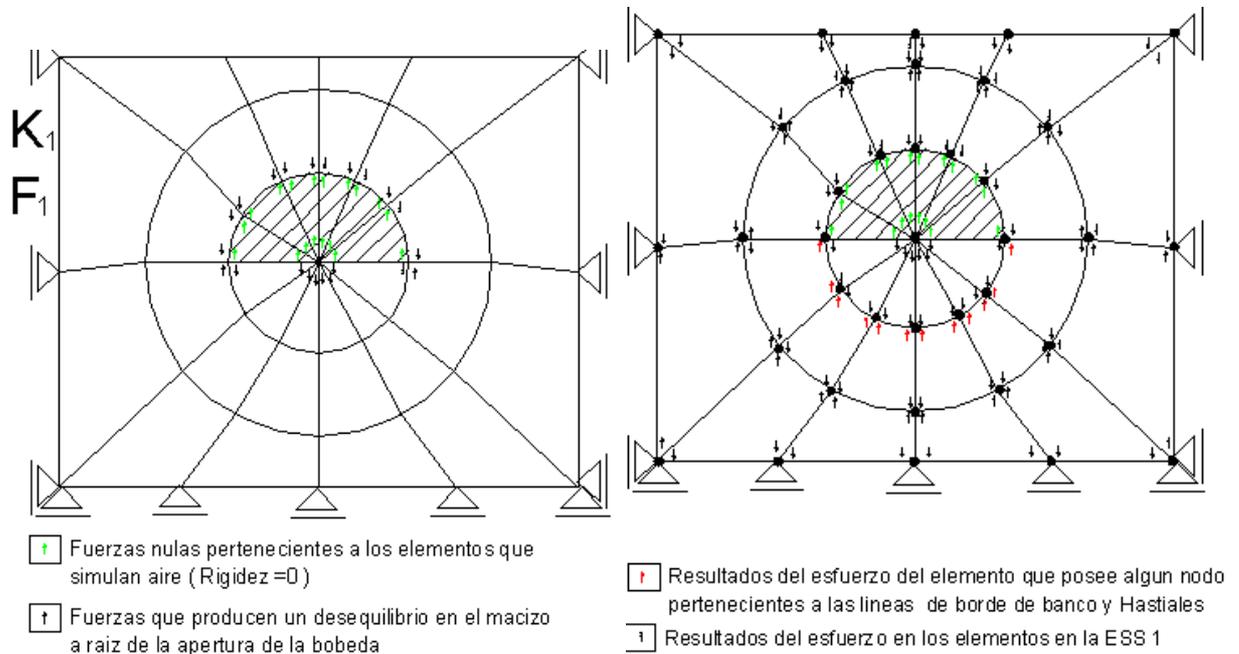


$U_0$  Vector de desplazamiento global para la ESS 0

**Figura. 2.1.3**

**ESS 1:**

Descripción de la Apertura de bóveda.



Estado de Cargas del Sistema  
**Figura A**

Estado de Resultados  
**Figura B**

**Figura 2.1.4**

a. Armado del vector  $F_{1p}$  de la siguiente manera:

$$F_{1p} = [F_{e(1..p)n(1..4)x(1..2)}]$$

donde:

$F_{1p}$  = Vector que posee la información acerca de los esfuerzos, de la ESS 1 (Etapa Sucesiva de Simulación 1), de los nodos pertenecientes a los elementos que poseen por lo menos algún lado coincidente con las líneas de borde de la cavidad a excavar en esta etapa.

$F_{e(1..p)n(1..4)x(1..2)}$  = Esfuerzo nodal.

Queremos recordar que los esfuerzos nodales  $F_{e(1..p)n(1..4)x(1..2)}$  los obtenemos operando de la siguiente manera:  $F_{e(1..p)n(1..4)x(1..2)} = K_e^{-1} \cdot E_{0p}$ .

Donde:

$K_e^{-1}$  = Es la inversa de la matriz de rigidez de un elemento. (Matriz de 8x8)

$E_{0p}$  = Son las componentes del vector  $E_0$  (**ec. 2.1.2**) de los desplazamientos de los nodos de un elemento determinado. (Vector de 8x1)

b. Construcción del vector  $F_1$  a partir del vector  $F_{1p}$  en función de contemplar los esfuerzos nodales que se hacen nulos debido a que cambian las rigideces de los elementos que los contienen.

Este cambio de rigidez en los elementos (que antes simulaban al suelo y ahora simulan al aire) conlleva un desequilibrio que será absorbido por el macizo. (**Ver Figura. 2.1.4.A**)

Armado de la matriz de rigidez de la ESS 1 ( $K_1$ ).

c. Cálculo de los desplazamientos globales mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF):

$$U_1 = K_1^{-1} \cdot F_1 \quad (\text{ec 2.1.3})$$

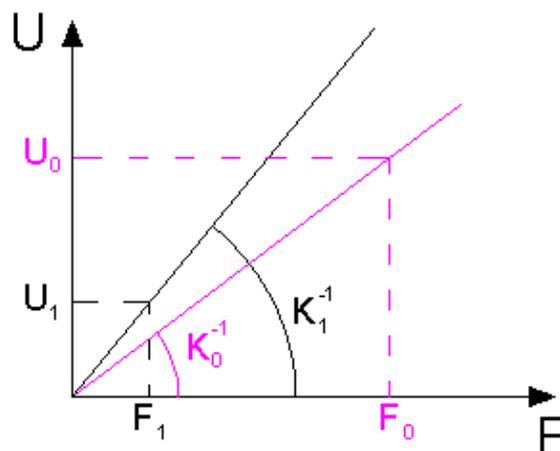
donde:

$K_1^{-1}$  = Matriz de rigidez global del sistema de la ESS 1.

$U_1$  = Vector de desplazamiento global de los nodos del sistema para la ESS 1.

$F_1$  = Vector de esfuerzo construido a partir de la información del vector  $F_{1p}$ .

Según el desarrollo anterior podríamos construir el siguiente grafico:



$U_0$  Vector de desplazamiento global para la ESS 0

$U_1$  Vector de desplazamiento global para la ESS 1

**Figura 2.1.5**

d. El vector  $E_1$  se debería armar como:

$$E_1 = \sum_{j=0}^1 [U_{E(j)e(1..p)n(1..4)x(1..2)}] \quad (\text{ec. 2.1.4})$$

donde:

$E_1$  = Vector que posee la información acerca de la suma de los desplazamientos de los nodos de todas las etapas anteriores y la actual, pertenecientes a los elementos que poseen por lo menos algún lado coincidente con las líneas de borde de la futura cavidad (Túnel).

## ESS 2:

Descripción del recubrimiento con hormigón proyectado.

a. El vector  $F_2$  solamente poseerá los esfuerzos de peso propios de la estructura de sostenimiento. La matriz de rigidez de esta etapa se vera afectada por la introduccion de los elementos de barra que simulan al pórtico. ( $K_2$ ).

b. Cálculo de los desplazamientos globales mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF):

$$U_2 = K^{-1}_2 \cdot F_2 \quad (\text{ec 2.1.5})$$

donde:

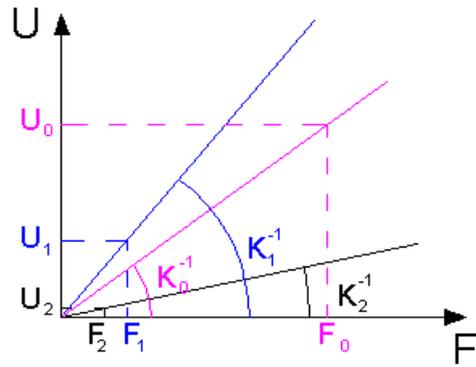
$F_2$  = Vector de esfuerzos construido a partir del peso propio de la estructura de sostenimiento

$K^{-1}_2$  = Matriz de rigidez global del sistema de la ESS 2.

$U_2$  = Vector con los resultados de los desplazamientos en coordenadas globales de la ESS 2.

Nota:

En esta ESS 2, la estructura de sostenimiento, por efecto de su peso propio, al deformarse, debería despegarse del terreno, siempre que el coeficiente " $\beta$ " de la ESS 1 sea igual a la unidad (**Ver 2.4**) y no existan efectos de reología del terreno. Se quiere hacer notar que este fenómeno no esta tenido en cuenta en el desarrollo de este trabajo y que lo que efectivamente sucede es que la estructura de sostenimiento y el suelo trabajan en forma conjunta dada la compatibilidad de deformaciones que poseen en los nodos que se encuentran en la interfase del Suelo con la estructura. Ahora bien, desde el punto de vista geotécnico el coeficiente " $\beta$ " en ningún proceso constructivo de túnel es igual a la unidad, y por otro lado las deformaciones que se introducen en el macizo por efecto de esta compatibilidad en los nodos del pórtico y el suelo son magnitudes despreciables para la ingeniería. (**Ver Figura 2.1.6**)



- $U_0$  Vector de desplazamiento global para la ESS 0
- $U_1$  Vector de desplazamiento global para la ESS 1
- $U_2$  Vector de desplazamiento global para la ESS 2

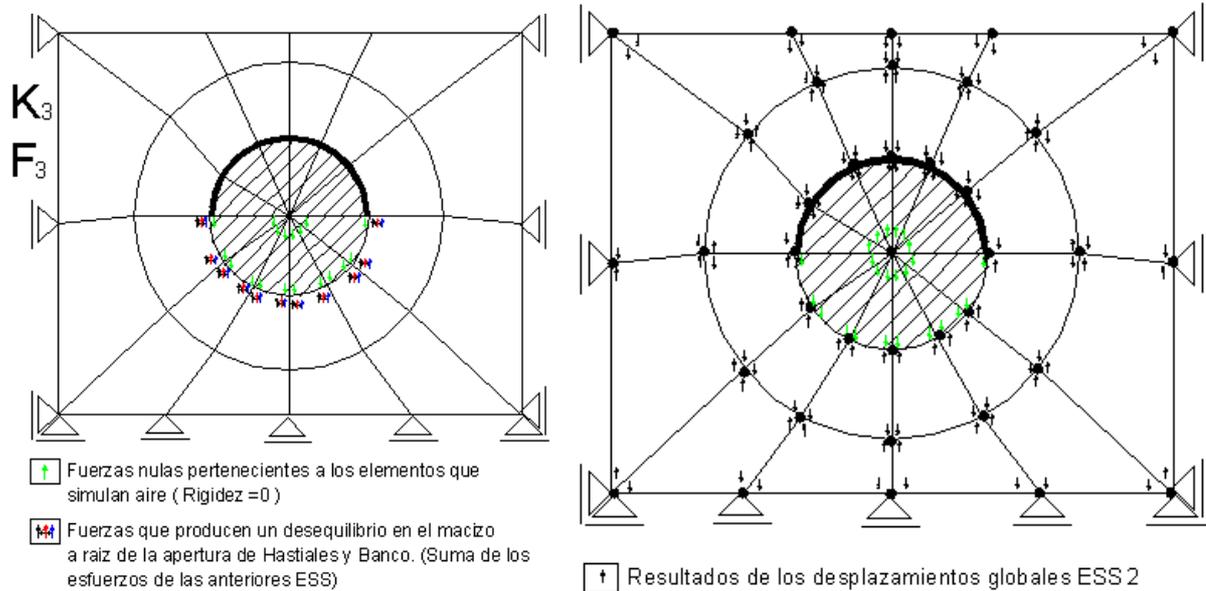
**Figura 2.1.6**

c. El vector de desplazamiento se debería armar como:

$$E_2 = \sum_{j=0}^2 [U_{E(j)e(1..p)n(1..4)x(1..2)}] \quad \text{(ec. 2.1.6)}$$

**ESS 3:**

Descripción de apertura de hastiales y banco.



Estado de Cargas del Sistema  
**Figura A**

Estado de Resultados  
**Figura B**

**Figura 2.1.7**

a. Armamos al vector  $F_{3p}$  de la siguiente manera:

$$F_{3p} = \left[ F_{e(1..p)n(1.4)x(1.2)} \right]$$

donde:

$F_{3p}$  = Vector que posee la información acerca de los esfuerzos, de la ESS 3(Etapa Sucesiva de Simulación 3), de los nodos pertenecientes a los elementos que poseen por lo menos algún lado coincidente con las líneas de borde de la cavidad a excavar en esta etapa.

$F_{e(1..p)n(1.4)x(1.2)}$  = esfuerzo nodal.

Recordando que:  $F_{e(1..p)n(1.4)x(1.2)} = K_e^{-1} \cdot E_{2p}$

Donde:

$K_e^{-1}$  = Es la inversa de la matriz de rigidez de un elemento. (Matriz de 8x8)

$E_{2p}$  = Son las componentes del vector  $E_2$  (ec. 2.1.6) de los desplazamientos de los nodos de un elemento determinado.(Vector de 8x1)

b. Construcción del vector  $F_3$  a partir del vector  $F_{3p}$  en función de contemplar los esfuerzos nodales que se hacen nulos debido a que cambian las rigideces de los elementos que los contienen. **(Ver Figura. 2.1.7.A)**

Armado de la matriz de rigidez  $K_3$ .

c. Cálculo de los desplazamientos globales mediante el Método de los Elementos Finitos (FEM):

$$U_3 = K_3^{-1} \cdot F_3 \quad (\text{ec. 2.1.7})$$

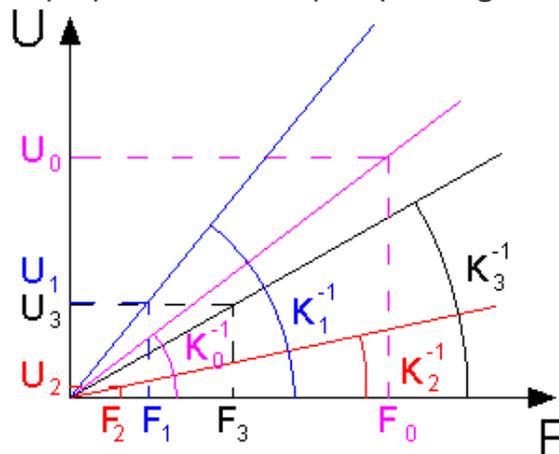
donde:

$F_3$  = Vector de esfuerzos construido a partir de la información del vector  $F_{3p}$ .

$K_3^{-1}$  = Matriz de rigidez global del sistema de la ESS 3.

$U_3$  = Vector con los resultados de desplazamiento en los nodos de los elementos de suelo de la ESS 3.

En la siguiente figura se aprecian los aportes en el desplazamiento de todas las ESS asociadas a una rigidez propia de cada etapa. **(Ver Figura. 2.1.8)**



$U_0$  Vector de desplazamiento global para la ESS 0

$U_1$  Vector de desplazamiento global para la ESS 1

$U_2$  Vector de desplazamiento global para la ESS 2

$U_3$  Vector de desplazamiento global para la ESS 3

**Figura. 2.1.8**

Nota:

Se considera que el desarrollo hasta esta instancia es suficiente como para mostrar el procedimiento matemático utilizado en este trabajo. Ahora bien, a modo de conocer el potencial del programa desarrollado en esta Tesis en un problema completo y complejo, del cálculo de un túnel construido en etapas se recomienda ver **3.2.**

#### 2.1.2.4. Desarrollo de las Etapas Parciales de Construcción (EPC)

##### EPC 1: Apertura de la Bóveda:

Los resultados de los desplazamientos en los nodos de los elementos que representan al suelo debido a la apertura de la bóveda son los del vector  $U_1$  **(ec.2.1.3)** según la ESS 1.

