

Tesis: Caracterización Mecánica de Materiales Constituidos por partículas

Autor: Alejo O. Sfriso

Director: Eduardo Núñez (Univ. Buenos Aires)

Codirector: Guillermo G. Weber (Univ. Texas en Brownsville)

Comité de seguimiento: Eduardo N. Dvorkin

Fecha de presentación: 15/12/2008

Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
1.1	Motivación . . . . .	3
1.2	Objeto de esta tesis . . . . .	7
1.3	Organización y presentación . . . . .	8
1.4	Notación . . . . .	8
1.5	Agradecimientos . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Comportamiento de las arenas</b>	<b>11</b>
2.1	Introducción . . . . .	11
2.2	Definiciones iniciales . . . . .	12
2.2.1	Caracterización del empaquetamiento . . . . .	12
2.2.2	La definición de resistencia en los materiales friccionales . . . . .	13
2.3	Resistencia . . . . .	14
2.3.1	Componentes de la resistencia al corte . . . . .	14
2.3.2	Modelo de los dos bloques . . . . .	14
2.3.3	Ensayo triaxial . . . . .	15
2.3.4	Estado crítico . . . . .	16
2.3.5	Estado de deformación constante . . . . .	19
2.3.6	Resistencia máxima y presión media . . . . .	20
2.3.7	Estado triaxial general . . . . .	23
2.4	Rigidez . . . . .	25

2.4.1	Elasticidad y contacto Hertziano . . . . .	26
2.4.2	Rango elástico y disipación de energía . . . . .	28
2.4.3	Módulo de Young inicial . . . . .	30
2.4.4	Teoría de tensión – dilatación de Rowe . . . . .	32
2.4.5	Cambio de volumen en descarga . . . . .	36
2.4.6	Reducción de la rigidez secante por deformación . . . . .	37
2.4.7	Módulo secante $E_{50}$ . . . . .	42
2.4.8	Compresión proporcional . . . . .	42
2.4.9	Anisotropía y endurecimiento cinemático . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Modelización de la compresión isotrópica</b>	<b>49</b>
3.1	Introducción . . . . .	49
3.2	Elementos del modelo . . . . .	49
3.2.1	Cinemática . . . . .	49
3.2.2	Variables de estado . . . . .	50
3.2.3	Elasticidad . . . . .	50
3.2.4	Función de fluencia y potencial plástico . . . . .	50
3.2.5	Ecuaciones de evolución . . . . .	51
3.3	Implementación numérica . . . . .	53
3.3.1	Operador de integración . . . . .	53
3.3.2	Algoritmo de integración . . . . .	53
3.4	Resultados . . . . .	56
3.4.1	Influencia de los parámetros de entrada . . . . .	56
3.4.2	Comportamiento del algoritmo . . . . .	57
3.A	Apéndice: Selección de $e_0$ como variable de estado . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Modelización de la falla por corte</b>	<b>64</b>
4.1	Introducción . . . . .	64
4.2	Estructura matemática del modelo . . . . .	65

4.2.1	Cinemática . . . . .	65
4.2.2	Variables de estado . . . . .	66
4.2.3	Relación tensión-deformación . . . . .	66
4.2.4	Función de fluencia . . . . .	66
4.2.5	Regla de flujo . . . . .	66
4.2.6	Condición de plasticidad . . . . .	67
4.2.7	Ecuaciones de evolución . . . . .	67
4.3	Funciones de estado . . . . .	67
4.3.1	Elasticidad . . . . .	67
4.3.2	Ángulo de fricción interna . . . . .	72
4.3.3	Función de fluencia . . . . .	75
4.3.4	Regla de flujo . . . . .	77
4.4	Implementación numérica . . . . .	84
4.4.1	Operador de integración . . . . .	84
4.4.2	Algoritmo de integración . . . . .	85
4.5	Resultados . . . . .	96
4.5.1	Introducción . . . . .	96
4.5.2	Simulación de ensayos triaxiales . . . . .	96
4.5.3	Simulación de un ensayo de deformación plana . . . . .	103
4.5.4	Simulación del comportamiento de una presa CFRD sujeta a un sismo destructivo . . . . .	107
4.A	Apéndice: Deducciones de algunas funciones de estado . . . . .	111
4.A.1	Hiperelasticidad . . . . .	111
4.A.2	Función de fluencia . . . . .	115
4.A.3	Regla de flujo . . . . .	117
4.A.4	Determinación de $p_r$ y $\phi_c$ para arenas del Puelchense . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Modelización de la carga monotónica de corte</b>	<b>123</b>
5.1	Introducción . . . . .	123

5.2	Estructura matemática del modelo . . . . .	124
5.2.1	Cinemática . . . . .	124
5.2.2	VARIABLES DE ESTADO . . . . .	124
5.2.3	Relación tensión-deformación . . . . .	124
5.2.4	Función de fluencia . . . . .	124
5.2.5	Regla de flujo . . . . .	125
5.2.6	Condición de plasticidad . . . . .	125
5.2.7	Ecuaciones de evolución . . . . .	125
5.3	Funciones de estado . . . . .	126
5.3.1	Variable de estado y función de fluencia . . . . .	126
5.3.2	Relación tensión-deformación . . . . .	128
5.3.3	Función de endurecimiento para $\zeta$ . . . . .	130
5.3.4	Resistencia máxima y evolución de variables de estado . . . . .	132
5.4	Implementación numérica . . . . .	134
5.4.1	Operador de integración . . . . .	134
5.4.2	Algoritmo de integración . . . . .	135
5.5	Resultados . . . . .	141
5.5.1	Lista de parámetros . . . . .	141
5.5.2	Análisis de parámetros materiales . . . . .	141
5.5.3	Análisis de parámetros de estado . . . . .	145
5.5.4	Calibración para la arena Puelchense . . . . .	153
5.5.5	Calibración para la arena Toyoura . . . . .	153
5.5.6	Análisis de las variables de estado . . . . .	160
5.5.7	Análisis del tamaño del paso . . . . .	165
5.5.8	Simulación de un ensayo de compresión plana . . . . .	167
5.5.9	Simulación de un problema de valores de contorno complejo . . . . .	170
<b>6</b>	<b>Consideraciones finales y oportunidades de investigación futura</b>	<b>175</b>
6.1	Resumen del comportamiento de las arenas . . . . .	175

6.2	Resumen de los modelos constitutivos para arenas . . . . .	177
6.3	Características del modelo constitutivo desarrollado en esta tesis . . . . .	178
6.4	Caminos de investigación futura . . . . .	180
6.5	Addenda 28/10/2010 . . . . .	180
<b>7</b>	<b>Apéndice: Algebra Tensorial</b>	<b>182</b>
7.A	Tensores unitarios . . . . .	182
7.B	Invariantes de tensores de segundo orden . . . . .	183
7.C	Derivadas de invariantes . . . . .	184
7.D	Medidas de tensión y deformación . . . . .	185
7.E	Derivadas de las medidas de tensión . . . . .	186

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación

En los últimos diez años, la geomecánica computacional se ha convertido en una herramienta para el análisis rutinario de problemas geotécnicos, hasta el punto que hoy existen numerosos programas computacionales que aplican métodos numéricos específicamente orientados a geomateriales, como Plaxis [18], FLAC [30] y otros. Estos programas permiten la simulación numérica del comportamiento de estructuras típicas de la ingeniería geotécnica como muros, fundaciones, excavaciones, túneles y presas, construidas en suelos de todo tipo, desde arcillas blandas hasta macizos rocosos.

Sin embargo, la capacidad predictiva de esta técnica de análisis todavía es poco confiable, aún para problemas rutinarios. Una prueba de ésto se dio en 1994, cuando la *FHWA*<sup>1</sup> construyó y ensayó cinco zapatas cimentadas sobre arenas uniformes. Antes de efectuar los ensayos, se le pidió a 31 participantes que predijeran la carga que produciría un determinado asentamiento. En el informe final, Briaud y Gibbens [17] informaron:

*“Nadie entregó un conjunto de respuestas que cayera consistentemente dentro del 20% de desvío respecto de los valores medidos. Dos participantes (de 31) tuvieron el 80% de sus respuestas dentro de este rango.... Como 31 participantes predijeron el comportamiento*

---

<sup>1</sup>Asociación de Carreteras Federales de los Estados Unidos.

*de 5 fundaciones, existieron 155 valores para el coeficiente de seguridad. Sólo uno de los coeficientes de seguridad fue menor que uno; el siguiente peor fue 1.6; el promedio fue de 5.4. Por lo tanto parece que nuestra profesión conoce cómo diseñar bases aisladas de manera muy segura... Considerando los elevados coeficientes de seguridad y los valores reducidos de asentamiento, la carga de diseño pudo haber sido considerablemente superior. Por lo tanto parece que nuestra profesión podría diseñar bases aisladas más económicamente.”*

Aunque la predicción global fue pobre, peor fue el resultado del sub-grupo que empleó métodos numéricos: el promedio de las predicciones fue del orden del 50% de los valores medidos<sup>2</sup>.

La razón básica para este pobre desempeño está en la complejidad intrínseca de los materiales friccionales: son aquellos cuya resistencia y rigidez dependen del estado tensional y cambian de manera muy significativa durante los procesos de deformación. Dentro de los materiales friccionales, las arenas presentan una característica distintiva: su rigidez y resistencia al corte son nulas cuando la presión es nula. Esta característica, que permite por ejemplo la fabricación de relojes de arena, complica enormemente la toma de muestras, la ejecución de ensayos experimentales repetibles y, sobre todo, su interpretación.

Hay dos características del comportamiento de las arenas que son bien conocidas:

1. Todas las arenas tienen un ángulo de reposo, que es independiente de los procesos de carga y deformación que pueda haber sufrido el material: cuando termina su tiempo, el reloj de arena siempre muestra el mismo cono en su mitad inferior.
2. Independientemente del estado inicial, las arenas se deforman a volumen constante luego de una distorsión suficientemente grande. Si se sacude un reloj de arena, el cono se asienta y el volumen de arena disminuye; si luego se invierte el reloj (y se

---

<sup>2</sup>La experiencia se repitió en 2006 en la Universidad de Western Australia con resultados sorprendentemente similares.



espera), el volumen de arena que queda en la mitad inferior es igual al volumen que había antes de sacudir el reloj.

Todos los modelos constitutivos sofisticados para arenas contemplan este comportamiento básico y tienen, entre sus parámetros materiales, al menos dos que permiten calcular la pendiente del ángulo de reposo y la densidad terminal del material. Sin embargo, en la práctica profesional se prefiere el empleo de modelos constitutivos simples de elasticidad lineal y plasticidad perfecta - del tipo de Mohr-Coulomb - o modelos constitutivos de endurecimiento isotrópico y elasticidad dependiente de la presión como el modelo hiperbólico de Duncan-Chang. Esto ocurre porque estos modelos constitutivos son bien conocidos por los usuarios y porque existe una amplia base de datos para sus parámetros de entrada, y ocurre a pesar que ninguno de estos modelos podría predecir el ángulo de reposo o la densidad terminal.

Además, los modelos constitutivos mencionados tienen el severo inconveniente de que los parámetros de entrada dependen del problema que se estudia. Por ejemplo, se requiere un conjunto de parámetros para caracterizar la arena que rodea el fuste de un pilote y otro conjunto para la arena que rodea la punta, aún cuando todo el pilote esté embebido en un depósito uniforme. Esto ocurre porque algunos de los parámetros de entrada dependen de la densidad del material y de su estado tensional, variables ambas que alcanzan valores muy diferentes en distintos puntos de la malla y que cambian de manera muy significativa durante el proceso de deformación que se pretende modelizar. Recientemente, el modelo hiperbólico disponible en Plaxis fue aumentado con elasticidad para baja deformación, al costo de dos parámetros materiales adicionales a los ocho que ya tenía [6]. Debe reconocerse que esta contribución sugiere que el modelo hiperbólico está alcanzando un grado de madurez excesivo, y que su reemplazo podría ser bienvenido por la industria.

El campo de los modelos constitutivos para arenas presenta oportunidades de desarrollo en varios aspectos, que se pueden agrupar en:

1. La búsqueda del “modelo universal” que capture el comportamiento de las arenas

para todas las escalas de tensión, deformación y velocidad de deformación.

2. La implementación robusta de algunos de los modelos constitutivos avanzados disponibles.
3. El desarrollo de modelos predictivos, prácticos y simples orientados a la industria.

La mayoría de los modelos constitutivos sofisticados que la academia ha aportado en estos años fueron diseñados como herramientas para la comprensión del comportamiento de las arenas más que para resolver problemas industriales. Por eso, tienen algunos parámetros que no pueden ser medidos en ensayos convencionales y nunca han sido implementados en códigos generales.

Un modelo constitutivo para arenas que aspire a ser empleado por la industria debe tener, como mínimo, las siguientes características:

1. Respetto de los parámetros de entrada
  - (a) Deben ser determinables mediante procedimientos normalizados y conocidos por la comunidad geotécnica.
  - (b) Deben ser independientes del problema que se estudia: un único juego de parámetros debe capturar el comportamiento del material en todo el rango de tensión, densidad y deformación de interés ingenieril.
2. Respetto de la capacidad predictiva
  - (a) La resistencia al corte debe ser reproducida con precisión o conservadoramente para cualquier trayectoria de carga que produzca la falla del material.
  - (b) La deformación continuada debe conducir a un estado terminal, denominado estado crítico, en el que todas las variables de estado alcanzan un valor estacionario.

- (c) Las curvas “tensión-deformación” deben ajustarse razonablemente, al menos para los ensayos de laboratorio y trayectorias de carga que ocurren con mayor frecuencia en las aplicaciones prácticas.

### 3. Respecto de la implementación numérica

- (a) Debe ser suficientemente robusta como para que se puedan resolver problemas de valores de contorno complejos.
- (b) Debe emplear variables disponibles en los códigos de elementos finitos generales para geotecnia, que son básicamente códigos de elastoplasticidad.

## 1.2 Objeto de esta tesis

El primer objeto de esta tesis es el desarrollo de un modelo constitutivo para arenas con las características descritas en la sección anterior, y orientado al análisis rutinario de problemas de interacción suelo – estructura. Los problemas que deben ser simulados son, entre otros: i) cálculo de empujes y deformaciones de muros y tablestacas; ii) cálculo de resistencia y rigidez de bases y pilotes sometidos a carga estática; iii) problemas de interacción estática y dinámica entre suelo y estructuras; y iv) asentamiento de terraplenes y presas de materiales sueltos sometidos a acción sísmica; v) cálculo de coeficientes de seguridad; y vi) otros problemas en los que la deformación plástica por corte monotónico domina el comportamiento del material.

El segundo objeto de la tesis es la implementación del modelo en un programa de elementos finitos general, con una robustez suficiente como para que pueda ser aplicado a problemas reales de cualquier naturaleza. Se ha elegido efectuar la implementación en el programa de elementos finitos Plaxis, del cual la Facultad de Ingeniería UBA posee una licencia académica.

### 1.3 Organización y presentación

El documento está organizado en seis capítulos: i) esta introducción; ii) una descripción del comportamiento mecánico de los materiales friccionales; iii) la formulación e implementación de un modelo constitutivo para compresión isotrópica; iv) la formulación e implementación de un modelo constitutivo para falla por corte con deformaciones grandes; v) la formulación e implementación de un modelo constitutivo para corte monotónico y deformaciones moderadas; y vi) algunas consideraciones finales y oportunidades de investigación futura.

### 1.4 Notación

Las relaciones funcionales se indican con corchetes  $f = f[x]$ . Los tensores de segundo orden se escriben en negrita minúscula; los de cuarto orden en negrita mayúscula. Los tensores unitarios de segundo y cuarto orden se escriben respectivamente como  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{I}$ . La doble contracción, la contracción simple y la diada se escriben como  $\mathbf{a} : \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  and  $\mathbf{ab}$ .

La compresión es positiva. La presión media se define como

$$p = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} > 0 \quad (1.1)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones efectivas. No se admiten tensiones de tracción. La deformación volumétrica se define como

$$\varepsilon_v = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{1} \quad (1.2)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformaciones infinitesimales y  $\varepsilon_v > 0$  implica reducción de volumen.

Todas las operaciones son tensoriales excepto que se indique otra cosa en el texto. Para la presentación de resultados, los autovalores de  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se ordenan  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$

y  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ .

La proyección deviatorica de cuarto orden

$$\mathbf{I}^{dev} = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\mathbf{1} \quad (1.3)$$

se emplea para definir el tensor de tensiones y deformaciones deviatoricas

$$\mathbf{s} = \mathbf{I}^{dev} : \boldsymbol{\sigma} \quad (1.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \mathbf{I}^{dev} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.5)$$

También se emplea el tensor de oblicuidad de tensiones

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}/p \quad (1.6)$$

y su norma  $r = \|\mathbf{r}\|$  como medidas del estado tensional.

## 1.5 Agradecimientos

Es imposible aquí ensayar palabras de gratitud para Eduardo Núñez, mi Director de Tesis<sup>3</sup>. Núñez es mi maestro. Agregó conmigo un eslabón a una larga cadena que sigue hacia atrás con A. Bolognesi, primer profesor de Mecánica de Suelos de la Universidad de Buenos Aires. Núñez define esta circunstancia de una manera impersonal cuando dice: “usted contrae una deuda con la ingeniería”. No es cierto. Yo contraigo una deuda con él. Mi promesa es que nuevos eslabones premiarán su esfuerzo, pues así es la relación entre un maestro y su discípulo, y porque esa es la retribución que él merece y espera.

Otro profesor que tuvo una muy fuerte influencia en mi trabajo fue Eduardo Dvorkin, quien me transmitió su pasión por la mecánica computacional y, con infinita paciencia, me brindó su consejo y orientación a lo largo de los años. Fue la combinación de mi

---

<sup>3</sup>Aquí abandono la redacción impersonal.

experiencia con Núñez y Dvorkin lo que me orientó a desarrollar un trabajo en el campo de la geomecánica computacional.

Emir Macari, profesor entonces en Georgia Tech y autoridad en el ámbito de los modelos constitutivos para geomateriales, me invitó a una visita de estudio en 1998 que me permitió conocer el sistema universitario estadounidense, hacer algo de experiencia en los laboratorios de Georgia Tech y aprovechar su vasta biblioteca. En una segunda visita efectuada en 2006, cuando era el decano de ingeniería de la Universidad de Texas en Brownsville, Emir Macari me presentó a Guillermo Weber, quien fue desde entonces mi co-director de tesis, guía y fuente de referencia para la implementación numérica del modelo. El trabajo conjunto con Guillermo Weber fue continuo desde 2006 hasta la fecha y fue esencial en el logro del objetivo del programa de tesis.

A. Verri, P. Sanz y V. Calo - primero mis estudiantes y pronto mis amigos y compañeros de estudio - tuvieron largas discusiones conmigo sobre muchos aspectos de geotecnia, plasticidad y métodos numéricos. Mis colaboradores J. Laiún, M. Rousset, A. Comas, G. Quaglia, P. Serigós, A. Abad y J. Hasbani me ayudaron a preparar muchos de los gráficos.

Por último, mi familia. Betty me ayudó a terminar algo que comenzó antes que ella llegase a mi vida. Mis cinco hijos me prestaron buena parte del tiempo que les correspondía y que yo utilicé para desarrollar este trabajo. Mi padre, ingeniero geotécnico como yo, me enseñó a ver y a aprender de lo que veía. Mucho más importante, me enseñó a vivir y a disfrutar de mi trabajo.

Para todas estas personas, el reconocimiento volcado en estas líneas es relativamente poco importante. Sin embargo, es importante para mí reconocer y agradecer su invalorable ayuda y apoyo.

# Capítulo 2

## Comportamiento de las arenas

### 2.1 Introducción

Se puede presentar el problema conceptual del comportamiento mecánico de las arenas con dos referencias históricas:

Reynolds ([117], citado en [82]) observó que: “Un empaquetamiento denso de granos (colocado) dentro de una bolsa flexible invariablemente incrementa su volumen cuando la envoltura es deformada; si la envoltura es inextensible, pero no inflexible, no es posible ninguna deformación hasta que las fuerzas aplicadas rompen la bolsa o fracturan los granos.”

Mohr publicó ([96], citado en [151]): “Las deformaciones observadas en un cuerpo homogéneo luego de que se alcanza el límite de elasticidad no están confinadas a los más pequeños dominios del cuerpo. Consisten aproximadamente en el hecho de que partes del cuerpo de dimensiones finitas se desplazan respecto a otras en dos grupos de bandas de deslizamiento...”

Reynolds mostró por primera vez una característica de los materiales granulares: la dilatancia, que implica que un cambio en las tensiones de corte produce un cambio de volumen. Como el empaquetamiento de Reynolds es denso, el volumen crece y la

dilatancia es positiva. Los empaquetamientos sueltos, por el contrario, exhiben dilatancia negativa, lo que quiere decir que su volumen disminuye cuando se les aplica un esfuerzo de corte. La deformación no uniforme descrita por Mohr se observa claramente en los materiales granulares densos, fundamentalmente debido a que algunas zonas incrementan su volumen más que otras, lo que conduce a inestabilidad y localización de deformaciones.

En este capítulo se describe el comportamiento mecánico de las arenas. Las fuentes bibliográficas principales son [59][77][89][92][128][131][144][147][148][151].

## 2.2 Definiciones iniciales

### 2.2.1 Caracterización del empaquetamiento

Los materiales granulares son medios porosos compuestos por partículas sólidas y vacíos. La densidad del empaquetamiento se caracteriza mediante la relación de vacíos

$$e = v_v/v_s \tag{2.1}$$

donde  $v_v$  es el volumen de los vacíos y  $v_s$  es el volumen de las partículas sólidas. También se utiliza la porosidad  $n = v_v/(v_v + v_s)$  y el volúmen específico  $v = (v_v + v_s)/v_s$ . La relación de vacíos tiene un valor máximo normalizado  $e_{max}$  y uno mínimo  $e_{min}$  que permiten definir la densidad relativa

$$D_r = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}} \tag{2.2}$$

De acuerdo con esta definición, una arena es suelta si  $D_r < 1/3$ , medianamente densa si  $1/3 < D_r < 2/3$ , densa si  $2/3 < D_r < 3/4$ , y muy densa si  $D_r > 3/4$ .



## 2.2.2 La definición de resistencia en los materiales friccionales

En ingeniería se denomina “resistencia” a la capacidad que tiene un sólido de resistir acciones que tienden a cambiar su forma. En el caso de los materiales friccionales, ésta “resistencia” se identifica con la resistencia al corte. La resistencia al corte de un material friccional incoherente no es una propiedad del material, sino que depende de: i) la presión intergranular; ii) la densidad; y iii) la dirección del plano de eventual cizallamiento con respecto a las direcciones principales de anisotropía material.

La tensión de corte  $\tau_f$  que produce el cizallamiento de un plano se calcula con la ecuación de Mohr – Coulomb

$$\tau_f = \sigma_n \tan[\phi] \quad (2.3)$$

donde  $\sigma_n$  es la tensión normal que actúa en el plano y  $\phi$  es el ángulo de fricción interna. Esta expresión se aplica en todos los cálculos prácticos de la ingeniería geotécnica; en cada caso, se elige  $\phi$  en función del problema en estudio<sup>1</sup>.

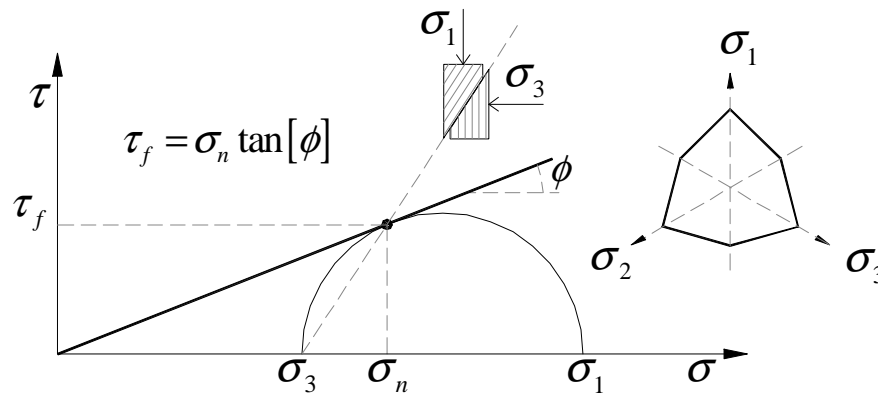


Figura 2-1: La ec. (2.3) del criterio de Mohr - Coulomb en coordenadas  $\tau - \sigma$ .

<sup>1</sup>Esta es una de las prácticas que requieren mayor experiencia profesional.

## 2.3 Resistencia

### 2.3.1 Componentes de la resistencia al corte

La resistencia al corte de las arenas proviene de la interacción de mecanismos físicos que se puede reducir de manera simplista a una contribución de la fricción mineral entre partículas y una contribución de la interferencia entre las trayectorias de las partículas que se desplazan. La fricción se caracteriza mediante el coeficiente de fricción  $\mu$  o del ángulo de fricción mineral

$$\phi_{\mu} = \text{atan}[\mu] \quad (2.4)$$

$\phi_{\mu}$  depende de la composición mineralógica de las partículas, de sus contaminantes superficiales y, en menor medida, de la composición del fluido intergranular.

La interferencia es la restricción cinemática al movimiento de partículas vecinas; depende de la forma de las partículas, de su distribución granulométrica y de la densidad del empaquetamiento. En una muestra suelta, las partículas en movimiento encuentran vacíos, caen en ellos, y el volumen del cuerpo disminuye. En una muestra densa las partículas se montan unas sobre otras, con trayectorias que se apartan de la dirección de desplazamiento macroscópico y que se traducen en dilatación. El cambio de volumen consume trabajo que debe ser aportado por la acción externa, por lo que la dilatación inducida por la interferencia intergranular constituye una componente de la resistencia del material.

### 2.3.2 Modelo de los dos bloques

La resistencia al deslizamiento entre dos cuerpos en contacto plano es proporcional a la fuerza de compresión normal al contacto. En el esquema de la figura 2-2, el bloque superior está en equilibrio si la tensión de corte  $\tau_n$  cumple con

$$\tau_n < \tau_f = \sigma_n \tan[\phi_{\mu}] \quad (2.5)$$

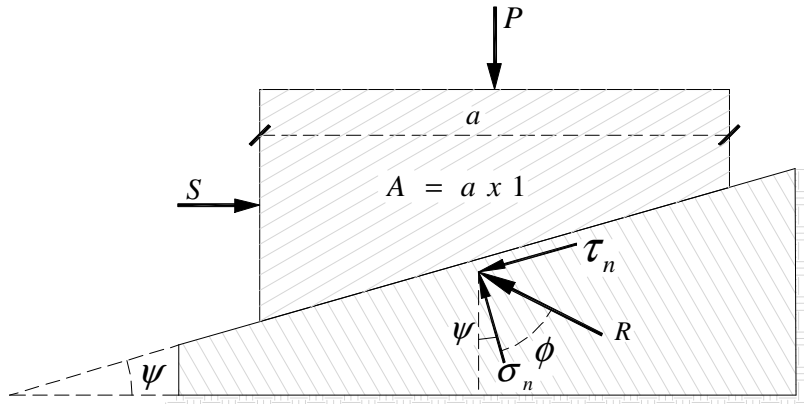


Figura 2-2: El modelo de los dos bloques para el análisis de la resistencia friccional.

Si se definen las tensiones  $\tau = S/A$  y  $\sigma = P/A$  referidas al área horizontal  $A$  del bloque superior, el equilibrio ahora requiere que

$$\tau < s = \sigma \tan [\phi] \quad (2.6)$$

donde  $s$  es una medida convencional de la resistencia al corte y

$$\phi = \phi_\mu + \psi \quad (2.7)$$

Por lo tanto, la resistencia al corte  $s$  depende del material, caracterizado por  $\phi_\mu$ , de la tensión “normal”<sup>2</sup>  $\sigma$ , y de la cinemática del movimiento, caracterizada por  $\psi$ .

### 2.3.3 Ensayo triaxial

En un ensayo triaxial típico, la tensión principal mayor  $\sigma_1$  crece de manera monótonica mientras se mantienen constantes  $\sigma_2 = \sigma_3$  hasta que se produce la falla del material. De manera idealizada puede considerarse que, sobre las superficies de deslizamiento que se

<sup>2</sup>Tensión normal al plano horizontal. Obsérvese que la tensión normal al plano de deslizamiento real es  $\sigma_n$  y no  $\sigma$ .

producen en el interior de la muestra, el conjunto de partículas presenta la cinemática que se muestra en la figura 2-3. En esta concepción, el ángulo  $\psi$  “aparente” depende del progreso de la deformación y de la topología de los contactos en cada instante.

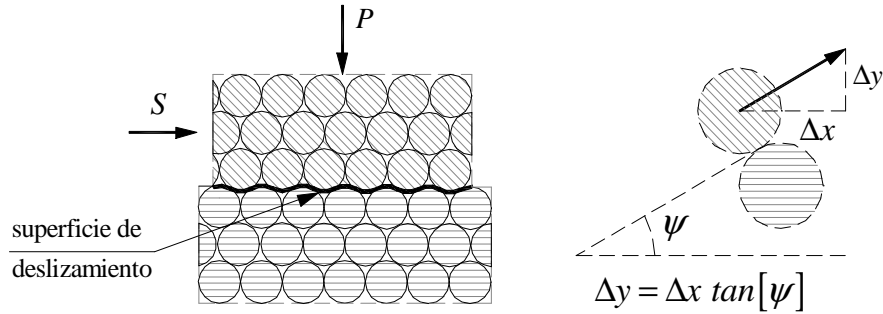


Figura 2-3: El modelo de los dos bloques en un conjunto de partículas.

En el momento de la falla, el cociente  $\sigma_1/\sigma_3$  alcanza su valor máximo, que puede ser calculado con la ec. (2.5) y que es igual a

$$(\sigma_1/\sigma_3)_f = N_{max} \quad (2.8)$$

donde

$$N_{max} = \tan^2 [\pi/4 + \phi/2] \quad (2.9)$$

Si se ejecutan ensayos distintos del ensayo triaxial de compresión,  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$  alcanza valores distintos de  $N_{max}$ , lo que prueba que la ec. (2.8) no configura un criterio de falla exacto para arenas. Aunque en la geotecnia clásica se define comúnmente un “ángulo de fricción interna” particular para cada uno de los ensayos que se ejecutan, en este trabajo  $\phi$  se define únicamente para el ensayo triaxial de compresión.

### 2.3.4 Estado crítico

Las deformaciones volumétricas debidas al reordenamiento de partículas tienden a cesar a medida que los contactos se disponen de forma estadísticamente paralela a la dirección

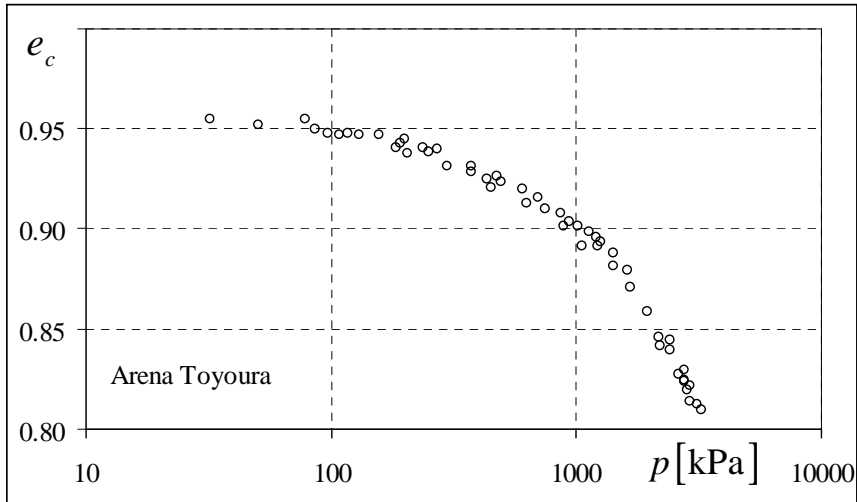


Figura 2-4: Relación de vacíos crítica en función de la presión para arena Toyoura [154].

macroscópica de movimiento. El estado de densidad resultante fue descrito por primera vez por Casagrande [19][20] como estado crítico y está caracterizado por la relación de vacíos crítica  $e_c$  y por el ángulo de fricción interna crítico  $\phi_c$ . En la analogía de los bloques, se cumple que  $\phi_c = \phi_\mu$ , mientras que para un material compuesto por partículas  $\phi_c > \phi_\mu$ .  $\phi_c$  es aproximadamente independiente de la presión. En cambio,  $e_c$  depende fuertemente de la presión media debido a los procesos de ruptura de partículas que ocurren a altas presiones. Como ejemplo, en la figura 2-4 se muestra la dependencia de la relación de vacíos crítica con respecto a la presión para arena Toyoura [154]. Cada punto es un ensayo. Aunque para cada punto se alcanzó un valor de  $e_c$  determinado, en todos los ensayos se midió  $\phi_c \approx 31^\circ$  [154].

La contribución de la fricción y de la interferencia se comprende mejor con la ayuda de la siguiente experiencia: Una caja llena con arena se inclina lentamente hasta que los granos comienzan a rodar por la superficie del talud. Se reduce entonces la inclinación de la caja hasta que las partículas se detengan. El ángulo máximo alcanzado por la caja es  $\phi$ , mientras que el ángulo que produce el cese el movimiento es  $\phi_c$ . La diferencia entre ambos es el efecto del empaquetamiento, mayor cuanto mayor es la densidad de

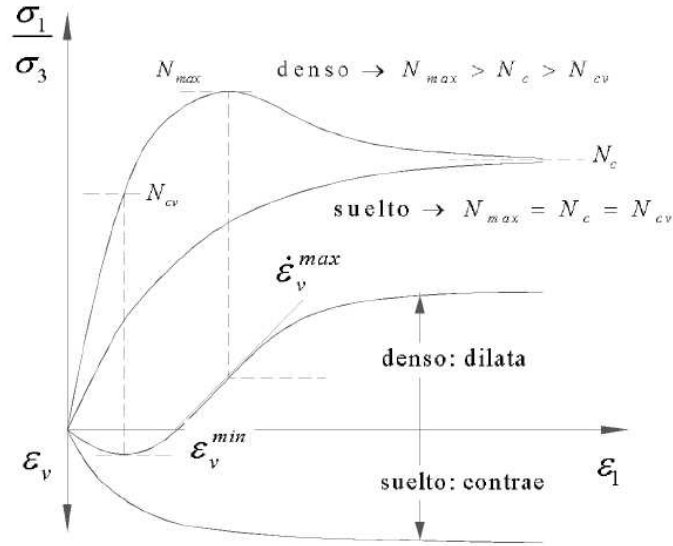


Figura 2-5:  $N_{max}$ ,  $N_{cv}$ ,  $N_c$  y el cambio de volumen de una arena suelta y otra densa.

la arena que llena la caja. Puesto que las partículas al rodar pierden completamente sus posiciones relativas,  $\phi_c$  es independiente de la densidad inicial de la arena y es una verdadera propiedad del material.

Existen dos estados en los que el material se deforma a volumen constante durante la carga monotónica: i) uno transitorio cuando el material cambia de contractivo a dilatante, en el que se define el ángulo de fricción a volumen constante  $\phi_{cv}$ ; y ii) el estado crítico final, en el que se define  $\phi_c$ . En la figura 2-5 se muestra la curva  $\sigma_1/\sigma_3 - \epsilon_1$  y  $\epsilon_v - \epsilon_1$  de ensayos triaxiales efectuados sobre arenas sueltas y densas, junto con los puntos que definen a  $N_{max}$  y a

$$N_{cv} = \tan^2 [\pi/4 + \phi_{cv}/2] \quad (2.10)$$

$$N_c = \tan^2 [\pi/4 + \phi_c/2] \quad (2.11)$$

En la figura 2-6 [123] se aprecia la relación entre  $\phi_c$ ,  $\phi_{cv}$ ,  $\phi_\mu$ ,  $\phi$  y la porosidad  $n$ . Existen numerosas fórmulas, no todas consistentes entre sí, que permiten predecir  $\phi_\mu$  a partir de

$\phi_c$  (ej. [8]). Horne [55][56] encontró una relación funcional teórica entre  $\phi_\mu$  y  $\phi_c$  que, para arenas naturales con  $24^\circ < \phi_c < 40^\circ$ , es numéricamente igual a  $\phi_c = \frac{8}{9}(\phi_\mu + 8^\circ)$ .