Los resultados de los estados de tensiones de los elementos que representan al suelo serán los siguientes:

$$\sigma_{1,i} = C_i \cdot B_i \cdot U_{0,i} + C_i \cdot B_i \cdot U_{1,i}$$

Donde:

$\sigma_{1,i}$  = Vector con los estados de tensiones del suelo del elemento " i " para la EPC 1.

$C_i \cdot B_i$  = Matrices que surgen del cálculo por utilizar el Método de Elementos Finitos que contemplan las propiedades del suelo (Isotropía), y la relación lineal de las tensiones con las deformaciones del elemento " i ".

$U_{0,i}$  = Vector que posee los desplazamientos de los nodos de la ESS 0 del elemento " i ".

$U_{1,i}$  = Vector que posee los desplazamientos de los nodos de la ESS 1 del elemento " i ".

##### EPC 2: Recubrimiento de Hormigón:

Los resultados de los desplazamientos estarán representados por la suma de los vectores  $U_1$  **(ec 2.1.3)** en la ESS 1 y  $U_2$  **(Ver 2.1.5)** ESS 2 .

Las tensiones en los elementos serán:

$$\sigma_{2,i} = C_i \cdot B_i \cdot U_{0,i} + C_i \cdot B_i \cdot U_{1,i} + C_i \cdot B_i \cdot U_{2,i}$$

Se quiere hacer notar en esta EPC, y gracias a conocer los desplazamientos de los nodos de los elementos de barra que simulan a la estructura de sostenimiento, se obtienen de forma inmediata los diagramas de características del mismo.

##### EPC 3: Apertura de Hastiales y Banco:

Los resultados de los desplazamientos serán la suma de los vectores  $U_1$  **(ec 2.1.3)** en la ESS 1,  $U_2$  **(Ver 2.1.5)** ESS 2 y  $U_3$  **(Ver 2.1.7)** ESS 3.

Las tensiones en los elementos que representan al suelo serán ahora:

$$\sigma_{2,i} = C_i \cdot B_i \cdot U_{0,i} + C_i \cdot B_i \cdot U_{1,i} + C_i \cdot B_i \cdot U_{2,i} + C_i \cdot B_i \cdot U_{3,i}$$

Finalmente los diagramas de características de la estructura de sostenimiento los obtenemos a partir de la suma de los resultados de desplazamientos en los nodos de los elementos de barra (Estructura de Sostenimiento), que se produjeron en las ESS 2 y la ESS 3.

## 2.2. Implementación del programa " Túneles "

### 2.2.1.Introducción

Se pretende mostrar el potencial del programa de computación desarrollado en esta Tesis. Que empleando una modelación con el Método de Elementos Finitos (MEF) y el uso de los Elementos Finitos Infinito (EFI), permite obtener los resultados de los respectivos estados de tensión, deformación y desplazamientos, del macizo; y los diagramas de características de las estructuras de sostenimiento.

Consistentes con la teoría clásica (**Ver 3.1**) y el programa comercial Plaxis V.8.0 (**Ver 3.2**).

### 2.2.2.Entrada

Los datos de entrada necesarios para la ejecución del programa se enumeran a continuación:

- 1- Matriz de conectividad de los elementos.
- 2- Coordenadas globales de los nodos.
- 3- Matriz de conectividad de los elementos que cambien sus rigideces para cada uno de los estados.
- 4- Coordenadas de los nodos de los elementos que cambien sus rigideces para cada uno de los estados.

### 2.2.3.Ejecución del programa " Túneles "

Una vez abierto el archivo "principal.exe" aparecerá la pantalla siguiente:



donde:

**DATOS:** guiará al usuario a incorporar los datos necesarios para resolver el problema matemático.

**SOLUCIÓN:** una vez que los datos han sido incorporados se deberá comandar esta instrucción con el fin de ejecutar el programa.

RESULTADOS: en esta instrucción se verán algunos resultados propios del sistema numérico y diferentes errores de aproximación del modelo armado.

Una vez que se comandó la instrucción DATOS, aparece la siguiente pantalla:

The screenshot shows a window titled "DISEÑO DE TUNELES" with two main sections: "PARÁMETROS MECÁNICOS DE LOS SUELOS" and "DATOS RECIBIDOS DEL INPUT".

PARÁMETROS MECÁNICOS DE LOS SUELOS		DATOS RECIBIDOS DEL INPUT	
3e6	E1 (kg/cm2) modulo de elasticidad del suelo tipo 1	1092	NUMERO DE NODOS
0.000	E1 (kg/cm2) modulo de elasticidad del suelo tipo 1	1070	NUMERO DE ELEMENTOS
7.5e6	E1 (kg/cm2) modulo de elasticidad del suelo tipo 1	33	NODOS DE BORDE
0	E1 (kg/cm2) modulo de elasticidad del suelo tipo 1	30	ELEMENTOS DE BORDE
0	E1 (kg/cm2) modulo de elasticidad del suelo tipo 1		
0.20	Nu1 (0-0.5) modulo de poisson del suelo tipo 1		
0.000	Nu1 (0-0.5) modulo de poisson del suelo tipo 1		
0.20	Nu1 (0-0.5) modulo de poisson del suelo tipo 1		
0	Nu1 (0-0.5) modulo de poisson del suelo tipo 1		
0	Nu1 (0-0.5) modulo de poisson del suelo tipo 1		
2	CANTIDAD DE PUNTOS DE GAUSS (2x2, 3x3,4x4,5x5,6x6)		
3	NUMERO DE ESTADOS		

Buttons: CONFIGURACION DE ESTADOS, GENERAR, VOLVER.

El campo "PARÁMETROS MECÁNICOS DE LOS SUELOS", deberá completarse con los parámetros de elasticidad y módulos de Poisson, se pueden incorporar hasta 5 clases de suelos con diferentes características mecánicas. El ítem que hace referencia a la cantidad de puntos de Gauss está en directa relación con la cantidad de puntos (2x2 hasta 6x6) de integración que se establecerán para realizar la integración numérica. Por ultimo en el ítem que hace referencia al numero de estados, se introducirá la cantidad de estados en que es dividido el problema físico al que se desea dar solución. El campo, " DATOS RECIBIDOS DEL INPUT " brinda la información proveniente de la lectura de la entrada (**Ver 2.2.2.**), haciendo referencia a los números de nodos, elementos, nodos de borde y elementos de borde.

La siguiente instrucción es la de " CONFIGURACIÓN DE ESTADOS ", luego de su ejecución se verá la siguiente pantalla:

The screenshot shows a window titled "DISEÑO DE TUNELES" with a section titled "CONFIGURACION DE ESTADOS".

Buttons: ESTAD01, ESTAD02, ESTAD03, ESTAD04, ESTAD05, ESTAD06, ESTAD07, ESTAD08, ESTAD09, ESTAD010, VOLVER.

En esta etapa se dispondrá la forma de introducir la información para cada uno de los estados que son parte del proceso constructivo. Ejecutando la instrucción: ESTADO1, por ejemplo, se verá la siguiente pantalla.

En cada uno de los diferentes estados podemos incorporar cargas concentradas en los nodos. Campo: "CARGAS EN NODOS", cargas volumétricas de los elementos. Campo: "CARGAS DISTRIBUIDAS", indicar si queremos trabajar con semiespacios infinitos del terreno Ítem.: *Contorno*; indicar el parámetro  $\beta$  (beta) característico del porcentaje de carga asociado, Ítem.: *Beta del Material*; indicar los elementos de revestimiento (pórticos, cerchas, etc.) activos en cada estado Ítem.: *Pórticos activos*; y modificar las rigideces de los elementos de revestimiento en los diferentes estados . Campo: "CAMBIOS DE RIGIDEZ EN MODULOS DE PÓRTICOS.

#### 2.2.4.Salida

Los resultados del programa se desarrollan a continuación:

- 1- Genera para cada estado y para cada nodo perteneciente a los posibles pórtico de sostenimiento los momentos flexores y esfuerzos normales asociados.
- 2- Presenta como resultado los desplazamientos en coordenadas globales, (x,y), con respecto a los nodos de la malla de elementos finitos.
- 3- Presenta como resultado los estados de tensiones en coordenadas globales, (x,y), con respecto a los nodos de la malla de elementos finitos.

## 2.3. Elementos Finitos Infinitos

### 2.3.1. Introducción

En muchos problemas de ingeniería y de física se presentan dominios infinitos o semi-infinitos. Un típico ejemplo es el que corresponde a este trabajo de tesis, el diseño de los túneles, donde se describen cambios de rigidez (apertura de una cavidad) en ciertas zonas del perfil geológico, interesa por lo tanto conocer los estados de desplazamiento, tensiones y deformaciones cercanos a la apertura de la cavidad. La primera respuesta intuitiva consistirá en postular un contorno que contenga un dominio finito, colocado a una distancia lo suficientemente grande de las zonas de perturbación como para que el resultado del modelo sea lo suficientemente preciso. Ésta sería de todos modos, una solución aproximada.

Ahora bien, la respuesta intuitiva descrita, de llevar este contorno lo suficientemente lejos, hace necesaria la introducción de un gran número de elementos para modelar regiones de relativamente poco peso en el resultado del análisis. Por otra parte un contorno de dominio infinito es, sencillamente, imposible de modelar.

Se han propuesto muchos métodos para evitar tales dificultades. En algunos casos se usan una sucesión de mallas anilladas y se deriva una relación de recurrencia, en otros, una solución analítica de tipo contorno se usa acoplada al dominio de elementos finitos. Sin embargo el tratamiento más efectivo es el uso de los elementos finitos infinitos, (**Ver Figura. 2.3.1**). desarrollados originalmente por Bettles. Estos elementos infinitos se acoplan a un dominio de elementos finitos, pero con la particularidad de poseer dos de sus nodos en el infinito con una condición de borde que restringe los grados de libertad de desplazamiento.

Es esencial que la secuencia de funciones de forma introducidas en el dominio transformado sea completa y capaz de modelar el comportamiento real a medida que la distancia radial, con respecto a la perturbación, aumenta. Resulta ventajoso que las funciones de forma puedan aproximarse a una secuencia de la forma decreciente siguiente:  $\frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C_3}{r^3} + \dots$  Donde  $C_i$  son constantes, y  $r$  la distancia Radial desde el foco de la perturbación.

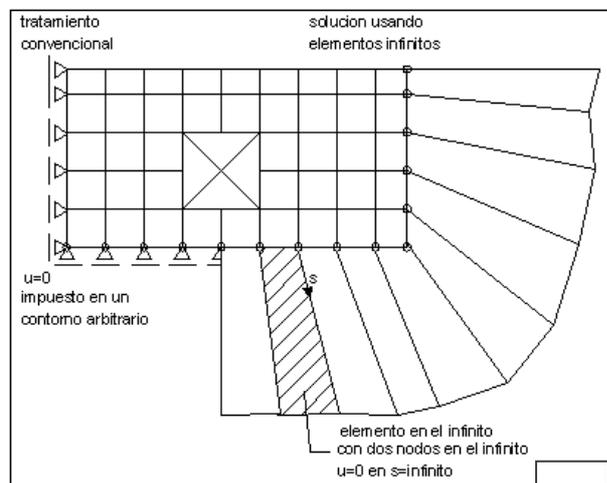
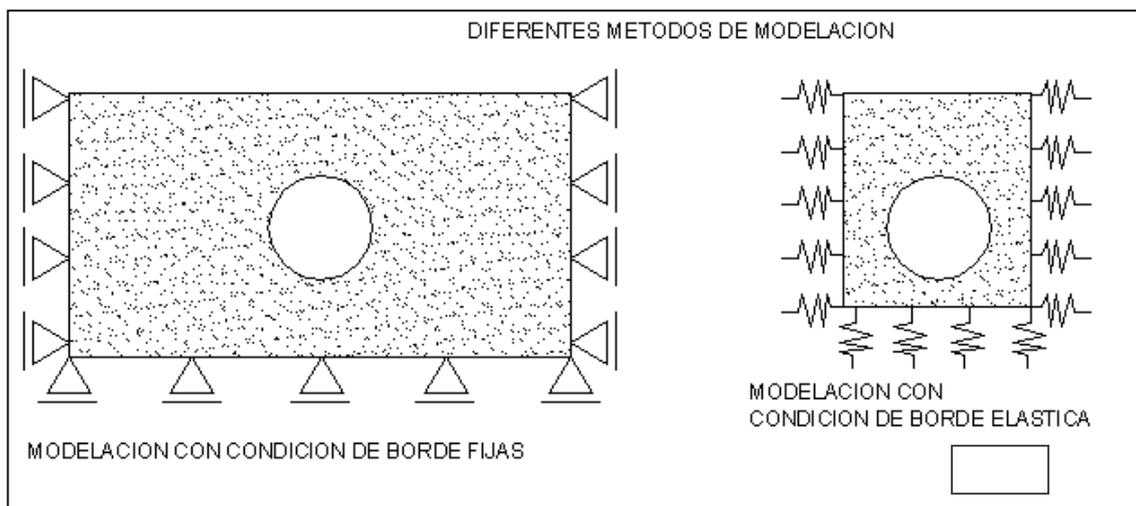


Figura 2.3.1

### 2.3.2. Modelación de semiespacios infinitos

El programa cuenta con la posibilidad de simular un semiespacio infinito, el mismo significa que los nodos de borde del dominio (suelo) poseen una condición de desplazamiento nulo en el infinito. La incorporación de elementos finitos infinitos permite utilizar una menor cantidad de elementos, que de lo contrario hubiesen tenido que usarse para simular un contorno lo suficientemente alejado como para asegurar que los desplazamientos producidos por la perturbación no alteren el resultado del modelo. (Ver Figura. 2.3.2)



**Figura 2.3.2**

El uso de elementos finitos infinitos tiene dos ventajas:

- 1- Reduce la cantidad de elementos necesarios para el cálculo.
- 2- Reduce el tiempo de compilación y ejecución.

### 2.3.3. Detalle de Elementos Finitos Infinitos

Para dar una primera aproximación del funcionamiento numérico de estos Elementos Finitos Infinitos (EFI), desarrollaremos un elemento unidireccional representado en la **Figura. 2.3.3.**

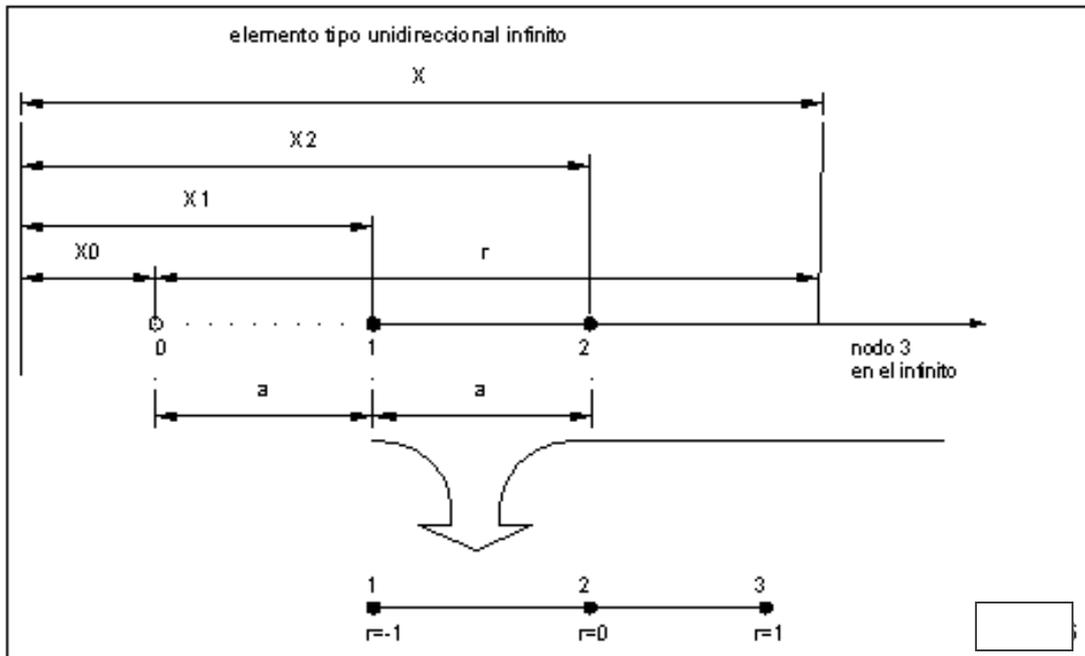


Figura 2.3.3

Podemos escribir:  $X = N0(\xi).x_0 + N2(\xi).x_2$  siendo  $x_i$ : las coordenadas de los nodos en el sistema global. Entonces las funciones de forma quedan definidas como:  $N0(\xi) = \frac{-\xi}{1-\xi}$ , y  $N2(\xi) = 1 + \frac{\xi}{1-\xi}$  cumpliéndose:  $\xi = 1, X = \infty, \xi = 0, X = x_2$

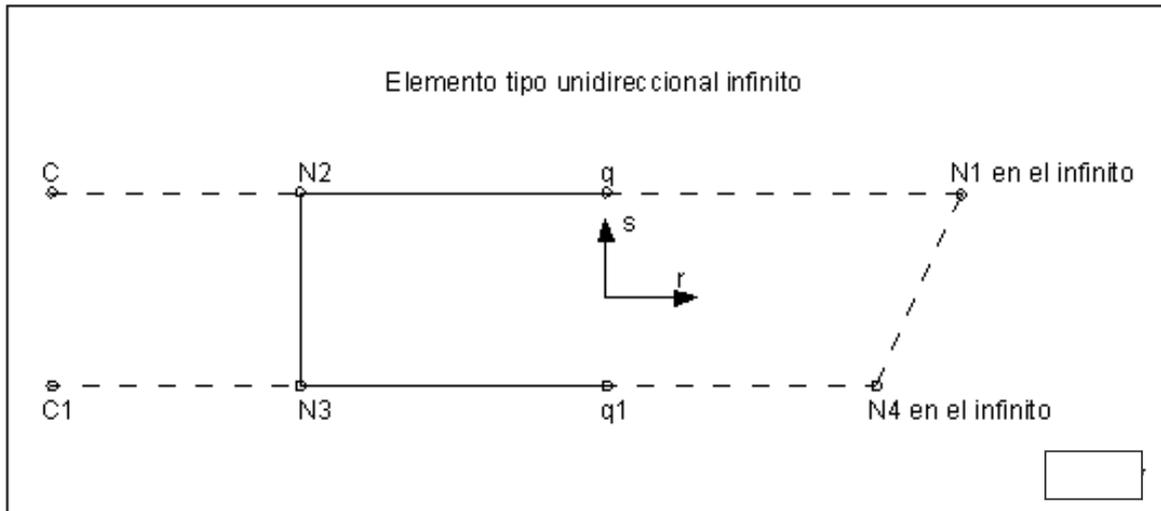
$\xi = -1, X = x_1$ . Ahora bien, si proponemos una función de forma polinómica para el elemento seleccionado de la forma:  $P = \alpha_0 + \alpha_1.\xi + \alpha_2.\xi^2 + \alpha_3.\xi^3$  y usamos una función transformación como:  $x = x_0 + \left(\frac{2.a}{1-\xi}\right)$  cuya inversa se puede escribir

como:  $\xi = 1 - \frac{2.a}{(x-x_0)}$  donde  $r = (x-x_0)$  con lo que podemos escribir que:  $\xi = 1 - \frac{2.a}{r}$

Entonces, reemplazando la función de forma N0 Y N2 del elemento por otra de forma polinómica llegamos a una expresión de la forma:  $P = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \frac{\beta_3}{r^3} + \dots$  donde  $\beta_i$  son constantes, y  $r$  es la distancia que se desarrolla desde el polo hasta el punto que se desee evaluar. Con el criterio anteriormente nombrado para el armado de las funciones de transformación de los elementos infinitos, se observa que solamente se modifica la matriz jacobiana.

#### 2.3.4. Funciones de forma del elemento infinito bidimensional

Se adoptó un elemento bidimensional plano de cuatro nodos, dos en coincidencia con los nodos de la malla de elementos finitos y dos nodos en el infinito. Ver detalle del elemento: (Ver Figura. 2.3.5)



**Figura 2.3.5**

Podemos escribir las funciones de transformación como:

$$X(r, s) = M2(r, s).x_2 + M3(r, s).x_3$$

$$Y(r, s) = M2(r, s).y_2 + M3(r, s).y_3$$

Donde  $x_i$ , e  $y_i$  son las coordenadas de los nodos en el sistema global. Y las funciones de forma  $M3(r, s)$  y  $M2(r, s)$  quedan definidas como:

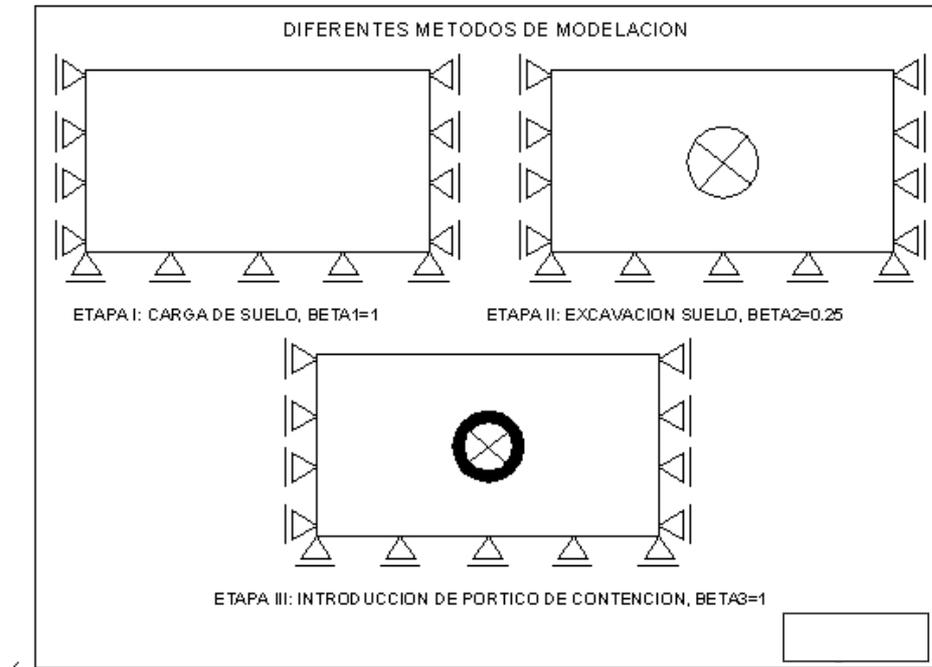
$$M3(r, s) = \frac{(1-r)}{(1-s)} \quad , \quad M2(r, s) = \frac{(1+r)}{(1-s)} \quad , \quad \text{no escribimos las funciones de forma } M1(r, s) \text{ y } M4(r, s) \text{ ya que no son de interés para el desarrollo del problema.}$$

#### 2.4. Implementación del método beta

Este método cumple la función de contemplar el estado tridimensional del tunel en un modelo bidimensional. (**Ver 1.2.5**) Si introducimos una estructura de sostenimiento lo suficientemente cerca del frente del túnel no registraremos en ese instante todas las deformaciones del terreno previstas; la estructura puesta en primera etapa no se encontrara frente a la totalidad de la carga que será aportada por la deformación del terreno porque un porcentaje de ella aparecerá en las siguientes etapas constructivas. Ese porcentaje de carga es el que se cuantifica mediante un coeficiente llamado beta. Desarrollando el concepto anterior, según la **Figura. 2.3.6**. Una forma posible de sistematizarlo sería:

- a) En la Etapa I, solo surgen las cargas propias del suelo.
- b) En la siguiente etapa II, se genera la primera apertura de forma circular, el suelo experimenta un 25% de la deformación total ( $\beta = 0.25$ ).

- c) Se introduce la estructura de revestimiento, la cual comenzará a trabajar resistiendo la deformación remanente, que no pudo experimentar el suelo en su etapa anterior. ( $\beta = 1-0.25$ ).



**Figura 2.3.6**

Podríamos expresar matemáticamente el concepto anteriormente desarrollado de la siguiente manera:

Etapa I:  $K_I^{-1} \cdot \beta_1 \cdot F_I = U_I$ ,

Donde  $K_I^{-1}$ : Matriz de rigidez de la primera etapa.

$\beta_1$ : Coeficiente de desbalanceo de la carga debido a la perturbación introducida.

$F_I$ : Vector de fuerza generado como condición de borde de la etapa I.

Etapa II:  $K_{II}^{-1} \cdot ((1 - \beta_1)F_I + \beta_2 \cdot F_{II}) = U_{II}$ ,

Donde  $K_{II}^{-1}$ : Matriz de rigidez de la segunda etapa.

$\beta_1$ : Coeficiente de desbalanceo de la carga debido a la perturbación introducida.

$F_{II}$ : Vector de fuerza generado como condición de borde de la etapa 2.

Etapa i:  $K_i^{-1} \cdot ((1 - \beta_{i-1})F_{i-1} + \beta_i \cdot F_i) = U_i$ ,

Donde  $K_i^{-1}$ : Matriz de rigidez de la etapa i.

$\beta_i$ : Coeficiente de desbalanceo de la carga debido a la perturbación introducida.

$F_i$ : Vector de fuerza generado como condición de borde de la etapa i.

### **3.Análisis de Resultados**

### **3.1.Comparación de resultados con la teoría Clásica**

#### **3.1.1.Introducción**

Con el objeto de avalar los resultados del programa “ Túneles “, se compararán con los resultados de modelos matemáticos ya conocidos, como los desarrollados por Kirsch (**Ver 1.2.4.1**) en el año 1978 para los estados de tensiones de una cavidad circular en un medio elástico, y los desarrollados por Pender (**Ver 1.2.4.2**) el año 1980, para tener conocimiento de los desplazamientos del terreno una vez abierta la cavidad.

#### **3.1.2.Objetivo**

Se pretende calcular los errores relativos de los resultados del programa “Túneles” con respecto a la teoría Clásica. (**Ver tabla 3.1.2, tabla 3.1.4, tabla 3.1.6**)

#### **3.1.3.Análisis de Resultados**

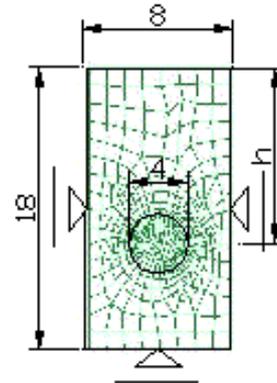
##### **3.1.3.1.Datos del problema en análisis**

Se pretende analizar un problema sencillo abordable y con solución exacta en la teoría Clásica, para lo que se adopta una cavidad circular de 4 metros de diámetro con una profundidad desde la superficie hasta el eje del túnel de 10 metros en un medio elástico isótropo y homogéneo de parámetros elásticos ( $E=300 \text{ kg/cm}^2$  y  $\mu=0.2$ ) con un peso específico del suelo de  $\gamma=1,43 \text{ Kg/cm}^3$ .

### 3.1.3.2. Modelos propuestos para el análisis

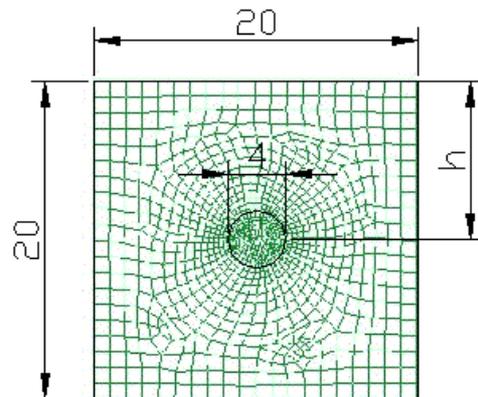
#### Modelo 1

Diámetro = 4m  
 Profundidad al eje: 10m  
 $E=300\text{kg/cm}^2$  (Modulo de Elasticidad)  
 $\mu=0.2$  (Modulo de Poisson)  
 $\gamma=1,43\text{kg/cm}^3$  (Peso Unitario del suelo)  
 Dimensiones del terreno modelado: 8x18m  
 Número de elementos: 500  
 Puntos de integración de gauss: 2  
 $h = 10\text{m}$



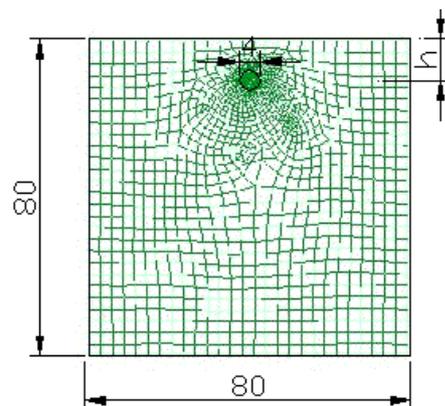
#### Modelo 2

Diámetro = 4m  
 Profundidad al eje: 10m  
 $E=300\text{kg/cm}^2$   
 $\mu=0.2$   
 $\gamma=1,43\text{kg/cm}^3$   
 Dimensiones: 20x20m  
 Número de elementos: 1000  
 Puntos de integración de gauss: 2  
 $h = 10\text{m}$



#### Modelo 3

Diámetro = 4m  
 Profundidad al eje: 10m  
 $E=300\text{kg/cm}^2$   
 $\mu=0.2$   
 $\gamma=1,43\text{kg/cm}^3$   
 Dimensiones: 80x80m  
 Número de elementos: 1500  
 Puntos de integración de gauss: 2  
 $h = 10\text{m}$



A modo de poder evaluar y realizar una comparación entre los modelos se consideran tres puntos característicos pertenecientes al perfil del terreno de manera tal de evaluar sus corrimientos y sus estados de tensión para cada uno de los modelos propuestos con condiciones de contorno fijo y con condiciones de contorno en el infinito. (Ver Figura. 3.1.1)