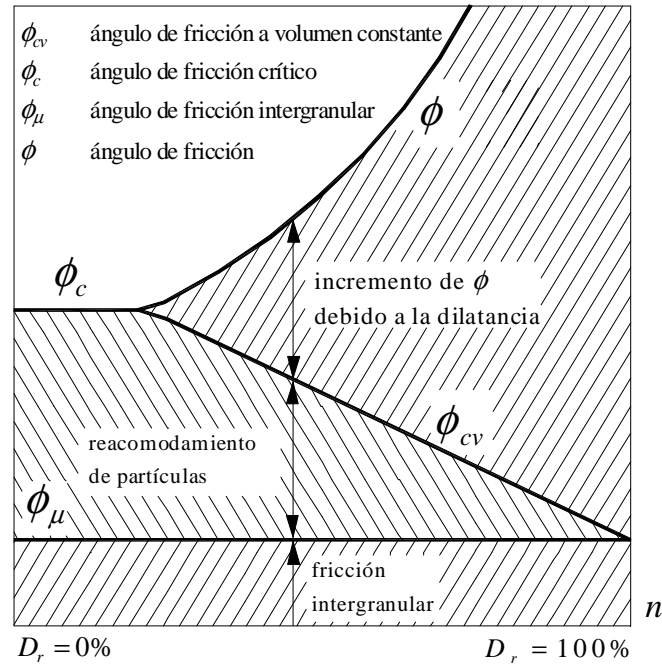


Figura 2-6: Influencia de la densidad relativa sobre la fricción, tomada de [123].

### 2.3.5 Estado de deformación constante

El estado de deformación constante es, para la compresión triaxial no drenada, el equivalente del estado crítico para la compresión drenada [19][20]. Fue definido por Poulos [115]:

“El estado constante de deformación ... es ese estado en el cual la masa se deforma continuamente a volumen constante, tensión normal efectiva constante, tensión de corte constante y velocidad constante. El estado constante de deformación se logra solamente después que la orientación de todas las partículas ha alcanzado estadísticamente una condición de estado

constante y despues que toda la rotura de partículas, si existe, se complete, de manera que la tensión de corte necesaria para continuar la deformación y la velocidad de deformación permanecen constantes”.

El estado constante de deformación es el elemento básico que se emplea en la actualidad para la caracterización del comportamiento de arenas sueltas bajo carga cíclica [21][22][28][29][58][59][115][154]. Sin embargo, los estados constante de deformación y crítico se deben a fenómenos físicos comunes [104][105], por lo que la caracterización del comportamiento de arenas en compresión no drenada puede hacerse mediante ensayos drenados [104][105][106].

Durante la compresión triaxial drenada, el material pasa por un estado transitorio en el que  $\dot{\epsilon}_v = 0$  y en donde  $\sigma_1/\sigma_3 = N_{cv}$ . El mismo estado transitorio se aprecia en la compresión triaxial no drenada - en la que siempre es  $\dot{\epsilon}_v = 0$  - como un punto estacionario en el que  $\dot{p} = 0$  kPa. En ese punto puede definirse un ángulo de transformación de fase  $\phi_{pt}$  tal que

$$\sigma_1/\sigma_3 = \tan^2 [\pi/4 + \phi_{pt}/2] \quad (2.12)$$

Al estado caracterizado por  $\phi_{pt}$  se lo denomina estado de cuasi deformación constante. En la figura 2-7 [59] se presenta el comportamiento esquemático de una arena ensayada a compresión triaxial no drenada, junto con las definiciones de estado de deformación constante y estado de cuasi deformación constate.

### 2.3.6 Resistencia máxima y presión media

Si se toma una muestra de arena densa, se la somete a una presión hidrostática reducida y se le aplica una tensión de corte monotónicamente creciente, los granos se deslizan unos sobre otros y el material falla con un gran desarrollo de dilatancia (por lo que  $\phi \gg \phi_c$ ). Luego de una cierta distorsión, el arreglo de partículas se desarma por completo y eventualmente se alcanza el estado crítico.

Si se repite la experiencia bajo una presión hidrostática muy elevada, se observa que



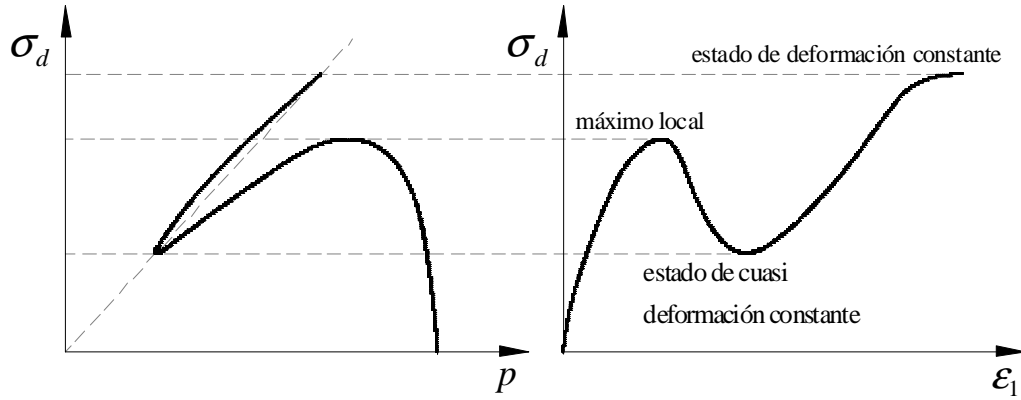


Figura 2-7: Definición de estado constante y cuasi estado constante de deformación [59].

las tensiones de contacto fracturan granos, aristas y salientes, que la muestra rompe sin dilatar y que exhibe un ángulo de fricción interna máximo  $\phi = \phi_c$  [20][89][123][125]. Existe una relación (casi) única entre densidad inicial, presión media y dilatancia, y una presión que suprime la dilatancia para cualquier densidad [7][35][144][156]. La figura 2-8 muestra resultados de ensayos de compresión triaxial de arena de Sacramento [79]. Se aprecia que el aumento de  $\sigma_3$  produce una disminución del ángulo de fricción interna máximo, medido a través del cociente  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$ .

La dependencia de  $\phi$  con respecto a la presión es tenida en cuenta en la mayoría de los análisis modernos de presas de materiales sueltos [24][25][26][41] [80][101][107][126] [133][138][141][144]. Las expresiones preferidas son de la forma

$$\phi = \phi_0 - \Delta\phi \log [p/p_{atm}] \quad (2.13)$$

donde  $\phi_0$  y  $\Delta\phi$  son parámetros y  $p_{atm}$  es la presión atmosférica.

Bolton [11][12] sistematizó algunos resultados de arenas de distinta procedencia y características físicas e introdujo una definición de densidad relativa dependiente de la

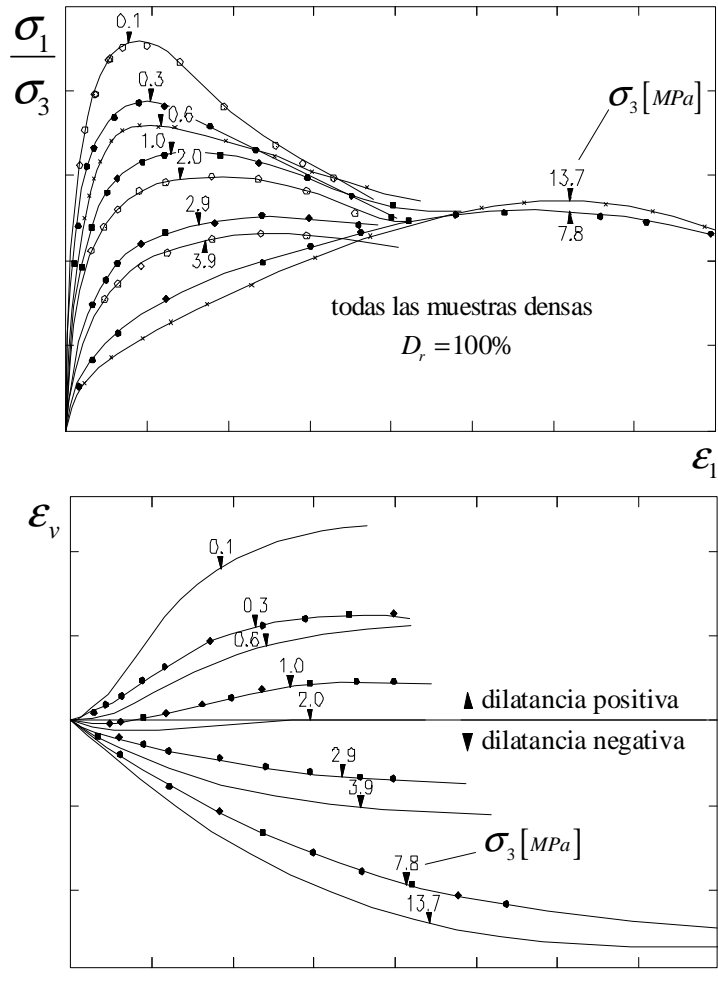


Figura 2-8: Ensayos triaxiales de arena Sacramento densa a diferentes presiones de confinamiento, adaptado de Lee [78] [79].

presión cuya expresión es

$$I_R = D_r (Q - \ln [p / (1 \text{ kPa})]) - R \quad (2.14)$$

donde  $Q$  y  $R$  son parámetros de ajuste. A partir de esta definición, Bolton propuso la siguiente relación funcional

$$\phi = \phi_c + 3^\circ I_R \quad (2.15)$$

Been y Jefferies [4] definieron el parámetro de estado

$$\Psi = e - (e_{ss} - \lambda \ln [p/p_{atm}]) \quad (2.16)$$

donde  $\lambda$  y  $e_{ss}$  son parámetros materiales. Establecieron que dos muestras de arena con un mismo valor de  $\Psi$  presentan el mismo comportamiento si son ensayadas al corte no drenado. Si  $\Psi \simeq 0$  el material está en estado crítico; si  $\Psi > 0$  la muestra contrae; si  $\Psi < 0$  el material dilata [4][5][61]. El término  $(e_{ss} - \lambda \ln [p/p_{atm}])$  caracteriza la dependencia de la relación de vacíos crítica con respecto a la presión.

### 2.3.7 Estado triaxial general

El criterio de falla de Mohr-Coulomb ignora la contribución de la tensión intermedia  $\sigma_2$  en la resistencia del material. Sin embargo, se sabe que  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$  es sistemáticamente superior en deformación plana que en condiciones triaxiales, para un mismo estado de densidad y de presión media [34][44][63][70][82][90][109][124][142]. Se acepta que éste fenómeno se produce porque en estados distintos al de compresión triaxial las partículas experimentan una mayor restricción al movimiento relativo, lo que se traduce en un mayor trabajo de deformación y en una mayor disipación de energía por fricción intergranular.

Lade y Duncan [70][71] y Lade [72][73][74] presentaron el criterio de falla

$$I_1^3 - \kappa I_3 = 0 \quad (2.17)$$

donde  $I_1$  e  $I_3$  son los invariantes canónicos de  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\kappa$  es un parámetro material. Lade y Duncan [70][71], Lade y Kim [75][76] y Kim y Lade [62] también mostraron que la deformación plástica es aproximadamente normal a la traza deviatorica de la ec. (2.17). Matsuoka y Nakai [90][91][99] presentaron la expresión

$$I_1 I_2 - M_f I_3 = 0 \quad (2.18)$$

donde el parámetro material  $M_f$ , calibrado en un ensayo de compresión triaxial, vale

$$M_f = 9 + 8 \tan^2 [\phi] \quad (2.19)$$

Las ecs. (2.17) y (2.18) son muy similares. La diferencia más importante es que la ec. (2.17) produce un valor de  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$  mayor en extensión triaxial que en compresión triaxial, mientras que la ec. (2.18) predice que el cociente  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$  en extensión triaxial es igual al de compresión triaxial. La comparación entre los criterios de Tresca, Von Mises, Mohr–Coulomb y Matsuoka–Nakai puede verse en la figura 2-9 [91].

De acuerdo a esta interpretación, la falla de los materiales friccionales ocurre cuando se alcanza la resistencia al corte en el plano espacial movilizado ( $SMP$ ), punto  $P$  de la mitad inferior de la figura 2-9, análogo al plano octaédrico de Von Mises que se define en el punto  $P$  de la mitad superior de la figura.

Las tensiones en el  $SMP$  se calculan con las expresiones

$$\sigma_{SMP} = \frac{3I_3}{I_2} \quad (2.20)$$

$$\tau_{SMP} = \sqrt{\frac{I_1 I_3}{I_2} - \left(\frac{3I_3}{I_2}\right)^2} \quad (2.21)$$

y cumplen con la relación

$$\tau_{SMP} = \sqrt{\frac{8}{9}} \sigma_{SMP} \tan [\phi_{SMP}] \quad (2.22)$$

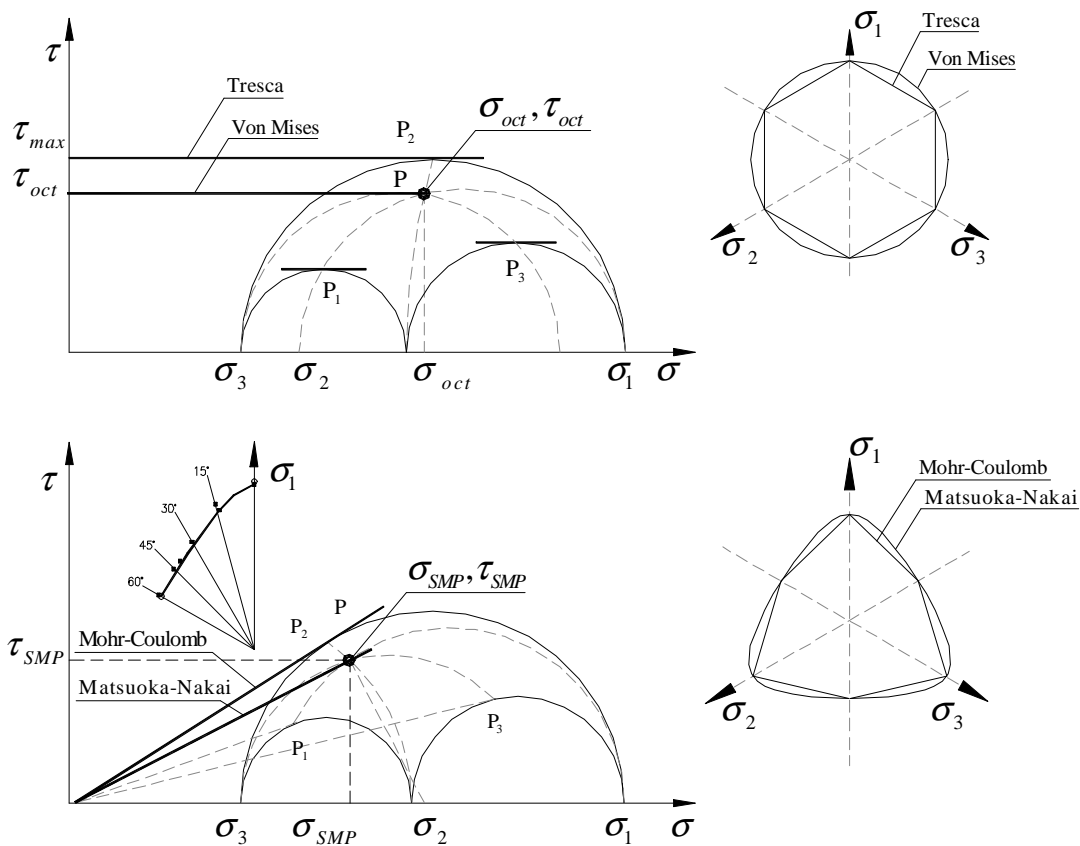


Figura 2-9: Comparación entre los criterios de Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb y Matsuoka-Nakai [91].

lo que permite apreciar la similitud formal que existe entre el criterio de Matsuoka-Nakai y el criterio de Mohr-Coulomb.

## 2.4 Rigidez

La rigidez macroscópica de un conjunto de partículas obedece a una compleja interrelación entre granos, que incluye su compresión elástica, deslizamientos y ruptura. Para un mismo estado tensional de mesoescala, la cantidad de contactos activos crece con la densidad relativa mientras que las fuerzas que actúan en los contactos y las tensiones dentro de las partículas disminuyen. Por todo ésto, las arenas densas tienen mayor

rigidez y un rango de comportamiento “elástico” mayor que las arenas sueltas.

### 2.4.1 Elasticidad y contacto Hertziano

Dos esferas elásticas de radio  $R$ , módulo de Young  $E$  y módulo de Poisson  $\nu$ , comprimidas entre sí por una fuerza  $N$ , se deforman como se muestra en la figura 2-10. El acercamiento  $u$  entre los centros de las esferas es

$$u = 2 \left( \frac{3(1-\nu^2)N}{4E\sqrt{R}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.23)$$

mientras que la rigidez volumétrica asociada es

$$K = C_K \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^m p_{ref} \quad (2.24)$$

donde  $C_K$  es un parámetro que depende de  $E$ ,  $\nu$ ,  $R$  y de la densidad del empaquetamiento,  $p$  es la presión media,  $p_{ref}$  es una presión de referencia para adimensionalización y  $m = 1/3$ . La misma teoría predice que cuando un cono indenta una superficie roma, el exponente de la ec. (2.24) es  $m = 1/2$ .

La rigidez volumétrica de mesoescala está formada por la interacción de muchas partículas de diferentes formas y tamaños, y puede calcularse de forma aproximada con la ec. (2.24). En este caso,  $C_K$  y  $m$  deben ser determinados experimentalmente. Se ha indicado [163] que  $1/2 \leq m \leq 1/2$ , lo que sugiere que las condiciones de contacto esfera – esfera y cono – plano constituyen casos extremos del comportamiento de los materiales reales.

Pestana estudió la influencia de  $e$  sobre  $C_K$  y propuso la expresión [109][110]

$$C_K = c_b \frac{1+e}{e} \quad (2.25)$$

donde  $c_b$  es un parámetro material.

La rigidez al corte  $G$  se origina en los mismos fenómenos físicos que controlan a la

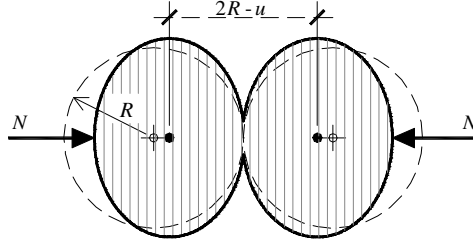


Figura 2-10: Compresión de dos esferas elásticas.

rigidez volumétrica  $K$ . Para materiales isótopos, está bien establecido que  $G$  puede caracterizarse mediante expresiones del tipo

$$G \propto \left( \frac{\sigma_i \sigma_j}{p_{ref}} \right)^m p_{ref} \quad (2.26)$$

donde  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  son las tensiones actuantes en el plano de propagación y polarización de la onda de corte [127][128]. Dentro de las limitaciones de la elasticidad isotrópica, son muy empleadas las formas [49][50][66][118]

$$G = C_G \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^m p_{ref} \quad (2.27)$$

en la que  $C_G$  es constante o función de la relación de vacíos. De las muchas expresiones propuestas para  $C_G$ , la más utilizada es [49][50][66][118]

$$C_G = c_s \frac{(c_e - e)^2}{1 + e} \quad (2.28)$$

con parámetros materiales  $c_s$  y  $c_e$ .

Santamarina y Cascante [127] revisaron teorías que permiten calcular la relación de Poisson elástica de empaquetamientos regulares e irregulares de esferas de tamaño uniforme. Mostraron que la relación de Poisson  $\nu$  del empaquetamiento depende de la relación de Poisson  $\nu_m$  del material que forma las esferas y de la topología del empaquetamiento. Los valores de  $\nu$  que se obtienen con  $\nu_m = 0.30$ , un valor típico

para minerales que forman arenas, van desde  $\nu = 0.00$  para un empaquetamiento cúbico a  $\nu = 0.05$  para un empaquetamiento cúbico centrado en el cuerpo [127][128]. Las arenas naturales pueden tener empaquetamientos más densos que el cúbico centrado en el cuerpo, por lo que pueden esperarse valores máximos  $\nu > 0.10$ .

### 2.4.2 Rango elástico y disipación de energía

Las arenas son materiales disipativos aún para pequeños rangos de deformación. El fenómeno físico que justifica este comportamiento puede explicarse con el siguiente experimento ideal.

Se toma un empaquetamiento desordenado y denso de esferas elásticas y se lo somete a una presión hidrostática. Se observan algunos deslizamientos de contactos, que cesan cuando las tensiones de corte locales son iguales a la resistencia al corte dada por la fricción entre esferas. Los contactos que deslizan quedan en “falla” por corte mientras que otros contactos quedan con fuerzas tangenciales menores a su resistencia friccional. Analizado en mesoescala, el material está sometido a una presión hidrostática, y por lo tanto libre de tensiones de corte; sin embargo, tiene deformaciones irreversibles dadas por los mencionados deslizamientos de partículas.

Se analiza ahora el comportamiento de uno cualquiera de los contactos que no está en falla por corte como el que se esquematiza en la figura 2-11 [39]. El contacto tiene una fuerza normal  $N$  y una fuerza tangencial

$$T < N \tan [\phi_{\mu}] \quad (2.29)$$

La superficie del contacto, según la teoría de contacto de Hertz, es un círculo de radio

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{E} NR} \quad (2.30)$$

La distribución de tensiones normales dentro del contacto sigue una ley parabólica,



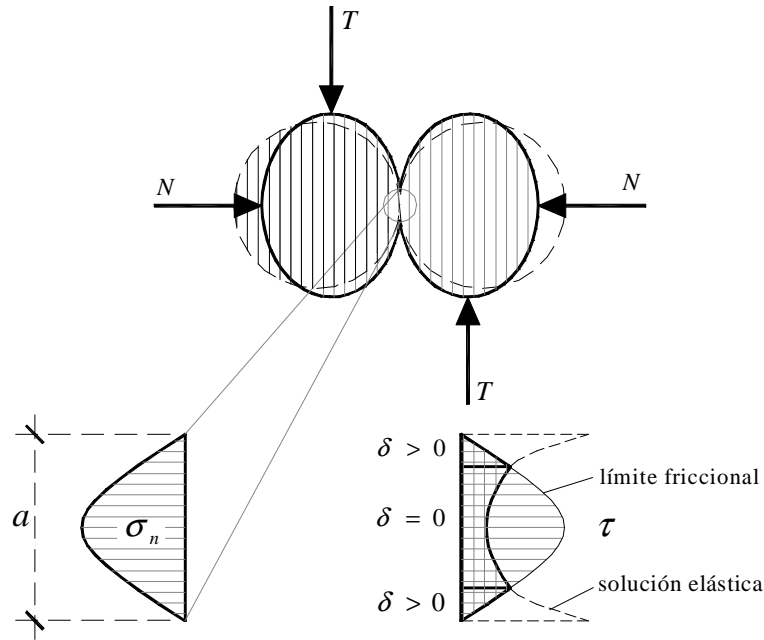


Figura 2-11: Distribución de tensiones normales y tangenciales en el contacto de dos esferas elásticas [39].

con un máximo en el centro y un valor nulo en el perímetro. La componente  $T$  paralela al contacto produce tensiones de corte  $\tau$ , infinitas en el perímetro según la teoría de contacto elástico. La resistencia friccional limita el valor en cada punto a  $\tau_f = \sigma \tan[\phi_\mu]$ , por lo que el contacto desarrolla una corona de deslizamiento relativo ( $\tau = \tau_f$ ) y un núcleo en estado elástico ( $\tau < \tau_f$ ).

Debe notarse que no se requiere que haya un movimiento de cuerpo rígido entre las dos esferas para que se produzca la corona de plastificación en el contacto, y con ella la disipación de energía en forma de trabajo plástico. Por lo tanto, se concluye que la compresión hidrostática de esferas rígidas es un fenómeno disipativo para cualquier escala de deformación.

### 2.4.3 Módulo de Young inicial

El módulo de Young fue el primer parámetro que se usó para caracterizar la rigidez de los geomateriales. Parece ser que la primera caracterización del módulo de Young para arenas se debe a Scheidig, y se conoce a través de la figura 2-12, incluida en el libro de Terzaghi y Peck [148], en el que se relacionan la rigidez inicial en el ensayo triaxial, la densidad relativa y la presión de confinamiento  $\sigma_3$ . La rigidez inicial en el ensayo triaxial se define como

$$E_i = \left. \frac{d\sigma_d}{d\varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1=0} \quad (2.31)$$

donde

$$\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (2.32)$$

y  $\varepsilon_1$  es la deformación principal mayor. La figura 2-12 muestra tres características de las arenas: i)  $E_i$  crece con  $D_r$ ; ii)  $E_i$  crece con  $p$ ; y iii) la dependencia entre  $E_i$  y  $p$  disminuye a medida que crece  $D_r$ . Estas conclusiones coinciden con las de muchos otros trabajos posteriores (ej. [35][64][104][119]). Es sorprendente la precisión de la figura 2-12, sobre todo si se tiene en cuenta que fue escrita cuando las técnicas de medición de tensiones y deformaciones en el laboratorio eran muy rudimentarias.

Jambu [60], en base a trabajos anteriores de Schultze y Moussa [132], desarrolló la expresión

$$E_i = C_E \left( \frac{\sigma_3}{p_{atm}} \right)^m p_{atm} \quad (2.33)$$

donde  $E_i$  es el módulo de Young inicial, mientras que  $C_E$  y  $m$  son parámetros materiales.

Núñez [104] [105] estableció las correlaciones

$$100 + 2000 D_r^2 \leq C_E/p_{ref} \leq 100 + 2000 D_r \quad (2.34)$$

$$1/3 + 2/3 (D_r - 1)^2 \leq m \leq 1 - 2/3 D_r \quad (2.35)$$

En la definición de  $E_i$  se incluyen tanto deformaciones reversibles como irreversibles, lo que explica porqué el exponente  $m$  puede caer por fuera de los límites dados por la

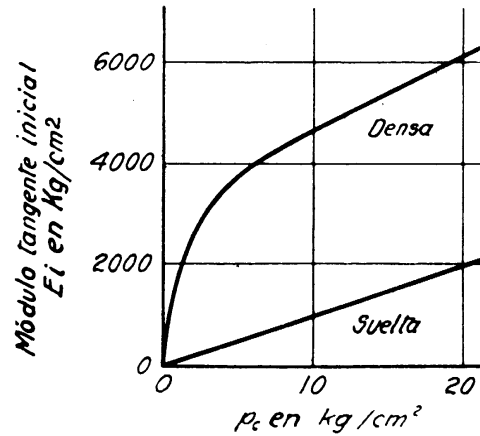


Figura 2-12: Relación entre el módulo de deformación, la densidad y la presión de confinamiento (aporte de Scheidig, publicado en [148]).

teoría de contacto elástico.

La rigidez “elástica”, medida en descarga, es mayor que  $E_i$ . Fue caracterizada por Duncan [41] mediante la expresión

$$E_{ur} = K_{ur} \left( \frac{\sigma_3}{p_{atm}} \right)^n p_{atm} \quad (2.36)$$

donde  $K_{ur}$  es un parámetro. Al respecto, Duncan [41] escribió:

“El valor de  $K_{ur}$  es siempre mayor a  $C_E^3$  (para primera carga).  $K_{ur}$  puede ser 20% mayor que  $C_E$  para suelos rígidos como (por ejemplo) arenas densas. Para suelos compresibles como (por ejemplo) arenas sueltas,  $K_{ur}$  puede ser tres veces más grande que  $C_E$ . El valor del exponente  $n$  es siempre muy similar para primera carga y descarga, y en las relaciones hiperbólicas se asume que es el mismo.”

<sup>3</sup>La notación se ajustó por consistencia con el resto del documento.

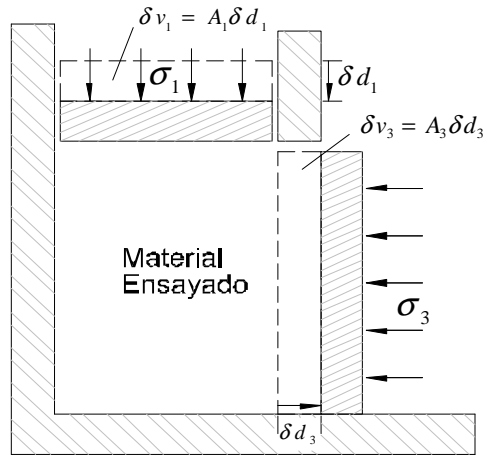


Figura 2-13: Dispositivo esquemático para ilustrar la teoría de tensión-dilatancia de Rowe [123] [124] [125].

#### 2.4.4 Teoría de tensión – dilatancia de Rowe

La teoría de tensión – dilatancia de Rowe [123][124][125] relaciona el estado de tensiones y la velocidad de dilatancia. Puede ser introducida de manera simplificada con el auxilio de la figura 2-13, que muestra un sistema de dos pistones que encierran un material de prueba.

El primer material de prueba es un fluido incompresible. Puede observarse que el desplazamiento del pistón superior hacia abajo es posible únicamente si el pistón lateral se desplaza hacia afuera. En este caso, el trabajo incremental efectuado por las tensiones principales mayor y menor es

$$\dot{w}_{in} = \|\sigma_1 \delta v_1\| \quad (2.37)$$

$$\dot{w}_{out} = \|\sigma_3 \delta v_3\| \quad (2.38)$$

donde  $\delta v_1 = A_1 \delta d_1$  y  $\delta v_3 = A_3 \delta d_3$ . Como no se disipa trabajo en la deformación, se verifica que

$$\dot{w}_{in} = \dot{w}_{out} \quad (2.39)$$

Como el fluido es incompresible,  $\delta v_3 = \delta v_1$ , por lo que  $\sigma_1 = \sigma_3$ . El ensayo se repite, reemplazando al fluido incompresible por un fluido dilatante. Por continuidad,

$$\delta v_3 = (1 - \partial v / \partial d_1) \delta v_1 \quad (2.40)$$

donde  $v = v_1 + v_3$  y  $\partial v / \partial d_1$  es un coeficiente de dilatancia. La aplicación de la ec. (2.39) arroja

$$\sigma_1 = (1 - \partial v / \partial d_1) \sigma_3 \quad (2.41)$$

lo que muestra que el flujo de un material dilatante sólo es posible si  $\sigma_1 > \sigma_3$ , aún si el material es un fluido sin resistencia al corte.

Si el dispositivo se llena con partículas rígidas e irrompibles de arena en el estado crítico, el flujo isocórico ocurre para la relación de tensiones

$$\sigma_1 = N_c \sigma_3 \quad (2.42)$$

Si se multiplica el primer término de la ec. (2.42) por  $\delta v_1$  y el segundo término por  $\delta v_3$  y se tiene en cuenta que el flujo isocórico implica  $\delta v_3 = \delta v_1$ , queda

$$\dot{w}_{in} = N_c \dot{w}_{out} \quad (2.43)$$

que es la expresión general de la teoría de tensión dilatancia de Rowe [123][125].

Para un material friccional dilatante, la condición de continuidad  $\delta v_3 = \delta v_1$  se reemplaza por la ec. (2.40), por lo que

$$\sigma_1 = (1 - \partial v / \partial d_1) N_c \sigma_3 \quad (2.44)$$

que es la forma reducida de la teoría tensión-dilatancia de Rowe para flujo 2D [123][125].

Si se inserta la ec. (2.8) en la ec. (2.44) se obtiene

$$N_{max} = (1 - \partial v / \partial d_1)_{max} N_c \quad (2.45)$$

lo que muestra que el ángulo de fricción interna  $\phi$  que define a  $N_{max}$  depende del ángulo de fricción interna crítico  $\phi_c$  que define a  $N_c$  y de la cinemática del flujo de partículas caracterizada por  $\partial v / \partial d_1$  [38][123][125].

Como se muestra en la figura 2-5, el punto de la curva  $\sigma_1 / \sigma_3 - \varepsilon_1$  en el que  $\partial v / \partial d_1 = 0$  ocurre para  $\sigma_1 / \sigma_3 = N_{cv}$  por lo que la ec. (2.43) debe ser reemplazada por

$$\dot{w}_{in} = N_{cv} \dot{w}_{out} \quad (2.46)$$

La ec. (2.46) se puede particularizar para los ensayos de compresión triaxial, extensión triaxial y deformación plana [125]. Quedan las expresiones

$$\begin{aligned} \text{compresión triaxial} & \quad \frac{\sigma_1 \dot{\varepsilon}_1}{2\sigma_3 \dot{\varepsilon}_3} = N_{cv} \\ \text{extensión triaxial} & \quad \frac{2\sigma_1 \dot{\varepsilon}_1}{\sigma_3 \dot{\varepsilon}_3} = N_{cv} \\ \text{deformación plana} & \quad \frac{\sigma_1 \dot{\varepsilon}_1}{\sigma_3 \dot{\varepsilon}_3} = N_{cv} \end{aligned} \quad (2.47)$$

El fundamento mecanicista de la eq. (2.44) puede seguirse con la ayuda de la figura 2-14, en la que un arreglo de partículas rígidas está sometido a tensiones exteriores [123]. Como lo explica el modelo de los bloques, el desplazamiento relativo de dos partículas requiere que

$$P_1 = P_3 \tan [\phi_\mu + \beta] \quad (2.48)$$

La dirección del deslizamiento inicial está dada por el ángulo  $\beta$ , por lo que el cambio de volumen es

$$\partial \varepsilon_v / \partial \varepsilon_1 = 1 - \tan [\alpha] \tan [\beta] \quad (2.49)$$

La geometría del empaquetamiento permite calcular el cociente entre tensiones

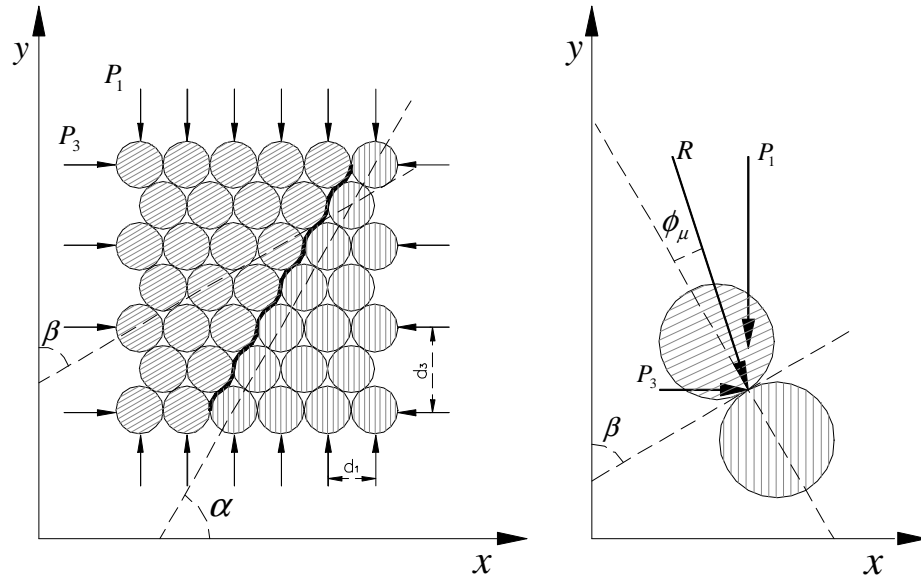


Figura 2-14: Esquema de Rowe que indica la relación entre el plano de deslizamiento y la dirección del deslizamiento.

principales durante el deslizamiento como

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{P_1/d_1}{P_3/d_3} = \tan[\phi_\mu + \beta] \tan[\alpha] \quad (2.50)$$

Rowe [123] postuló que la razón entre el trabajo recibido  $P_1 dy$  y el ejercido contra el confinamiento  $P_3 dx$  es un mínimo

$$\min[\dot{E}] = \frac{P_1 dy}{P_3 dx} = \frac{\tan[\phi_\mu + \beta]}{\tan[\beta]} \quad (2.51)$$

lo que permite calcular  $\beta = \pi/4 - \phi_\mu/2$  que, reemplazado en las ecs. (2.50) y (2.49) arroja

$$\sigma_1/\sigma_3 = \tan^2[45 + \phi_\mu/2] (1 - \partial\varepsilon_v/\partial\varepsilon_1) \quad (2.52)$$

donde

$$N_\mu = \tan^2[45 + \phi_\mu/2] \quad (2.53)$$

Otra vez, se encuentra que la teoría tiene mayor capacidad predictiva si se reemplaza  $N_\mu$  por  $N_{cv}$ . Una discusión sobre la relación entre  $\phi_{cv}$  y  $\phi_\mu$  puede verse en [55][56].