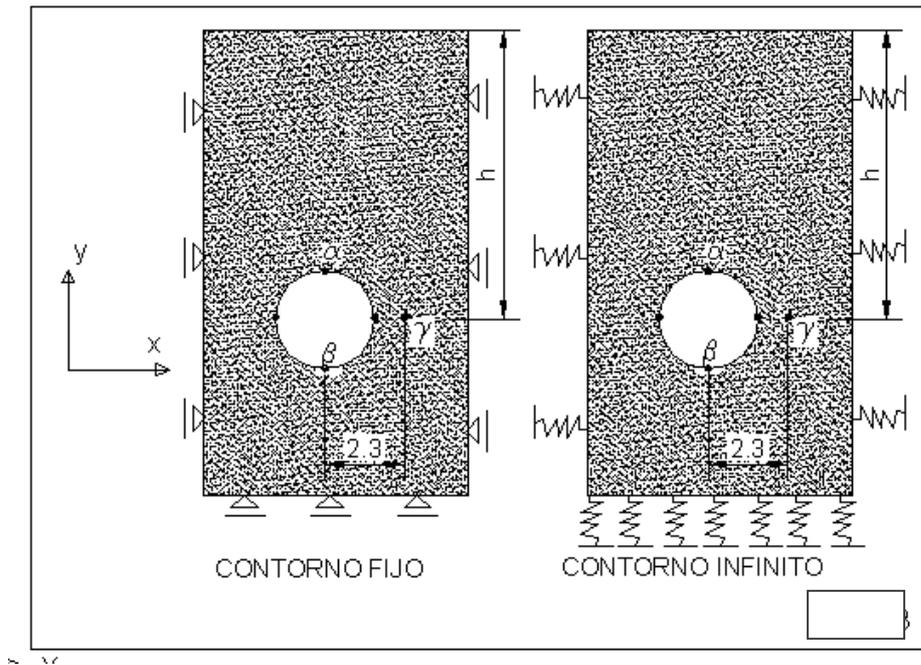


Figura 3.1.1

### 3.1.3.3.Resultados

Los resultados obtenidos del Modelo 1 (Ver 3.1.3.2.) se calcularon para dos situaciones distintas: una primera con condición de contorno fija (Ver Figura 3.1.2 y Figura 3.1.4) y otra con condición de contorno en el infinito (Ver Figura 3.1.3 y Figura 3.1.5). Los valores numéricos de la primera situación están presentados en la tabla 3.1.1 y son los siguientes:

$$\alpha_{\text{programa}} = -2.4\text{cm}$$

y

$$\beta_{\text{programa}} = 1.11\text{cm}$$

Siendo:

$\alpha_{\text{programa}}$  = Desplazamiento del punto  $\alpha$  sobre el eje global "y" para el modelo 1 según el MEF con contorno fijo.

los calculados según la Teoría Clásica son:

$$\alpha_{pender} = -0.94cm$$

y

$$\beta_{pender} = 2.51cm$$

Siendo:

$\alpha_{pender}$  = Desplazamiento del punto  $\alpha$  sobre el eje global "y" para el modelo 1 según la Teoría Clásica.

Dadas las expresiones anteriores, podemos calcular el error relativo de los resultados del programa "Túneles" en relación a los resultados de la Teoría Clásica, valorizados en:

$$Er_{\alpha} = 157\%$$

y

$$Er_{\beta} = 56\% \quad \text{(Ver Tabla 3.1.2)}$$

Donde:

$Er_{\alpha}$  = Error Relativo en  $\alpha$  para dominios de contorno fijo.

Ahora bien, los resultados del modelo 1, calculados con una condición de contorno en el infinito, (**Ver Figura 3.1.1**) presentadas en la **tabla 3.1.1** son:

$$\alpha_{programa\ inf\ inito} = -1,32cm$$

y

$$\beta_{programa\ inf\ inito} = 1.75cm$$

y el Error Relativo calculado en función de los resultados según la Teoría Clásica valen lo siguiente:

$$ErI_{\alpha} = 40\%$$

y

$$ErI_{\beta} = 30\% \quad \text{(Ver Tabla 3.1.2)}$$

Donde:

$ErI_{\alpha}$  = Error Relativo en  $\alpha$  para dominios de contorno en el infinito.

Haciendo un desarrollo semejante al anterior, ahora en el modelo 2 (**Ver 3.1.3.2**) los errores relativos del programa túneles en relación a la Teoría Clásica son:

Cálculo con contorno fijo (**Fig.3.1.6 y Fig. 3.1.8**):

$$Er_{\alpha} = 73\%$$

y

$$Er_{\beta} = 37\% \quad \text{(Ver Tabla 3.1.4)}$$

y Calculo con el contorno en el infinito: (**Fig.3.1.7 y Fig. 3.1.9**)

$$ErI_{\alpha} = 8\%$$

y

$$ErI_{\beta} = 7\% \quad \text{(Ver Tabla 3.1.4)}$$

y finalmente para el modelo 3 (**Ver 3.1.3.2**) son:

Calculo con contorno fijo (**Fig.3.1.10 y Fig. 3.1.12**):

$$Er_{\alpha} = 16\%$$

y

$$Er_{\beta} = 10\% \quad \text{(Ver Tabla 3.1.6)}$$

y Calculo con el contorno en el infinito (**Fig.3.1.11 y Fig. 3.1.13**):

$$ErI_{\alpha} = 5\%$$

y

$$ErI_{\beta} = 4\% \quad \text{(Ver Tabla 3.1.6)}$$



Fig. 3.1.2

Desplazamientos verticales  
Contorno Fijo

Pos.	Desp. (cm)	$\sigma_y$ (Kg/m <sup>2</sup> )
$\alpha$	-2,433	
$\beta$	1,1227	
$\gamma$		-3.34
Kirsch		-3.03
Pender $\alpha$	-0,94	
Pender $\beta$	2,515	

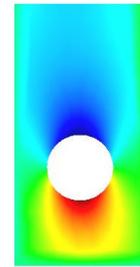


Fig. 3.1.3

Desplazamientos verticales  
Contorno en el Infinito

Pos.	Desp. (cm)	$\sigma_y$ (Kg/m <sup>2</sup> )
$\alpha$	-1,3213	
$\beta$	1,751	
$\gamma$		-3.34
Kirsch		-3.03
Pender $\alpha$	-0,94	
Pender $\beta$	2,515	

Tabla 3.1.1

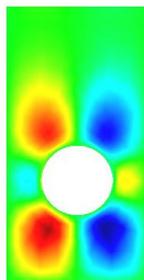


Fig. 3.1.4

Desplazamientos horizontales  
Contorno Fijo

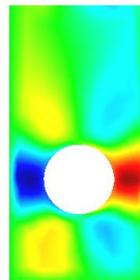


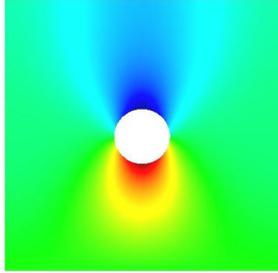
Fig. 3.1.5

Desplazamientos horizontales  
Contorno en el Infinito

Errores relativos según el Modelo 1						
Condición de borde	posición	Desp. vertical (%)	Figura	Posición	$\sigma_x$ (%)	$\sigma_y$ (%)
Fija	$\alpha$	157%	3.1.2 y 3.1.4	$\gamma$	20%	11%
	$\beta$	56%				
Infinita	$\alpha$	40%	3.1.3 y 3.1.5	$\gamma$	2.5%	2.5%
	$\beta$	30%				

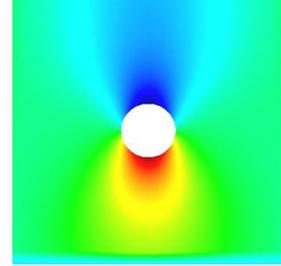
Tabla 3.1.2

Resultados del modelo 2



**Fig. 3.1.6**

Desplazamientos Verticales  
Contorno Fijo



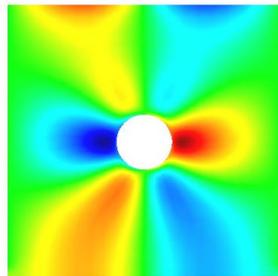
**Fig. 3.1.7**

Desplazamientos Verticales  
Contorno en el Infinito

Pos.	Desp. y (cm)	$\sigma_y$ (Kg/m2)
$\alpha$	-1,64	
$\beta$	1,58	
$\gamma$		-3.2892
Kirsch		-3.03
Pender $\alpha$	-0,94	
Pender $\beta$	2,515	

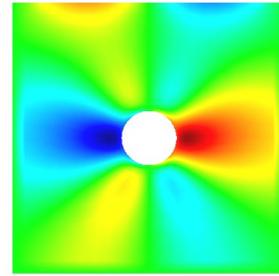
Pos.	Desp. y (cm)	$\sigma_y$ (Kg/m2)
$\alpha$	-1,0238	
$\beta$	2,3301	
$\gamma$		-3.28
Kirsch		-3.03
Pender $\alpha$	-0,94	
Pender $\beta$	2,515	

**Tabla 3.1.3**



**Fig. 3.1.8**

Desplazamientos horizontales  
Contorno Fijo



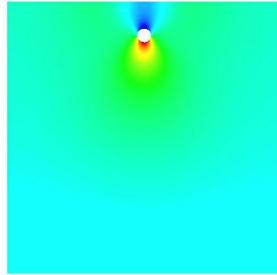
**Fig. 3.1.9**

Desplazamientos horizontales  
Contorno en el Infinito

Errores relativos según el Modelo 2						
Condición de borde	posición	Desp. vertical (%)	Figura	Posición	$\sigma_x$ (%)	$\sigma_y$ (%)
Fija	$\alpha$	73%	3.1.6 y 3.1.8	$\gamma$	3.3%	9%
	$\beta$	37%				
Infinita	$\alpha$	8%	3.1.7 y 3.1.9	$\gamma$	0.7%	2.17%
	$\beta$	7%				

**Tabla 3.1.4**

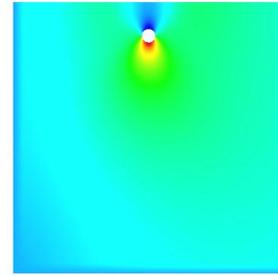
Resultados del modelo 3:



**Fig. 3.1.10**

Desplazamientos Verticales  
Contorno Fijo

Pos.	Desp. y (cm)	$\sigma_y$ (Kg/m <sup>2</sup> )
$\alpha$	-1,0953	
$\beta$	2,258	
$\gamma$		-3.07345
Kirsch		-3.03
Pender $\alpha$	-0,94	
Pender $\beta$	2,515	

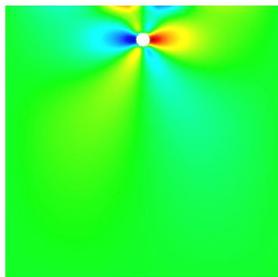


**Fig. 3.1.11**

Desplazamientos Verticales  
Contorno en el Infinito

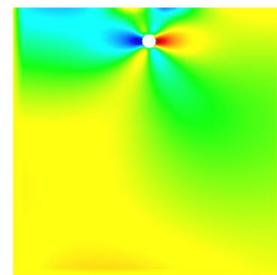
Pos.	Desp. y (cm)	$\sigma_y$ (Kg/m <sup>2</sup> )
$\alpha$	-0,895	
$\beta$	2,4155	
$\gamma$		-3.1092
Kirsch		-3.03
Pender $\alpha$	-0,94	
Pender $\beta$	2,515	

**Tabla 3.1.5**



**Fig. 3.1.12**

Desplazamientos horizontales  
Contorno Fijo



**Fig. 3.1.13**

Desplazamientos horizontales  
Contorno en el Infinito

Errores relativos según el Modelo 3						
Condición de borde	posición	Desp. vertical (%)	Figura	Posición	$\sigma_x$ (%)	$\sigma_y$ (%)
Fija	$\alpha$	16%	3.1.10 y3.1.12	$\gamma$	0.7%	2.74%
	$\beta$	10%				
Infinita	$\alpha$	5%	3.1.11 y3.1.13	$\gamma$	0.73%	1.5%
	$\beta$	4%				

**Tabla 3.1.6**

### 3.1.4. Conclusiones

En función de los objetivos planteados en **3.1.2**, se puede apreciar, según los tres modelos calculados (**Ver 3.1.3.2**), 2 particularidades:

- 3.1.4.1. Los errores Relativos del modelo 1 (Dominio 8x18m) van disminuyendo en relación con el aumento de la dimensión del dominio, Modelos 2 y 3 de dimensiones 20x20m y 80x80m respectivamente; siempre considerando una misma densidad de elementos finitos. (**Ver Tabla 3.1.7**)

Errores Relativos en el punto $\alpha$ ( <b>Ver Figura 3.1.1</b> )		
	Contorno fijo	Contorno en el infinito
Modelo 1	157%	40%
Modelo 2	73%	8%
Modelo 3	16%	5%

**Ver Tabla 3.1.7**

3.1.4.2. Con el fin de comparar los resultados al utilizar dominios de contorno fijos y dominios de contorno en el infinito, podemos decir que aceptando al modelo 2 con contorno infinito y al modelo 3 con contorno fijo como resultados satisfactorios, debido a sus bajos errores relativos, apreciamos que el esfuerzo Computacional del modelo 2 es menor que el del modelo 3 y se basa en lo siguiente:

- 1- Menor cantidad de elementos finitos.
- 2- Reducción del tiempo de ejecución del programa.
- 3- Reducción de errores de redondeo, errores de discretización, y errores de condicionamiento de la matriz.

## 3.2.Comparación de resultados con el programa Plaxis

### 3.2.1.Introducción

Con la intención de analizar el comportamiento del programa “túneles”, en el diseño de un túnel construido en etapas parciales, y frente a la imposibilidad de utilizar el método Clásico (Kirsch **Ver 1.2.4.1** y Pender **Ver 1.2.4.2**) para calcularlo; se optó por la comparación de los resultados con un programa comercial capaz de resolver túneles planteados en etapas sucesivas llamado Plaxis V8.0.

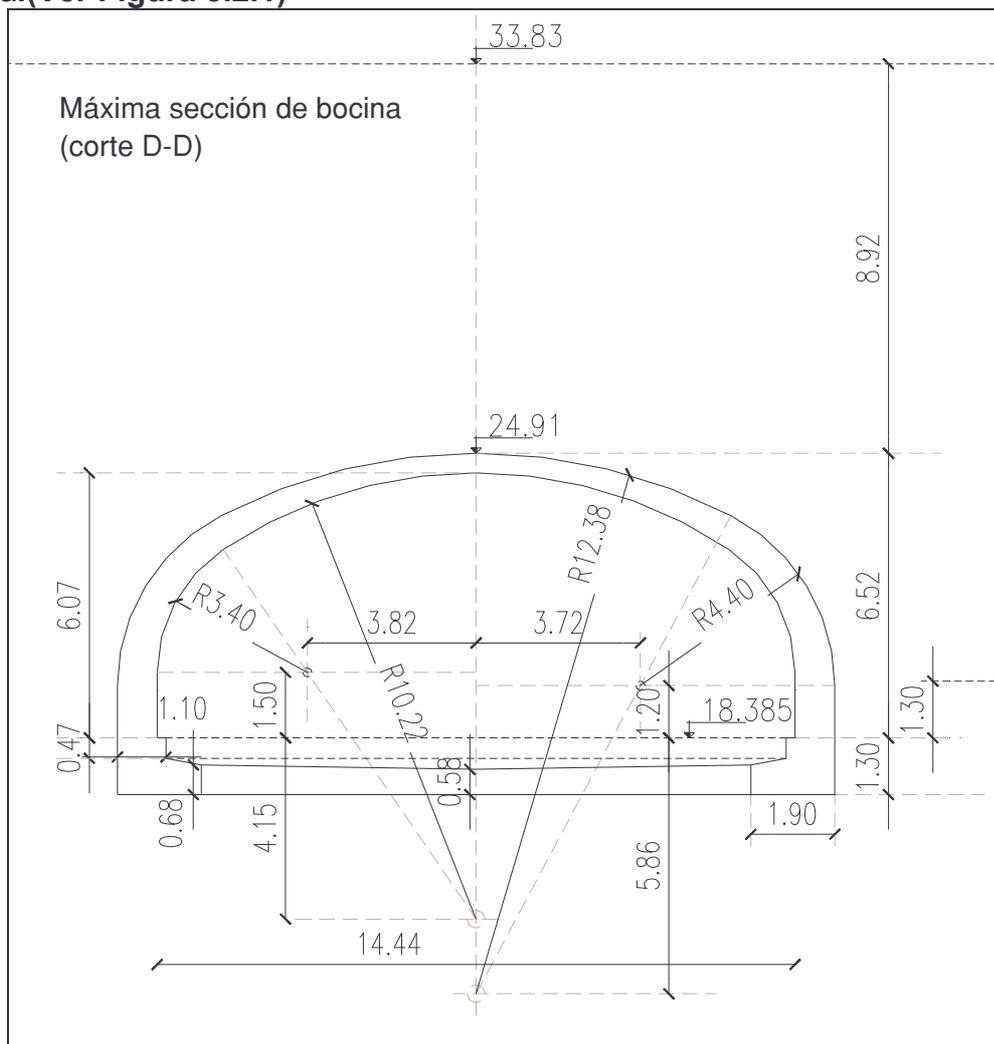
### 3.2.2. Objetivo

Se pretende como objetivo calcular los errores relativos de los resultados del programa “ Túneles ” con respecto al programa comercial Plaxis. (**Ver Tabla 3.2.4 y Tabla 3.2.5**)

### 3.2.3. Análisis de Resultados

#### 3.2.3.1. Modelo Físico

La geometría de la sección analizada se presenta en el plano, en el siguiente esquema.(**Ver Figura 3.2.1**)

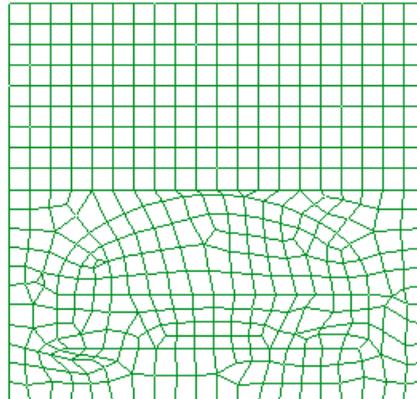


**Figura 3.2.1**

### 3.2.3.2. Modelo Numérico

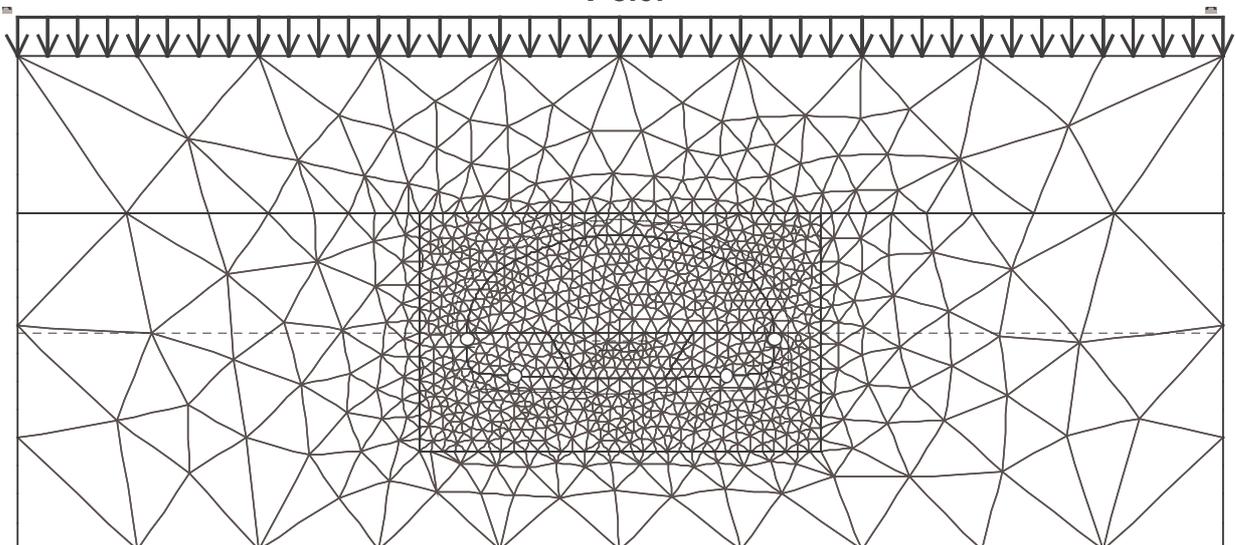
Se ejecutó un modelo numérico bidimensional de la sección transversal, con la malla de elementos finitos que se muestra en las siguientes figuras. **(Ver Figuras 3.2.2 y Figura 3.2.3)**

#### Malla de elementos finitos en el inicio del análisis utilizando el programa “Túneles”



**Figura 3.2.2**

#### Malla de elementos finitos en el inicio del análisis utilizando el programa Plaxis V 8.0.



**Figura 3.2.3**

### 3.2.3.3. Etapas Parciales de Construcción (EPC)

EPC 1(Etapa Parcial de Construcción 1): Estado Inicial.

EPC 2: Apertura de bóveda.

EPC 3: Se realiza en la bóveda una estructura de sostenimiento en primera etapa mediante un Gunitado de 20cm de espesor.

EPC 4: Se complementa el Gunitado anterior hasta llegar a 45cm de espesor.

EPC 5: Apertura de banco.

EPC 6: Apertura de Hastial y construcción de la estructura de fundación izquierda.

EPC 7: Apertura de Hastial y construcción de la estructura de fundación derecha.

#### 3.2.3.4. Etapas Sucesivas de Simulación (ESS)

ESS 1 (Etapa Sucesiva de Simulación 1): Se simula las cargas de peso propio del suelo y una sobrecarga superficial de 11,6Kpa, con un factor  $\beta_1=1$ (Ver 2.4) (Figura 3.2.3).

ESS 2: Se simula la apertura de la bóveda con  $\beta_2=0.25$  (Figura 3.2.4).

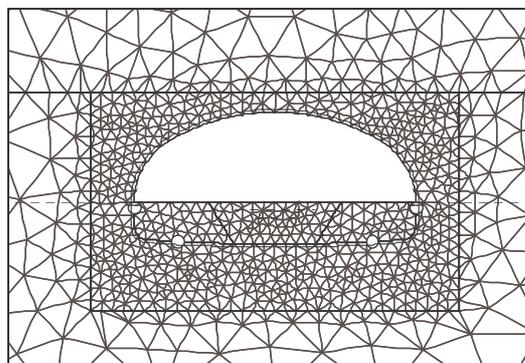
ESS 3: Simulación de la estructura de sostenimiento en primera etapa, Hormigón proyectado de 20cm de espesor., con  $\beta_3=1$ . (Figura 3.2.5).

ESS 4: Se modela la construcción del pórtico en segunda etapa, completando su espesor hasta 45cm. con  $\beta_4=1$ . (Figura 3.2.6).

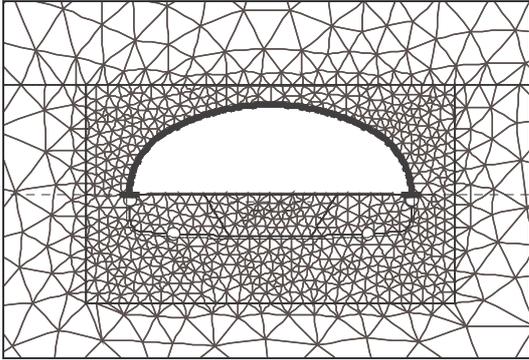
ESS 5: Simulación de la Apertura del Banco, con  $\beta_5=1$ . (Figura 3.2.7).

ESS 6: Simulación de la apertura del Hastial y estructura de fundación izquierda, con  $\beta_6=1$ . (Figura 3.2.8).

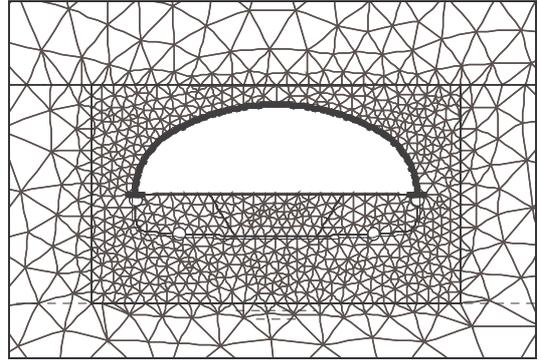
ESS 7: Simulación de la apertura del Hastial y estructura de fundación derecha con  $\beta_7=1$ . (Figura 3.2.9).



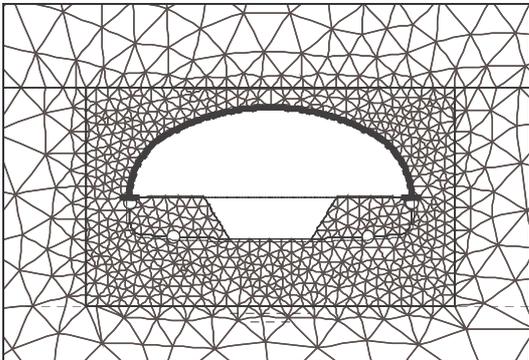
**Figura 3.2.4.** ESS 2: Apertura de bóveda Se aplicó el 25% de la carga del paso ( $\beta = 0.25$ )



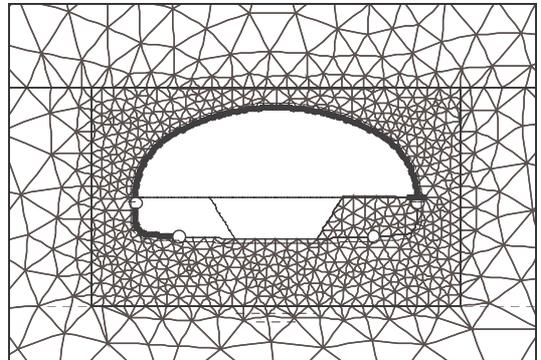
**Figura 3.2.5.** ESS 3:Hormigón proyectado de espesor 20 cm.



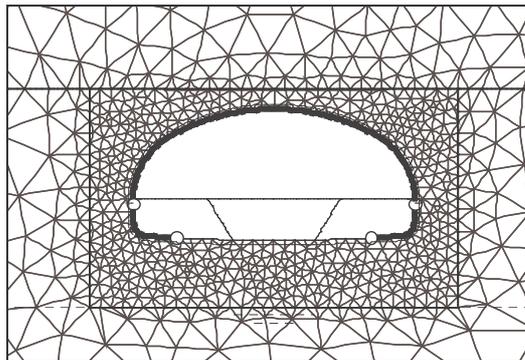
**Figura 3.2.6.** ESS 4: Incremento De gunitado hasta 45cm



**Figura 3.2.7.** ESS 5: Apertura de banco



**Figura 3.2.8.** ESS 6:Apertura de hastial y estructura de fundación izquierda



**Figura 3.2.9.** ESS 7:Apertura de hastial y estructura de fundación derecha

### 3.2.3.5. Parámetros de entrada

Los parámetros utilizados como entrada para ambos programas son los siguientes (**Ver Tabla 3.2.1**):

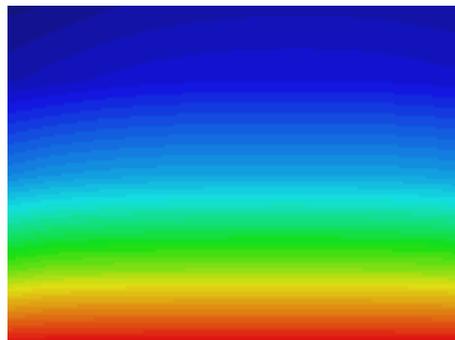
Parámetros mecánicos de los Suelos				
Nomenclatura				Observaciones
Cota		0 – 8.0 m	8.0 - 25 m	
$\gamma$	KN/m <sup>3</sup>	19	20	Peso unitario
$\gamma_{sat}$	KN/m <sup>3</sup>	19	20	Peso unitario saturado
k	m/sec	1.00E-06	1.00E-06	Permeabilidad global
c'	KPa	35	55	Cohesión efectiva
$\phi$	grados	28	30	Fricción efectiva
E <sub>50 ref</sub>	MPa	30	75	Modulo de Elasticidad de referencia al 50%
E <sub>ur ref</sub>	MPa	100	250	Modulo de Elasticidad de referencia en descarga
$\mu$	-	0.20	0.20	Módulo de Poisson
R <sub>f</sub>	-	0.90	0.95	Relación de falla

**Tabla 3.2.1**

### 3.2.3.6.Resultados informados

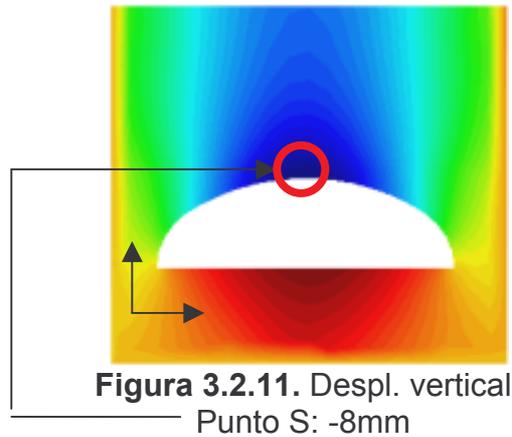
3.2.3.6.1. Resultados de las ESS (Etapas Sucesivas de Simulación) según "Túneles " y Plaxis.

ESS 1 (Etapa Sucesiva de Simulación 1): Se simula las cargas de peso propio del suelo y una sobrecarga superficial de 11,6Kpa, con un factor  $\beta_1=1$ . Los resultados de los desplazamientos del macizo se muestran en la **Figura 3.2.10**.