La teoría tensión-dilatancia puede ser empleada en el marco de la teoría de la plasticidad. Por ejemplo, para estado triaxial de compresión, la teoría de tensión-dilatancia es equivalente a [36][155]

$$\dot{\epsilon}_v^p = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \mathbf{sin}[\phi_{cv}]}{\sigma_1 + \sigma_3 - (\sigma_1 - \sigma_3) \mathbf{sin}[\phi_{cv}]} \dot{\gamma}_V^p \quad (2.54)$$

donde  $\dot{\epsilon}_v^p$  es la deformación plástica volumétrica y

$$\dot{\gamma}_V^p = 2\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_v^p \quad (2.55)$$

es una medida de distorsión plástica. Existen muchas otras expresiones que relacionan  $\dot{\epsilon}_v$  con la relación  $\sigma_1/\sigma_3$  (ej. [27][131][144]). Sin embargo, la teoría tensión-dilatancia de Rowe permite una mejor comprensión del comportamiento del material, a la vez que tiene una adecuada capacidad predictiva, al menos para los ensayos de laboratorio más utilizados.

### 2.4.5 Cambio de volumen en descarga

Durante la descarga también se producen cambios de posición entre partículas que a su vez producen cambios de volumen irreversibles. Como todo proceso irreversible, el cambio de volumen en descarga está asociado a disipación de energía [23][61][108]. Por lo tanto, existe una restricción termodinámica que limita el cambio de volumen irreversible debido a un cambio de oblicuidad tensional. En efecto, el trabajo plástico instantáneo es

$$\dot{w} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = p\dot{\epsilon}_v^p + \mathbf{s} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d^p \quad (2.56)$$



y tiene que ser positivo. Por lo tanto, durante la descarga tiene que cumplirse que

$$\dot{\varepsilon}_v^p + \mathbf{r} : \dot{\varepsilon}_d^p > 0 \quad (2.57)$$

donde  $\varepsilon_d^p$  es la deformación plástica deviatorica. Esta restricción se observa en los resultados experimentales. En la figura 2-15 se muestra un resultado típico de un ensayo triaxial cíclico no drenado, en el que se aprecia que los diferentes ciclos producen una acumulación de presión neutra y, por lo tanto, una disminución de la presión efectiva [136]. Puede observarse que todas las ramas de descarga son puramente contractivas, mientras que las ramas de carga cambian de contractivas a dilatantes para una dada oblicuidad tensional.

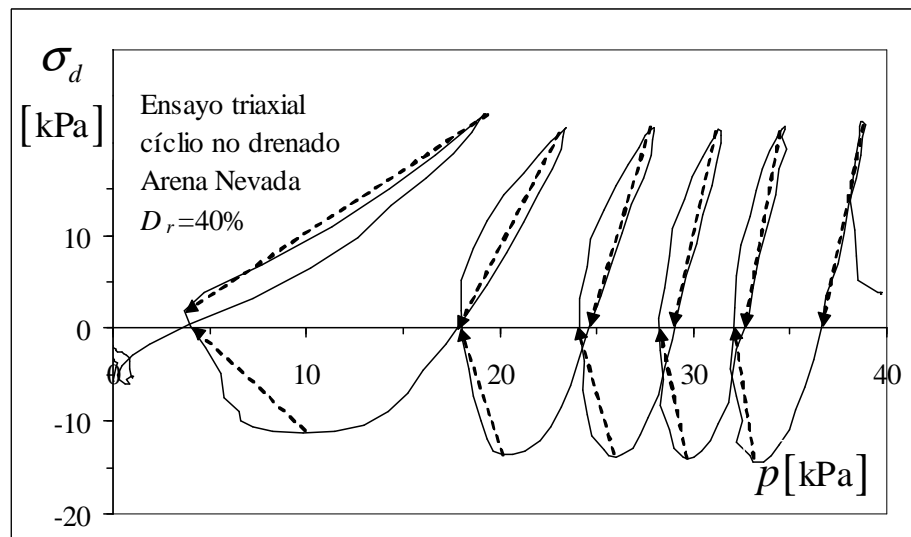


Figura 2-15: Ensayo triaxial no drenado cíclico de arena Nevada [2], que prueba que las arenas tienden a contraer en descarga.

### 2.4.6 Reducción de la rigidez secante por deformación

La evolución de los mecanismos disipativos de los materiales friccionales se estudia a través de las curvas de reducción de rigidez al corte secante o del módulo de deformación

secante

$$G_s = \tau/\gamma \quad (2.58)$$

$$E_s = \sigma_d/\varepsilon_1 \quad (2.59)$$

en ensayos de compresión triaxial, deformación plana, torsión anular y de columna resonante. Las curvas se normalizan siempre con respecto a la rigidez máxima, que se asume en este trabajo igual a la rigidez elástica  $G$  o  $E$ , respectivamente, porque se aprecia que esta normalización elimina el efecto de la relación de vacíos y produce una (casi) única curva  $G_s/G - \gamma$  o  $E_s/E - \varepsilon_1$  [41][49][50][58][66][118].

Se aprecia que  $G_s$ , medido en ensayos de carga cíclica, depende del nivel máximo de distorsión alcanzado [49][50][58][163]: para distorsiones menores a  $10^{-5} - 5 \cdot 10^{-4}$  el comportamiento es (casi) reversible; en el rango  $10^{-4} - 10^{-2}$  se desarrollan deformaciones irreversibles y una fuerte reducción de  $G_s$ ; si la distorsión es mayor, sobreviene la ruptura, con eventual ablandamiento y localización de deformaciones. La figura 2-16 muestra la relación  $G_s/G - \gamma$  a partir de ensayos triaxiales cíclicos de arena Toyoura, adaptados de [66].

La curva llena de la figura 2-16 corresponde al modelo hiperbólico para carga cíclica [49][50]. Su expresión es

$$G_s = \frac{1}{1/G + \gamma/\tau_f} = G(1 - \tau/\tau_f) \quad (2.60)$$

donde  $\gamma$  es la distorsión y  $\tau_f$  es la tensión de corte de falla. La rigidez tangente  $G_t = \partial\tau/\partial\gamma$  correspondiente, expresada como función del estado tensional, es

$$G_t = G(1 - \tau/\tau_f)^2 \quad (2.61)$$

La evolución de  $G_s/G$  puede estudiarse también en un gráfico  $G_s/G - \tau/\tau_f$ , como se muestra en la figura 2-17 [142]. Se aprecia que la curva  $G_s/G - \tau/\tau_f$  es muy distinta para

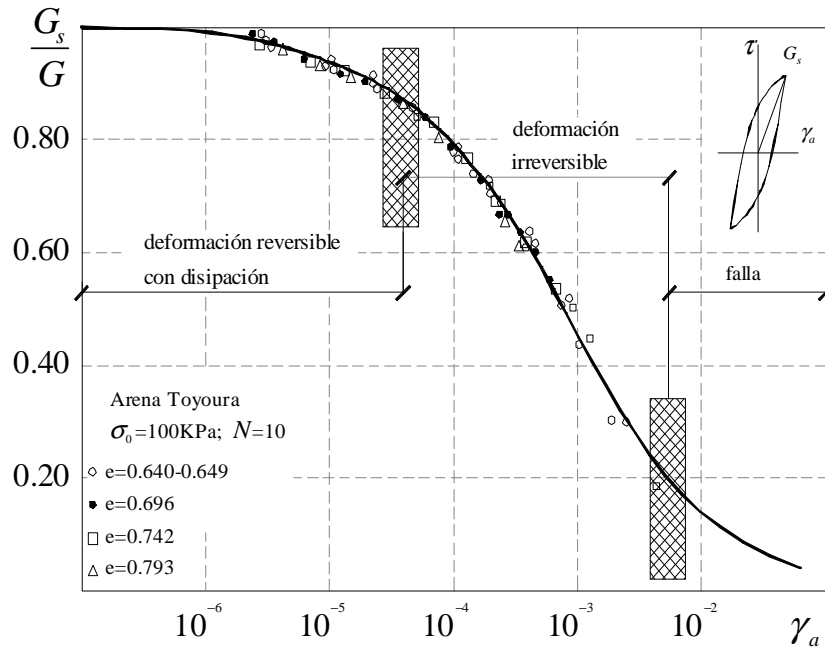


Figura 2-16: Relación entre el módulo secante y el módulo inicial, para 10 ciclos de carga y para diferentes relaciones de vacíos. Arena Toyoura, de [66].

carga monotónica y cíclica. Se entiende que la causa de esta diferencia es que durante la carga monotónica los contactos entre partículas se reorientan progresivamente hasta que se genera una superficie de falla, mientras que en carga cíclica se producen inversiones que regeneran el núcleo elástico de algunos contactos y aumentan la rigidez macroscópica.

El acoplamiento entre el cambio de las tensiones de corte y el cambio de volumen se traduce en los siguientes fenómenos: i) una carga alternativa moderada produce densificación y rigidez creciente; ii) una carga alternativa cercana a la falla produce dilatancia y falla con ablandamiento [165][166]. La figura 2-18 muestra el efecto de la amplitud de carga alternativa en el comportamiento del material.

Kondner y Zelasko [67] y Kondner [68] propusieron una relación tensión – deformación hiperbólica de expresión

$$\sigma_d = \frac{\varepsilon_1}{a + b \varepsilon_1} \quad (2.62)$$

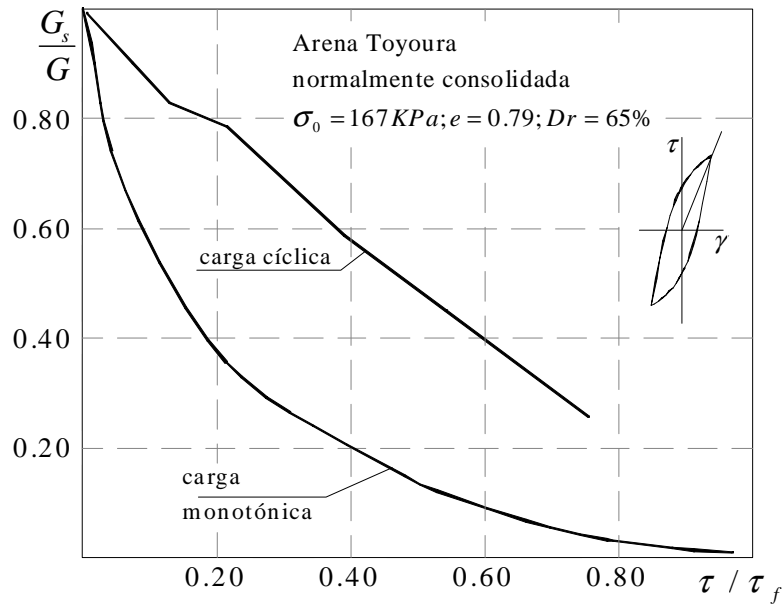


Figura 2-17: Módulo secante en ensayos monotónicos y cíclicos de arena suelta, según [142].

en la que  $a$  y  $b$  son parámetros. Luego, Duncan y Chang [40] y Duncan [41] desarrollaron esta expresión y la convirtieron en una ecuación constitutiva hipoelástica de enorme difusión y utilización en ingeniería práctica. En condiciones triaxiales, la expresión de Duncan - Chang es

$$\sigma_d = \frac{\varepsilon_1}{1/E_i + R_f \varepsilon_1/\sigma_{df}} \quad (2.63)$$

donde

$$\sigma_{df} = (\sigma_1 - \sigma_3)]_{falla} \quad (2.64)$$

y  $R_f < 1$  es un parámetro. Los módulos de Young secante y tangente correspondientes son

$$E_s = E_i (1 - R_f \sigma_d/\sigma_{df}) \quad (2.65)$$

$$E_t = \partial\sigma_d/\partial\varepsilon_1 = E_i (1 - R_f \sigma_d/\sigma_{df})^2 \quad (2.66)$$

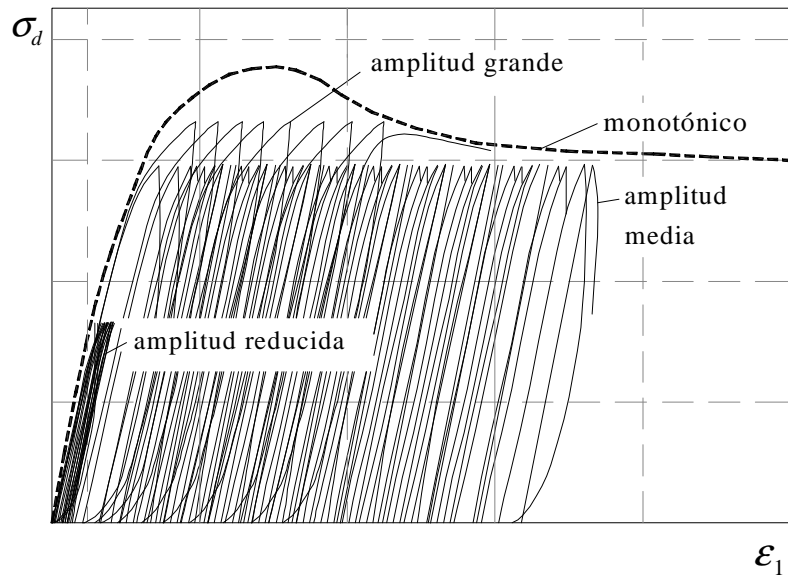


Figura 2-18: Comportamiento de una arena densa bajo carga triaxial monotónica y cargas cíclicas de distintas amplitudes.

En la figura 2-19 se muestra la hipérbola de Kondner con los parámetros de Duncan–Chang, junto con una curva  $\sigma_d - \varepsilon_1$  típica.  $\sigma_u = \sigma_{df}/R_f$  es la asíntota horizontal de la hipérbola.

Núñez [104][105][106] desarrolló expresiones similares y las aplicó a suelos locales en una variedad de problemas prácticos. Debido a esta circunstancia, el modelo hiperbólico es bien conocido en Argentina, y existe experiencia en la calibración de sus parámetros para muchos problemas de ingeniería geotécnica aplicada.

El modelo hiperbólico es universalmente empleado para caracterizar arenas. Entre las muchas correlaciones disponibles para sus parámetros (ej. [41][104][130][133][149]) es de particular interés, desde un punto de vista conceptual, la de Trautmann y Kulhawy [69][149] que propusieron

$$C_E = 300 + 900 \frac{\phi - 25^\circ}{45^\circ - 25^\circ} \quad (2.67)$$

La idea implícita en la ec. (2.67) es que cualquier cambio de presión y/o densidad que produzca un efecto en  $\phi$  producirá un efecto similar en  $C_E$ .

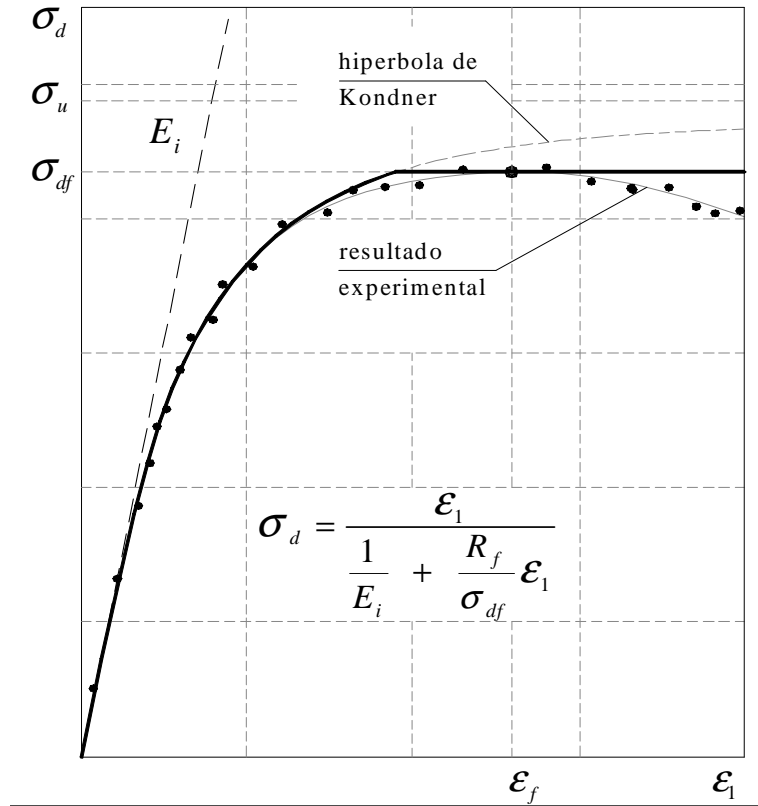


Figura 2-19: Modelo hiperbólico y su comparación con el resultado de un ensayo triaxial típico [40][67][68].

### 2.4.7 Módulo secante $E_{50}$

Otra medida de rigidez elastoplástica ampliamente utilizada en geotecnia práctica es el módulo secante  $E_{50}$ , definido como

$$E_{50} = \left. \frac{\partial \sigma_d}{\partial \varepsilon_1} \right|_{\sigma_d/\sigma_{df}=0.5} \quad (2.68)$$

$E_{50}$  puede ser adimensionalizado si se lo divide por el módulo de Young elástico  $E$ . El cociente  $E_{50}/E$  resultante depende de la densidad relativa y, en menor medida, de la presión de confinamiento [28][29][84][85][164].

## 2.4.8 Compresión proporcional

La compresión proporcional consiste en el incremento de las tensiones principales mientras se mantienen constantes las relaciones  $\sigma_1/\sigma_2$  y  $\sigma_1/\sigma_3$ . Un caso particular de compresión proporcional es la compresión hidrostática, en la que se aplica una presión uniforme exterior. Si el material es isótropo, una compresión hidrostática produce una deformación puramente volumétrica. En los párrafos siguientes se trata únicamente con materiales isótropos.

Si se toma una muestra de arena densa sometida a una presión  $p_1$  relativamente baja y se incrementa  $p_1$  hasta un valor mayor  $p_2$ , las fuerza en los contactos aumentan su magnitud pero se mantienen su dirección. Sólo ocurren pequeñas deformaciones asociadas a la compresión elástica de los granos, al deslizamiento de unos pocos puntos de contacto y a la ruptura de algunos granos [64][65][119].

Una arena muy suelta (por ejemplo, con  $D_r < 20\%$ ), sometida al mismo ensayo, sufre el colapso de grupos de partículas en equilibrio metaestable y el subsecuente deslizamiento entre granos, por lo que la deformación volumétrica es mayor y más irreversible. Si la presión  $p_1$  es elevada, es mayor la cantidad de granos que se rompe y la deformación reológica de los contactos, por lo que se observan mayores deformaciones irreversibles y un comportamiento menos acrónico [7][51][52][100]. A muy altas presiones, muchos granos sufren fragmentación y la topología original de la muestra se destruye por completo. En la figura 2-20 se presentan tres ensayos de compresión isotrópica de la arena Toyoura [94] que permiten apreciar el comportamiento macroscópico del material. Alcanzadas estas altas presiones, son idénticos el comportamiento de una muestra originalmente suelta y el de una originalmente densa: ambas recorren la denominada curva de compresión límite cuya expresión, propuesta por Pestana, es [109][110][111]

$$e = \left( \frac{p}{p_r p_{ref}} \right)^{-\rho} \quad (2.69)$$

con parámetros materiales  $p_r$  y  $\rho$ .

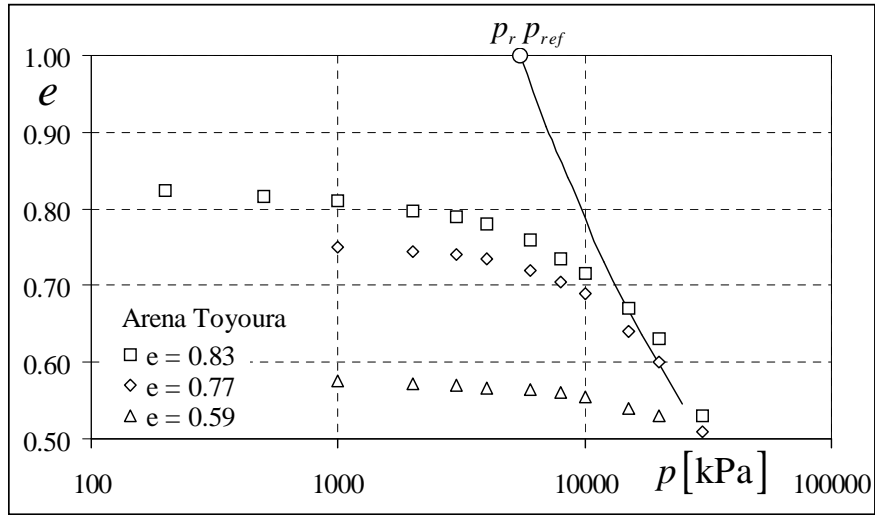


Figura 2-20: Compresión isotrópica de arena Toyoura [94] y línea de compresión límite (ec. (2.69)) [109][110]

La dureza de grano  $p_r$  determina la presión a la que el fenómeno de ruptura de partículas controla el comportamiento general; depende fundamentalmente del tamaño medio de las partículas y de la resistencia del material que forma los granos [88][89][109][110]. La figura 2-21 muestra la evolución típica de una arena remoldeada en compresión isotrópica y la curva de compresión límite [109].

El primer modelo constitutivo que tuvo en cuenta la compresión de geomateriales fue el *Cam Clay* y luego el *Cam Clay* modificado [120][121][122][131]. Este último se expresa en términos de tensiones principales como

$$(\sigma_d/p)^2 + M (p - p_c)^2 = 0 \quad (2.70)$$

donde  $M$  y  $p_c$  son parámetros materiales. El modelo Cam Clay reproduce bien el comportamiento de arcillas blandas. Murata y otros [98][167][168] presentaron una adaptación de la ec. (2.70) que se ajusta mejor a los resultados experimentales de arenas



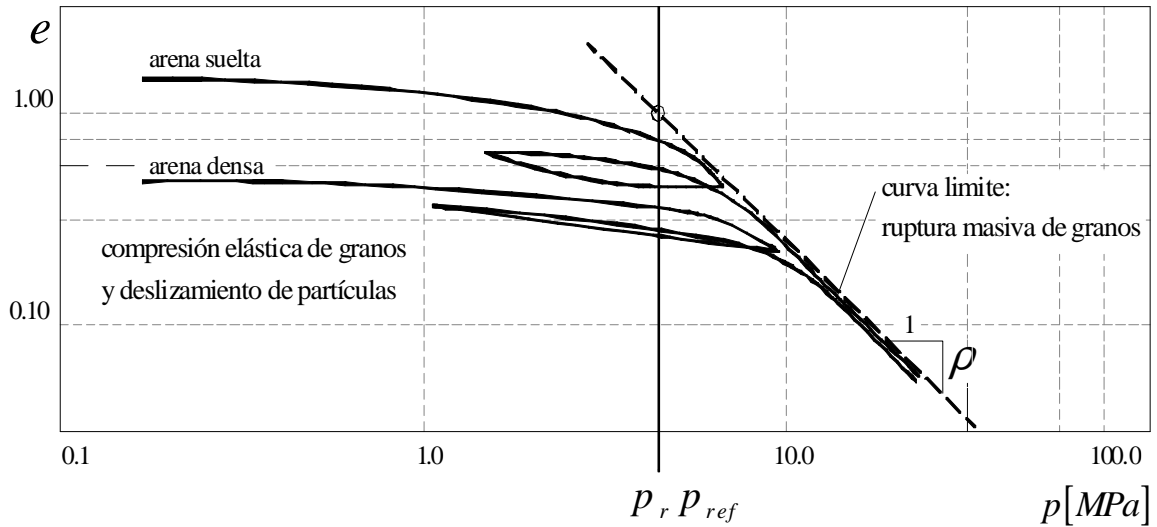


Figura 2-21: Compresión isotrópica de arenas. Significado de  $p_r$ . [109][110]

consolidadas isotrópicamente bajo un amplio rango de tensiones. La expresión es

$$(\sigma_d/p)^2 + \eta \ln [p/p_c] = 0 \quad (2.71)$$

en la que  $\eta$  es un parámetro. La figura 2-22 muestra la forma de la ec. (2.71), su comparación con la ec. (2.70), con otros criterios de fluencia y con algunos resultados experimentales [98].

En la figura 2-22 puede también que las diferentes funciones de fluencia tienen formas muy distintas, producto que algunas están calibradas para arcillas [120][121][122][131] mientras que otras están calibradas para arenas [98][93][94][114]. En el caso particular de la función de Poorooshab, ésta es en realidad un potencial plástico determinado experimentalmente, que incluye tanto plasticidad por corte como por compresión [114].

La ec. (2.71) utiliza el cociente  $\sigma_d/p$  como medida de la movilización de la resistencia al corte, por lo que su traza deviatorica es una función facetada. Sfriso [135][136][137] se presentó una modificación del criterio de Murata-Miura en el que se reemplaza  $\sigma_d/p$  por

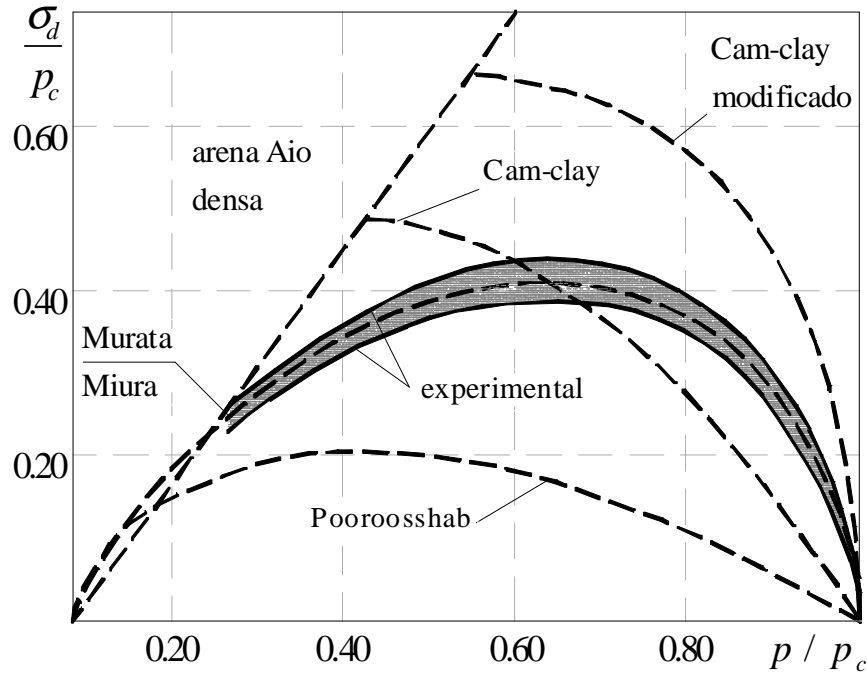


Figura 2-22: Criterio de Murata-Miura y su comparación con otras funciones de fluencia para arenas, adaptado de [98].

$\tau_{SMP}/\sigma_{SMP}$ , que es un equivalente conceptual compatible con el criterio de Matsuoka – Nakai. La función de fluencia que queda es

$$\left(\frac{\tau_{SMP}}{\sigma_{SMP}}\right)^2 + \eta \ln [p/p_c] = 0 \quad (2.72)$$

que puede reescribirse como

$$F_c = 3 \frac{r^2 - 3J_{3r}}{1 - \frac{1}{2}r^2 + J_{3r}} + \eta \ln [p/p_c] = 0 \quad (2.73)$$

La figura 2-23 muestra una vista frontal de la superficie dada por la ec. (2.73), mientras que la figura 2-24 muestra una vista lateral.

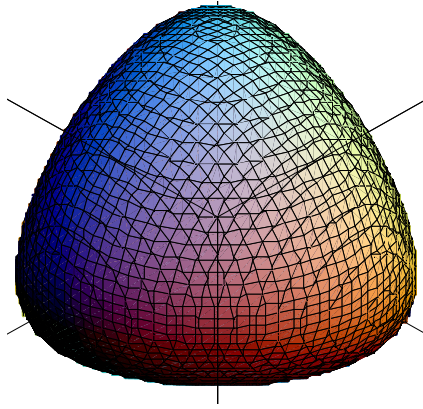


Figura 2-23: Superficie de fluencia definida por la ec. (2.73) [135][136][137]. Vista frontal.

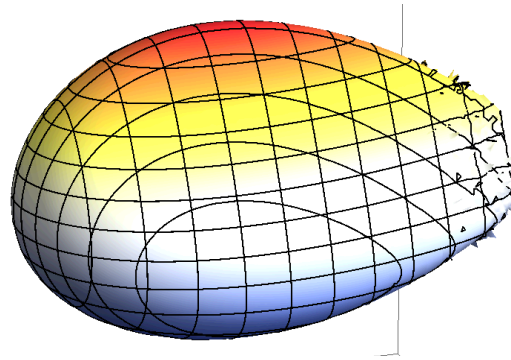


Figura 2-24: Superficie de fluencia definida por la ec. (2.73) [135][136][137]. Vista lateral.

### 2.4.9 Anisotropía y endurecimiento cinemático

Los materiales granulares naturales se forman por deposición de partículas en ambientes áridos, húmedos o bajo agua. Los agentes de transporte pueden ser el viento, el agua, la nieve, los eventos piroclásticos y las remociones en masa. Las partículas gruesas contienen asociaciones de muchos minerales y formas muy variables, generalmente aplanadas<sup>4</sup>. Arrastradas por el agua, se depositan con sus caras chatas en posición subhorizontal, y son posteriormente desplazadas, deformadas y rotas por carga, intemperismo y nuevos

---

<sup>4</sup>La naturaleza hizo esto con las piedras para que podamos arrojarlas al agua en vuelo rasante...

procesos de transporte. Luego de esta somera descripción, no sorprende que los materiales friccionales genéticamente isótropos sean escasos en la naturaleza.

La anisotropía genética no implica, necesariamente, anisotropía mecánica, aunque ésta es frecuente en los materiales granulares gruesos. Hay opiniones diversas (p.ej. [57][161][163][168][169]) acerca del efecto práctico de la anisotropía genética sobre las propiedades mecánicas, y en la mayoría de los casos prácticos se la ignora. En los menos, se la caracteriza como ortotropía transversal, con eje principal en la dirección de la deposición [33][113][146].

Las ecuaciones 2.70, 2.71 y 2.73 son funciones de fluencia con endurecimiento isotrópico. Para este tipo de funciones, la compresión del material en una dada trayectoria de carga aumenta su dominio elástico en todas las direcciones de carga. Este comportamiento es contrario a la evidencia experimental (ej. [161]), lo que ha motivado el desarrollo de numerosos modelos de endurecimiento cinemático (ejs. [31][32][87][61][97][111][162]). No existe aún consenso acerca de cuales son los parámetros de estado que controlan la compresión de arenas. Los candidatos más firmes son las medidas de ruptura de partículas y los tensores de orientación de cadenas de contactos. En todos los casos, estos parámetros son de casi imposible medición experimental, por lo que los modelos de endurecimiento cinemático con frecuencia tienen numerosos parámetros con poco significado físico que impiden su aplicación práctica.

# Capítulo 3

## Modelización de la compresión isotrópica

### 3.1 Introducción

En este capítulo se formula e implementa un modelo simple para compresión isotrópica. El modelo tiene cuatro parámetros mecánicos y se basa en el modelo de compresión de Pestana–Whittle [109][110]. Este desarrollo no tiene aplicación práctica por sí mismo. El objeto de su presentación es mostrar, a través de un ejemplo unidimensional, algunos aspectos de las consecuencias teóricas y numéricas de la dependencia de la rigidez respecto de la presión que es común a todos los materiales friccionales.

### 3.2 Elementos del modelo

#### 3.2.1 Cinemática

Se adopta la descomposición aditiva de las deformaciones infinitesimales

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p \quad (3.1)$$

donde  $\varepsilon_v$  es la deformación volumétrica total,  $\varepsilon_v^e$  es la deformación volumétrica elástica y  $\varepsilon_v^p$  es la deformación volumétrica plástica.  $\varepsilon_v > 0$  implica disminución de volumen.

### 3.2.2 Variables de estado

Las variables de estado son la presión  $p$ , la relación de vacíos para presión nula  $e_0$  y la presión de preconsolidación  $p_c$ . La relación de vacíos para presión nula  $e_0$  se define como la relación de vacíos que tiene el material si se congelan todos sus mecanismos plásticos y se reduce la presión a cero. Su evolución depende únicamente de la deformación plástica según

$$\dot{e}_0 = -(1 + e_0) \dot{\varepsilon}_v^p \quad (3.2)$$

### 3.2.3 Elasticidad

El módulo de rigidez volumétrico se calcula con [109][110]

$$K = c_b \frac{1 + e_0}{e_0} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^m p_{ref} \quad (3.3)$$

Como el problema es unidimensional, se puede integrar  $\dot{\varepsilon}_v^e = \dot{p}/K$  y calcular la relación analítica  $p - \varepsilon_v^e$  que puede escribirse como

$$\varepsilon_v^e = \frac{p}{K(1 - m)} \quad (3.4)$$

$$p = \left( c_b \frac{1 + e_0}{e_0} (1 - m) \varepsilon_v^e \right)^{\frac{1}{1-m}} p_{ref} \quad (3.5)$$

### 3.2.4 Función de fluencia y potencial plástico

La función de fluencia es

$$F = p - p_c = 0 \quad (3.6)$$

En un problema unidimensional el potencial plástico es trivial. La ec. (3.6) es también el potencial plástico.

### 3.2.5 Ecuaciones de evolución

$e_0$  evoluciona según la ec. (3.2). La ecuación de evolución de  $p_c$  es

$$\dot{p}_c = K^p \dot{\varepsilon}_v^p \quad (3.7)$$

donde  $K^p$  es el módulo de endurecimiento plástico.

Para la deducción de  $K^p$  se define la función de estado

$$\chi = p/p_{ult} \quad (3.8)$$

donde  $p_{ult}$  se calcula con [109]

$$p_{ult} = e_0^{-1/\rho} p_r p_{ref} \quad (3.9)$$

que es la ec. (2.69) invertida, en la que se reemplazó  $e$  por  $e_0$ . La figura 3-1 repite la información de la figura 2-20 junto con líneas correspondientes a tres valores de  $\chi$ . En particular, la línea  $\chi = 1$  es la descrita por la ec. (3.9).

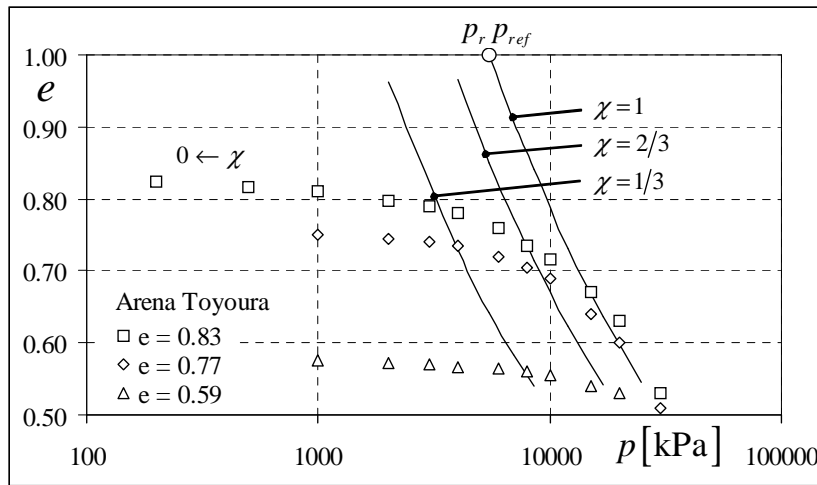


Figura 3-1: Compresión isotrópica de arena Toyoura, líneas de igual  $\chi$  [94][109][110].