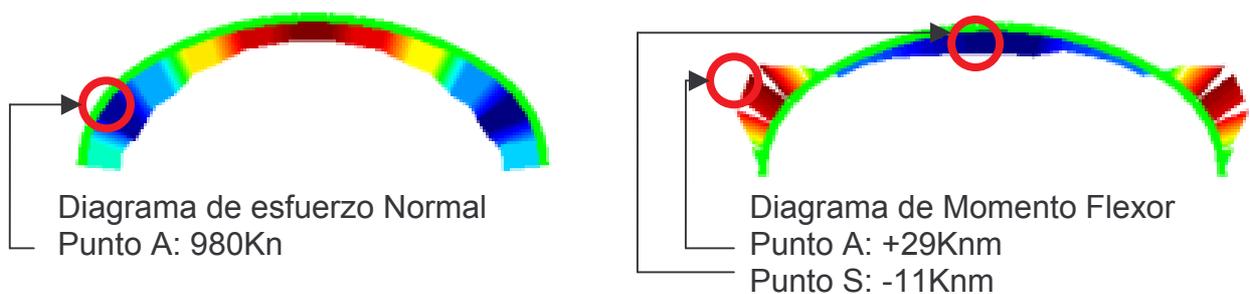
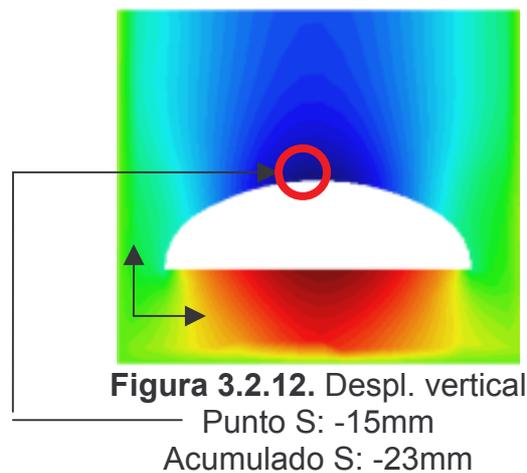


**Figura 3.2.10.**  
Desplazamiento vertical

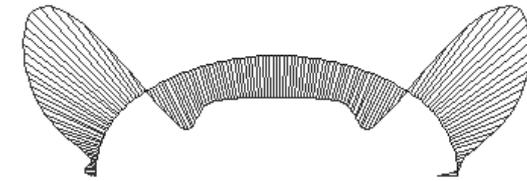
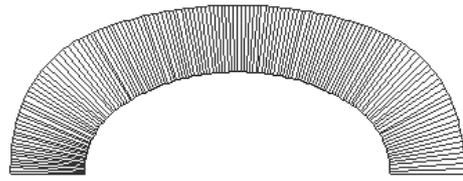
ESS 2: Se simula la apertura de la bóveda con  $\beta_2=0.25$ . Siendo los resultados de los desplazamientos del programa Túneles, los de la **Figura 3.2.11**.



ESS 3: Simulación de estructura de sostenimiento en primera etapa, Hormigón proyectado de 20cm de espesor, con  $\beta_3=1$ . Siendo los resultados de los desplazamientos del programa Túneles, los de la **Figura 3.2.12**. y los resultados de los esfuerzos sobre la estructura de sostenimiento presentados en la **Figura 3.2.13**. y los resultados según el Plaxis en la **Figura 3.2.14**.

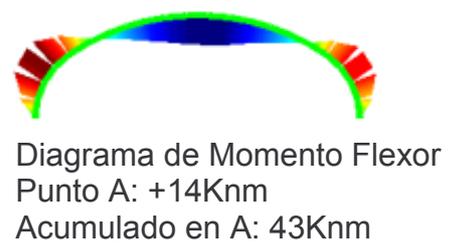
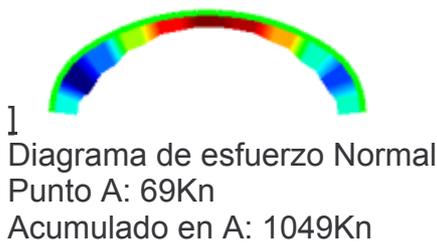
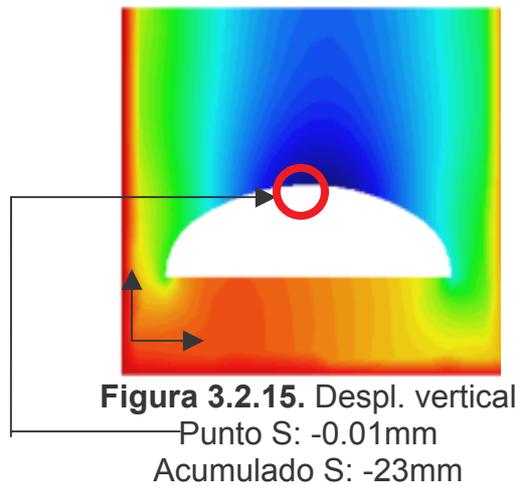


**Figura 3.2.13.**



**Figura 3.2.14.**

ESS 4: Se modela la construcción del pórtico en segunda etapa, completando su espesor hasta 45cm. con  $\beta_4=1$ . Siendo los resultados de los desplazamientos del programa Túneles, los de la **Figura 3.2.15.** , los esfuerzos sobre la estructura de sostenimiento presentados en la **Figura 3.2.16** y los resultados según el Plaxis en la **Figura 3.2.17.**



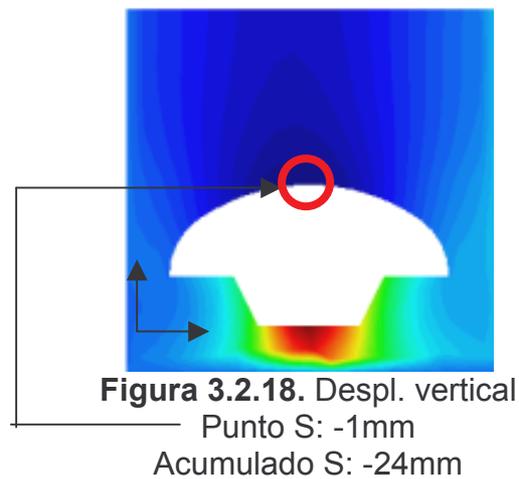
**Figura 3.2.16.**



**Figura 3.2.17.**

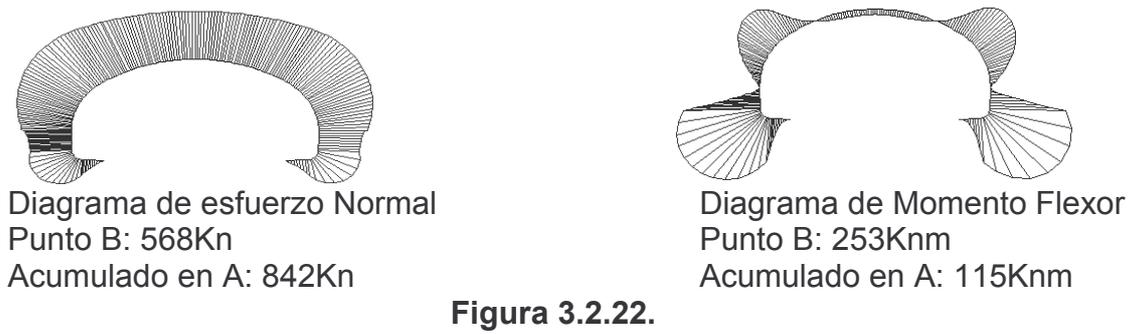
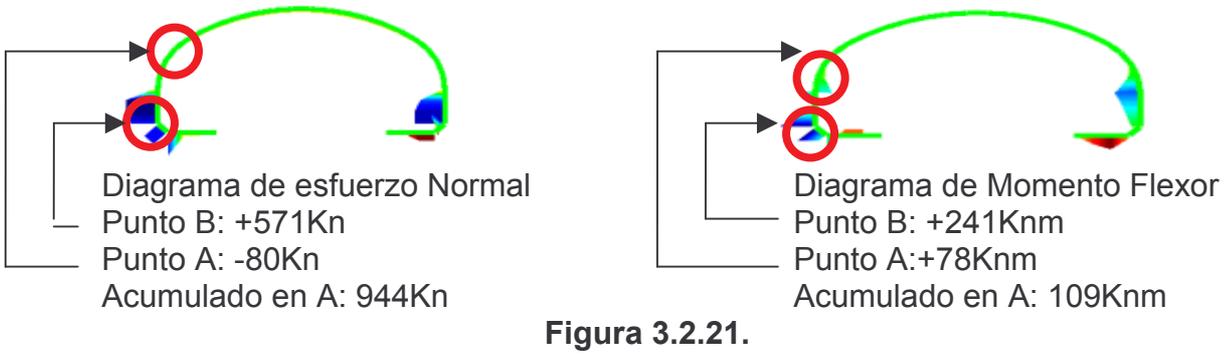
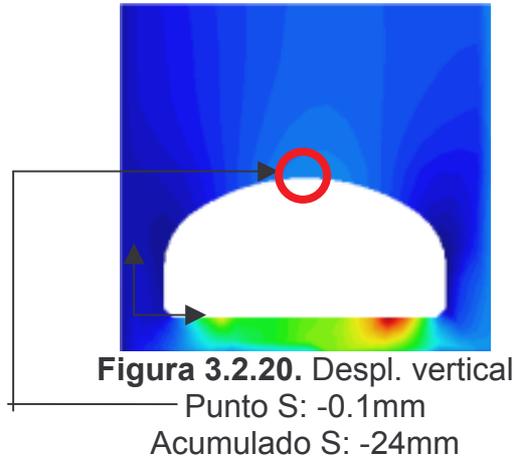
Nota: En esta ESS, la estructura de sostenimiento, por efecto de su peso propio, al deformarse, debería despegarse del terreno, el cual ya antes de la colocación de esta estructura, estaba en un estado de equilibrio. Se quiere hacer notar que este fenómeno no está tenido en cuenta en el desarrollo de este trabajo y que lo que efectivamente sucede es que la estructura de sostenimiento y el suelo trabajan en forma conjunta dada la compatibilidad de deformaciones que poseen los nodos que se encuentran en la interface del Suelo con la estructura.

ESS 5: Simulación de la Apertura del Banco, con  $\beta_5 = 1$ . Siendo los resultados de los desplazamientos del programa Túneles, los de la **Figura 3.2.18.**, y los esfuerzos sobre la estructura de sostenimiento presentados en la **Figura 3.2.19.**



**Figura 3.2.19.**

ESS 6 y ESS 7: Simulación de la apertura de ambos Hastiales (Primero el Izquierdo y luego el derecho) con la modelación de su estructura de fundación y  $\beta_5 = 1$ . Siendo los resultados de los desplazamientos del programa Túneles, los de la **Figura 3.2.20.**, los esfuerzos sobre la estructura de sostenimiento presentados en la **Figura 3.2.21.** y los resultados según el Plaxis en la **Figura 3.2.22.**



3.2.3.6.2. Resultados de la EPC (Etapa Parcial de Construcción) obtenidos según "Túneles" y el Plaxis.

La **tabla 3.2.2** y **tabla 3.2.3** muestran las solicitaciones relevantes del cálculo en las diferentes EPC mas significativas (**Ver 3.2.3.3**), según "Túneles" y el Plaxis respectivamente. En la **tabla 3.2.4** se aprecian los errores relativos de los resultados de "Túneles" con respecto al Plaxis. (**Ver 3.2.2**)

**Solicitaciones estructurales del revestimiento según "Túneles" (Valores Acumulados)**

	Máximo Momento Bóveda (Fig. 3.2.23)	Esfuerzo Normal Bóveda (Fig. 3.2.23)	Máximo Momento Hastiales (Fig. 3.2.23)	Esfuerzo Normal Hastiales (Fig. 3.2.23)
EPC. Relevantes	KNm/m	KN/m	KNm/m	KN/m
EPC 3: Gunitado de bóveda con espesor de 20 cm	-29	980	-	-
EPC 4: Incremento del espesor de bóveda hasta 45cm	-43	1049	-	-
EPC 6 y 7: Apertura de Hastiales y construcción de estructura de fundación	-109	944	241	571

**Tabla 3.2.2**

**Solicitaciones estructurales del revestimiento según Plaxis. (Valores Acumulados)**

	Máximo Momento Bóveda	Esfuerzo Normal Bóveda	Máximo Momento Hastiales	Esfuerzo Normal Hastiales
EPC. Relevantes	KNm/m	KN/m	KNm/m	KN/m
EPC 3: Gunitado de bóveda con espesor de 20 cm	-23	864	-	-
EPC 4: Incremento del espesor de bóveda hasta 45cm	-46	896	-	-
EPC 6 y 7: Apertura de Hastiales y construcción de estructura de fundación	-115	842	253	568

**Tabla 3.2.3**

### Errores relativos de " Túneles " con respecto al Plaxis

	Máximo Momento Bóveda	Esfuerzo Normal Bóveda	Máximo Momento Hastiales	Esfuerzo Normal Hastiales
EPC 3:Gunitado de bóveda con espesor de 20 cm	26%	13%	-	-
EPC 4: Incremento del espesor de bóveda hasta 45cm	6.5%	18%	-	-
EPC 6 y 7: Apertura de Hastiales y construcción de estructura de fundación	5.2%	12%	4.7%	5.2%

Tabla 3.2.4

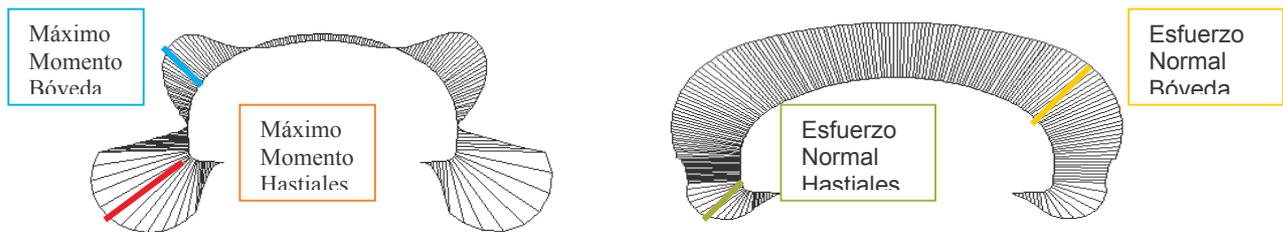


Figura 3.2.23

La **tabla 3.2.5** muestra los resultados del desplazamiento vertical del punto "S" (punto superior sobre el eje de la bóveda, Ver **Figura 3.2.18**), calculado mediante el programa " Túneles " y los compara con el programa Plaxis con el fin de evaluar su error relativo.

### Evolución de los asentamiento según " Túneles " y Plaxis "(Valores Acumulados)

Etapas parciales de construcción relevantes.	Tesis	Plaxis	Error relativo
EPC 2: Apertura bóveda	0.8cm	0.6cm	<b>33%</b>
EPC 3:Gunitado de bóveda con espesor de 20 cm	2.3cm	2.1cm	<b>9.5%</b>
EPC 4: Incremento del espesor de bóveda hasta 45cm	2.4cm	2.3cm	<b>4.3%</b>
EPC 6 y 7: Apertura de Hastiales y construcción de estructura de fundación	2.5cm	2.45cm	<b>2%</b>

Tabla 3.2.5

### 3.2.4. Conclusiones

En función de los objetivos (**Ver 3.2.2**) planteados, se puede apreciar según el modelo físico calculado (**Ver 3.2.3.1**) mediante el programa " Túneles " y el Plaxis la siguiente particularidad:

Se aprecia según la **Tabla 3.2.4** y **Tabla 3.2.5** que los errores relativos son bajos entre ambos programas con lo que se podría concluir que el programa " Túneles " posee resultados acorde con el Plaxis pero con una ventaja desde el punto de vista Numérico por haber implementado en el desarrollo a los Elementos Finitos Infinitos.

## **4.Palabras Finales**

#### 4.1. Conclusiones Generales

En relación a los objetivos propuestos en **1.1.2. (Objetivos)** y resueltos en los **Ítem. 2. Planteo** y **3. Análisis de Resultados**; podemos enumerar las siguientes conclusiones:

- a- Según el **Ítem 1.1.g.** ; se desarrollo un programa en el lenguaje de Fortran, que resuelve modelos numéricos utilizando el Método de Elementos Finitos (MEF) para sólidos representados por materiales isótropos heterogéneos en régimen Elástico Lineal.

Los elementos utilizados son:

- 1- Elementos Bidimensionales Isoparamétricos: Constan de 4 nodos, con dos grados de libertad de desplazamiento en cada uno de ellos y con la posibilidad de utilizar hasta 36 puntos de integración.
  - 2- Elementos Unidireccionales Isoparamétricos: Constan de dos nodos, con tres grados de libertad, dos de desplazamiento y uno de giro en cada uno de ellos.
  - 3- Elementos Bidimensionales Infinitos: Constan de 4 nodos, con dos grados de libertad de desplazamiento en cada uno de ellos pero con la particularidad de que dos de sus nodos se encuentran en el infinito.
- b- Según el **Ítem 1.1.i** : Los Elementos Finitos Infinitos (EFI) permiten simular el suelo como si fuese un simiespacio infinito. Esto posibilita llevar al contorno del dominio cerca de la perturbación. (Apertura del Túnel evitando modelar regiones de poco peso en el resultado y obteniendo algunas ventajas numéricas (**Ver 3.1.4.2**).
  - c- Según el **Ítem 1.1.j** : El proceso de modelación en etapas sucesivas planteado en **2.1** y aplicado en un ejemplo en **3.2**, llevo a la posibilidad de abordar los problemas de la construcción de túneles en etapas, algo imposible según la teoría Clásica. (**Ver 1.2.4**).
  - d- Según el **Ítem 1.1.k** : Se desarrolló una interface accesible para la Implementación de este trabajo, con el fin de evaluar otros proyectos de túneles construidos en etapas parciales. (**Ver 2.2**)
  - e- Según el **Ítem 1.1.m** : Se desarrollo el " Método Beta " con el fin de contemplar el estado tridimensional del frente del túnel en un modelo bidimensional. (**Ver 2.4**).

## **4.2. Ventajas Computacionales y Geotécnicas del programa " Túneles "**

En función de comparar la potencialidad del programa " Túneles " con los métodos Clásicos y el programa Plaxis ; se pretende puntualizar las siguientes conclusiones:

### **4.2.1. Ventajas de " Túneles " con respecto al Plaxis**

1- Posee los beneficios que brinda los EFI (Elementos Finitos Infinitos). (**Ver 3.2.4**)

### **4.2.2. Ventajas de " Túneles " con respecto a la Teoría Clásica**

- 1- Implementación de método Beta.
- 2- Permite la modelización de túneles construidos en etapas.
- 3- Permite considerar condiciones geotécnicas más realistas que las de la Teoría Clásica, que solo permite la consideración de un material uniforme.

## **Anexo, Teoría de Elementos Finitos**

## A.1. Introducción al Método de Elementos Finitos

La finalidad del método de FEM (Finite Element Method) toma su importancia en el potencial que posee para resolver problemas altamente complejos con un grado de exactitud útil para el ingeniero.

El planteo más general lo podemos hacer del siguiente modo:

### Problema Real:

Problema que se le presenta a la ingeniería.

### problema Físico:

consta en desarrollar y explicar el fenómeno real mediante las leyes físicas que lo gobiernan.

### Problema matemático:

Data de poder armar un modelo matemático tal que se pueda dar solución numérica (modelo de elementos finitos), a las leyes físicas nombradas anteriormente.

### Problema real

Según el caso que nos compete para nuestro estudio de tesis se basa en el problema del comportamiento del suelo frente a alterar y/o modificar su conformación u geometría. Como caso particular se busca dar solución a los problemas geotécnicos de construcciones de túneles.

### Problema físico

Existe un conjunto de ecuaciones diferenciales que responden a la física que gobiernan el problema citado, para nuestro caso particular son las ecuaciones que brinda la matemática de la elasticidad de los sólidos continuos.

Seis ecuaciones que relacionan las deformaciones con los desplazamientos:

$\varepsilon = f(U)$ , seis ecuaciones que relacionan las tensiones con las deformaciones,  $\sigma = f(\varepsilon)$  y seis ecuaciones que establecen el equilibrio.

Entonces si en todo caso siempre se verifican las ecuaciones de compatibilidad, podemos escribir que nuestro problema estaría resuelto si damos solución a un sistema de 18 ecuaciones diferenciales con 18 incógnitas.

### Problema matemático

Para resolver el problema anterior se deduce el principio de los Trabajos Virtuales (**ec. A.1.1**) como una forma débil (Ver Anexo I), de la ecuación general de cantidad de movimiento.

$$\int \overline{\delta \varepsilon}^T \cdot \overline{\sigma} \cdot dv - \int \overline{\delta U}^T \cdot \overline{b} \cdot dv - \int \overline{\delta U}^T \cdot \overline{t} \cdot dr - \overline{\delta U}^T \cdot \overline{f} \cdot i = 0 \quad (\text{ec. A.1.1})$$

Con este principio adoptado se va a presentar el método de los elementos finitos. El problema matemático está representado por un dominio  $\Omega$  y un contorno  $\Gamma$  (Ver Fig. A.1.1), los cuales cumplen todas las condiciones de integrabilidad y las propiedades de los sólidos continuos.

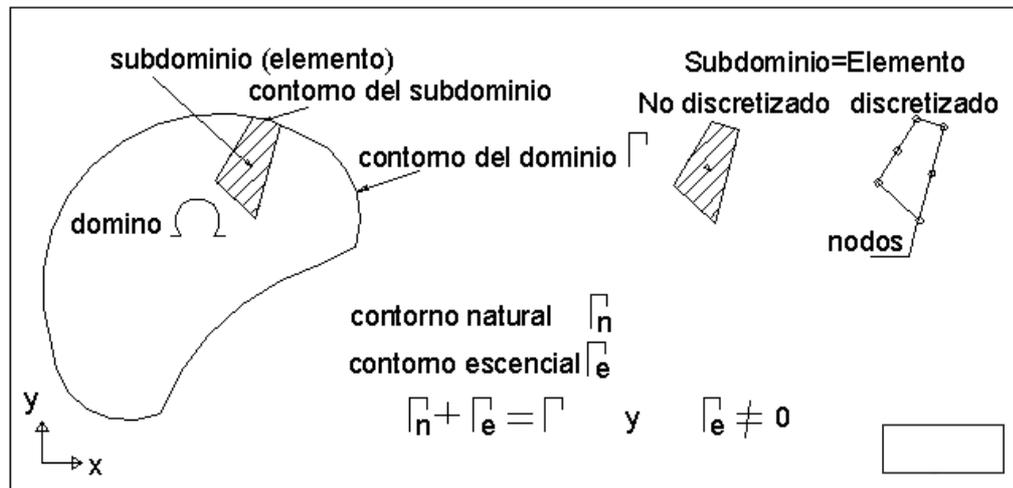


Figura. A.1.1

El método propone dividir el dominio en un gran conjunto de subdominios, y proponer una solución aproximada en el interior de cada subdominio, las que llamamos Funciones de forma.

Para obtener la aproximación de dichas formas integrales usamos el método de los residuos ponderados (método de Galerkin)

Todo cálculo de elementos finitos, siendo un método aproximado, busca una expresión aproximada a la solución.

#### Discretización del Principio de los Trabajos Virtuales.

Vamos a llamar a los subdominios, Elementos y a los contornos los vamos a subdividir en puntos que los llamaremos, Nodos, (Ver Fig. A.1.1).

La Discretización de la solución propuesta para el subdominios  $j$ , de los desplazamientos la podemos escribir según la ecuación (ec. A.1.2).

$$u_j \approx u_j^{approx} = \sum H_i u_i = H u \quad (\text{ec. A.1.2})$$

$H_i$  son las funciones de forma del elemento.

$U_i$ : desplazamientos de los nodos contenidos en el contorno del elemento.

Discretizado el sistema según las funciones desplazamiento propuestas, teniendo en cuenta las relaciones lineales de (tensión – deformación) y de (deformación – desplazamiento); podemos escribir nuestro sistema resultante como un problema de ecuaciones lineales (ec. A.1.3).

$$K U = F \quad (\text{ec. A.1.3})$$

$K$ : Matriz de rigidez global.

$U$ : Vector de desplazamiento en los nodos según coordenadas globales.

$F$ : Vector de fuerzas en los nodos.

Habiendo discretizado el problema de un subdominio, se procede a ensamblar todos los subdominios, compatibilizando los desplazamientos e imponiendo las condiciones de borde globales esenciales y naturales del problema.

### *Criterios de convergencia*

Las funciones de forma supuestas reducen los infinitos grados de libertad del sistema y es posible que nunca se obtenga el verdadero valor mínimo de la energía, independiente de lo tupida que sea la subdivisión del dominio, Para asegurar la convergencia hacia el resultado correcto han de cumplirse tres criterios (O.C.Zienkiewicz):

#### Criterio 1:

La función de desplazamiento debe elegirse de tal forma que no permita deformaciones en un elemento cuando los desplazamientos nodales se deban a un desplazamiento del conjunto como cuerpo rígido.

$\sum \bar{H}_i = 1$  verifica el desplazamiento como cuerpo rígido

#### Criterio 2:

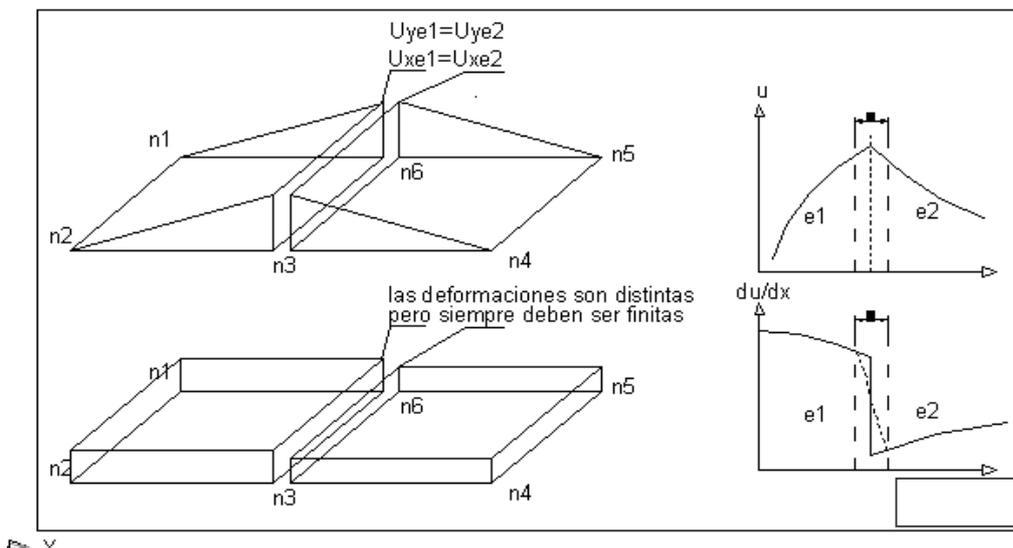
La función desplazamiento tiene que ser tal que si los desplazamientos nodales son compatibles con un estado de deformación constante, se obtenga realmente dicho estado de deformación.

Para este criterio deberá satisfacerse el Test de la parcela.

#### Criterio 3:

Las funciones de desplazamientos deben elegirse de manera que las deformaciones que se producen en los límites de separación entre elementos sean finitas (aunque puedan ser indeterminadas (**Ver Fig. A.1.2**)).

Este criterio implica una cierta continuidad de desplazamientos entre los elementos.



**Figura A.1.2**

### Error de Discretización

Puesto que la solución exacta puede siempre desarrollarse en serie polinómica en las proximidades de cualquier punto (nodo i) **(ec. A.1.3)**.

$$u = u_i + \left(\frac{du}{dx}\right)_i(x - x_i) + \left(\frac{du}{dy}\right)_i(y - y_i) \quad \text{(ec. A.1.3)}$$

Si en el interior de un elemento de tamaño  $h$  se emplea un desarrollo polinómico de grado  $p$ , este podrá ajustarse localmente al desarrollo de Taylor hasta dicho grado y, como  $x$  e  $y$  son del orden de magnitud de  $h$ , el error en  $u$  será del orden  $Error(h^{p+1})$ . Así, en el problema de elasticidad plana hemos empleado un desarrollo lineal y  $p=1$ , entonces el error por la Discretización será de  $(h^2)$  lo cual implica que el error en los desplazamientos se reduciría a  $1/4$  si el tamaño de los elementos de la malla se reduce a la mitad. **(Ver Tabla. A.1.1)**.

Grado de aproximación ( $p$ )	Espesor de los elementos ( $h$ )	Error de Discretización ( $h^{p+1}$ ) para desplazamientos	Error de Discretización ( $h^{p+1-m}$ ) para deformaciones
1	1	1	0
1	1/2	1/4	1/2
1	1/3	1/9	1/3

**Tabla. A.1.1**

Siendo  $p$ : grado de aproximación del polinomio,  $h$  espesor del elemento. Y  $m$ : derivadas  $m$  esimas de los desplazamientos.

Lo que significa que si vamos disminuyendo el espesor de los elementos el error en los desplazamientos disminuye en forma cuadrática y el de las deformaciones en forma lineal.

### Errores de redondeo

### Problemas de condicionamiento de la matriz

### Elementos Adoptados

Planteadas las condiciones para abordar un problema de FEM de forma correcta, podemos utilizar los elementos llamados ISOPARAMETRICOS, los cuales ya se comprobaron su buen funcionamiento ante todas las comprobaciones anteriormente mencionadas. Los mismos serán Bidimensionales de cuatro nodos con 2 grados de asociados a los desplazamientos. **(Ver A.4)**, También se utilizarán elementos unidireccionales de dos nodos y tres grados de libertad en coincidencia con los desplazamientos y el giro. **(Ver A.5)**.