Puede apreciarse que cuando  $\chi \rightarrow 0$  la ruptura de partículas es despreciable y el

comportamiento es “elástico”, o  $K^p \rightarrow \infty$ . En el otro extremo, cuando  $\chi = 1$  se alcanza la línea de compresión límite dada por las ecs. (2.69) o (3.9).

La ecuación de evolución del material sobre la curva de compresión límite se obtiene por derivación directa de la ec. (3.9) y reemplazo de  $\dot{e}_0$  por la ec. (3.2). Luego de algo de álgebra, queda

$$\dot{p}_c \Big|_{\chi \rightarrow 1} = \frac{1 + e_0}{e_0} \frac{p_{ult}}{\rho} \dot{\varepsilon}_v^p \quad (3.10)$$

que, insertada en la ec. (3.7) permite calcular

$$K_{ult}^p = \frac{1 + e_0}{e_0} \frac{p_{ult}}{\rho} \quad (3.11)$$

donde  $K_{ult}^p$  es el valor de  $K^p$  cuando  $\chi = 1$ .

El comportamiento del material sobre la curva límite es repetible y está adecuadamente caracterizado para propósitos prácticos. Sin embargo, los fenómenos físicos asociados a la transición entre el estado inicial ( $\chi \rightarrow 0$ ) y el estado último ( $\chi \rightarrow 1$ ) son muy complejos y dependientes de muchas características físicas y mecánicas de los granos, incluyendo su rugosidad superficial, esfericidad y distribución granulométrica. La caracterización precisa de todos estos mecanismos requeriría la formulación de modelos con un gran número de parámetros, para los que no existirían ensayos de laboratorio que permitieran su determinación de manera confiable. La calibración de un modelo así se basaría necesariamente en retroanálisis, y con frecuencia se encontraría que más de un juego de parámetros permitiría reproducir un mismo resultado experimental.

Ante esta circunstancia, el camino más adecuado es desarrollar una ecuación fenomenológica que reproduzca con suficiente precisión el comportamiento del material para el fin propuesto por el modelo, aunque no capture por completo la física del fenómeno. En este ejercicio teórico se propone la expresión

$$K^p = \frac{K_{ult}^p}{\chi^b} \quad (3.12)$$



donde  $b$  es un parámetro material. La ec. (3.12) cumple con las restricciones de los estados inicial y final

$$\chi = 0 \implies K^p = \infty \quad (3.13)$$

$$\chi = 1 \implies K^p = K_{ult}^p \quad (3.14)$$

### 3.3 Implementación numérica

#### 3.3.1 Operador de integración

Se adopta un esquema de integración exacta para  $p$  e implícito para  $p_c$ . Se debe resolver el conjunto de ecuaciones

$${}^{n+1}p = \left( c_b \frac{1 + {}^n e_0}{{}^{n+1}e_0} (1 - m) ({}^n \varepsilon_v^e + \Delta \varepsilon_v - {}^{n+1} \Delta \varepsilon_v^p) \right)^{\frac{1}{1-m}} p_{ref} \quad (3.15)$$

$${}^{n+1}e_0 = (1 + {}^n e_0) \exp[-\Delta \varepsilon_v^p] - 1 \quad (3.16)$$

$${}^{n+1}p_c = {}^n p_c + K^p [{}^{n+1}p, {}^{n+1}e_0] \Delta \varepsilon_v^p \quad (3.17)$$

sujeto a la restricción

$${}^{n+1}p - {}^{n+1}p_c = 0 \quad (3.18)$$

#### 3.3.2 Algoritmo de integración

La implementación numérica del modelo se basa en un algoritmo de Newton-Raphson convencional para rigidez dependiente de la presión.

1. El algoritmo es implícito, por lo que todas las variables se evalúan en  $(n + 1)$  excepto que se aclare lo contrario. Se parte de un paso  $n$  convergido con variables de estado

$$\{{}^n p, {}^n e_0, {}^n p_c\} \quad (3.19)$$

2. Se inicializa

$${}^{n+1}e_0^{(0)} = {}^n e_0 \quad (3.20)$$

$${}^{n+1}p_c^{(0)} = {}^n p_c \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_v^p = 0 \quad (3.22)$$

3. Se calcula la deformación volumétrica elástica con la ec. (3.4)

$${}^n \varepsilon_v^e = \frac{{}^n p}{{}^n K (1 - m)} \quad (3.23)$$

4. Se asume que el incremento de deformación volumétrica total  $\Delta \varepsilon_v$  es elástico y se calcula

$$\varepsilon_v^{e(0)} = {}^n \varepsilon_v^e + \Delta \varepsilon_v \quad (3.24)$$

5. Se calcula la presión de prueba  $\hat{p}$  mediante la ec.(3.5), que es la integración exacta de  $\dot{p} = K \dot{\varepsilon}_v^e$

$$\hat{p} = \left( c_b \frac{1 + e_0}{e_0} (1 - m) \varepsilon_v^{e(0)} \right)^{\frac{1}{1-m}} p_{ref} \quad (3.25)$$

6. Se calcula la función de fluencia

$$F^{(0)} = \hat{p} - p_c^{(0)} \quad (3.26)$$

7. Si  $F^{(0)} < 0$ , el paso es elástico:

- (a) Se actualiza  ${}^{n+1}p = \hat{p}$  como una integral exacta.
- (b) Las variables de estado  $e_0$  y  $p_c$  mantienen sus valores convergidos  ${}^n e_0$  y  ${}^n p_c$ .
- (c) El algoritmo termina.

8. Si  $F^{(0)} > 0$ , el paso es elastoplástico:

(a) Se plantea el residuo del algoritmo de actualización para la iteración ( $i$ )

$$\zeta^{(i)} = p^{(i)} - p_c^{(i)} \quad (3.27)$$

(b) Se anula el residuo para la iteración ( $i + 1$ ) mediante una expansión de Taylor de primer orden

$$\zeta^{(i+1)} = \zeta^{(i)} + \frac{d\zeta}{d\varepsilon_v^p} \delta\varepsilon_v^p = 0 \quad (3.28)$$

lo que permite calcular

$$\delta\varepsilon_v^p = -\frac{\zeta^{(i)}}{d\zeta/d\varepsilon_v^p} \quad (3.29)$$

(c) Se incrementa la deformación volumétrica plástica

$$\Delta\varepsilon_v^{p(i+1)} = \Delta\varepsilon_v^{p(i)} + \delta\varepsilon_v^p \quad (3.30)$$

(d) Se actualizan  $\varepsilon_v^e$  y  $e_0$ , éste último como integración exacta en el paso

$$\varepsilon_v^{e(i+1)} = {}^n\varepsilon_v^e + (\Delta\varepsilon_v - \Delta\varepsilon_v^{p(i+1)}) \quad (3.31)$$

$$e_0^{(i+1)} = (1 + {}^n e_0) \exp[-\Delta\varepsilon_v^{p(i+1)}] - 1 \quad (3.32)$$

(e) Se actualizan las variables de estado. En este caso y como ejemplo, la presión se actualiza mediante una fórmula exacta mientras que la presión de preconsolidación se actualiza con  $K^p$  evaluado al final del paso, con las expresiones

$$p^{(i+1)} = \left( c_b \frac{1 + e_0^{(i+1)}}{e_0^{(i+1)}} (1 - m) \varepsilon_v^{e(i+1)} \right)^{\frac{1}{1-m}} p_{ref} \quad (3.33)$$

$$p_c^{(i+1)} = {}^n p_c + K^p \Delta\varepsilon_v^p \quad (3.34)$$

(f) Se calcula el nuevo residuo y se itera hasta que  $\zeta^{(i+1)} < tol$ .

Para que el algoritmo sea operativo se requiere la expresión de

$$\frac{d\zeta}{d\varepsilon_v^p} = \frac{dp}{d\varepsilon_v^p} - \frac{dp_c}{d\varepsilon_v^p} \quad (3.35)$$

donde

$$\frac{dp}{d\varepsilon_v^p} = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial p}{\partial e_0} \frac{\partial e_0}{\partial \varepsilon_v^p} = -K + \frac{K}{e_0} ({}^n\varepsilon_v^e + \Delta\varepsilon_v - \Delta\varepsilon_v^p) \quad (3.36)$$

$$\frac{dp_c}{d\varepsilon_v^p} = \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} + \frac{\partial p_c}{\partial e_0} \frac{\partial e_0}{\partial \varepsilon_v^p} = K^p + \frac{\partial p_c}{\partial e_0} (1 + e_0) \quad (3.37)$$

En la ec. (3.37) falta  $\partial p_c / \partial e_0$ . Si se deriva la ec. (3.17) queda

$$\frac{\partial p_c}{\partial e_0} = \frac{\partial K^p}{\partial e_0} \Delta\varepsilon_v^p = -\frac{1 + b + e_0 + be_0 + \rho}{\chi^b e_0^2 \rho^2} p_{ult} \Delta\varepsilon_v^p$$

por lo que la expresión final es

$$\frac{d\zeta}{d\varepsilon_v^p} = \left( \frac{{}^n\varepsilon_v^e + \Delta\varepsilon_v - \Delta\varepsilon_v^p}{e_0} - 1 \right) K - K^p + \frac{1 + b + e_0 + be_0 + \rho}{\chi^b e_0^2 \rho^2} p_{ult} (1 + e_0) \Delta\varepsilon_v^p \quad (3.38)$$

## 3.4 Resultados

### 3.4.1 Influencia de los parámetros de entrada

En las figuras 3-2 a 3-6 se muestra el efecto de los diferentes parámetros sobre la curva  $e_0 - p$ . Puede verse que los parámetros elásticos  $c_b$  y  $m$  no tienen influencia sobre la curva en la amplia escala de presiones estudiada. Por otro lado, la disponibilidad de tres parámetros -  $p_r$ ,  $\rho$  y  $b$  - para el rango de alta presión permite ajustar cualquier curva experimental. Puede apreciarse que los parámetros  $p_r$  y  $\rho$  tienen un claro significado físico, mientras que  $b$  es únicamente un parámetro de ajuste del modelo.

En la figura 3-7 se muestra la comparación entre predicción y resultados experimentales para arena Toyoura, con  $c_b = 800$ ,  $m = 0.5$ ,  $p_r = 55$ ,  $\rho = 0.4$  y  $b = 1$ .

Si el objetivo de la modelización fuera la predicción del comportamiento del material

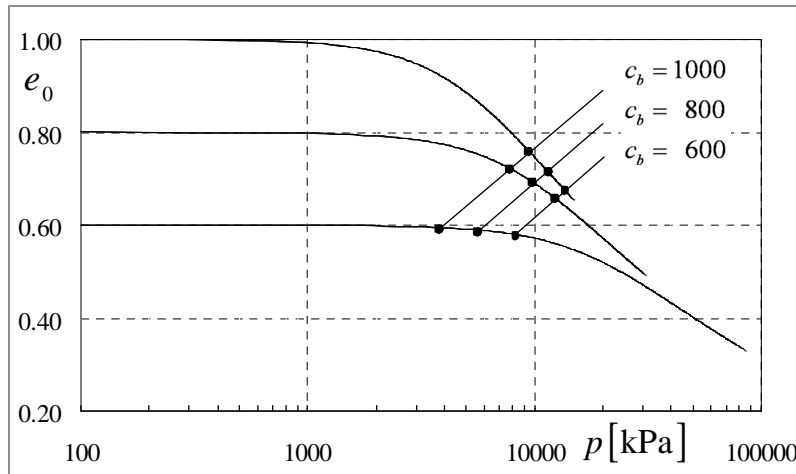


Figura 3-2: Efecto del parámetro  $c_b$  para tres relaciones de vacíos.

en el rango de muy altas presiones, debería investigarse la dependencia de  $b$  respecto de la densidad relativa para un conjunto grande de arenas y gravas, y, si es posible, determinar una función  $b[e_0]$  que tuviera una capacidad predictiva acorde con ese objetivo. Si, en cambio, el objetivo del modelo fuera la predicción del comportamiento del material en el rango de presiones que interesa en ingeniería geotécnica - 0– 12 MPa - el parámetro  $b$  puede tomar un valor por defecto. En la figura 3-7 se aprecia que  $b = 1$  es una elección razonable, al menos para los ensayos utilizados para la calibración. En la figura 3-8 se presenta la calibración del modelo para la arena Sacramento [79]. Los parámetros son  $c_b = 700$ ,  $m = 0.5$ ,  $p_r = 35$ ,  $\rho = 0.4$ ,  $b = 1$ .

### 3.4.2 Comportamiento del algoritmo

En la figura 3-9 se presenta la curva  $e_0 - p$  que se obtiene con incrementos de deformación  $\Delta\varepsilon_v = 1\%$ ,  $\Delta\varepsilon_v = 0.5\%$  y  $\Delta\varepsilon_v = 0.1\%$ . Puede apreciarse que las curvas se superponen y que la diferencia es indistinguible en la escala de la figura, como corresponde a un algoritmo implícito en todas sus variables y funciones de estado. En la figura se indica, para una de las relaciones de vacíos, los puntos convergidos para la discretización temporal

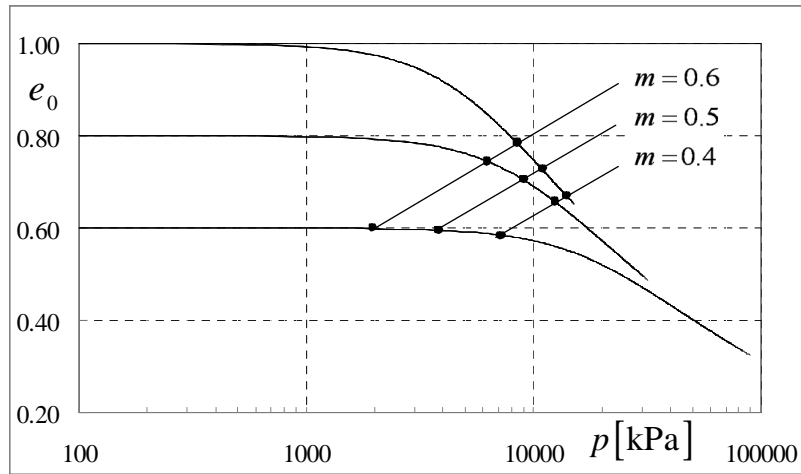


Figura 3-3: Efecto del parámetro  $m$  para tres relaciones de vacíos.

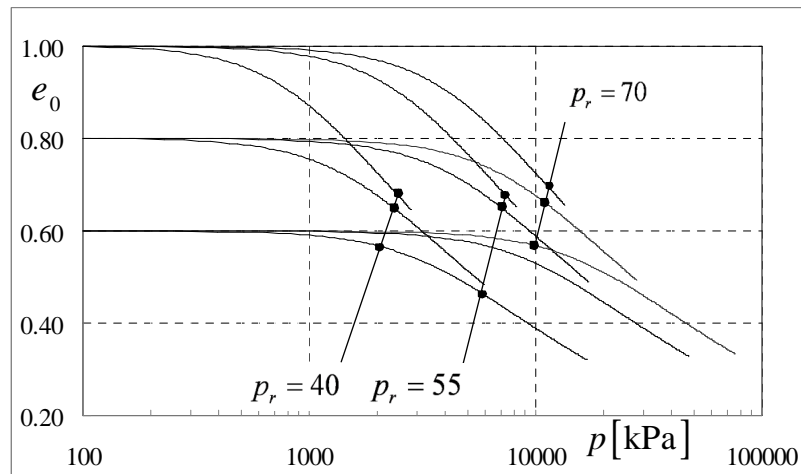


Figura 3-4: Efecto del parámetro  $p_r$  para tres relaciones de vacíos.

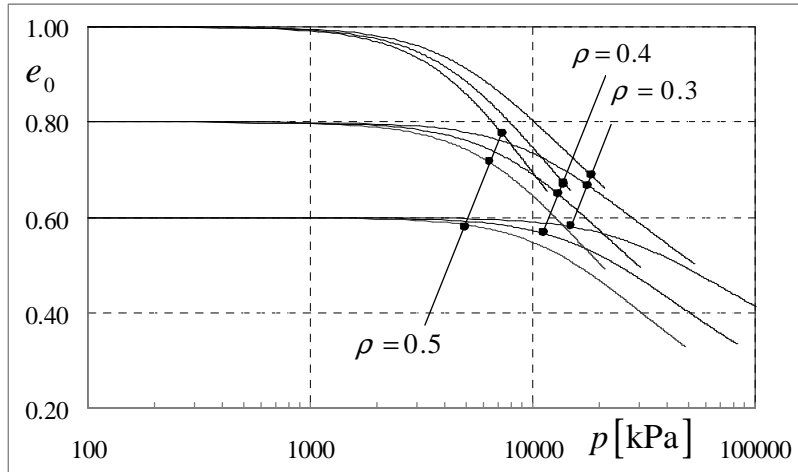


Figura 3-5: Efecto del parámetro  $\rho$  para tres relaciones de vacíos.

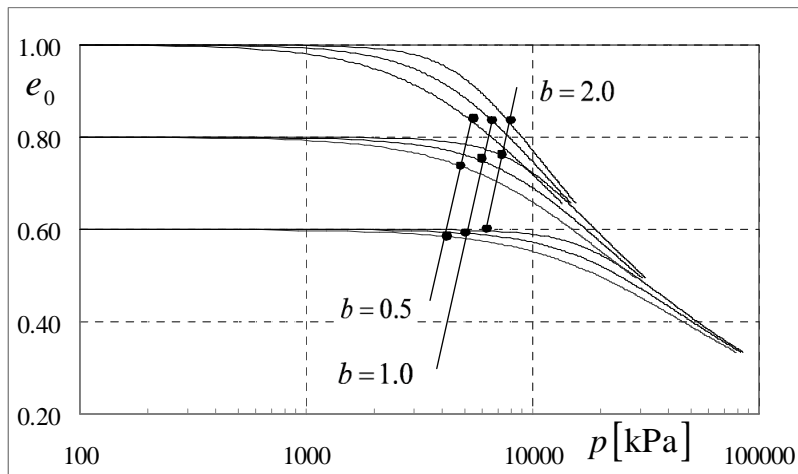


Figura 3-6: Efecto del parámetro  $b$  para tres relaciones de vacíos.

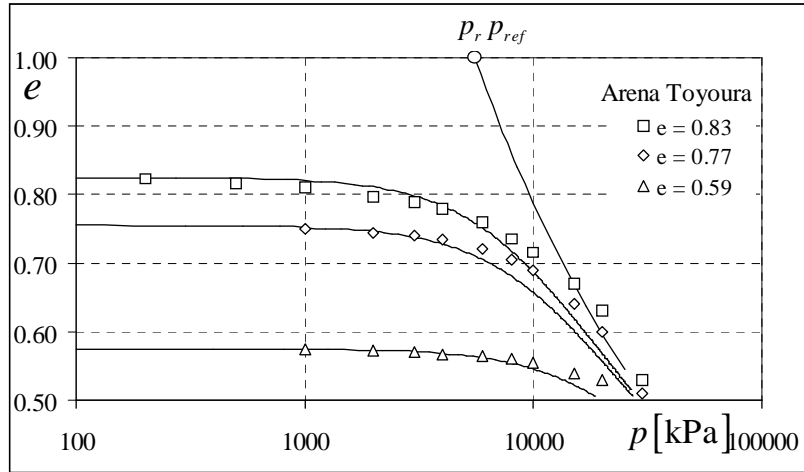


Figura 3-7: Comparación entre simulación numérica y resultados experimentales para arena Toyoura [94][109][110].

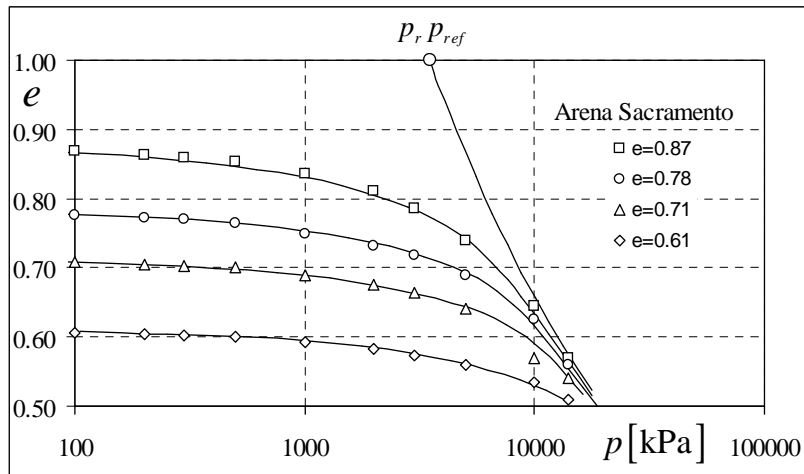


Figura 3-8: Comparación entre simulación numérica y resultados experimentales para arena Sacramento [79].



en 50 pasos.

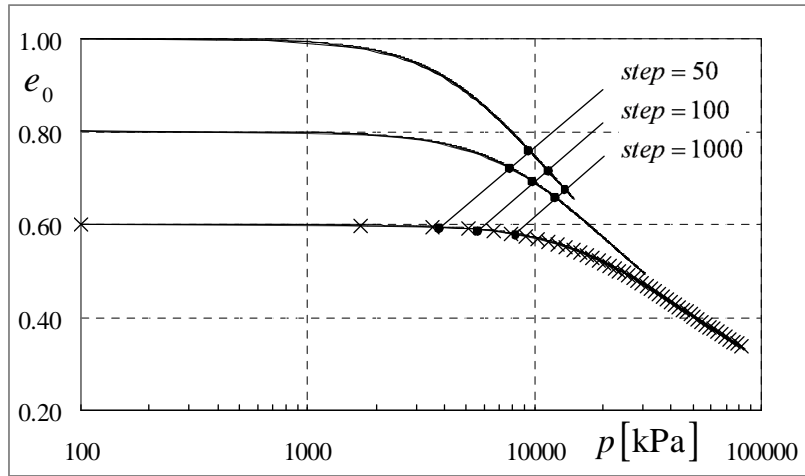


Figura 3-9: Comportamiento numérico del algoritmo. Las curvas  $e_0 - p$  obtenidas con 50, 100 y 1000 pasos son indistinguibles.

### 3.A Apéndice: Selección de $e_0$ como variable de estado

Si  $\mathbf{d}$  es el tensor velocidad de deformación que corresponde a un paso finito  $n \rightarrow n + 1$ , se verifica que

$$\int_n^{n+1} \mathbf{d} : \mathbf{1} dt = -\ln \left[ \frac{1 + {}^{n+1}e}{1 + {}^n e} \right] = \Delta \varepsilon_v \quad (3.39)$$

donde  $\varepsilon_v$  es la deformación volumétrica natural,  ${}^n e$  es la relación de vacíos al comienzo del paso y  ${}^{n+1}e$  es la relación de vacíos al final del paso [53]. Por lo tanto, el cambio de relación de vacíos es una medida de deformación volumétrica finita que puede calcularse mediante la expresión

$${}^{n+1}e = (1 + {}^n e) \exp[-\Delta \varepsilon_v] - 1 \quad (3.40)$$

La tasa de deformación volumétrica correspondiente es

$$\dot{e} = -(1 + e) \dot{\varepsilon}_v \quad (3.41)$$

que puede escribirse como

$$\dot{e} = -(1 + e) (\dot{\varepsilon}_v^p + \dot{p}/K) \quad (3.42)$$

Se aprecia que  $\dot{e}$  tiene una componente elástica y otra plástica y que depende de  $p$ , que es a su vez una variable de estado. Este acoplamiento entre mecanismos elásticos y plásticos tiene serias desventajas, porque produce modelos cuya interpretación y calibración es más compleja que los modelos cuyas variables de estado corresponden a mecanismos físicos desacoplados.

La componente elástica de  $\dot{e}$  puede ser removida si se define una nueva variable de estado que se mide siempre a la misma presión. En este trabajo se eligió  $e_0$ , la relación de vacíos que se mediría si se descargara la presión a cero (y esta descarga no produjera

deformaciones plásticas). La relación entre ambas es

$$\frac{1 + e_0}{1 + e} = \mathbf{exp} [\varepsilon_v^e] \quad (3.43)$$

Para un paso finito,  $e_0$  se actualiza mediante

$${}^{n+1}e_0 = (1 + {}^n e_0) \mathbf{exp} [-\Delta\varepsilon_v^p] - 1 \quad (3.44)$$

donde  $\Delta\varepsilon_v^p$  es la deformación volumétrica plástica del paso.

# Capítulo 4

## Modelización de la falla por corte

### 4.1 Introducción

Los problemas rutinarios de ingeniería geotécnica se resuelven en dos etapas: i) se verifica la “estabilidad” de un determinado problema con su geometría, cargas y materiales; y ii) una vez asegurada la estabilidad, se estiman las “deformaciones” que pueden producirse por acción de esas cargas.

Para la primera verificación se emplean fórmulas de equilibrio límite desarrolladas a partir de la hipótesis de que el material es rígido-plástico perfecto. Para la segunda verificación se asume que el material es elástico lineal y se aplican fórmulas de la teoría de la elasticidad. Es tarea del analista elegir los parámetros mecánicos, de resistencia en el primer análisis y de rigidez en el segundo, que representen razonablemente el comportamiento del material para el problema que se estudia<sup>1</sup>.

La comparación entre los cálculos de estabilidad efectuados mediante métodos analíticos y numéricos sólo puede hacerse si en los últimos se emplean ecuaciones constitutivas muy simples, en las que los parámetros mecánicos también se eligen en función del problema que se estudia. El problema es que los modelos numéricos con frecuencia resuelven varios problemas que serían tratados por separado en un análisis

---

<sup>1</sup>La experiencia profesional interviene de manera decisiva en esta etapa del análisis.

manual. Por ejemplo, el problema de una fundación ubicada cerca de un talud es, en realidad, un problema doble: i) el comportamiento de la fundación; y ii) el comportamiento del talud. Este problema se resuelve analíticamente con ciertas fórmulas específicas para el problema de la fundación y con otras fórmulas específicas para el problema del talud. En ambos casos se emplean parámetros mecánicos diferentes, aunque el suelo es el mismo. En un modelo numérico del problema completo, un mismo juego de parámetros, distinto de los dos juegos anteriores, sería empleado en toda la malla para resolver ambos problemas en conjunto. No sorprende entonces que los resultados no sean comparables y que los errores de selección de parámetros sean muy frecuentes.

En este capítulo se formula e implementa un modelo constitutivo cuyo objetivo es el análisis de problemas en los que interesa el comportamiento del material en estado de falla por corte. El modelo tiene los elementos necesarios para que sus parámetros materiales sean independientes del problema que se estudia, pero no está diseñado para la predicción de deformaciones y desplazamientos de estructuras en su estado de servicio.

Los elementos principales del modelo son: i) hiperelasticidad isotrópica, ii) ángulo de fricción interna dependiente de la presión y relación de vacíos; iii) capacidad de simulación del estado crítico; iv) teoría tensión-dilatancia de Rowe.

## 4.2 Estructura matemática del modelo

### 4.2.1 Cinemática

Se adopta la descomposición aditiva de las deformaciones infinitesimales

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.1)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformación total,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  es el tensor de deformación elástica y  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  es el tensor de deformación plástica.

## 4.2.2 Variables de estado

El estado del material se caracteriza mediante el tensor de tensiones efectivas  $\boldsymbol{\sigma}$  y la relación de vacíos para presión nula  $e_0$ .

## 4.2.3 Relación tensión-deformación

Se define una función de energía complementaria de deformación

$$W_s = W_s[\boldsymbol{\sigma}, e_0] \quad (4.2)$$

con la que se calcula el tensor de deformación elástica

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \partial W_s / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad (4.3)$$

## 4.2.4 Función de fluencia

La función de fluencia es de la forma

$$F_f[\boldsymbol{\sigma}, e_0] = 0 \quad (4.4)$$

## 4.2.5 Regla de flujo

Se adopta asociatividad deviatorica y no asociatividad volumétrica. El incremento de deformación plástica se calcula con

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad (4.5)$$

donde  $\dot{\lambda}$  es un multiplicador plástico y  $\mathbf{m}$  es el tensor de dirección de deformación plástica.

Su expresión es

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_d + \beta \mathbf{1} \quad (4.6)$$

donde  $\beta$  es un factor de dilatación,

$$\mathbf{m}_d = \mathbf{n}_d / \|\mathbf{n}_d\| \quad (4.7)$$

es un tensor unitario deviatorico,

$$\mathbf{n}_d = \mathbf{I}^{dev} : \mathbf{n} \quad (4.8)$$

y

$$\mathbf{n} = \partial F_f / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad (4.9)$$

es la normal (exterior) a la función de fluencia.

## 4.2.6 Condición de plasticidad

Se emplea la condición

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} \dot{\lambda} & \text{si: } F_f = 0 \text{ y: } \dot{F}_f > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.10)$$

## 4.2.7 Ecuaciones de evolución

La evolución de  $e_0$  está dada por la expresión

$$\dot{e}_0 = -(1 + e_0) \dot{\epsilon}_v^p \quad (4.11)$$

# 4.3 Funciones de estado

## 4.3.1 Elasticidad

### Hipoelasticidad vs. hiperelasticidad

Las arenas - conjuntos de partículas en contacto - no exhiben un comportamiento puramente elástico para ninguna trayectoria ni escala de deformación. Por lo tanto, la

incorporación de elementos de elasticidad para arenas se justifica principalmente porque se los necesita para la integración de las ecuaciones constitutivas.

Existen dos marcos teóricos fundamentales: hipoeelasticidad e hiperelasticidad. En el primero se postula la relación incremental

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}[\boldsymbol{\sigma}, e_0] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (4.12)$$

mientras que en el segundo se postula la relación integral

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}[\boldsymbol{\sigma}, e_0] : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.13)$$

En ambos, el tensor elástico de cuarto orden  $\mathbf{D}[\boldsymbol{\sigma}, e_0]$  es función de las variables de estado del modelo. Para que la ec. (4.13) pueda ser formulada, debe existir un potencial elástico escalar  $W_s[\boldsymbol{\sigma}, e_0]$  tal que

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\partial W_s[\boldsymbol{\sigma}, e_0]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.14)$$

A esta función potencial se la denomina “función de energía complementaria de deformación”. Existen muchas funciones de este tipo para geomateriales (p.ej. [95][103][116]), que tienen en cuenta la dependencia de los módulos elásticos respecto del estado tensional. Algunas de estas funciones permiten modelar anisotropía y distintos grados de acoplamiento entre los módulos volumétricos  $K$  y de corte  $G$ .

Los modelos hipoeelásticos no requieren la formulación de potenciales elásticos, y por lo tanto permiten el empleo de funciones simples para  $K$  y  $G$ . Su desventaja radica en que no satisfacen de manera automática el requerimiento de que un ciclo cerrado de deformación produzca un comportamiento conservativo. En cambio, las formulaciones integrales de la forma de la ec. (4.13) aseguran un comportamiento conservativo para cualquier ciclo cerrado de deformación.



Si  $W_s$  produce un tensor elástico de la forma

$$\mathbf{D}[\boldsymbol{\sigma}, e_0] = K[\boldsymbol{\sigma}, e_0] \mathbf{1}\mathbf{1} + 2G[\boldsymbol{\sigma}, e_0] \mathbf{I}^{dev} \quad (4.15)$$

se puede escribir

$$\boldsymbol{\sigma} = K[\boldsymbol{\sigma}, e_0] (\varepsilon_v - \varepsilon_v^p) \mathbf{1} + 2G[\boldsymbol{\sigma}, e_0] (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^p) \quad (4.16)$$

o, alternativamente,

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - (K[\boldsymbol{\sigma}, e_0] \varepsilon_v^p \mathbf{1} + 2G[\boldsymbol{\sigma}, e_0] \boldsymbol{\varepsilon}_d^p) \quad (4.17)$$

donde

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = K[\boldsymbol{\sigma}, e_0] \varepsilon_v \mathbf{1} + 2G[\boldsymbol{\sigma}, e_0] \boldsymbol{\varepsilon}_d \quad (4.18)$$

es la “tensión de prueba”.

Como  $W_s$  es una función escalar, el tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  hereda los autovectores de  $\boldsymbol{\sigma}$  a través de la ec. (4.14). La ec. (4.18) implica que  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  tiene los mismos autovectores que  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  y, por lo tanto, que  $\boldsymbol{\sigma}$ . La ec. (4.17), entonces, se puede escribir como

$$\mathbf{D}[\boldsymbol{\sigma}, e_0] : \boldsymbol{\varepsilon}_d^p = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma} \quad (4.19)$$

e implica que  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  comparte autovectores con  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . La consecuencia inmediata de esta deducción es que los autovectores de la solución pueden ser calculados con información del paso de prueba. Esta característica constituye una importante ventaja para la formulación algorítmica de los modelos, que sólo requiere la existencia de las formas funcionales dadas por las ecs. (4.14) y (4.15).

### **Función de energía complementaria de deformación**

Se adopta la función de energía complementaria de deformación de Molenkamp [95]

$$W_s = \frac{p^2}{G} \left[ \frac{S}{(1-m)(2-m)} + \frac{r^2}{4} \right] \quad (4.20)$$

donde  $G$  es el módulo de rigidez al corte para el que se propone la expresión de Hardin [49][50][118]

$$G = c_s \frac{(c_e - e_0)^2}{1 + e_0} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^m p_{ref} \quad (4.21)$$

$S$  es una función auxiliar a definir,  $c_s$ ,  $c_e$  y  $m$  son parámetros materiales, y  $p_{ref} = 100 \text{ kPa}$  es una presión de referencia.

## Deformación elástica

La derivación de la ec. (4.20) respecto a  $\boldsymbol{\sigma}$  permite calcular el tensor de deformación elástica

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \left( \frac{1}{2G} \mathbf{I}^{dev} + \frac{1}{K} \mathbf{11} \right) : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.22)$$

donde  $K$  es el módulo de rigidez volumétrica elástica, relacionado con  $G$  mediante

$$K = \frac{G}{S/(1-m) - mr^2/4} \quad (4.23)$$

La inversión de la ec. (4.22) permite calcular

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.24)$$

donde

$$\mathbf{D} = K \mathbf{11} + 2G \mathbf{I}^{dev} \quad (4.25)$$

es el tensor elástico.

Debe notarse que la ec. (4.23) arroja  $K \rightarrow \infty$  para

$$r_{lim} \rightarrow \sqrt{4S/(m(1-m))} \quad (4.26)$$

Esta oblicuidad límite, sin embargo, no tiene influencia en los casos prácticos porque

es mucho más alta que la que cualquier material friccional puede soportar<sup>2</sup>.

La relación de Poisson resultante de las ecs. (4.21) y (4.23) es

$$\nu = \frac{3 - 4S + r^2/4}{4S + 6 - r^2/4} \quad (4.27)$$

que resulta dependiente de  $r$ . Para estado isotrópico, ( $r = 0$ ) queda

$$\nu = \frac{3 - 4S}{6 + 4S} \quad (4.28)$$

El parámetro  $S$  que la determina no es un dato de entrada sino la función de estado

$$S = \frac{3 - D_r}{4} \quad (4.29)$$

donde

$$D_r = \frac{e_{max} - e_0}{e_{max} - e_{min}} \quad (4.30)$$

y  $e_{max}$  y  $e_{min}$  son parámetros del modelo. Esta expresión arroja

$$D_r = 0\% \rightarrow S = \frac{3}{4} \rightarrow \nu = 0 \quad (4.31)$$

$$D_r = 100\% \rightarrow S = \frac{1}{2} \rightarrow \nu = 0.125 \quad (4.32)$$

que son razonablemente coincidentes con los valores determinados en [127]. Debe notarse que, debido a la dependencia de  $\nu$  respecto de  $r$ , la relación de Poisson puede alcanzar  $\nu = 0.21$  en el caso de arenas densas en falla.

---

<sup>2</sup>Se requeriría  $\phi > 73^\circ$  para que  $r_{lim}$  correspondiera a un estado admisible.

### 4.3.2 Ángulo de fricción interna

#### Definición

El ángulo de fricción interna  $\phi$  se define como una función de estado de la forma

$$\phi = \phi_c + \psi \quad (4.33)$$

donde  $\phi_c$  es el ángulo de fricción interna crítico y  $\psi [p, e_0]$  es una función de estado que tiene en cuenta la dependencia que  $\phi$  tiene respecto de la dilatancia. Es importante destacar que la función de estado  $\phi$  se define únicamente para el estado de tensiones caracterizado por  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ , correspondiente a la compresión triaxial.

#### Dilatancia y ángulo de fricción interna

La expresión de Bolton para el ángulo de fricción interna (ec. (2.15)) [11] es

$$\phi = \phi_c + \Delta\phi D_r (Q - \ln [p/p_{ref}]) - b \quad (4.34)$$

donde  $\Delta\phi = 3^\circ$ ,  $b = 3^\circ$  para la mayoría de las arenas [11] y  $Q$  es un parámetro material que tiene en cuenta la resistencia de los granos. El significado de  $Q$  se enfatiza si las ecs. (4.33) y (4.34) se combinan en

$$\psi = -\Delta\phi D_r \ln [\chi_B] - b \quad (4.35)$$

donde

$$\chi_B = \frac{p}{\exp[Q] p_{ref}} \quad (4.36)$$

es una medida del nivel de tensiones.

En el modelo de compresión isotrópica se mostró que la presión que produce un determinado nivel de ruptura de partículas depende tanto de la presión como de la relación de vacíos y se introdujo la ec. (3.8) que define la función de estado  $\chi$ . Por lo

tanto, en la ec. (4.35) conviene reemplazar a  $\chi_B$  por  $\chi$  con lo que queda

$$\psi = -\Delta\phi D_r \ln[\chi] - b \quad (4.37)$$

En la definición de  $\chi$  hay dos parámetros materiales,  $p_r$  y  $\rho$ . Pestana [109] mostró que  $\rho$  cae en el rango aproximado  $0.33 < \rho_c < 0.45$  para la mayoría de las arenas. Como  $\rho$  tiene poca influencia en el comportamiento de las arenas en el rango de presiones de interés ingenieril, en este modelo se adopta un valor constante  $\rho_c = 0.40$ . La calibración de la ec. (4.37) con los datos usados por Bolton para desarrollar la ec. (4.34) arroja  $\Delta\phi = 3^\circ$  y  $b = 2^\circ$ , que son parámetros por defecto de este modelo, por lo que los parámetros materiales que intervienen en la ec. (4.37) son  $e_{min}$ ,  $e_{max}$ ,  $\phi_c$  y  $p_r$ .

La figura 4-1 muestra  $\psi$  para la arena del Río Sacramento [79] y para la arena Toyoura [12][44], junto con las predicciones de la ec. (4.37) [137][138][139][140].

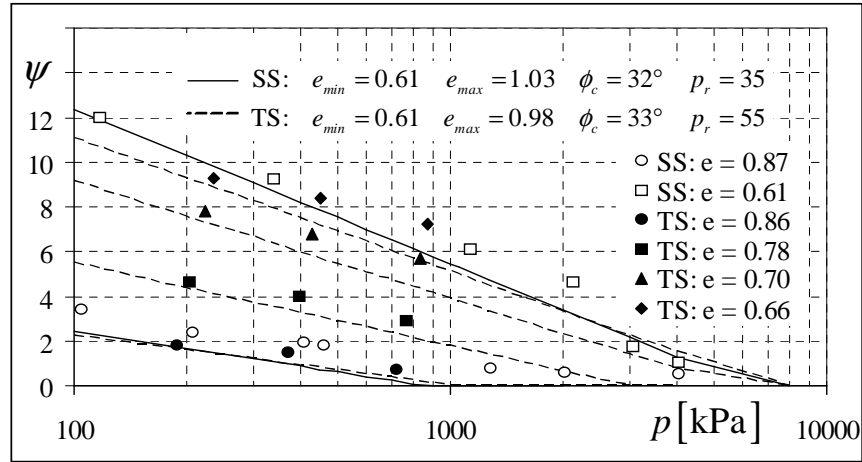


Figura 4-1:  $\psi = \phi - \phi_c$  en función de  $p$  y  $D_r$  para las arenas Sacramento y Toyoura, junto con la predicción de la ec. (4.37). Datos de [12][79].

Bolton [11][12] limitó la validez de la ec. (4.34) a  $p > 150$  kPa para evitar la sobreestimación de la dilatancia a muy bajas presiones. En principio, la misma limitación se aplica a la ec. (4.37).

## Estado crítico

La función de estado  $\psi [p, e_0]$  debe cumplir con las restricciones

$$\psi [p, e_{0c}] = 0 \quad (4.38)$$

$$\partial\psi/\partial e_0 < 0 \quad (4.39)$$

$$\partial\psi/\partial p < 0 \quad (4.40)$$

donde  $e_{0c}$  es la relación de vacíos para presión nula en el estado crítico. Tanto la ec. (4.35) como la ec. (4.37) pueden usarse para predecir la relación  $e_{0c} - p$  si se resuelve la ecuación implícita

$$\psi [p, e_{0c}] = 0 \quad (4.41)$$

La ec. (4.35) arroja

$$p]_{e_{0c}} = \exp \left[ Q - \frac{b}{\Delta\phi D_r [e_{0c}]} \right] p_{ref} \quad (4.42)$$

mientras que la ec. (4.37) arroja

$$p]_{e_{0c}} = \frac{p_r}{e_{0c}^{2.5}} \exp \left[ \frac{-b}{\Delta\phi D_r [e_{0c}]} \right] p_{ref} \quad (4.43)$$

La figura 4-2 muestra determinaciones de pares de valores  $e_{0c} - p$  para la arena Toyoura [154], junto con la predicción dada por las ecs. (4.42) y (4.43) con sus parámetros por defecto. Puede observarse que la ec. (4.42) erra totalmente el comportamiento experimental mientras que la ec. (4.43) lo ajusta razonablemente, a pesar de que en su deducción no se tuvo en consideración la información experimental contenida en la figura 4-2. Este mejor ajuste prueba que la función de estado  $\chi$  es una mejor medida del efecto de las variables de estado  $\{p, e_0\}$  sobre la ruptura de granos que el parámetro  $\chi_B$ . La línea de estado crítico de una dada arena puede ser reproducida con mayor exactitud si se modifican los parámetros por defecto  $\{\Delta\phi, b\}$  [137][138][139][140].

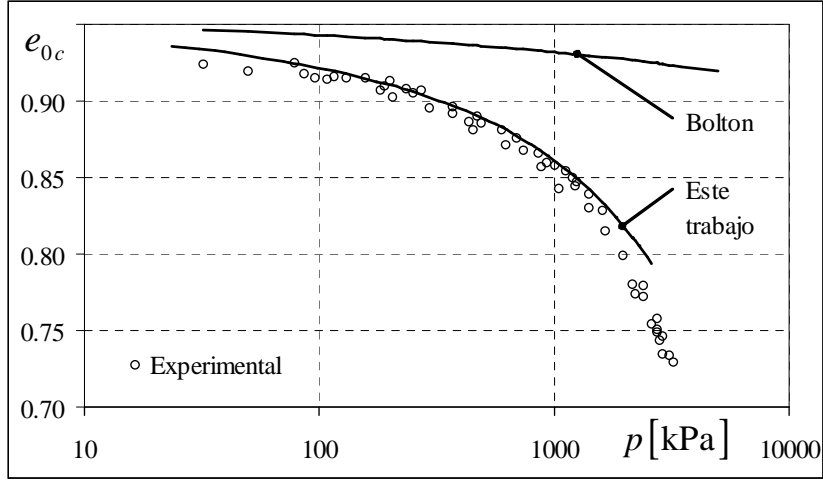


Figura 4-2: Líneas de estado crítico predichas por las ecs. (4.42) y (4.43).

### 4.3.3 Función de fluencia

Se adopta la función de fluencia de Matsuoka-Nakai [90] que, escrita en términos de  $\mathbf{r}$ , tiene la expresión

$$F_f = (\mu_f + 6) J_{2r} - (\mu_f + 9) J_{3r} - \mu_f = 0 \quad (4.44)$$

donde  $J_{2r} = \frac{1}{2} \mathbf{r} : \mathbf{r}$  y  $J_{3r} = \frac{1}{3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} : \mathbf{r}$  y

$$\mu_f = 8 \tan^2 [\phi] \quad (4.45)$$

es una función de estado que determina la apertura de la superficie de fluencia.

La figura 4-3 muestra una vista 3D de la superficie de fluencia definida por la ec. (4.44). La curvatura de la directriz está controlada por la dependencia de  $F_f$  respecto de  $J_{3r}$ , mientras que la curvatura en la dirección de la generatriz está dada por la dependencia de  $\phi$  respecto de la presión.

$\mu_f$  evoluciona de acuerdo a

$$\dot{\mu}_f = \frac{\partial \mu_f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial e_0} \dot{e}_0 + \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} \right) \quad (4.46)$$

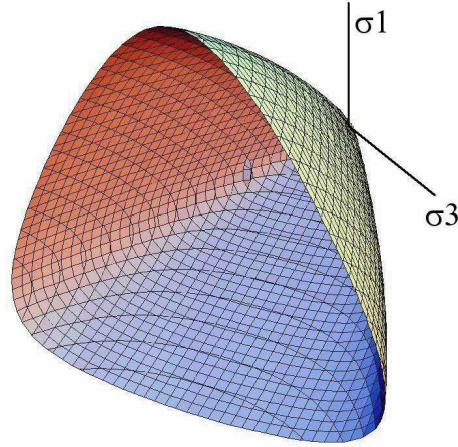


Figura 4-3: Superficie de fluencia, ec. (4.44) [90][91].

En una trayectoria a presión constante, la ec. (4.46) toma la forma

$$\dot{\mu}_f = \frac{\partial \mu}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial e_0} \dot{e}_0 \quad (4.47)$$

Las derivadas parciales de la ec. (4.47) cumplen con las condiciones

$$\partial \mu_f / \partial \phi > 0 \quad (4.48)$$

$$\partial \phi / \partial \psi > 0 \quad (4.49)$$

$$\partial \psi / \partial e_0 < 0 \quad (4.50)$$

Por lo tanto, el signo de  $\dot{\mu}_f$  depende del signo de  $\dot{e}_0$ . Pueden distinguirse dos situaciones: i) una muestra suelta reduce su relación de vacíos, por lo que  $\dot{e}_0 < 0$  y por lo tanto  $\dot{\mu}_f > 0$ , o sea, el cono se expande y la muestra endurece; y ii) una muestra densa dilata, por lo que  $\dot{e}_0 > 0$  y por lo tanto  $\dot{\mu}_f < 0$ , o sea, el cono se contrae y la muestra ablanda.

La solución completa de la ec. (4.44) se presenta en la figura 4-4 para tres valores de  $\mu_f$ . Puede observarse que  $F_f = 0$  genera una familia de superficies, de las cuales



sólo una está orientada en el eje  $p > 0$ . Esta característica matemática de la ec. (4.44) es incompatible con los algoritmos de retorno convencionales, por lo que se requiere la formulación de algoritmos específicos, de los cuales uno se presenta más adelante.

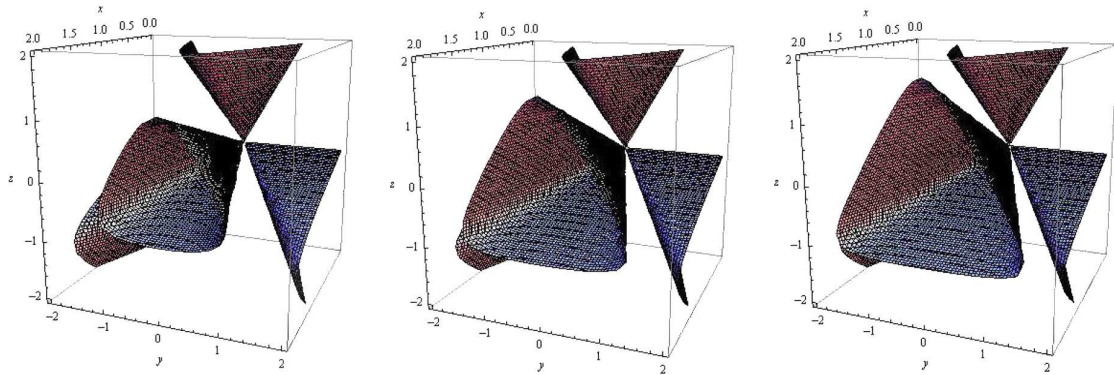


Figura 4-4: Todas las soluciones de la ec. (4.44) evaluadas para  $\mu_f = 3, 6$  y  $9$ .

### 4.3.4 Regla de flujo

#### Introducción

La forma general de la teoría de tensión-dilatancia de Rowe está dada por la ec. (2.46) que se repite a continuación [125]

$$\dot{w}_{in} = N_{cv} \dot{w}_{out} \quad (4.51)$$

Rowe calculó los términos  $\dot{w}_{in}$  y  $\dot{w}_{out}$  como la suma de las componentes positivas y negativas del triplete

$$\dot{w}_I = \sigma_I \dot{\epsilon}_I \quad (I \text{ no suma}) \quad (4.52)$$

o sea,

$$\dot{w}_{in} = \sum_{\dot{w}_I > 0} \dot{w}_I \quad (4.53)$$

$$\dot{w}_{out} = - \sum_{\dot{w}_I < 0} \dot{w}_I \quad (4.54)$$

Dentro de la teoría de la plasticidad, el trabajo de disipación está dado por el producto  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ . Rowe [125] justificó el empleo de  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  en lugar de  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  en el hecho de que la energía elástica almacenada es muy pequeña comparada con la energía disipada en los procesos de deformación por corte de arenas. En lo que sigue, se asume que en la ec. (4.52) se emplean componentes de  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ .

El cálculo del trabajo de deformación como el producto escalar de las componentes de  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  sólo tiene sentido físico si ambos tensores comparten autovectores y si los autovalores tienen el mismo ordenamiento. En cualquier otro caso, el trabajo es de la forma  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  y no puede ser reducido a la suma de los elementos de  $\dot{w}_I$ .

Para que  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  compartan autovectores es necesario que el potencial plástico sea una función isotrópica de  $\boldsymbol{\sigma}$ . Aunque el problema no es trivial para el caso de la no asociatividad general, puede resolverse si se postula asociatividad deviatorica (en  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d^p$ ) y no asociatividad volumétrica (en  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p$ ). Como la proyección volumétrica no aumenta el espacio espectral, la no asociatividad volumétrica no rompe la herencia de propiedades espectrales de  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ . En el caso de no asociatividad volumétrica, la disipación plástica unitaria puede escribirse como

$$\dot{w}^p = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1^p + \sigma_2 \dot{\epsilon}_3^p + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3^p \quad (4.55)$$

y la ec. (4.52) puede ser redefinida como

$$\dot{w}_I = \sigma_I \dot{\epsilon}_I^p \quad (I \text{ no suma}) \quad (4.56)$$

que ahora contiene las componentes del trabajo plástico disipado.

## Cálculo del término de dilatancia

Si se sustituye la ec. (4.6) en la ec. (4.5) y luego en la ec. (4.56) queda

$$\dot{w}^p = \dot{\lambda} \{ \sigma_1 (m_{d1} + \beta), \sigma_2 (m_{d2} + \beta), \sigma_3 (m_{d3} + \beta) \} \quad (4.57)$$

donde  $\{m_{d1}, m_{d2}, m_{d3}\}$  son los autovalores de  $\mathbf{m}_d$  y  $\beta$  es un término de dilatancia dependiente de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

El deslizamiento de partículas, como mecanismo plástico, requiere que no todos los componentes del triplete  $\{\dot{\varepsilon}_1^p, \dot{\varepsilon}_2^p, \dot{\varepsilon}_3^p\}$  tengan el mismo signo. Como los autovalores de  $\boldsymbol{\sigma}$  son positivos, debe cumplirse que  $\sigma_1 (m_{d1} + \beta) > 0$  (aporta a  $\dot{w}_{in}$ ) y  $\sigma_3 (m_{d3} + \beta) < 0$  (aporta a  $\dot{w}_{out}$ ), mientras que el signo de  $\sigma_2 (m_{d2} + \beta)$  es desconocido.

Se asume primero que  $(m_{d2} + \beta) \leq 0$ . Si se inserta la ec. (4.56) en las ecs. (4.53) y (4.54) y luego en la ec. (4.51) se obtiene, luego de algo de álgebra

$$\beta = -\frac{\sigma_1 m_{d1} + N_{cv} (\sigma_2 m_{d2} + \sigma_3 m_{d3})}{\sigma_1 + N_{cv} (\sigma_2 + \sigma_3)} \quad (4.58)$$

mientras que, si  $(m_{d2} + \beta) \geq 0$  se obtiene

$$\beta = -\frac{\sigma_1 m_{d1} + \sigma_2 m_{d2} + N_{cv} \sigma_3 m_{d3}}{\sigma_1 + \sigma_2 + N_{cv} \sigma_3} \quad (4.59)$$

Si  $(m_{d2} + \beta) = 0$ , tanto la ec. (4.58) como la ec. (4.59) arrojan

$$\beta = -\frac{\sigma_1 m_{d1} + N_{cv} \sigma_3 m_{d3}}{\sigma_1 + N_{cv} \sigma_3} \quad (4.60)$$

La ec. (4.58) puede asociarse a estados cercanos a compresión triaxial; la ec. (4.59) a estados cercanos a extensión triaxial; y la ec. (4.60) a deformación plana. Como las tres obedecen a la teoría de la tensión-dilatancia de Rowe [124], un mismo cociente  $\sigma_1/\sigma_3$  implica diferentes valores de  $\beta$  para los tres estados.

## Compresión y extensión triaxial

Los autovalores de  $\mathbf{m}_d$  para compresión triaxial son  $m_{d1} = \sqrt{2/3}$ ,  $m_{d2} = m_{d3} = -\sqrt{1/6}$ , y por lo tanto

$$\dot{\epsilon}_1^p = \dot{\lambda} \left( \sqrt{2/3} + \beta_{TC} \right) \quad (4.61)$$

$$\dot{\epsilon}_3^p = \dot{\lambda} \left( -\sqrt{1/6} + \beta_{TC} \right) \quad (4.62)$$

donde  $\beta_{TC}$  es el término de dilatancia para compresión triaxial. Si se insertan las ecs. (4.61) y (4.62) en la ec. (2.47) queda

$$\beta_{TC} = \sqrt{2/3} \frac{N_{cv}\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 + 2N_{cv}\sigma_3} \quad (4.63)$$

Para extensión triaxial, el término de dilatancia queda

$$\beta_{TE} = \sqrt{2/3} \frac{N_{cv}\sigma_3 - \sigma_1}{2\sigma_1 + N_{cv}\sigma_3} \quad (4.64)$$

La anterior no es la primera extensión de la teoría de tensión-dilatancia a estados tridimensionales de tensiones. Guo y Stolle [47] presentaron una extensión de la hipótesis de la ec. (4.51) y de la ecuación tensión-dilatancia por medio del tensor auxiliar

$$\pi_{ij} = \sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} \quad (4.65)$$

cuyos autovalores coinciden, para asociatividad deviatorica, con

$$\pi_I = \sigma_I \dot{\epsilon}_I \quad (I \text{ no suma}) \quad (4.66)$$

La mayor ventaja de esta solución, comparada con las ecs. (4.58), (4.59) y (4.60) es que el término de dilatancia que se obtiene es una forma tensorial derivable. Dos desventajas son: i) el procedimiento de generalización de la ec. (4.51) se aparta de

la formulación de Rowe; y ii) se incluye la componente elástica de la deformación incremental, en contradicción con el hecho aceptado de que la dilatancia es un mecanismo plástico. Guo y Wan [48] investigaron arreglos granulares 2D con diferentes disposiciones de partículas regulares y demostraron que la hipótesis de mínimo cociente de trabajos implica una cota inferior de la dilatancia de materiales anisótropos. Desarrollaron una nueva formulación tensión-dilatancia basada en micromecánica 2D y dedujeron una regla de flujo consistente con esta formulación. Comparada con las ecs. (4.58), (4.59) y (4.60), la regla de flujo de Guo y Wan tiene mejor sustento en la microescala, pero requiere la definición y calibración de un tensor de fábrica. Además, no puede ser extendida a estados tridimensionales de tensiones de manera sencilla. Por el contrario, las ecs. (4.58), (4.59) y (4.60) sólo se basan en la hipótesis de la asociatividad deviatorica y no requieren parámetros adicionales, por lo que pueden ser implementadas en códigos numéricos de manera expeditiva.

### **Término de dilatancia interpolado**

El conjunto de ecuaciones (4.58), (4.59) y (4.60) forman una función continua de  $\sigma$  con respecto al ángulo de Lode  $\theta$ . Sin embargo, se produce una discontinuidad en la primera derivada  $\partial\beta/\partial\theta$  en el punto común de las ecs. (4.58) y (4.59), donde vale la ec. (4.60).

Este pico es producido por el rápido cambio de dirección de  $\mathbf{m}_d$  que existe cerca del punto que representa el estado de compresión triaxial. Es más, la teoría de Rowe no podría utilizarse junto con el criterio de Mohr-Coulomb - para el que ha sido deducida - sin enfrentar el severo inconveniente de que la superficie de fluencia facetada de Mohr-Coulomb produce un cambio finito en los autovalores de  $\mathbf{m}_d$  para un cambio infinitesimal de  $\theta$  en los seis vértices de compresión/extensión triaxial.

Excepto en la vecindad del punto donde  $m_{d2} + \beta = 0$ ,  $\beta$  es una función suave del ángulo de Lode que es numéricamente indistinguible de la interpolación lineal

$$\beta = \beta_{TC} \frac{1 - \sin[3\theta]}{2} + \beta_{TE} \frac{1 + \sin[3\theta]}{2} \quad (4.67)$$

Tanto para compresión como extensión triaxial, el criterio de Matsuoka-Nakai arroja  $\sigma_1/\sigma_3 = N_{tx}$ , donde

$$N_{tx} = \frac{1}{4} (4 + \mu_f + \sqrt{\mu_f} \sqrt{8 + \mu_f}) \quad (4.68)$$

Si se combinan las ecs. (4.63), (4.64), (4.67) y (4.68) queda

$$\beta = \frac{N_{cv} - N_{tx}}{\sqrt{6}} \left( \frac{1 - \sin[3\theta]}{N_{tx} + 2N_{cv}} + \frac{1 + \sin[3\theta]}{2N_{tx} + N_{cv}} \right) \quad (4.69)$$

donde  $\sin[3\theta] = -3\sqrt{6}J_{3r}/r^3$ . Woodward propuso una expresión similar [162].

En la figura 4-5 se muestra  $\beta$  como función de  $\theta$  para tres valores  $\mu_c = 8 \tan^2[\phi_c]$ ,  $\frac{3}{2}\mu_c$  y  $\frac{1}{2}\mu_c$ . El tercio superior muestra los valores calculados con las ecs. (4.58), (4.59), y (4.60), mientras que los dos tercios inferiores muestran valores calculados mediante la ec. (4.69).

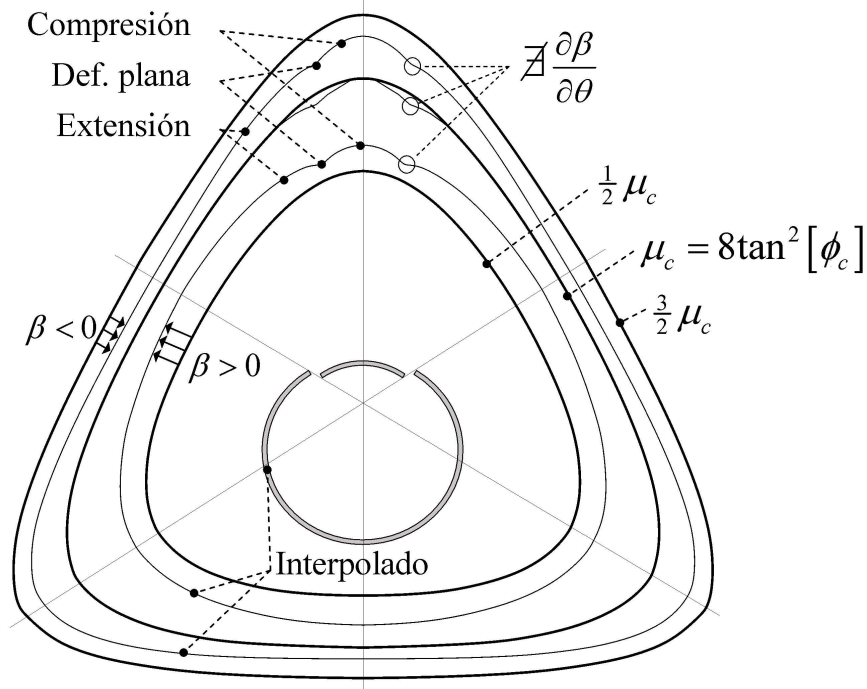


Figura 4-5: Término de dilatación  $\beta$ . Tercio superior: ecs. (4.58) a (4.60). Dos tercios inferiores, ec. (4.69).

## Ángulo de fricción interna a volumen constante

La función de estado

$$N_{cv} = \tan^2 [\pi/4 + \phi_{cv}/2] \quad (4.70)$$

depende de la relación de vacíos, porque  $\phi_{cv}$  depende de la relación de vacíos como se muestra en la figura 2-6 [123][129]. Como  $\phi_{cv} \rightarrow \phi_c$  a medida que la muestra se acerca al estado crítico (figura 2-5),  $\phi_{cv}$  es una función de estado que puede ponerse en la forma

$$\phi_{cv} = \phi_c - f \quad (4.71)$$

$f [p, e_0]$  debe cumplir con las restricciones

$$f [p, e_{0c}] = 0 \quad (4.72)$$

$$\partial f / \partial p < 0 \quad (4.73)$$

$$\partial f / \partial e_0 < 0 \quad (4.74)$$

para que se reproduzca el comportamiento observado. Si se comparan la definición y propiedades de  $\psi [p, e_0]$  y  $f [p, e_0]$  se aprecia que  $f$  puede ser tomada como proporcional a  $\psi$ . Por lo tanto, se propone la expresión

$$\phi_{cv} = \phi_c - \alpha \psi \quad (4.75)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro de calibración que en este modelo se adopta en  $\alpha = 0.5$ . La principal ventaja de esta formulación es que asegura que tanto  $\phi_{cv}$  como  $\phi$  tienden a  $\phi_c$  a medida que el material se acerca a  $e_{0c}$ , sin necesidad de recurrir a parámetros materiales adicionales.

## 4.4 Implementación numérica

### 4.4.1 Operador de integración

El operador de integración es implícito. Se resuelve el conjunto de ecuaciones

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0 ] : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (4.76)$$

$${}^{n+1}e_0 = (1 + {}^n e_0) \exp [ {}^{n+1}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{1} ] - 1 \quad (4.77)$$

sujeto a la restricción

$$F_f [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}\mu_f ] = 0 \quad (4.78)$$

donde

$${}^{n+1}\mu_f = \mu_f [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0 ] \quad (4.79)$$

Las ecs. (4.76) a (4.78) están expresadas en términos del tensor de deformación plástica

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \lambda (\mathbf{m}_d [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0 ] + \beta [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0 ] \mathbf{1}) \quad (4.80)$$

que tiene una única variable independiente  $\lambda$ , por lo que, en un paso elastoplástico, el conjunto de ecuaciones (4.76) a (4.78) se reduce a

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} [\lambda] \quad (4.81)$$

$${}^{n+1}e_0 = \tilde{e}_0 [\lambda] \quad (4.82)$$

con lo que la ec. (4.80) se reduce a

$$\tilde{F}_f [\lambda] = 0 \quad (4.83)$$

Este operador genera un algoritmo encestado que resuelve una variable escalar a la vez. El algoritmo pertenece a una familia de métodos de integración multinivel



[43][81][83][159][160], diferente a la mayoría de los algoritmos de actualización de tensiones para geomateriales, en los que se itera sobre un conjunto de variables simultáneas [1][13][14][15][16][37]. En [43] puede verse una discusión sobre los algoritmos de nivel simple y múltiple y el planteo de algoritmos encestados, mientras que en [54] se presenta un estudio completo de las técnicas modernas de integración de modelos para geomateriales.

#### 4.4.2 Algoritmo de integración

Se presenta el algoritmo de integración del modelo entre el paso  $n$  y el paso  $n + 1$ . El algoritmo es implícito, por lo que las variables se evalúan en  $^{n+1} (*)$ , aunque este superíndice se omite por claridad. Las iteraciones se indican como un superíndice derecho entre paréntesis  $(*)^{(i)}$ .

El algoritmo de integración está organizado como una serie de bucles encestados con la siguiente estructura:

1. Se inicializan las funciones de estado

- (a) Se parte de un estado convergido

$$\{ {}^n \sigma, {}^n e_0 \} \tag{4.84}$$

- (b) Se impone un incremento de deformación  $\Delta \epsilon$

- (c) Se calculan las funciones de estado

$$\mu_f^{(0)} = {}^n \mu_f \tag{4.85}$$

$$\beta^{(0)} = {}^n \beta \tag{4.86}$$

(d) Se calculan las funciones elásticas

$$K^{(0)} = {}^n K \quad (4.87)$$

$$G^{(0)} = {}^n G \quad (4.88)$$

$$\mathbf{D}^{(0)} = {}^n \mathbf{D} \quad (4.89)$$

(e) Se calcula la deformación elástica convergida

$${}^n \boldsymbol{\varepsilon}^e = {}^n \mathbf{D}^{-1} : {}^n \boldsymbol{\sigma} \quad (4.90)$$

2. Se calcula la deformación elástica con congelamiento de variables plásticas

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.91)$$

3. Se calcula la tensión elástica  $\boldsymbol{\sigma}^e$  con congelamiento de variables plásticas (Algoritmo A)

4. Se controla la función de fluencia

$$F_f^{(0)} [\boldsymbol{\sigma}^e, {}^n \mu_f] \leq 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e \\ e_0 = {}^n e_0 \end{array} \right\} \text{ y FIN} \quad (4.92)$$

5. Si  $F_f^{(0)} > 0$

(a) Se calcula la tensión de prueba

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} = \mathbf{D}^{(0)} : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.93)$$

(b) Se estima una cota inferior del multiplicador  $\lambda^{(0)}$  y de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{p(0)}$  (Algoritmo B)

(c) Se calculan los autovectores unitarios  $\mathbf{g}_i$  de  $\widehat{\mathbf{s}}^{(0)} = \mathbf{I}^{dev} : \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}$  ( $\mathbf{g}_i$  tienen módulo

1 y traza 0)

(d) Mientras

$$\text{abs} [F^{(i)}] < \text{tol} \quad (4.94)$$

i. Se actualizan

$$\sigma^{(i)} \quad \lambda^{(i)} \quad \epsilon^{p(i)} \quad (4.95)$$

con

$$\mathbf{D}^{(i)} \quad e_0^{(i)} \quad \mu_f^{(i)} \quad \beta^{(i)} \quad (4.96)$$

congelados (Algoritmo C)

ii. Se actualiza

$$e_0^{(i+1)} \quad K^{(i+1)} \quad G^{(i+1)} \quad \mathbf{D}^{(i+1)} \quad (4.97)$$

iii. Se actualiza

$$\hat{\sigma}^{(i+1)} = \mathbf{D}^{(i+1)} : \hat{\epsilon} \quad (4.98)$$

iv. Se actualiza

$$\sigma^{(i+1)} = \mathbf{D}^{(i+1)} : (\hat{\epsilon} - \epsilon^{p(i+1)}) \quad (4.99)$$

v. Se actualizan las funciones de estado

$$\mu_f^{(i+1)} \quad \beta^{(i+1)} \quad (4.100)$$

vi. Se calcula la función de fluencia

$$F_f^{(i+1)} \left[ \sigma^{(i+1)}, \mu_f^{(i+1)} \right] \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad (4.101)$$

vii. Se incrementa  $i$  e itera.

(e) Se informa  $\sigma$ ,  $e_0$  y FIN.

**Algoritmo A: Cálculo de  $\sigma^e$**

Se debe encontrar  $\sigma^e = \mathbf{s} + p\mathbf{1}$  tal que se cumpla la igualdad

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D} : (\mathbf{s} + p\mathbf{1}) \quad (4.102)$$

con  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  fijo. Como los términos volumétricos y deviatoricos están desacoplados, la ec. (4.102) se reduce a

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d^e = \frac{\mathbf{s}}{2G} \quad (4.103)$$

$$\varepsilon_v^e = \frac{p}{K} \quad (4.104)$$

Para eso se plantea el residuo

$$\zeta = p - K [p, r [p]] \varepsilon_v^e \quad (4.105)$$

y se lo anula para la iteración  $(i + 1)$  ( $i$  es local del algoritmo)

$$\zeta^{(i+1)} = \zeta^{(i)} + \left( 1 - \varepsilon_v^e \left( \frac{dK}{dp} \right)^{(i)} \right) \delta p = 0 \quad (4.106)$$

con lo que se obtiene el incremento de presión

$$\delta p^{(i+1)} = \frac{-\zeta^{(i)}}{1 - \varepsilon_v^e (dK/dp)^{(i)}} = -\frac{p - K\varepsilon_v^e}{1 - \varepsilon_v^e \frac{mK}{p} \left( 1 + (m-1) \frac{Kr^2}{2G} \right)} \quad (4.107)$$

Debido a las fuertes no linealidades presentes en la formulación, el algoritmo debe ser completado con un esquema de cotas de error como sigue:

1. Se elige una cota inferior de la presión  $p_{inf}^{(0)}$  y una cota superior  $p_{sup}^{(0)}$  suficientemente amplias.

2. Se calcula

$$G^{(0)} \quad r^{(0)} = 2G^{(0)}\varepsilon_d^e/p^{(0)} \quad K^{(0)} \quad (4.108)$$

3. Se calcula el residuo

$$\zeta^{(0)} = p^{(0)} - K^{(0)}\varepsilon_v^e \quad (4.109)$$

4. Se corrigen cotas

$$\zeta^{(0)} < 0 \implies p_{inf}^{(0)} = \max [p_{inf}^{(0)}, p^{(0)}] \quad (4.110)$$

$$\zeta^{(0)} > 0 \implies p_{sup}^{(0)} = \min [p_{sup}^{(0)}, p^{(0)}] \quad (4.111)$$

5. Mientras  $\mathbf{abs} [\zeta^{(i)}] > tol$

(a) Se calcula

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} - \zeta^{(i)} / \left(1 - \varepsilon_v^e (dK/dp)^{(i)}\right) \quad (4.112)$$

(b) Se controlan cotas

$$p^{(i+1)} > p_{sup}^{(i)} \vee p^{(i+1)} < p_{inf}^{(i)} \implies p^{(i+1)} = \frac{p_{sup}^{(i)} + p_{inf}^{(i)}}{2} \quad (4.113)$$

(c) Se actualizan

$$G^{(i+1)} \quad r^{(i+1)} \quad K^{(i+1)} \quad (4.114)$$

(d) Se actualiza

$$\zeta^{(i+1)} = p^{(i+1)} - K^{(i+1)}\varepsilon_v^e \quad (4.115)$$

(e) Se corrigen cotas

$$\zeta^{(i+1)} < 0 \implies p_{inf}^{(i+1)} = \max [p_{inf}^{(i)}, p^{(i+1)}] \quad (4.116)$$

$$\zeta^{(i+1)} > 0 \implies p_{sup}^{(i+1)} = \min [p_{sup}^{(i)}, p^{(i+1)}] \quad (4.117)$$

(f) se incrementa  $i$  y se itera.