## A.2- El principio de los trabajos virtuales como forma débil, de las ecuaciones de equilibrio en el análisis de los sólidos

En el continuo tridimensional cualquiera, las ecuaciones de equilibrio de un volumen elemental pueden escribirse en función de las componentes del tensor de tensiones, simétrico y cartesiano.

$$\begin{bmatrix} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} \\ \frac{d\tau_{yx}}{dx} + \frac{d\sigma_{yy}}{dy} + \frac{d\tau_{yz}}{dz} \\ \frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_{zz}}{dz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix} = 0$$

Donde  $b=(bx,by,bz)$  representa las fuerzas que actúan por unidad de volumen (pudiendo muy bien incluir efectos inerciales) en la mecánica de los sólidos las componentes de la tensión serán generalmente funciones de las componentes del desplazamiento.  $U^T = [u, v, w]$  para obtener una forma débil procederemos introduciendo un vector de funciones de ponderación arbitrario  $\delta u$  definido como:  $\delta U = [\delta u, \delta v, \delta w]$  podemos escribir ahora la expresión integral como:

$\int_V \delta U^T \cdot A(U) \cdot dV = \int_V \left[ \delta u \cdot \left( \frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} \right) + \delta v \cdot (...) + \delta w \cdot (...) \right] dV$  donde el volumen V es el dominio del problema. Integrando por partes cada termino podemos escribir la ecuación anterior, como sigue:

$$\int_V \left[ \sigma_x \cdot \frac{d(\delta u)}{dx} + \tau_{xy} \left( \frac{d(\delta u)}{dx} + \frac{d(\delta v)}{dy} \right) + \dots - \delta u \cdot bx - \delta v \cdot by - \delta w \cdot bz \right] dV$$

$$+ \int_{\Gamma} (\delta u \cdot (\sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z) + \delta v \cdot (...) + \delta w \cdot (...)) d\Gamma = 0$$

Donde la superficie  $\Gamma$  representa el área de la superficie del sólido.

Recordando de la matemática de la elasticidad para sólidos continuos, las deformaciones las podemos introducir de esta forma:

$$\delta \varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{d(\delta u)}{dx} \\ \frac{d(\delta v)}{dy} \\ \frac{d(\delta w)}{dz} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = S \cdot \delta u$$

Disponiendo de las seis componentes de tensión y de las seis componentes de deformación virtual podemos escribir la ecuación sencillamente así:

$$\int \overline{\delta \varepsilon}^T \cdot \overline{\sigma} \cdot dv - \int \overline{\delta U}^T \cdot \overline{b} \cdot dv - \int \overline{\delta U}^T \cdot \overline{i} \cdot dr - \overline{\delta U}^T \cdot \overline{f} \cdot i = 0$$

Que es la expresión de los trabajos virtuales que precisamente es una forma débil de las ecuaciones de equilibrio y es valido tanto si las relaciones entre tensiones y deformaciones son lineales o no lineales.

### A.3. Elementos Isoparametricos Bidimensionales

Descripción: se utilizaran elementos de cuatro nodos Isoparametricos, Los cuales no presentan problemas de convergencia. Los ejes coordenados de los elementos globales se disponen según la siguiente figura. (Ver Fig. A.4.1)

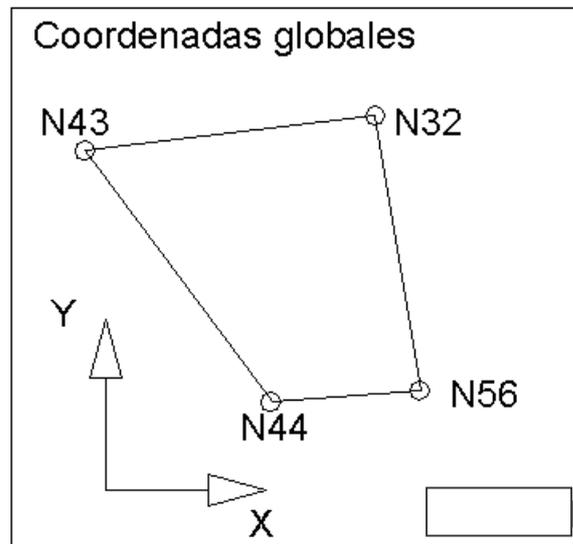


Figura A.4.1

Por consiguiente las coordenadas locales se muestran en la siguiente figura. (Ver Fig. A.4.2)

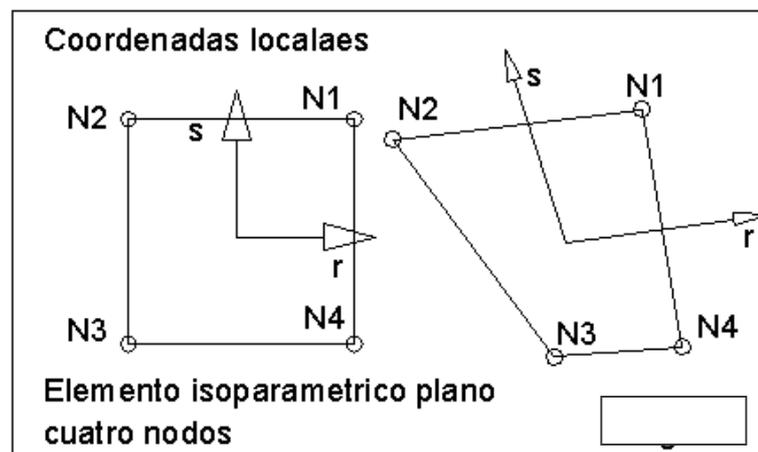


Figura A.4.2

Las funciones de forma adoptadas quedan descritas de la siguiente manera:

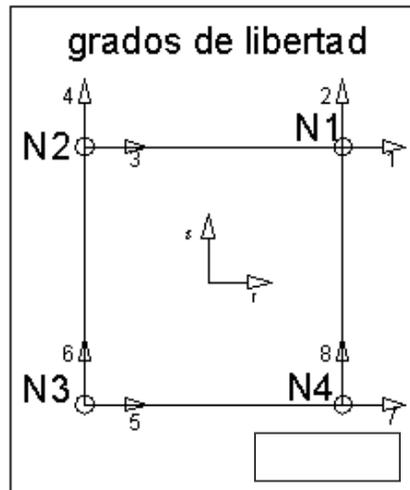
$$H_i(1,1) = (1+r)(1+s)/4$$

$$H_i(1,2) = (1-r)(1+s)/4$$

$$H_i(1,3) = (1-r)(1-s)/4$$

$$H_i(1,4) = (1+r)(1-s)/4$$

Los grados de libertad los podríamos identificar en los elementos bidimensionales en la siguiente figura: (**Ver Fig A.4.3**)



**Figura A.4.3**

Grados de libertad en los nodos: desplazamiento en ejes x e y

Detalle de armado de la matriz de rigidez:  $\overline{\overline{K}}_f = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overline{\overline{B}}^T \overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{B}} |J| dr ds$

Siendo:  $X(r, s) = \sum H_i(r, s) x_i$   $Y(r, s) = \sum H_i(r, s) y_i$  entonces armamos al Jacobiano

$$\text{como: } \overline{\overline{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

La matriz del material teniendo en cuenta un estado de deformaciones planos:

$$\overline{\overline{C}} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1 - \nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1 - \nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix}$$

y la matriz de deformación queda determinada por:

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} J_{1,1}^{-1} \frac{\partial Hi}{\partial r} + J_{1,2}^{-1} \frac{\partial Hi}{\partial s} \\ J_{2,1}^{-1} \frac{\partial Hi}{\partial r} + J_{2,2}^{-1} \frac{\partial Hi}{\partial s} \\ J_{2,1}^{-1} \frac{\partial Hi}{\partial r} + J_{2,2}^{-1} \frac{\partial Hi}{\partial s} + J_{1,1}^{-1} \frac{\partial Hi}{\partial r} + J_{1,2}^{-1} \frac{\partial Hi}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Detalle de cargas volumétricas:

$$\overline{\delta w} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overline{\delta U^T} \overline{Fv} \, dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overline{\delta U_i^T} \overline{Hi}^T \overline{Fv} \, dv = \overline{\delta U_i^T} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overline{Hi}^T \overline{Fv} \cdot |J| \, dr \, ds$$

siendo  $Fv$  la matriz de fuerza por unidad de superficie (fuerza/superficie)

$$Fv \begin{bmatrix} Qx & 0 \\ 0 & Qy \end{bmatrix} \text{ siendo } Qx: \text{ carga distribuida en fuerza por unidad de superficie en la}$$

dirección del eje de coordenada globales x.

siendo  $Qy$ : carga distribuida en fuerza por unidad de superficie en la dirección del eje de coordenada globales y.

#### A.4.- Elementos Isoparametricos Unidireccionales

Elementos unidireccionales tipo viga. (Ver Fig. A.5.1)

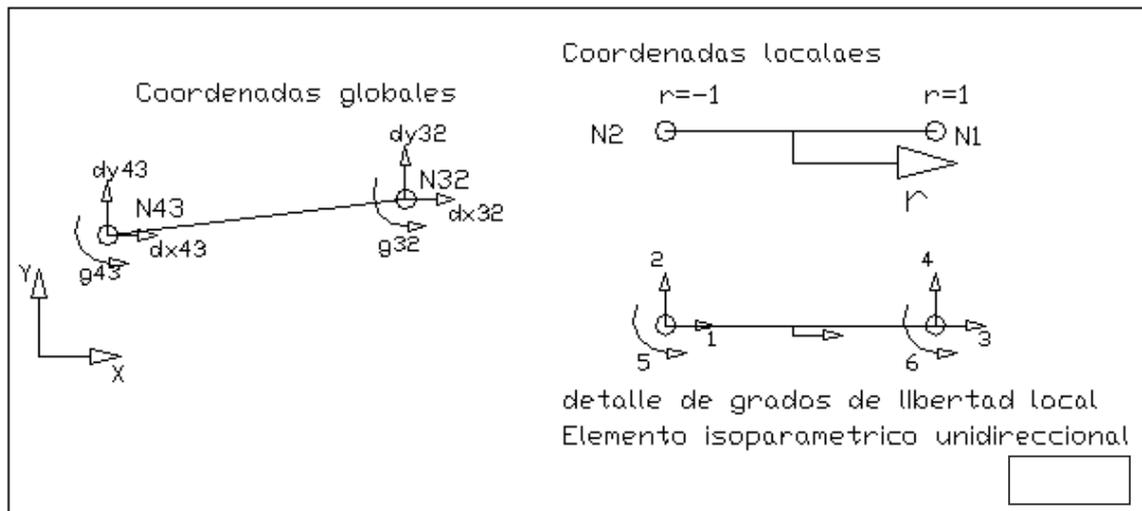


Figura A.5.1

Grados de libertad en los nodos: desplazamiento en ejes x e y y los giros de las barras en los nodos, ver figura anterior.

Detalle de armado de la matriz de rigidez:

Aquí consideraremos estructuras planas con miembros conectados rígidamente. Ess miembros serán similares a las vigas excepto que se tendrán presentes cargas axiales y deformaciones axiales. Los elementos tendrán diferentes orientaciones. En la figura siguiente, muestra el elemento de marco que se utilizara en el programa, en el cual en cada nodo tiene los desplazamientos y una deformación rotacional.

El vector desplazamiento esta dado por:  $\bar{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]$  (Ver Fig. A.5.2)

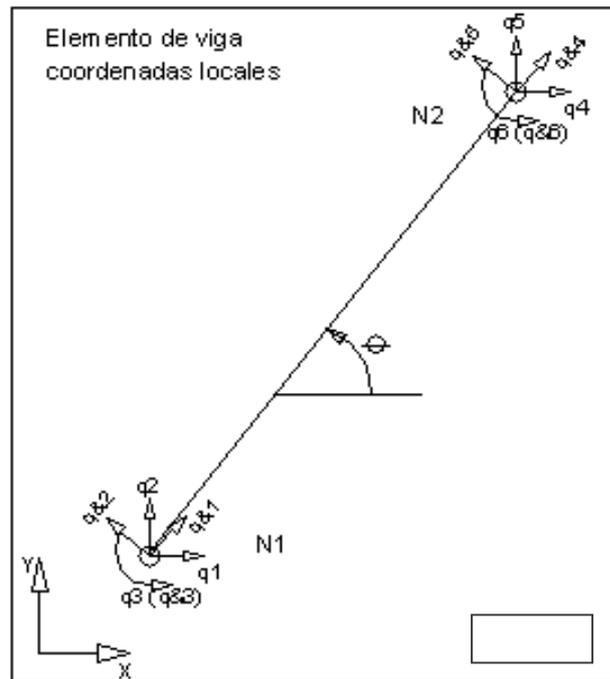


Figura A.5.2

También definimos un sistema de coordenadas local  $x$  e  $y$  tal que  $x$  este orientada a lo largo de 1-2, con lo cual usando la matriz de rotación correspondiente podemos escribir:

$$\bar{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]$$

obtenemos la transformación local-global con:  $\bar{q} = \bar{L} \cdot q$  siendo  $\bar{L}$ :

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matriz de rigidez que contempla el elemento recién descrito es:

$$\overline{\overline{k_p \&}} = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{E.A}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12.E.I}{l_e^3} & \frac{6.E.I}{l_e^2} & 0 & -\frac{12.E.I}{l_e^3} & \frac{6.E.I}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6.E.I}{l_e^2} & \frac{4.E.I}{l_e} & 0 & -\frac{6.E.I}{l_e^2} & \frac{2.E.I}{l_e} \\ -\frac{E.A}{l_e} & 0 & 0 & \frac{E.A}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12.E.I}{l_e^3} & -\frac{6.E.I}{l_e^2} & 0 & \frac{12.E.I}{l_e^3} & -\frac{6.E.I}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6.E.I}{l_e^2} & \frac{2.E.I}{l_e} & 0 & -\frac{6.E.I}{l_e^2} & \frac{4.E.I}{l_e} \end{bmatrix}$$

la cual la podemos escribir en coordenadas globales haciendo la correspondiente transformación de coordenadas la matriz de rigidez del elemento como:  $\overline{\overline{K}} = \overline{\overline{L}}^T \overline{\overline{k_p \&}} \overline{\overline{L}}$

## **Bibliografia**

- Bettes Peter. (1992) “ *Infinite Element* ” Pag(1-82)
- Bathe Klaus Jurgen. (1996) “ *Finite Element Procedures* “ Pag(148-296/338-480)
- Chandrupatla Tirupathi R., (1999) “ *Introducción al estudio del Elemento Finito en Ingeniería* “ Pag(209-260/46-85)
- Jhonson Claes. (1987) “ *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*” Pag(214-227)
- Jiménez Salas. (1975) “ *Geotécnia y Cimientos III*”Pag(1384-1576)
- Malvern Lawrence E.. (1969) “ *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium* “Pag(1-260)
- Petersen C.S., A.F. Leanza. (1979) “ *Elementos de Geología Aplicada* ” Pag(418-431)
- Terzagui, Ralph B. Peck. (1963) “ *Soil Mechanics In Engineering Practice* ” Pag(241-300)
- Vignau J. Astor. (1984) “ *Lenguaje de Programación FORTRAN IV* “Pag(1-223)
- WONAPDE 2004. (2004), *Book of Abstracts First Chilean Workshop on Numerical Analysis of Partial Differential Equations, Concepción Chile.* Pag(15-23/51-55)
- Zienkiewicz O. C. – R.L.Taylor. (1994) “*El Método de Elementos Finitos*” Pag(115-266)