### Algoritmo B: Estimación de $\varepsilon^p$

La figura 4-4 muestra que existen varios dominios en el espacio  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  en los que  $F_f[\widehat{\boldsymbol{\sigma}}] < 0$ , de los cuales sólo el que tiene su eje coincidente con el eje  $p > 0$  kPa tiene sentido físico. Esta solución queda circunscripta por la traza del cono de sección circular

$$F_{DP} = \|\mathbf{s}\| - \rho_{DP} p \quad (4.118)$$

donde

$$\rho_{DP} = \frac{2\sqrt{6\mu_f}}{3\sqrt{\mu_f + 8} - \sqrt{\mu_f}} \quad (4.119)$$

Se puede calcular una primera estimación de  $\lambda$  mediante un retorno radial a la ec. (4.118). Para ello se calculan

$$\mathbf{s}^{(0)} = \widehat{\mathbf{s}} - 2G \frac{\widehat{\mathbf{s}}}{\|\widehat{\mathbf{s}}\|} \lambda^{(0)} \quad (4.120)$$

$$p^{(0)} = \widehat{p} - 3K\beta\lambda^{(0)} \quad (4.121)$$

se insertan en la ec. (4.118) y se despeja

$$\lambda^{(0)} = \frac{\|\widehat{\mathbf{s}}\| - \rho_{DP}\widehat{p}}{2G - 3K\rho_{DP}\beta} \quad (4.122)$$

Esta expresión permite un cálculo de  $\lambda^{(0)}$  aún en el caso en que  $\widehat{p} < 0$  kPa. La deformación plástica se estima con

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{p(0)} = \lambda^{(0)} \left( \frac{\widehat{\mathbf{s}}}{\|\widehat{\mathbf{s}}\|} + \beta \mathbf{1} \right) \quad (4.123)$$

### Algoritmo C: Actualización de $\sigma$ con funciones de estado constantes

En este algoritmo se actualiza  $\sigma$ ,  $\lambda$  y  $\epsilon^p$  mientras se mantienen congelados  $e_0$ , los módulos elásticos  $K$ ,  $G$  y, por lo tanto, el tensor elástico  $\mathbf{D}$  y  $\hat{\sigma}$ . El algoritmo recibe  $\hat{\sigma}$ ,  $\sigma$ ,  $e_0$ ,  $K$ ,  $G$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mu_f$ ,  $\beta$ . Se utiliza el siguiente procedimiento ( $i$  es un contador local):

1. Se calcula el versor de deformación plástica deviatorica  $\mathbf{m}_d^{(0)}$  (Algoritmo D)
2. Se corrige  $\lambda^{(0)}$  y  $\epsilon^{p(0)}$  mediante una proyección a la nueva dirección plástica:

$$\lambda^{(i)} = \epsilon^{p(0)} : \mathbf{m}_d^{(0)} \quad (4.124)$$

$$\epsilon^{p(0)} = \lambda^{(i)} \mathbf{m}_d^{(0)} \quad (4.125)$$

3. Se calcula

$$\sigma^{(0)} = \hat{\sigma} - \mathbf{D} : \lambda^{(0)} \mathbf{m}_d^{(i)} \quad (4.126)$$

4. Mientras

$$\text{abs} \left[ F_f^{(0)} \right] > \text{tol} \quad (4.127)$$

- (a) Se calcula el incremento de multiplicador

$$\Delta\lambda = F_f^{(i)} / (\mathbf{n}^{(i)} : \mathbf{D} : \mathbf{m}^{(i)}) \quad (4.128)$$

- (b) Se actualiza el multiplicador

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} + \Delta\lambda \quad (4.129)$$

- (c) Se actualiza

$$\sigma^{(i+1)} = \hat{\sigma} - \mathbf{D} : \lambda^{(i+1)} \mathbf{m}^{(i)} \quad (4.130)$$

- (d) Se actualiza

$$\mathbf{n}^{(i+1)} \quad \mathbf{m}^{(i+1)} \quad (4.131)$$

(e) Se evalúa la función de fluencia

$$F_f^{(i+1)} \underset{\geq}{\leq} 0 \quad (4.132)$$

Para que el código sea operativo se requiere el valor de  $\mathbf{n} = \partial F_f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  que es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{p} \left( (r^2 + (\mu_f + 9) J_{3r}) \mathbf{1} + (\mu_f + 6) \mathbf{r} - (\mu_f + 9) \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) \quad (4.133)$$

#### Algoritmo D: Cálculo de $\mathbf{m}_d$

En esta sección se propone un algoritmo que permite la determinación del tensor de dirección plástica deviatorica  $\mathbf{m}_d$  para el criterio de Matsuoka-Nakai. Como este criterio tiene más de una superficie de fluencia asociada (ver figura 4-4), el campo tensorial  $\mathbf{n} = \partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}$  no apunta siempre a la superficie objetivo, lo que constituye un severo inconveniente para la mayoría de los algoritmos de retorno convencionales.

Para solucionar este inconveniente, el algoritmo que se presenta emplea únicamente información contenida en la superficie de fluencia y el valor de la tensión de prueba  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ . El procedimiento es:

1. Se calculan los seis vértices de la traza de  $F_f$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \rho_{out} \mathbf{g}_1 & \mathbf{v}_2 &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \rho_{in} \mathbf{g}_3 & \mathbf{v}_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \rho_{out} \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{v}_4 &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \rho_{in} \mathbf{g}_1 & \mathbf{v}_5 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \rho_{out} \mathbf{g}_3 & \mathbf{v}_6 &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \rho_{in} \mathbf{g}_2 \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{g}_i$  son los autovectores deviatoricos de  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  y

$$\rho_{out} = \frac{2\sqrt{6\mu_f}}{3\sqrt{\mu_f + 8} - \sqrt{\mu_f}} \quad \rho_{in} = \frac{2\sqrt{6\mu_f}}{3\sqrt{\mu_f + 8} + \sqrt{\mu_f}}$$

son los valores de  $r$  en los vértices exteriores e interiores de  $F_f$ .



2. Se calcula

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{s}}/\hat{p} \quad (4.134)$$

3. Se calcula la distancia entre  $\hat{\mathbf{r}}$  y los seis vértices

$$d_i = \hat{\mathbf{r}} : \mathbf{v}_i \quad (4.135)$$

y se eligen los dos vértices más cercanos  $\mathbf{v}_I$  y  $\mathbf{v}_{II}$ .

4. Se calcula el versor  $\mathbf{v}_{AB}$  de la recta que une  $\mathbf{v}_I$  y  $\mathbf{v}_{II}$ .

5. Se calcula el ángulo entre el vértice más cercano  $\mathbf{v}_I$  y  $\hat{\mathbf{r}}$  como

$$\alpha = \text{acos} [\mathbf{v}_I : \hat{\mathbf{r}} / \|\hat{\mathbf{r}}\|] \quad (4.136)$$

6. Como el ángulo entre dos vértices es  $60^\circ$ , la coordenada local del punto donde  $\hat{\mathbf{r}}$  intersecta a  $\mathbf{v}_{II} - \mathbf{v}_I$ , medida desde  $\mathbf{v}_I$ , es

$$0 \leq x = 3\alpha/\pi \leq 1/2 \quad (4.137)$$

como se muestra en la figura 4-6

7. Se eligen dos coordenadas cercanas

$$\left\{ x_A = \frac{x}{2}, x_B = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right\} \quad (4.138)$$

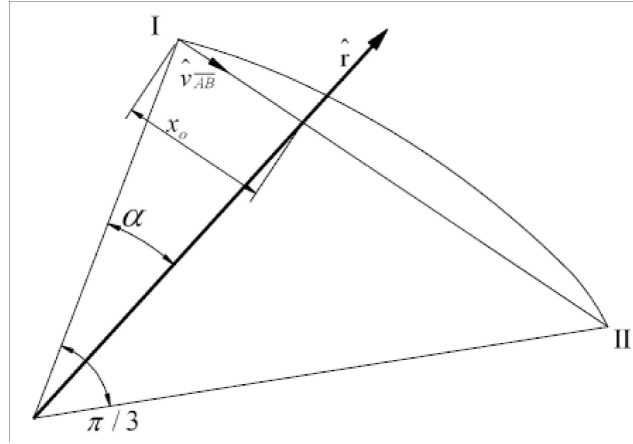


Figura 4-6: Determinación de coordenada local  $x_0$ .

8. Se calcula  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{m}_d$  en las dos coordenadas

$$\mathbf{r}_A = \hat{\mathbf{r}}[x_A] = \mathbf{v}_I + x_A (\mathbf{v}_{II} - \mathbf{v}_I) \quad (4.139)$$

$$\mathbf{r}_B = \hat{\mathbf{r}}[x_B] = \mathbf{v}_I + x_B (\mathbf{v}_{II} - \mathbf{v}_I) \quad (4.140)$$

$$\mathbf{m}_d^A = \hat{\mathbf{m}}_d[\mathbf{r}_A] \quad (4.141)$$

$$\mathbf{m}_d^B = \hat{\mathbf{m}}_d[\mathbf{r}_B] \quad (4.142)$$

9. Se calcula el error de paralelismo entre  $(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_i)$ ,  $\mathbf{m}_d^A$  y  $\mathbf{m}_d^B$

$$\zeta_A = ((\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_A) - ((\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_A) : \mathbf{m}_d^A) \mathbf{m}_d^A) : \frac{\mathbf{v}_{II} - \mathbf{v}_I}{\|\mathbf{v}_{II} - \mathbf{v}_I\|} \quad (4.143)$$

$$\zeta_B = ((\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_B) - ((\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_B) : \mathbf{m}_d^B) \mathbf{m}_d^B) : \frac{\mathbf{v}_{II} - \mathbf{v}_I}{\|\mathbf{v}_{II} - \mathbf{v}_I\|} \quad (4.144)$$

10. Mientras

$$\zeta > tol \quad (4.145)$$

(a) Se calcula una nueva coordenada  $x$  por interpolación lineal

$$x = \frac{x_A \zeta_B - x_B \zeta_A}{\zeta_B - \zeta_A}$$

como se muestra en la figura 4-7

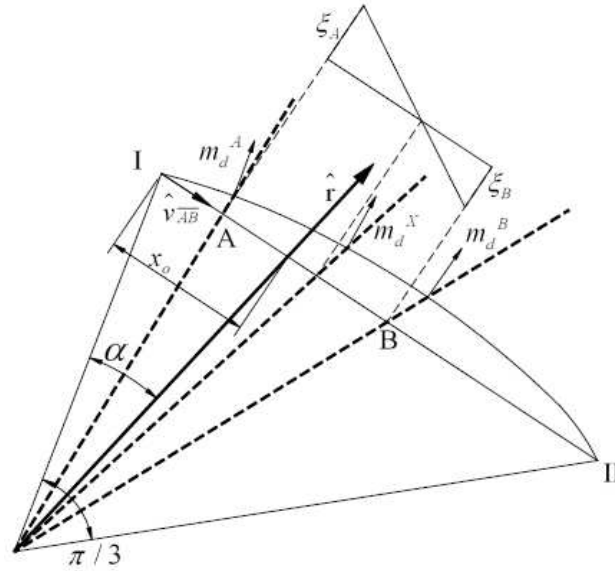


Figura 4-7: Determinación del error de paralelismo de las normales  $\mathbf{m}_d^A$  y  $\mathbf{m}_d^B$  y cálculo de  $\mathbf{m}_d^x$ .

(b) Se calculan

$$\mathbf{r}_x = \hat{\mathbf{r}}[x] = \mathbf{v}_I + x(\mathbf{v}_{II} - \mathbf{v}_I) \quad (4.146)$$

$$\mathbf{m}_d^x = \hat{\mathbf{m}}_x[\mathbf{r}_x] \quad (4.147)$$

(c) Se calcula el error de paralelismo

$$\zeta = ((\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_x) - ((\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_x) : \mathbf{m}_d^x) \mathbf{m}_d^x) : \frac{\mathbf{v}_{II} - \mathbf{v}_I}{\|\mathbf{v}_{II} - \mathbf{v}_I\|} \quad (4.148)$$

(d) Se actualizan los umbrales

$$x < x_A \rightarrow x_B = x_A \wedge x_A = x \quad (4.149)$$

$$x > x_B \rightarrow x_A = x_B \wedge x_B = x \quad (4.150)$$

$$x_A < x < x_B \rightarrow \begin{array}{l} \text{sign} [\zeta_A \zeta] > 0 \rightarrow x_A = x \\ \text{sign} [\zeta_A \zeta] < 0 \rightarrow x_B = x \end{array} \quad (4.151)$$

(e) Se itera.

Con  $\mathbf{r}_x$  se conoce el punto sobre  $F_f$  de retorno de  $\boldsymbol{\sigma}$ , por lo que se puede calcular  $\mathbf{m}_d[\mathbf{r}_x]$  de manera exacta.

## 4.5 Resultados

### 4.5.1 Introducción

En esta sección se presentan algunas simulaciones en las que se resaltan los aspectos del comportamiento de las arenas que dependen de la evolución de la relación de vacíos, y que por lo tanto pueden ser capturados con el modelo que se presenta en este capítulo. La evaluación del efecto de los parámetros de entrada y las variables de estado y el análisis numérico del algoritmo se tratan en el capítulo 5, en el que este modelo se complementa con endurecimiento isotrópico previo a la falla.

### 4.5.2 Simulación de ensayos triaxiales

Se ejecutaron simulaciones numéricas de ensayos convencionales de compresión triaxial, con la malla axilsimétrica que se muestra en la figura 4-8 (66 elementos de seis nodos, 161 nodos en total). La tecnología del elemento se describe en [18]. Los desplazamientos verticales y horizontales del borde inferior están restringidos; en el borde lateral existe un contorno de presión constante  $\sigma_3$ ; el borde superior tiene desplazamientos verticales

impuestos monotónicamente crecientes y desplazamientos horizontales nulos. Estas condiciones de borde son las típicas de un ensayo triaxial convencional.

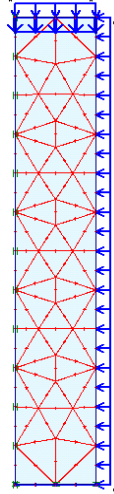


Figura 4-8: Malla de elementos finitos axilsimétrica para la simulación de ensayos de compresión triaxial. 66 elementos de seis nodos (detalles en [18]).

Se adoptaron los siguientes parámetros materiales:  $e_{min} = 0.58$ ,  $e_{max} = 0.98$ ,  $c_s = 840$ ,  $c_e = 2.17$ ,  $m = 0.5$ ,  $\phi_c = 31^\circ$  y  $p_r = 55$ .

En la figura 4-9 se presentan las curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$  y  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$  de una simulación efectuada para una densidad relativa  $D_r = 100\%$  y una presión de confinamiento  $\sigma_3 = 100$  kPa para siete puntos de la malla. Puede apreciarse que los diferentes puntos tienen la misma curva  $\sigma - \varepsilon$  hasta cerca del pico, en el que se producen las primeras deformaciones plásticas. A partir de ese paso, los puntos cercanos a los bordes se descargan mientras que los puntos centrales continúan su carga plástica con ablandamiento producido por el aumento de  $e_0$ . También se muestra la respuesta global que se obtendría con mediciones externas a la muestra. Este comportamiento, en el que diferentes puntos de la probeta tienen trayectorias de tensiones ampliamente diferentes, es típico de los materiales densos en los que la falla es localizada [151][152][153][157].

En las figuras 4-10 y 4-11 se presentan las curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$  y  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$  para el punto

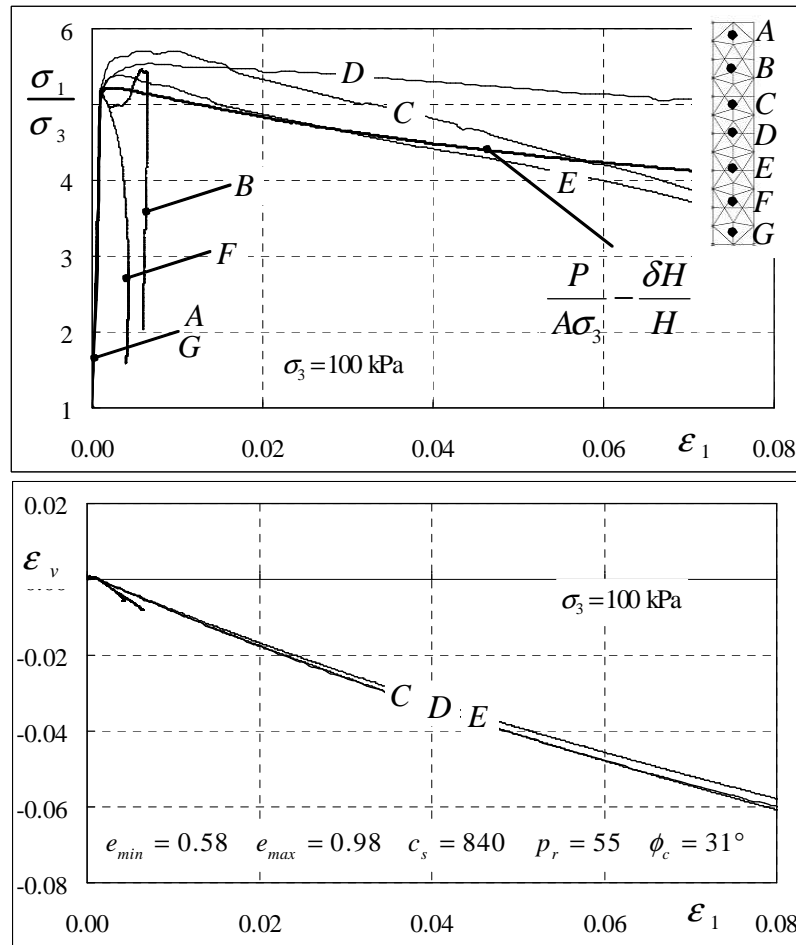


Figura 4-9: Curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \epsilon_1$  y  $\epsilon_v - \epsilon_1$  para siete puntos de la malla indicada en la fig. (4-8) y respuesta global. Ensayo triaxial.

$D$  central de la malla, para cuatro densidades relativas y dos presiones de confinamiento. Puede observarse que, excepto por la parte inicial de la curva  $\sigma - \epsilon$  que en el modelo es muy rígida, la respuesta global reproduce el comportamiento observado de las arenas (p.ej. figura 2-8[78] y, más abajo, 4-27) Las características salientes que son correctamente reproducidas son: i) el valor máximo de  $\sigma_1/\sigma_3$  depende de la presión y de la densidad relativa; ii) todas las simulaciones tienden a un mismo valor final; y iii) la tendencia a dilatar crece con la densidad relativa y disminuye con el aumento de la presión media.

En las simulaciones mostradas se alcanzó una deformación global  $\Delta H/H = 20\%$ , que

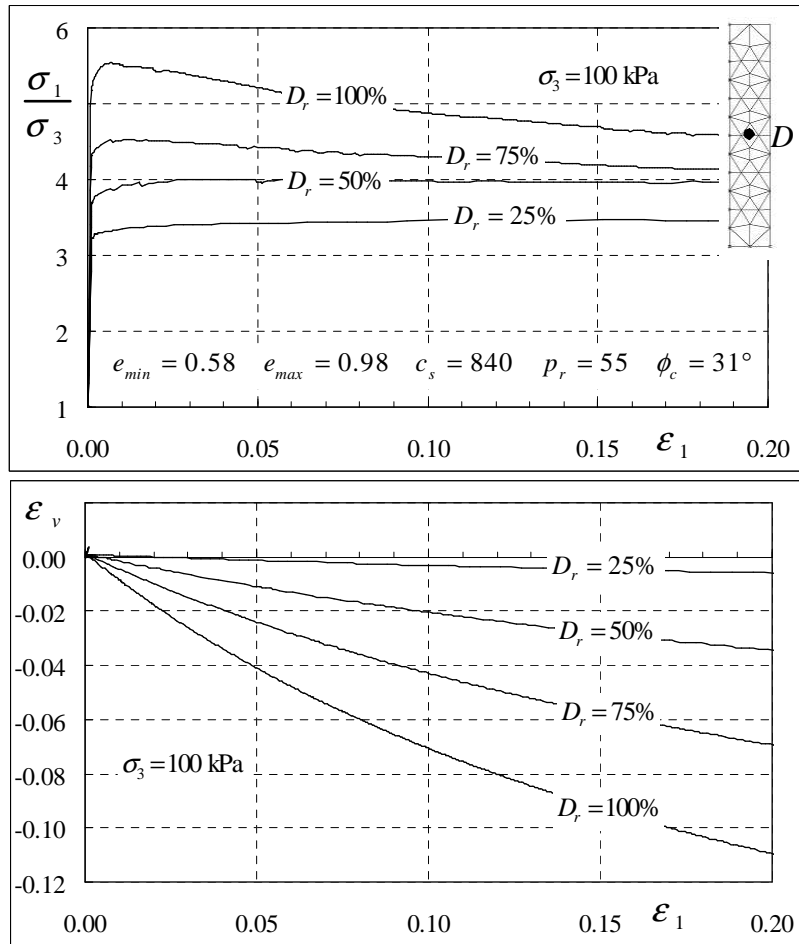


Figura 4-10: Curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \epsilon_1$  y  $\epsilon_v - \epsilon_1$  en el punto  $D$  para cuatro densidades relativas y una presión de confinamiento constante  $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$ . Ensayo triaxial.

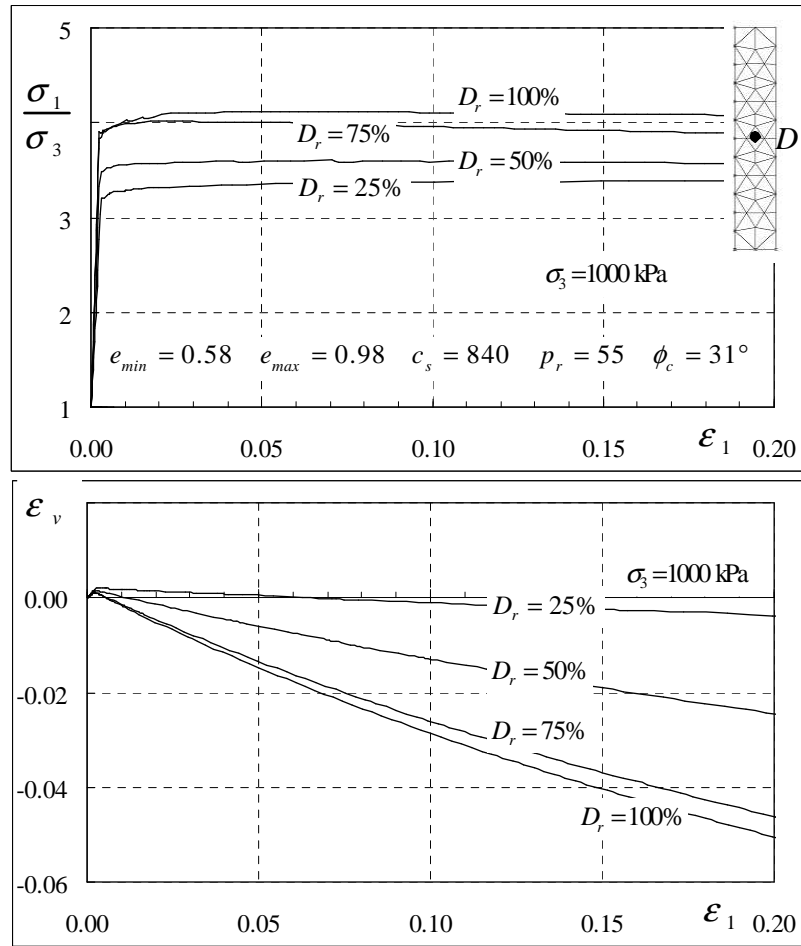


Figura 4-11: Curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \epsilon_1$  y  $\epsilon_v - \epsilon_1$  en el punto  $D$  para cuatro densidades relativas y una presión de confinamiento constante  $\sigma_3 = 1000$  kPa. Ensayo triaxial.



correspondió a deformaciones  $\varepsilon_1 > 70\%$  para el punto  $D$ . En la figura 4-12 se extiende la figura 4-10 hasta ese nivel de deformaciones locales. Puede observarse que las curvas  $\sigma_1/\sigma_3$  aún no alcanzan el estado crítico teórico

$$(\sigma_1/\sigma_3)_c = \tan^2 [\pi/4 + \phi_c/2] = 3.12 \quad (4.152)$$

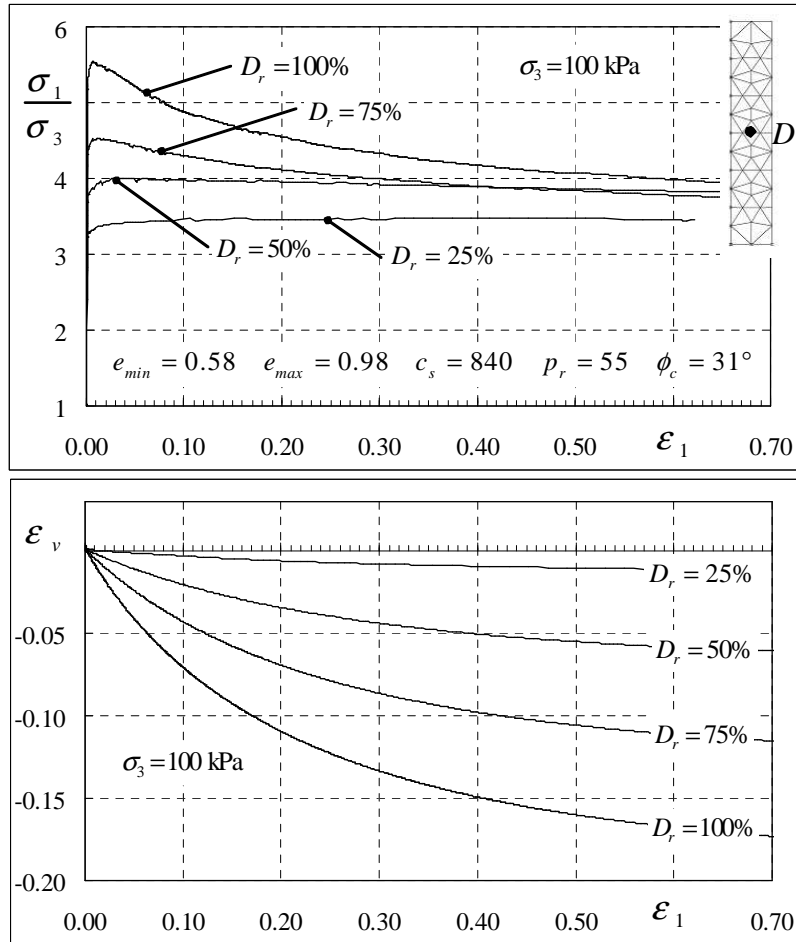


Figura 4-12: Curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$  y  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$  en el punto  $D$  para cuatro densidades relativas y una presión de confinamiento constante  $\sigma_3 = 100$  kPa.  $\varepsilon_1 = 70\%$ . Ensayo triaxial.

Esto se debe a dos razones:

1. Las funciones de estado  $\phi [p, e_0]$  y  $\phi_{cv} [p, e_0]$  tienden al estado crítico de manera

asintótica por lo que, teóricamente, la deformación necesaria para alcanzar el estado crítico es infinita.

2. La malla produce una fuerte localización de deformaciones que no puede ser adecuadamente reproducida por un modelo axilsimétrico.

En la figura 4-13 se muestran la curva local en el punto  $D$  y global para  $D_r = 100\%$ . Puede apreciarse que la curva tensión-deformación global tiene una rama descendente mucho más abrupta que la local. Como el algoritmo no está equipado con mecanismos para la regularización de la deformación localizada, esta rama descendente depende de la malla empleada para la modelización.

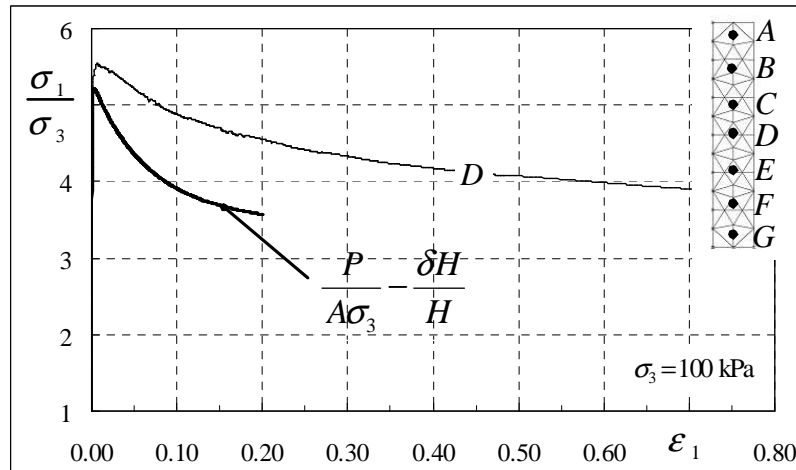


Figura 4-13: Deformaciones locales vs globales para  $D_r = 100\%$  y  $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$ . Ensayo triaxial.

En la figura 4-14 se muestra la malla deformada, el contorno de desplazamientos totales, el contorno de la norma de la deformación total  $\|\epsilon\|$  y el contorno de la relación de vacíos para esta muestra. La figura se presenta únicamente con carácter informativo y como prueba del funcionamiento de los algoritmos, puesto que el tamaño y tipo de elementos y la configuración axilsimétrica invalidan la simulación para deformaciones grandes.

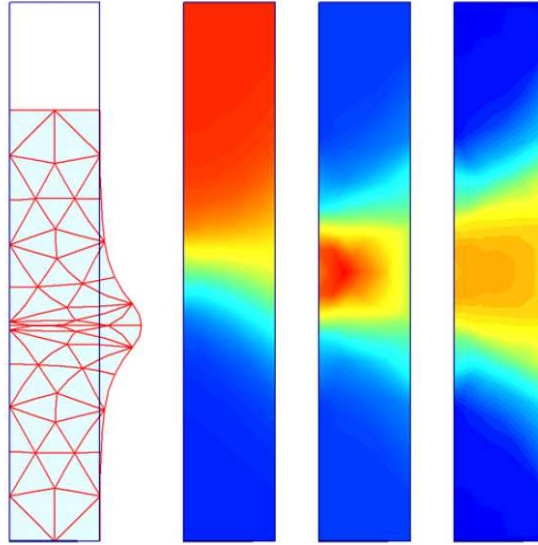


Figura 4-14: Simulación de un ensayo de compresión triaxial con  $D_r = 100\%$  y  $\sigma_3 = 100$  kPa. a) malla deformada; b) desplazamientos; c)  $\|\varepsilon\|$ ; y d)  $e_0$ . Escala: colorado: mayor; azul: menor. Para  $e_0$  : colorado:  $e_{max}$ ; azul:  $e_{min}$ .

La prueba de que el modelo alcanza el estado crítico se presenta con la simulación de un ensayo triaxial ideal, sin restricciones al desplazamiento horizontal en los bordes, en el que se alcanza una deformación principal mayor  $\varepsilon_1 = 90\%$ <sup>3</sup> En la figura 4-15 se presentan las curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$ ,  $\phi - \varepsilon_1$  y  $e_0 - \varepsilon_1$ .

### 4.5.3 Simulación de un ensayo de deformación plana

Se ejecutó la simulación numérica de un ensayo de deformación plana con la malla que se muestra en la figura 4-16 (568 elementos de seis nodos, 1203 nodos en total). Los parámetros materiales son los mismos que en los ejemplos anteriores. Las condiciones de borde son: desplazamientos del borde inferior restringidos; bordes laterales con presión constante  $\sigma_3 = 100$  kPa; desplazamientos verticales impuestos en el borde superior, y desplazamientos horizontales nulos. Los parámetros materiales son los mismos que los

<sup>3</sup>El modelo está formulado con la cinemática de las deformaciones infinitesimales.

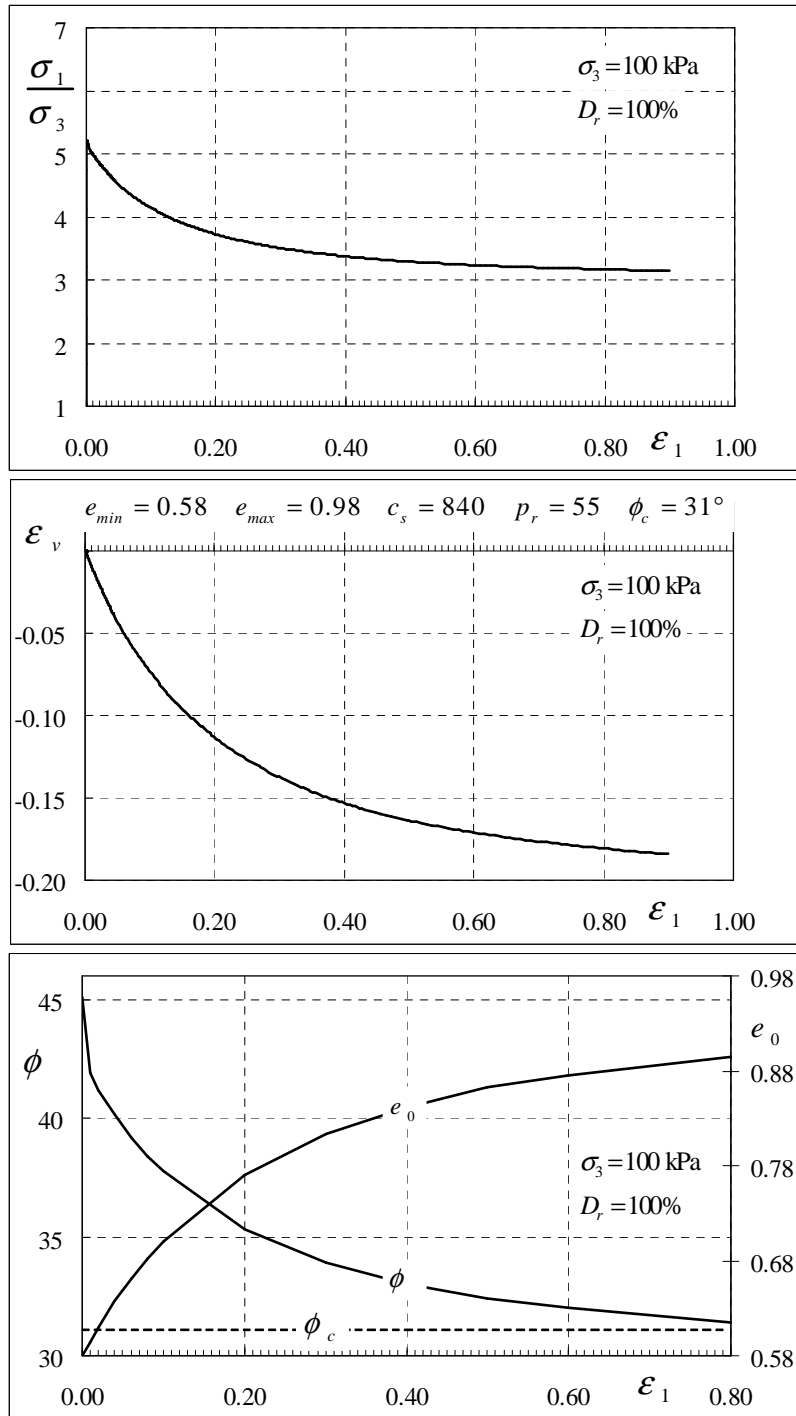


Figura 4-15: Ensayo de compresión triaxial sin restricción de cabezales,  $D_r = 100\%$ ,  $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$ .

de las simulaciones de ensayos triaxiales descritos en la sección anterior, y la densidad relativa es  $D_r = 75\%$ . Se activó la opción de actualización de la malla durante el análisis.

En la figura 4-16 se presentan la malla deformada, el contorno de desplazamientos, el contorno de la norma de deformación total  $\|\varepsilon\|$  y el contorno de relación de vacíos  $e_0$ . Puede apreciarse que el modelo captura correctamente la localización de deformaciones y el cambio de densidad (cambio de  $e_0$ ) asociado al desarrollo de bandas de localización en materiales dilatantes. El patrón de localización puede ser comparado con mediciones experimentales como las de la figura 4-17.

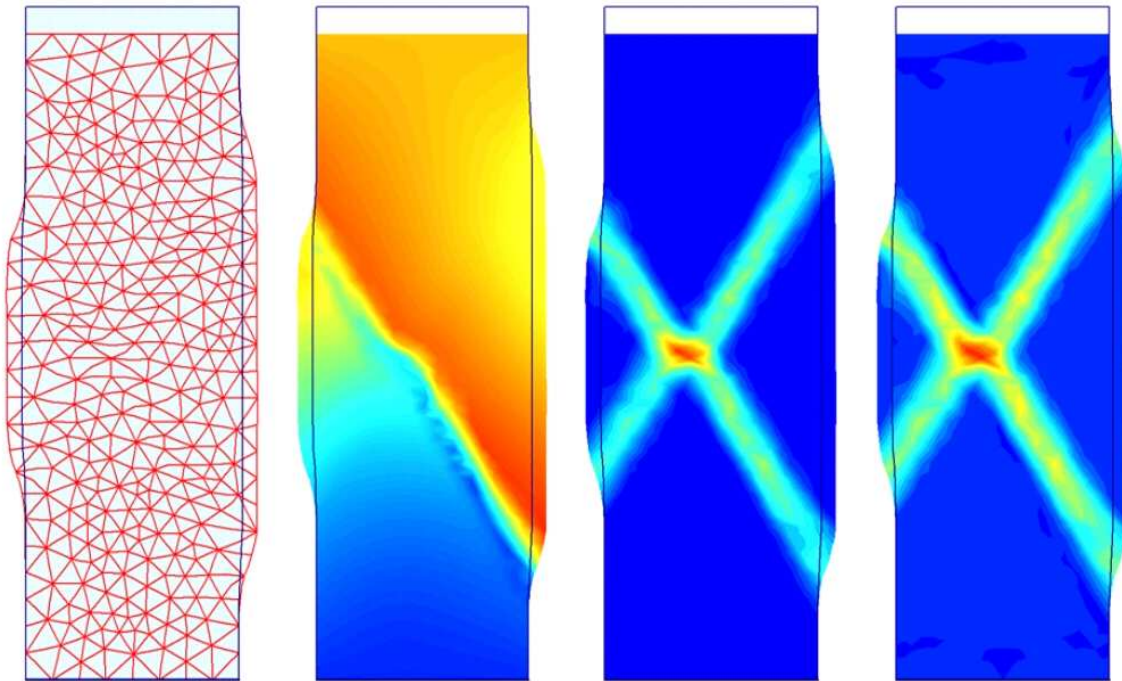


Figura 4-16: Simulación de un ensayo de compresión plana con  $D_r = 75\%$  y  $\sigma_3 = 100$  kPa. a) malla deformada; b) desplazamientos; c)  $\|\varepsilon\|$ ; y d)  $e_0$ . Escala: colorado: mayor; azul: menor. Para  $e_0$  : colorado:  $e_{max}$ ; azul:  $e_{min}$ .

En la figura 4-18 se muestra la evolución de la densidad relativa a lo largo del proceso de deformación.

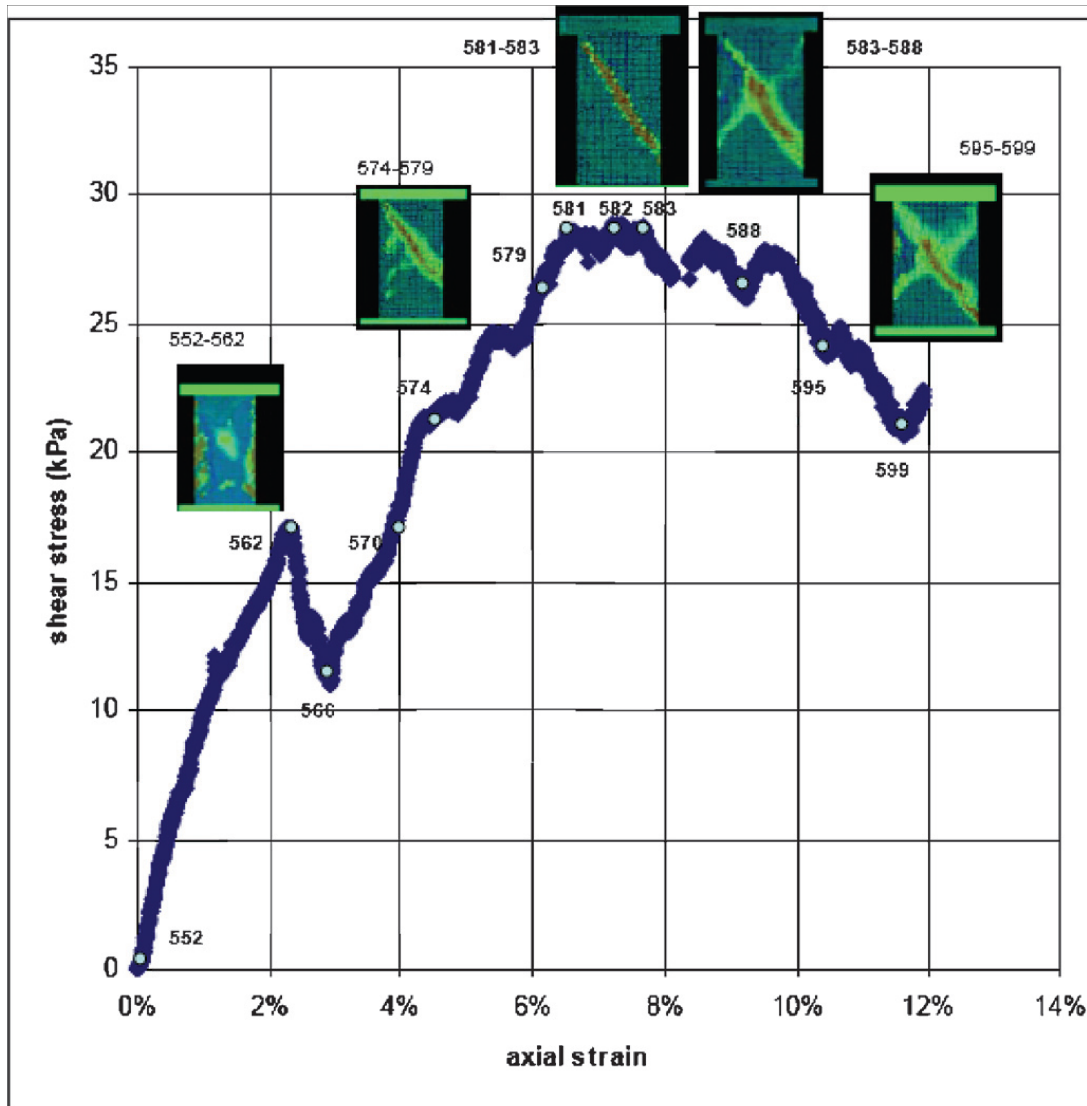


Figura 4-17: Curva tensión-deformación para un ensayo de compresión plana y análisis tomográfico de la evolución de bandas de localización para geomateriales [157].

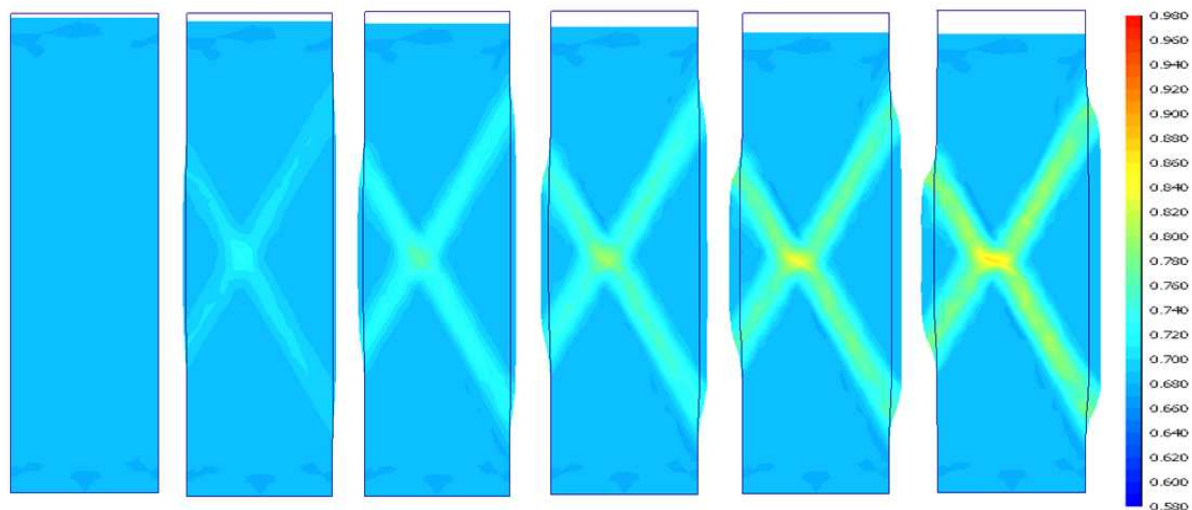


Figura 4-18: Evolución de  $D_r$  con la deformación.  $\Delta h/h_0 = 0\%$ ,  $0.5\%$ ,  $1.0\%$ ,  $1.5\%$ ,  $2.0\%$  y  $2.5\%$ . Azul:  $D_r = 100\%$ . Colorado:  $D_r = 0\%$ .

#### 4.5.4 Simulación del comportamiento de una presa CFRD sujeta a un sismo destructivo

En esta sección se presenta un problema típico de la ingeniería geotécnica en la que el modelo introducido en este capítulo puede ser aplicado: El diseño sísmico de presas de enrocado con pantalla de hormigón en la cara de aguas arriba (presas CFRD).

Las presas CFRD deben ser verificadas para la acción del denominado “terremoto de seguridad”, que es una acción sísmica destructiva de muy baja probabilidad de ocurrencia. El efecto de un terremoto de gran intensidad es la inestabilidad temporaria de los taludes de la presa, lo que se traduce en un asentamiento del coronamiento. El objeto de la verificación es, por lo tanto, estimar ese asentamiento con el fin de incrementar la altura de la presa y minimizar así el riesgo de sobrepaso [24][25][26][45][106][133][141].

Existe un amplio rango de procedimientos de cálculo para este problema, desde métodos analíticos simples hasta complejos modelos numéricos tridimensionales. Los métodos analíticos desacoplan el análisis de propagación de ondas en el cuerpo de la

presa - que produce amplificación de la aceleración basal - del análisis del efecto de esta aceleración sobre la estabilidad de los taludes [41][86][102][107][150][134]. Entre los métodos numéricos, algunos resuelven el problema de manera desacoplada - modelo elástico para propagación de ondas y modelo elastoplástico para estabilidad - mientras que otros resuelven el problema acoplado propagación-equilibrio mediante modelos elastoplásticos.

En el caso particular de la Presa Los Caracoles, recientemente construida en San Juan, Argentina, se efectuaron dos determinaciones independientes del asentamiento del coronamiento para su terremoto de seguridad: una predicción analítica [107] y una predicción numérica desacoplada [9]. Mas tarde, Sfriso [138] desarrolló un método numérico simplificado basado en el modelo que se presenta en este capítulo y lo aplicó al mismo problema. En la figura 4-19 se presenta una sección transversal de la presa [9], en la figura 4-20 se presenta la malla de elementos finitos. Los parámetros adoptados son [9][138]

	$e_{min}$	$e_{max}$	$c_s$	$c_e$	$m$	$\phi_c$	$p_r$	$e_0$
3B	0.10	0.45	650	2.17	0.5	41.3°	5.7	0.16
3D	0.10	0.45	600	2.17	0.5	41.0°	2.5	0.20
3L	0.10	0.40	650	2.17	0.5	36.5°	3.7	0.20
Lecho	0.12	0.46	700	2.17	0.5	37.1°	4.0	0.20

En la figuras 4-21 y 4-22 se muestran la distribución de  $G$  y  $\phi$ . Puede observarse que la subdivisión de la malla responde exclusivamente a la zonificación de la presa, puesto que no es necesario efectuar zonificaciones adicionales para simular la dependencia de  $G$  y  $\phi$  respecto de la presión. Se aplicó una aceleración basal compuesta por siete pulsos sinusoidales de aceleración máxima  $PGA = 0.8g$  en dirección horizontal, con un período  $T = 0.56s$  [138]. Luego se simuló la oscilación libre de la presa por un lapso de  $7T$ . El asentamiento calculado por Núñez [107] es 2.37 m – 3.39 m; el calculado por Bissio y Tejada [9] es 2.13 m; el calculado con este procedimiento es 2.38 m [138]. En la figura 4-23 se muestra el contorno de deformaciones plásticas al fin de la simulación.



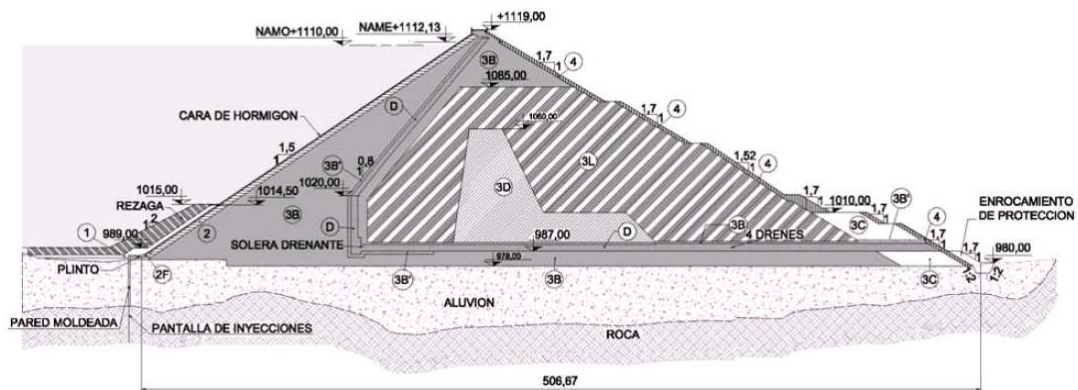


Figura 4-19: Sección transversal de la presa Los Caracoles, San Juan, Argentina [9].

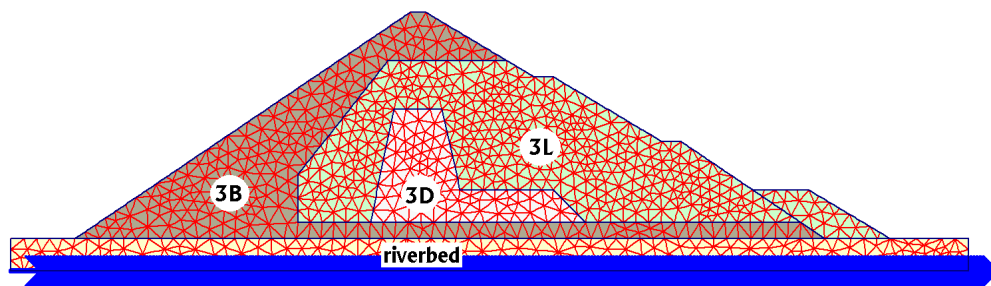


Figura 4-20: Malla de elementos finitos para el análisis sísmico de la presa Los Caracoles [138].

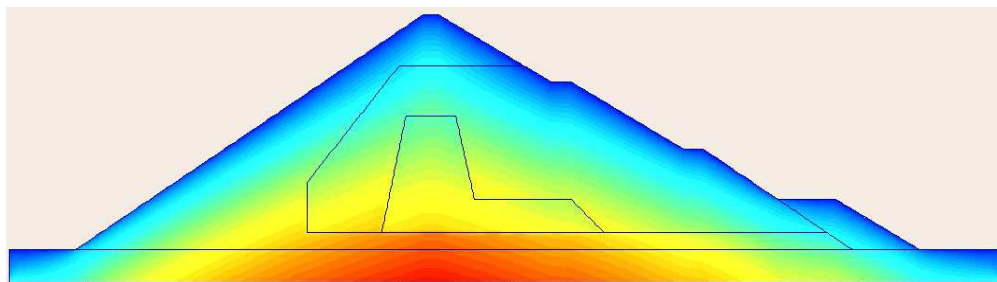


Figura 4-21: Distribución de módulo de corte en la sección del modelo. Azul:  $G = 200 \text{ MPa}$ ; Colorado:  $G = 1300 \text{ MPa}$  [138].

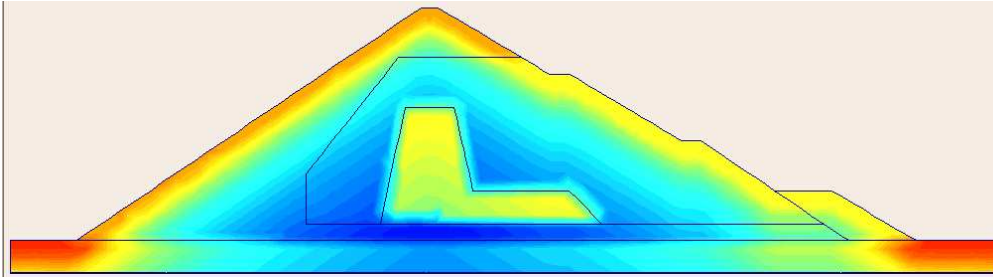


Figura 4-22: Distribución de  $\phi$  en la sección del modelo. Azul:  $\phi = 41^\circ$ ; Colorado:  $\phi = 48^\circ$  [138].

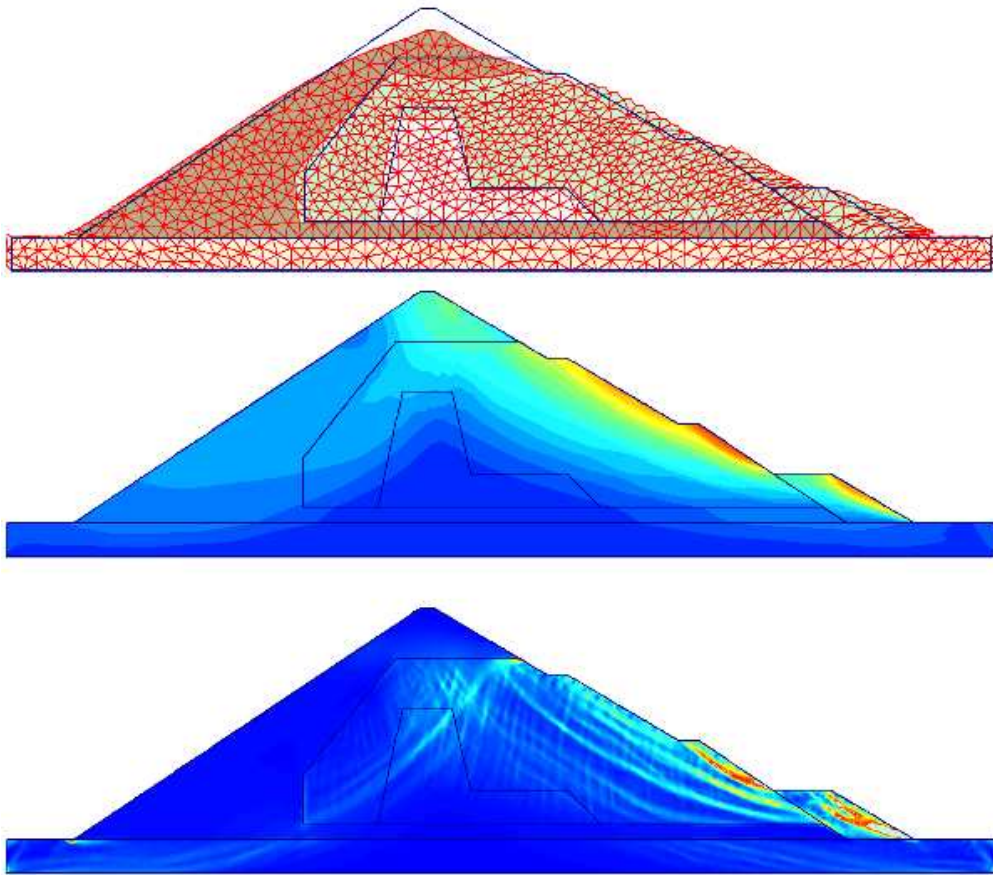


Figura 4-23: Análisis dinámico de Presa Los Caracoles. a) Malla deformada,  $\delta = 2.38$  m. b) Contorno de desplazamientos totales  $\|\delta\|$ . c) Contorno de deformaciones totales  $\|\epsilon\|$ . Azul: menor. Colorado: mayor.

## 4.A Apéndice: Deducciones de algunas funciones de estado

### 4.A.1 Hiperelasticidad

Deducción de  $D$  a partir de  $W_s$

La función de energía complementaria de deformación es

$$W_s = \frac{p^2}{G[p]} \left( \frac{S}{(1-m)(2-m)} + \frac{r^2}{4} \right) \quad (4.153)$$

donde

$$G = G^{ref} (p/p_{ref})^m p_{ref} \quad (4.154)$$

$G^{ref}$ ,  $p_{ref}$ ,  $m$  y  $S$  no son función de  $\boldsymbol{\sigma}$ .  $W_s$  se puede poner como

$$W_s = \frac{p^{2-m} p_{ref}^{m-1}}{G^{ref}} \left( \frac{S}{(1-m)(2-m)} + \frac{\tau^2}{4p^2} \right) \quad (4.155)$$

donde

$$\tau = \|\mathbf{s}\| \quad (4.156)$$

La derivada de  $W_s$  respecto de  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de deformación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial W_s / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad (4.157)$$

Esta derivada se expande como

$$\frac{\partial W_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial W_s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial W_s}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.158)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_s}{\partial p} &= (2-m) \frac{p^{1-m} p_{ref}^{m-1}}{G^{ref}} \left( \frac{S}{(1-m)(2-m)} + \frac{\tau^2}{4p^2} \right) - \frac{p^{-m} p_{ref}^{m-1} \tau^2}{G^{ref} 2p} \\ &= \frac{1}{G} \left( \frac{S}{1-m} p - m \frac{\tau^2}{4p} \right) \end{aligned} \quad (4.159)$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial \tau} = \frac{\tau}{2G} \quad \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad \frac{\partial \tau}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{s}}{\tau} \quad (4.160)$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{G} \left( \frac{S}{1-m} - m \frac{\tau^2}{4p^2} \right) \frac{p}{3} \mathbf{1} + \frac{\tau}{2G} \frac{\mathbf{s}}{\tau} \\ &= \left( \left( \frac{S}{1-m} - m \frac{\tau^2}{4} \right) \frac{1}{3G} \mathbf{I}^{esf} + \frac{1}{2G} \mathbf{I}^{dev} \right) : \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (4.161)$$

Esta ecuación se invierte a

$$\boldsymbol{\sigma} = \left( 3 \frac{G}{\frac{S}{1-m} - m \frac{\tau^2}{4}} \mathbf{I}^{esf} + 2G \mathbf{I}^{dev} \right) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.162)$$

donde

$$\mathbf{D}^e = 3 \frac{G}{\frac{S}{1-m} - m \frac{\tau^2}{4}} \mathbf{I}^{esf} + 2G \mathbf{I}^{dev} \quad (4.163)$$

es el operador elástico. Si se define

$$K = \frac{G}{\frac{S}{1-m} - \frac{m}{4} \tau^2} \quad (4.164)$$

queda finalmente

$$\mathbf{D}^e = 3K \mathbf{I}^{esf} + 2G \mathbf{I}^{dev} \quad (4.165)$$

## Deducción de $\dot{\sigma}$

En plasticidad convencional con rigidez constante, el incremento de tensión es

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} : \dot{\varepsilon}^e \quad (4.166)$$

por lo que la tensión  $\sigma^e$  - variables plásticas congeladas - se calcula asumiendo un paso elástico con la expresión

$$\sigma^e = \mathbf{D} : ({}^n \varepsilon^e + \Delta \varepsilon) \quad (4.167)$$

Cuando el tensor elástico  $\mathbf{D}$  depende de  $\sigma$ , el incremento de tensión es

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} : \dot{\varepsilon} + \varepsilon : \partial \mathbf{D} / \partial \sigma : \dot{\sigma} \quad (4.168)$$

que se puede reordenar como

$$\dot{\sigma} = \mathbf{T}^{-1} : \mathbf{D} : \dot{\varepsilon} \quad (4.169)$$

donde

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} - \varepsilon : \partial \mathbf{D} / \partial \sigma \quad (4.170)$$

La determinación de  $\mathbf{T}$  requiere el cálculo de  $\varepsilon : \partial \mathbf{D} / \partial \sigma$ . Como

$$\partial \mathbf{D} / \partial \sigma = 3 \mathbf{1} \mathbf{1} \partial K / \partial \sigma + 2 \mathbf{I}^{dev} \partial G / \partial \sigma \quad (4.171)$$

puede escribirse

$$\varepsilon : \partial \mathbf{D} / \partial \sigma = \varepsilon_v \mathbf{1} \partial K / \partial \sigma + 2 \varepsilon_d \partial G / \partial \sigma \quad (4.172)$$

Pero

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = \frac{m G^{ref}}{3} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^{m-1} \mathbf{1} = \frac{m G}{3p} \mathbf{1} \quad (4.173)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial G/\partial \boldsymbol{\sigma}}{\frac{S}{1-m} - \frac{m}{4}r^2} + \frac{mrG}{2p\left(\frac{S}{1-m} - \frac{m}{4}r^2\right)^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{r}{3}\mathbf{1}\right) \\ &= \frac{mK}{p} \left( \left(1 - \frac{r^2}{\frac{2S}{1-m} - \frac{m}{2}r^2}\right) \frac{1}{3}\mathbf{1} + \frac{1}{\frac{2S}{1-m} - \frac{m}{2}r^2}\mathbf{r} \right)\end{aligned}$$

Entonces puede escribirse

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbf{D}[\boldsymbol{\sigma}]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \varepsilon_v \mathbf{1} \frac{mK}{p} \left( \left(1 + \frac{r^2}{\frac{m}{2}r^2 - \frac{2S}{1-m}}\right) \frac{1}{3}\mathbf{1} + \frac{1}{\frac{2S}{1-m} - \frac{m}{2}r^2}\mathbf{r} \right) + 2\varepsilon_d \frac{mG}{3p}\mathbf{1} \quad (4.174)$$

Como  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}$ , se puede poner

$$p = K\varepsilon_v \quad (4.175)$$

$$\mathbf{r} = 2G\varepsilon_d/p \quad (4.176)$$

por lo que queda

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbf{D}[\boldsymbol{\sigma}]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left(1 + \frac{r^2}{\frac{m}{2}r^2 - \frac{2S}{1-m}}\right) \frac{m}{3}\mathbf{1}\mathbf{1} + \frac{m}{\frac{2S}{1-m} - \frac{m}{2}r^2}\mathbf{1}\mathbf{r} + \frac{m}{3}\mathbf{r}\mathbf{1} \quad (4.177)$$

lo que permite escribir finalmente

$$\mathbf{T} = \left(1 - m + \frac{K}{2G}mr^2\right) \mathbf{I}^{esf} + \mathbf{I}^{dev} - \frac{K}{2G}m\mathbf{1}\mathbf{r} - \frac{m}{3}\mathbf{r}\mathbf{1} \quad (4.178)$$

### Deducción de $dK/dp$

La derivada del módulo volumétrico respecto de la presión es

$$\frac{dK}{dp} = \frac{mK}{p} \left(1 + (m-1) \frac{Kr^2}{2G}\right) \quad (4.179)$$

donde las derivadas parciales son

$$\frac{\partial K}{\partial p} = \frac{mK}{p} \quad \frac{\partial K}{\partial r} = \frac{mK^2}{2G}r \quad \frac{\partial G}{\partial p} = \frac{mG}{p} \quad (4.180)$$

$$\frac{\partial r}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{2G \|\boldsymbol{\varepsilon}_d^e\|}{p} \right] = 2 \|\boldsymbol{\varepsilon}_d^e\| G \left( \frac{m-1}{p^2} \right) = \frac{m-1}{p} r \quad (4.181)$$

## 4.A.2 Función de fluencia

### Linealización de la función de fluencia

Como muestra la figura 4-4, la ec. (4.44) define múltiples superficies en el espacio  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ , de las cuales sólo una tiene sentido físico, la orientada en el eje positivo de la presión hidrostática. la figura 4-24 muestra  $F_f$  y  $\|\mathbf{n}\|$  en función de  $r$  para compresión triaxial. Puede observarse que  $F_f$  tiene un máximo local cuando  $\|\mathbf{n}\| = 0$  y un segundo cero en  $r = \sqrt{6}$ .

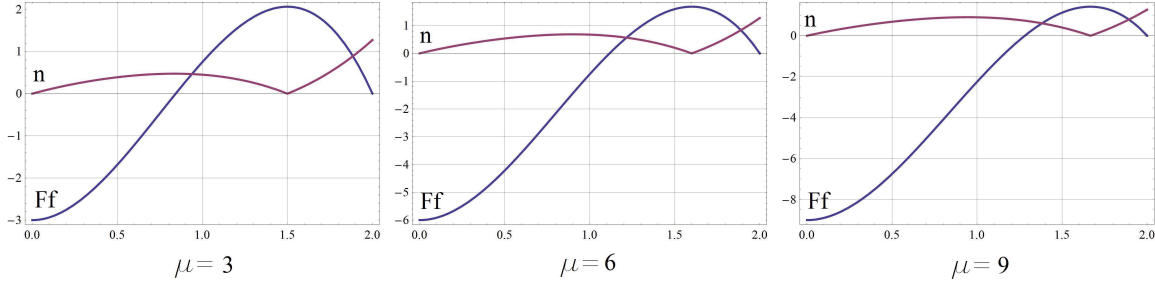


Figura 4-24: Función de fluencia y norma de su normal en función de  $r$  para tres valores de  $\mu_f$ .

El problema del segundo cero se salva si la ec. (4.44) se redefine según

$$r < r_{lim} \rightarrow F_f = \frac{\mu_f + 6}{2} r^2 - (\mu_f + 9) J_{3r} - \mu_f = 0 \quad (4.182)$$

$$r > r_{lim} \rightarrow F_f = \frac{\mu_f + 6}{2} r_{lim} r - (\mu_f + 9) \frac{r_{lim}^2}{r^2} J_{3r} - \mu_f = 0 \quad (4.183)$$

donde  $r_{lim}$  es una oblicuidad umbral. En la figura 4-25 se muestra la función de fluencia suavizada con este procedimiento.

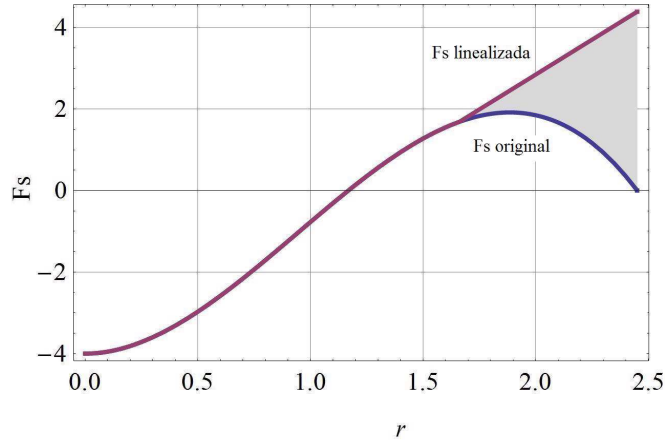


Figura 4-25: Ec. (4.44) en su forma original y suavizada para el vértice de compresión triaxial.

### Derivadas de $F_f$

Las derivadas de  $F_f$  son

$$F_{f,\mu} = -1 + \frac{1}{2}r^2 - J_{3r} \quad (4.184)$$

$$\mathbf{n} = F_{f,\sigma} = \frac{1}{p} \left( (r^2 + (\mu_f + 9) J_{3r}) \mathbf{1} + (\mu_f + 6) \mathbf{r} - (\mu_f + 9) \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) \quad (4.185)$$

$$\mathbf{n}_d = \frac{1}{p} \left( (\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \mathbf{1} + (\mu_f + 6) \mathbf{r} - (\mu_f + 9) \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) \quad (4.186)$$

$$\mu_{,\sigma} = -\frac{F_{f,\sigma}}{F_{f,\mu}} = \frac{\mathbf{n}}{1 - \frac{1}{2}r^2 + J_{3r}} \quad (4.187)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \sigma} = \frac{1}{p^2} \left\{ \begin{array}{l} -((\mu_f + 12) r^2 + 4(\mu_f + 9) J_{3r}) \mathbf{1}\mathbf{1}/3 \\ + (\mu_f + 6) \mathbf{I}^{dev} + 2(\mathbf{r}\mathbf{1} + \mathbf{1}\mathbf{r}) \\ + (\mu_f + 9) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}\mathbf{1} + \mathbf{1}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \\ - (\mu_f + 9) (\delta_{ik} r_{lj} + \delta_{jl} r_{ik}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \end{array} \right\}$$



### 4.A.3 Regla de flujo

**Demostración de que  $\beta$  es único**

**Hipótesis**

1. Los autovalores de  $\boldsymbol{\sigma}$  están ordenados  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$ .
2. Los autovalores de  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  están ordenados  $\varepsilon_1^p \geq \varepsilon_2^p \geq \varepsilon_3^p$ .
3. Existe coaxialidad deviatórica.  $\mathbf{m}_d = \frac{\mathbf{I}^{dev:\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\|\mathbf{I}^{dev:\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}}\|}$  con autovalores  $m_{d1} \geq m_{d2} \geq m_{d3}$ , por lo que

$$m_{d1}^2 + m_{d2}^2 + m_{d3}^2 = 1 \quad (4.188)$$

$$m_{d1} + m_{d2} + m_{d3} = 0 \quad (4.189)$$

$$m_{d1} \geq \sqrt{1/6} \quad (4.190)$$

$$m_{d3} \leq -\sqrt{1/6} \quad (4.191)$$

4. Existe no asociatividad volumétrica  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_d + \beta \mathbf{1}$ .
5. No todos los componentes  $\{\dot{\varepsilon}_1^p, \dot{\varepsilon}_2^p, \dot{\varepsilon}_3^p\}$  pueden ser del mismo signo, por lo que

$$\dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\lambda} (m_{d1} + \beta) > 0 \quad (4.192)$$

$$\dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\lambda} (m_{d3} + \beta) < 0 \quad (4.193)$$

**Tesis**

$\forall \boldsymbol{\sigma} \exists \beta$  y es único.  $\beta$  está dado por

$$m_{d2} + \beta \leq 0 \rightarrow \beta = -\frac{\sigma_1 m_{d1} + N_{cv} \sigma_2 m_{d2} + N_{cv} \sigma_3 m_{d3}}{\sigma_1 + N_{cv} \sigma_2 + N_{cv} \sigma_3} \quad (4.194)$$

$$m_{d2} + \beta \geq 0 \rightarrow \beta = -\frac{\sigma_1 m_{d1} + \sigma_2 m_{d2} + N_{cv} \sigma_3 m_{d3}}{\sigma_1 + \sigma_2 + N_{cv} \sigma_3} \quad (4.195)$$

## Demostración

Se asumen dos valores  $\beta_1$  y  $\beta_3$  distintos para  $\beta$

$$m_{d2} + \beta_1 < 0 \rightarrow \beta_1 = -\frac{\sigma_1 m_{d1} + N_{cv} \sigma_2 m_{d2} + N_{cv} \sigma_3 m_{d3}}{\sigma_1 + N_{cv} \sigma_2 + N_{cv} \sigma_3} \quad (4.196)$$

$$m_{d2} + \beta_3 \geq 0 \rightarrow \beta_3 = -\frac{\sigma_1 m_{d1} + \sigma_2 m_{d2} + N_{cv} \sigma_3 m_{d3}}{\sigma_1 + \sigma_2 + N_{cv} \sigma_3} \quad (4.197)$$

El numerador de  $\beta_3$  es mayor que el de  $\beta_1$  y el denominador es menor. Por lo tanto,  $\beta_3 < \beta_1$ . Entonces, hay tres posibilidades

1.  $m_{d2} + \beta_1 \leq 0 \implies m_{d2} + \beta_3 \leq 0 \implies \beta = \beta_1$  y elimina  $\beta_3$ .
2.  $m_{d2} + \beta_3 \geq 0 \implies m_{d2} + \beta_1 \geq 0 \implies \beta = \beta_2$  y elimina  $\beta_1$ .
3.  $m_{d2} + \beta_3 \leq 0 \wedge m_{d2} + \beta_1 \geq 0$ .

(a) Se reemplaza  $\beta_1$  en  $m_{d2} + \beta_1 \geq 0$ . Queda

$$m_{d2} + \beta_1 \geq 0 \rightarrow (m_{d2} - m_{d1}) \sigma_1 + (m_{d2} - m_{d3}) N_{cv} \sigma_3 \geq 0 \quad (4.198)$$

(b) Se reemplaza  $\beta_3$  en  $m_{d2} + \beta_3 \leq 0$ . Queda

$$m_{d2} + \beta_3 \leq 0 \rightarrow (m_{d2} - m_{d1}) \sigma_1 + (m_{d2} - m_{d3}) N_{cv} \sigma_3 \leq 0 \quad (4.199)$$

(c) a $\wedge$ b implican

$$(m_{d2} - m_{d1}) \sigma_1 + (m_{d2} - m_{d3}) N_{cv} \sigma_3 = 0 \quad (4.200)$$

que se reordena como

$$m_{d1} \sigma_1 + m_{d3} N_{cv} \sigma_3 = m_{d2} N_{cv} \sigma_3 + m_{d2} \sigma_1 \quad (4.201)$$

(d) Se reemplaza en el primer término en  $\beta_1$  y  $\beta_3$

$$\beta_1 = -\frac{\sigma_1 + N_{cv}\sigma_2 + N_{cv}\sigma_3}{\sigma_1 + N_{cv}\sigma_2 + N_{cv}\sigma_3}m_{d2} \rightarrow \beta_1 = -m_{d2} \quad (4.202)$$

$$\beta_3 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + N_{cv}\sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_2 + N_{cv}\sigma_3}m_{d2} \rightarrow \beta_3 = -m_{d2} \quad (4.203)$$

O sea

$$(m_{d2} + \beta_3 \leq 0) \wedge (m_{d2} + \beta_1 \geq 0) \implies \beta_1 = \beta_3 = -m_{d2} \implies \beta \text{ es } \acute{u}\text{nico} \quad (4.204)$$

#### 4.A.4 Determinación de $p_r$ y $\phi_c$ para arenas del Puelchense

En este apartado se demuestra la técnica de calibración del modelo para las arenas del Puelchense. El material es una arena silíceea de origen marino del terciario superior con granos subredondeados. Se ensayó la fracción pasante por el tamiz #40 y retenida en el tamiz # 200 de muestras recuperadas durante la ejecución de ensayos SPT en la localidad de Campana. Las propiedades índice son:  $\gamma_s = 26.6 \text{ kN/m}^3$ ,  $e_{min} = 0.58$ ,  $e_{max} = 0.89$ . Clasificación SUCS: SP.

Las muestras sueltas se prepararon mediante vuelco de material seco a través de un embudo de 6 mm de boca desde 50–80 mm de altura, con lo que se obtuvo  $32\% < D_r < 42\%$ . Las muestras densas se prepararon mediante compactación manual en cinco capas hasta alcanzar  $D_r > 95\%$ . Todas las probetas tuvieron  $38 \text{ mm} \pm 3\%$  de diámetro y  $100 \text{ mm} \pm 5\%$  de altura.

El ensayo consistió en la saturación de las muestras con agua desaireada; consolidación isotrópica hasta la presión de ensayo; compresión drenada a  $\sigma_3$  constante y  $\dot{\epsilon} = 0.5 \text{ mm/min} \pm 10\%$ . Se emplearon cabezales planos rígidos sin membranas deslizantes; medición de deformación entre cabezales con flexímetro de sensibilidad  $10 \mu/\text{div}$ ; medición de carga con aro dinamométrico de sensibilidad  $2 \text{ N/div}$ ; medición de volumen con bureta calibrada conectada a ambas cabezas de sensibilidad  $10 \text{ mm}^3/\text{div}$ ; registro manual de resultados; cámara triaxial operada con aire comprimido de  $5 \text{ dm}^3$  y presión

máxima de 1.0 MPa construida por el autor.

En la figura 4-26 se muestra el ángulo de fricción interna correspondiente a cada uno de los ensayos y el ajuste de la ec. (4.37) con  $\phi_c = 30^\circ$  y  $p_r = 50$ .

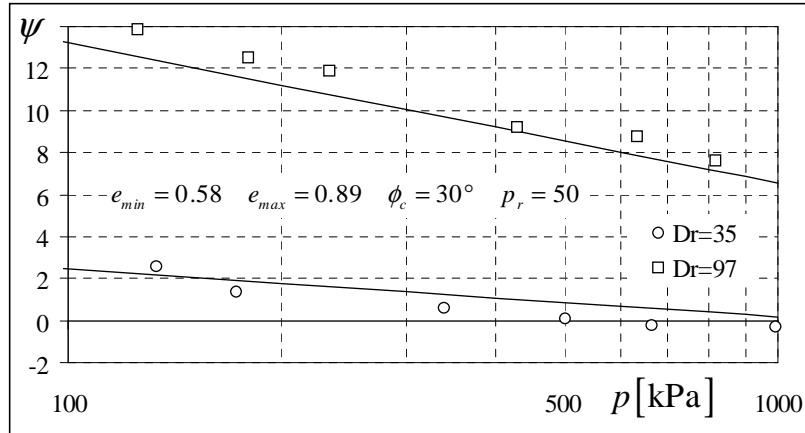


Figura 4-26: Calibración de  $\phi$  y  $p_r$  para arena Puelchense.

En las figuras 4-27 y 4-28 se muestran las curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$  y  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$  correspondientes a todos los ensayos.

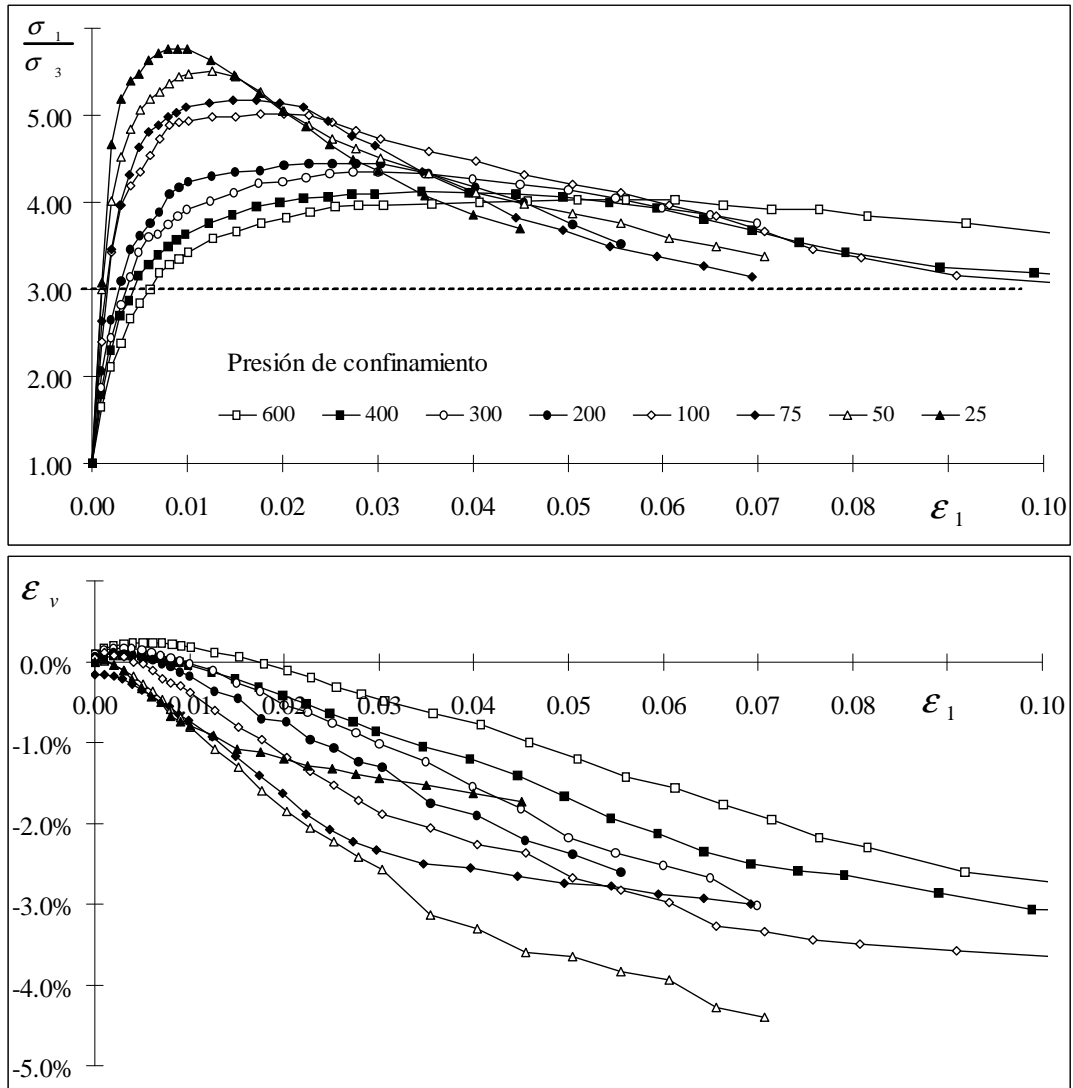


Figura 4-27: Ensayos triaxiales convencionales de arena Puelchense densa ( $95\% < D_r < 100\%$ ).

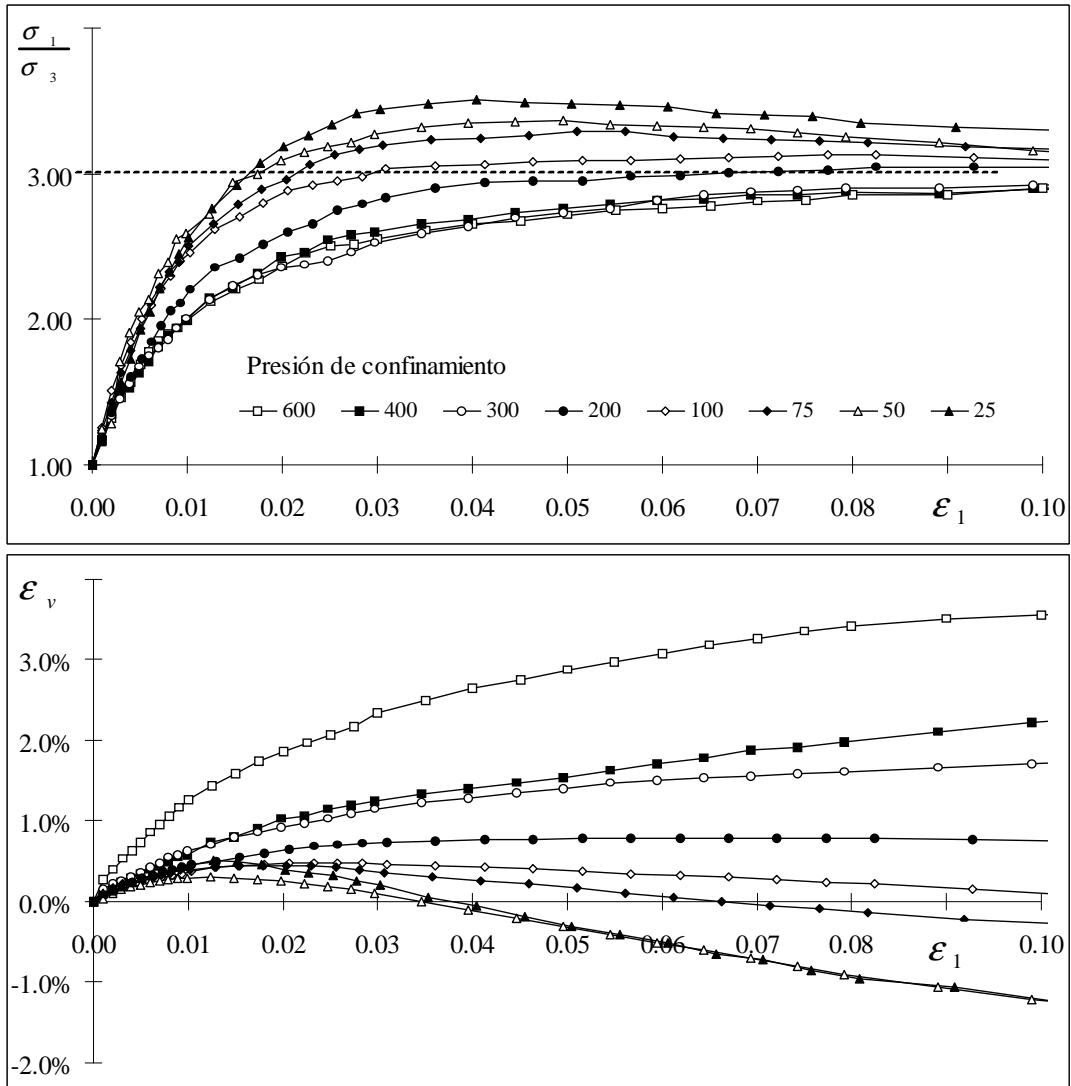


Figura 4-28: Ensayos triaxiales convencionales de arena Puelchense suelta ( $D_r \approx 35\%$ ).

# Capítulo 5

## Modelización de la carga monotónica de corte

### 5.1 Introducción

En esta sección se presenta un modelo constitutivo para la simulación del comportamiento de arenas en carga de corte monotónica. El modelo está orientado a problemas en los que interesa el desarrollo de plasticidad previo a la falla, como por ejemplo: i) problemas cuasi-elásticos de interacción suelo-estructura como la propagación de ondas mecánicas o el diseño de fundaciones de máquinas; ii) la deformación de pilotes, zapatas y muros de contención sujetos a carga estática; iii) la deformación de taludes, terraplenes y excavaciones; y iv) otros problemas en los que las trayectorias de descarga, si existen, son pequeñas frente a la magnitud de las deformaciones en carga.

El modelo que se presenta en este capítulo se construyó sobre el modelo presentado en el Capítulo 4, al que se le agrega una nueva variable de estado y su función de endurecimiento asociada.

## 5.2 Estructura matemática del modelo

En esta sección se repite la estructura matemática del modelo de falla con corte y se agregan los elementos nuevos de este modelo.

### 5.2.1 Cinemática

Se adopta la descomposición aditiva de las deformaciones infinitesimales

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (5.1)$$

### 5.2.2 Variables de estado

El estado del material se caracteriza mediante el tensor de tensiones efectivas  $\boldsymbol{\sigma}$ , la relación de vacíos para presión nula  $e_0$  y el parámetro escalar de movilización de resistencia al corte  $\varsigma$ .

### 5.2.3 Relación tensión-deformación

Se mantiene la función de energía complementaria de deformación

$$W_s = W_s[\boldsymbol{\sigma}, e_0] \quad (5.2)$$

con la que se calcula el tensor de deformación elástica

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \partial W_s / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad (5.3)$$

### 5.2.4 Función de fluencia

La función de fluencia es de la forma

$$F_s[\boldsymbol{\sigma}, e_0, \varsigma] = 0 \quad (5.4)$$



### 5.2.5 Regla de flujo

El incremento de deformación plástica se calcula con

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad (5.5)$$

donde

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_d + \beta \mathbf{1} \quad (5.6)$$

$\beta$  es un factor de dilatancia,

$$\mathbf{m}_d = \mathbf{n}_d / \|\mathbf{n}_d\| \quad (5.7)$$

$$\mathbf{n}_d = \mathbf{I}^{dev} : \mathbf{n} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{n} = \partial F_s / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad (5.9)$$

### 5.2.6 Condición de plasticidad

Se emplea la condición

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} \dot{\lambda} & \text{si: } F_s = 0 \text{ y: } \dot{F}_s > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.10)$$

### 5.2.7 Ecuaciones de evolución

La evolución de  $e_0$  está dada por la expresión

$$\dot{e}_0 = - (1 + e_0) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p \quad (5.11)$$

La evolución de  $\varsigma$  está dada por la expresión

$$\dot{\varsigma} = h \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d^p\| \quad (5.12)$$

donde  $h[\boldsymbol{\sigma}, e_0, \varsigma]$  es una función de endurecimiento.

## 5.3 Funciones de estado

### 5.3.1 Variable de estado y función de fluencia

Aunque el criterio de Mohr-Coulomb dado por la ec. (2.3) es un criterio de falla, se lo emplea como función de fluencia mediante un cambio de variables, de  $\phi$  al “ángulo (equivalente) de fricción interna movilizado”  $\phi_{mob}$ . Queda

$$F_{MC} = \tau/\sigma_n - \tan[\phi_{mob}] = 0 \quad (5.13)$$

En la ec. (5.13),  $\phi_{mob}$  actúa como una variable interna que endurece durante la carga elastoplástica y alcanza el valor  $\phi$  cuando el material falla.

$\phi_{mob}$  no puede ser utilizado como variable interna cuando la superficie de falla es curva en el espacio  $\tau - \sigma$  (cuando  $\phi$  no es constante), como lo prueba un ensayo triaxial conceptual que puede seguirse con ayuda de la figura 5-1 [140].

1. Una muestra de arena es consolidada isotrópicamente hasta una presión de cámara  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_{3a}$ .
2. Se aplica un esfuerzo desviador hasta alcanzar un estado cercano a la falla (círculos  $a$  a  $c$ ); la variable interna  $\phi_{mob}$  se endurece para mantener  $F_{MC} = 0$ ;
3. Se disminuye  $\sigma_1$  levemente hasta  $\sigma_{1d}$ , por lo que la muestra queda en estado elástico, y  $F_{MC} < 0$  (círculo  $d$ )
4. Se aplica una trayectoria de compresión proporcional manteniendo constante la oblicuidad  $\sigma_1/\sigma_3$  (círculos  $d$  a  $f$ ), siempre por debajo de la superficie de fluencia, que queda fija con apertura  $\phi_{mob}$ .
5. A pesar de que  $d - f$  es una trayectoria elástica, se encuentra la falla cuando el círculo toca la superficie de falla curva en el punto  $f$ . Este es un absurdo: se alcanza la falla por corte en una compresión proporcional elástica con  $F_{MC} < 0$ .

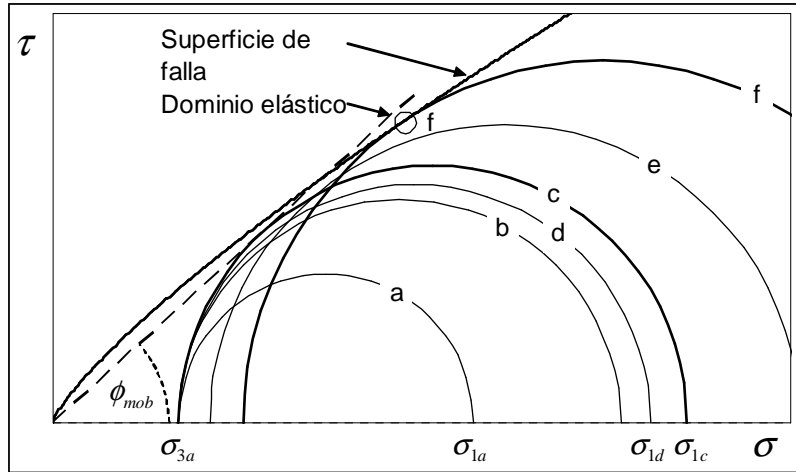


Figura 5-1: Prueba que  $\phi_{mob}$  no puede ser utilizado como variable interna para superficie de falla curvas.

Puede definirse un factor de movilización de resistencia al corte  $\zeta$  como una variable de estado independiente, y postularse que la superficie de fluencia es

$$\bar{F}_{MC} = \tau/\sigma_n - \zeta \tan [\phi] = 0 \quad (5.14)$$

Por simple inspección de las ec. (5.13) y (5.14), es evidente que  $\phi_{mob}$  y  $\zeta$  están relacionados entre sí mediante la ecuación

$$\tan [\phi_{mob}] = \zeta \tan [\phi] \quad (5.15)$$

y que  $0 \leq \zeta \leq 1$ .

Con esta nueva definición de función de fluencia, la compresión proporcional (trayectoria de incremento de presión con  $\sigma_1/\sigma_3$  constante) no es una trayectoria elástica, ya que implica un crecimiento monótonico de la variable de estado  $\zeta$  (o sea, endurecimiento plástico) para mantener  $\phi_{mob}$  constante con  $\phi$  decreciente.

Para el empleo de  $\zeta$  junto con el criterio de Mohr-Coulomb para estados

tridimensionales de tensiones debe definirse

$$\bar{F}_{MC} = \sigma_1/\sigma_3 - \tan^2 [\pi/4 + \tan^{-1} [\zeta \tan [\phi]] /2] = 0 \quad (5.16)$$

que es una función complicada y poco elegante. La variable de estado  $\zeta$ , en cambio, puede introducirse de manera expeditiva en el criterio de Matsuoka-Nakai. La función de fluencia se define como

$$F_s = (\mu + 6) J_{2r} - (\mu + 9) J_{3r} - \mu = 0 \quad (5.17)$$

que es similar a la ec. (4.44) pero en donde se reemplazó  $\mu_f$  por [140]

$$\mu = \zeta^2 \mu_f \quad (5.18)$$

### 5.3.2 Relación tensión-deformación

La relación tensión-deformación más empleada para arenas en carga monotónica es el modelo hiperbólico dado por la ec. (2.63). Sin embargo, este modelo presenta dos inconvenientes: i) subestima la rigidez a baja deformación; y ii) emplea el parámetro  $R_f < 1$ , de dudoso significado físico pero necesario para evitar que la carga máxima se alcance para deformaciones infinitas. Tatsuoka [142][143] presentó resultados de ensayos torsionales sobre muestras cilíndricas de arena Toyoura y propuso el empleo de tres funciones hiperbólicas [142][145] como se muestra en la figura 5-2. Aunque la propuesta de Tatsuoka resuelve el problema, lo hace a costa de un número excesivamente grande de parámetros que no tienen un claro significado físico.

La información experimental firme es que la rigidez inicial está dada por la ec. (4.21) y que la rigidez tangente en falla es nula, por lo que la rigidez tangente elastoplástica

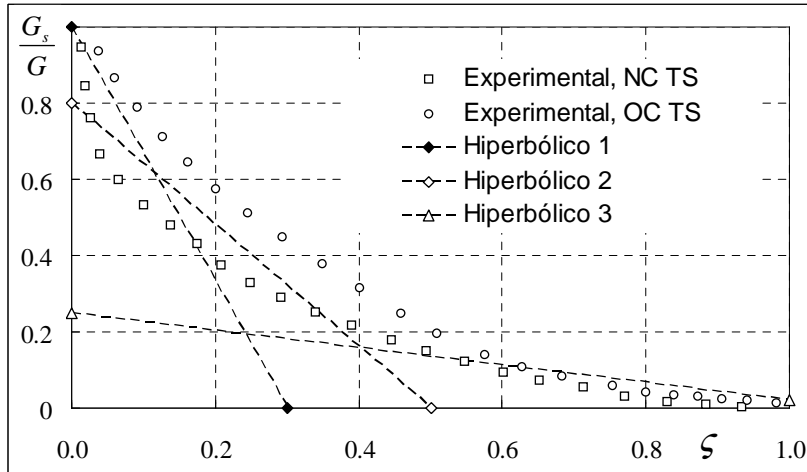


Figura 5-2: Ensayos de torsión de de arena Toyoura normalmente consolidada (NC) y sobreconsolidada (OC) y tres funciones hiperbólicas para su simulación [142][143][145].

$G_t = \partial\tau/\partial\gamma$  debe cumplir con

$$G_t]_{\zeta=0} = G \quad (5.19)$$

$$G_t]_{\zeta \rightarrow 1} = 0 \text{ kPa} \quad (5.20)$$

Una ecuación simple que cumple con estas restricciones es [140]

$$G_t = \frac{1 - \zeta}{1 + \alpha\zeta} G \quad (5.21)$$

donde  $\alpha$  es una función auxiliar de calibración. El módulo secante  $G_s = \tau/\gamma$  correspondiente es [140]

$$G_s = \frac{-\zeta}{(1 + \alpha) \ln[1 - \zeta] + \alpha\zeta} G \quad (5.22)$$

En la figura 5-3 se repite la información de la figura 5-2 con el agregado de la ec. (5.22) con  $\alpha = 10$  (curva llena). Pese a que en la figura no es evidente por la escala, la ec. (5.22) vale exactamente 0 para  $\zeta = 1.0$ .

Con la ec. (5.21) y la relación  $G^p = GG_t / (G - G_t)$  puede calcularse el módulo

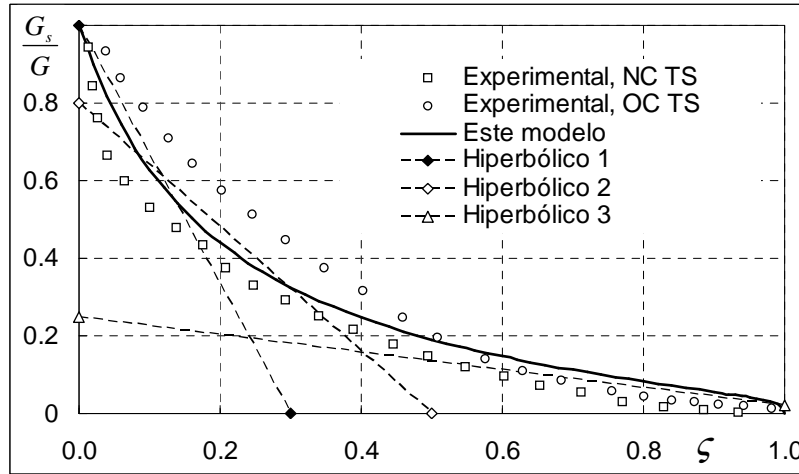


Figura 5-3: Ensayos experimentales, ec. (5.22) y comparación con las tres funciones hiperbólicas [140][142][143][145]

plástico

$$G^p = 2 \frac{2\dot{\tau}}{\|\dot{\epsilon}_d^p\|} = \frac{1/\zeta - 1}{1 + \alpha} G \quad (5.23)$$

### 5.3.3 Función de endurecimiento para $\zeta$

Para convertir la ec. (5.23) en una función de endurecimiento se restringe el análisis a una trayectoria de compresión triaxial a presión constante, para la que vale la expresión aproximada

$$\mu \approx 3r^2 \quad (5.24)$$

y  $\dot{r} = \dot{\tau}/p$ . La evolución de  $\mu$  se simplifica entonces a

$$\dot{\mu} = 6 \frac{r}{p} \dot{\tau} \quad (5.25)$$

Como  $\dot{\tau} = 2G^p \|\dot{\epsilon}_d^p\|$  queda

$$\dot{\mu} = 12 \sqrt{\frac{\mu}{3}} \frac{G^p}{p} \|\dot{\epsilon}_d^p\| \quad (5.26)$$

De la ec. (5.18),

$$\varsigma = \sqrt{\mu/\mu_f} \quad (5.27)$$

por lo que

$$\dot{\varsigma} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\mu_f}} \dot{\mu} \quad (5.28)$$

La combinación de las ecs. (5.26), (5.28) y (5.23) arroja

$$\dot{\varsigma} = \sqrt{\frac{12}{\mu_f} \frac{1/\varsigma - 1}{1 + \alpha} \frac{G}{p}} \|\dot{\epsilon}_d^p\| \quad (5.29)$$

que puede escribirse como

$$\dot{\varsigma} = h \|\dot{\epsilon}_d^p\|$$

donde

$$h = \sqrt{\frac{12}{\mu_f} \frac{1/\varsigma - 1}{1 + \alpha} \frac{G}{p}} \quad (5.30)$$

es la función de endurecimiento buscada [140].

La simulación numérica de ensayos triaxiales drenados permite establecer la siguiente relación aproximada entre la variable auxiliar  $\alpha$  y el cociente  $E_{50}/E$

$$\frac{E_{50}}{E} = \frac{12 + D_r}{13 + 4\alpha} \quad (5.31)$$

El cociente  $E_{50}/E$  depende de la densidad relativa [85]. En este modelo se propone la interpolación lineal [140]

$$\frac{E_{50}}{E} = c_d - 2(1 - D_r)(c_d - c_l) \quad (5.32)$$

que tiene dos parámetros materiales

$$c_d = (E_{50}/E)_{D_r=100\%} \quad (5.33)$$

$$c_l = (E_{50}/E)_{D_r=50\%} \quad (5.34)$$

que se miden en ensayos triaxiales. Aunque existe, se desprecia la débil dependencia que el cociente  $E_{50}/E$  tiene con respecto a la presión media dentro del rango de presiones de interés ingenieril [84].

### 5.3.4 Resistencia máxima y evolución de variables de estado

La ec. (5.17) tiene una sola función interna,  $\mu$ , que ahora depende de dos variables de estado. Por lo tanto, la condición de falla  $\dot{\mu}[p, e_0, \varsigma] = 0$  ahora se expande a

$$\dot{\mu} = \frac{\partial \mu}{\partial \varsigma} \dot{\varsigma} + \frac{\partial \mu}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial e_0} \dot{e}_0 + \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} \right) = 0 \quad (5.35)$$

Para presión constante queda

$$\dot{\mu} = \frac{\partial \mu}{\partial \varsigma} \dot{\varsigma} + \frac{\partial \mu}{\partial e_0} \dot{e}_0 = 0 \quad (5.36)$$

Las derivadas de la ec. (5.36) cumplen con

$$\frac{\partial \mu}{\partial \varsigma} > 0 \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \phi} > 0 \quad (5.38)$$

Mientras que el primer término de la ec. (5.36) es no negativo, el signo del segundo término depende de  $e_0$ . Se presentan tres situaciones que se analizan a continuación.

#### Muestra suelta

Una muestra suelta alcanza el estado  $\varsigma = 1$  para una relación de vacíos  $e_0 > e_{0c}$ . Luego de ese punto se deforma en falla mientras reduce  $e_0$ , por lo que el segundo término de la ec. (5.36) es positivo hasta que se anula en el estado crítico. Por lo tanto, la ec. (5.36) sólo se satisface cuando  $\dot{e}_0 = 0$ , o sea, la resistencia máxima y el estado crítico ocurren simultáneamente para muy grandes deformaciones.



### Muestra con la relación de vacíos crítica

Una muestra que alcance la condición  $\zeta = 1$  con una relación de vacíos  $e_0 = e_{0c}$  satisface la ec. (5.36) sin cambios posteriores de volumen. Por lo tanto, la resistencia máxima y el estado crítico se alcanzan simultáneamente para una deformación moderada.

### Muestra densa

Una muestra densa dilata ( $\dot{e}_0 > 0$ ) durante la etapa de endurecimiento de  $\zeta$  ( $\zeta < 1$ ). En este caso, la evaluación de la ec. (5.36) arroja

$$\dot{\zeta} = -\frac{\partial\mu/\partial e_0}{\partial\mu/\partial\zeta}\dot{e}_0 > 0 \quad (5.39)$$

Por lo tanto, la resistencia máxima ocurre cuando la tasa de crecimiento de  $F_s$  debido al endurecimiento de  $\zeta$  iguala a la tasa de ablandamiento producida por la dilatación.

### Conclusión

Se concluye entonces que la condición  $\dot{\mu} = 0$  ocurre luego que la condición  $\zeta = 1$  para arenas sueltas, simultáneamente con la condición  $\zeta = 1$  para arenas en el estado crítico y antes de  $\zeta = 1$  para arenas densas. Debe notarse que las muestras más sueltas que el estado crítico tienen  $\psi < 0$  y por lo tanto  $\phi < \phi_c$ . En otras palabras, estas muestras sólo pueden alcanzar el estado crítico luego de una disminución de volumen, dado que una deformación puramente isocórica implicaría la licuefacción estática con resistencia residual nula.

## 5.4 Implementación numérica

### 5.4.1 Operador de integración

El operador de integración es implícito. Se resuelve el conjunto de ecuaciones

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0 ] : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (5.40)$$

$${}^{n+1}e_0 = (1 + {}^ne_0) \exp [ {}^{n+1}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{1} ] - 1 \quad (5.41)$$

$${}^{n+1}\zeta = {}^n\zeta + {}^{n+1}h [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0, {}^{n+1}\zeta ] \| \mathbf{I}^{dev} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \| \quad (5.42)$$

sujeto a la restricción

$$F_s [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}\mu ] = 0 \quad (5.43)$$

donde  ${}^{n+1}\mu = \mu [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0, {}^{n+1}\zeta ]$ .

Las ecs. (5.40) a (5.43) están expresadas en términos del tensor de deformación plástica

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \lambda ( \mathbf{m}_d [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0, {}^{n+1}\zeta ] + \beta [ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0 ] \mathbf{1} ) \quad (5.44)$$

que tiene una única variable independiente  $\lambda$ , por lo que, en un paso elastoplástico, el conjunto de ecuaciones (5.40) a (5.42) se reduce a

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} [\lambda] \quad (5.45)$$

$${}^{n+1}e_0 = \tilde{e}_0 [\lambda] \quad (5.46)$$

$${}^{n+1}\zeta = \tilde{\zeta} [\lambda] \quad (5.47)$$

con lo que la ec. (5.43) se reduce a

$$\tilde{F}_s [\lambda] = 0 \quad (5.48)$$

### 5.4.2 Algoritmo de integración

El algoritmo de integración de este modelo está construido sobre la base del algoritmo presentado en el capítulo 4, al que se agregan los siguientes elementos:

1. El estado convergido es

$$\{ {}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^ne_0, {}^n\zeta \} \quad (5.49)$$

2. Al inicio del paso se agrega el cálculo de

$${}^n\mu = {}^n\zeta^2 {}^n\mu_f \quad (5.50)$$

3. Cambia el Algoritmo C, que ahora actualiza las variables

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} \quad \lambda^{(i)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{p(i)} \quad \zeta^{(i)} \quad (5.51)$$

con

$$\mathbf{D}^{(i)} \quad e_0^{(i)} \quad \mu_f^{(i)} \quad (5.52)$$

congelados.

#### Algoritmo C: Actualización de $\boldsymbol{\sigma}$ con funciones de estado constantes

1. Se calcula el versor de deformación plástica deviatorica  $\mathbf{m}_d^{(0)}$
2. Se corrige el multiplicador plástico proyectándolo sobre la nueva dirección plástica:

$$\lambda^{(0)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{p(i)} : \mathbf{m}_d^{(0)} \quad (5.53)$$

3. Se calcula

$$\mathbf{s}^{(0)} = \widehat{\mathbf{s}} - 2G \lambda^{(0)} \mathbf{m}_d^{(0)} \quad (5.54)$$

4. Se calcula una cota a  $\Delta\lambda$  para que se cumpla  $\mathbf{s} : \hat{\mathbf{s}} > 0.5 \|\mathbf{s}\| \|\hat{\mathbf{s}}\|$  (se limitan las oscilaciones del algoritmo)

$$\Delta\lambda_{lim} = \frac{\|\hat{\mathbf{s}}\| - 0.5 \|\mathbf{s}\| \|\hat{\mathbf{s}}\|}{\mathbf{m}_d^{(0)} : \hat{\mathbf{s}}} \frac{\|\hat{\mathbf{s}}\|}{2G} \quad (5.55)$$

5. Se calcula  $\beta^{(0)}$  y  $p^{(0)}$  mediante un algoritmo de bisección (Algoritmo E)

6. Se calcula

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \lambda^{(0)} (\mathbf{s}^{(0)} + p^{(0)} \mathbf{1}) \quad (5.56)$$

7. Mientras

$$\text{abs} [F_s^{(0)}] > tol \quad (5.57)$$

(a) Se calcula la función de endurecimiento  $h^{(i)}$

(b) Se calcula

$$\Delta\lambda^{(i+1)} = \min \left[ \frac{F_s^{(i)}}{\mathbf{n}^{(j)} : \mathbf{D} : \mathbf{m}^{(j)} - F_{s,\varsigma} h^{(i)}}, \Delta\lambda_{lim} \right] \quad (5.58)$$

(c) Se actualiza

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} + \Delta\lambda^{(i+1)} \quad (5.59)$$

$$\mathbf{s}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{s}} - 2G \lambda^{(i+1)} \mathbf{m}_d^{(i)} \quad (5.60)$$

(d) Se actualiza  $p^{(i+1)}$  y  $\beta^{(i+1)}$  mediante el Algoritmo E

(e) Se actualiza

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} = \mathbf{s}^{(i+1)} + p^{(i+1)} \mathbf{1} \quad (5.61)$$

(f) Se actualiza  $\varsigma^{(i+1)}$  mediante un Newton-Raphson local con  $\lambda$  constante (Algoritmo F)

(g) Se actualiza

$$\mu^{(i+1)} = (\zeta^{(i)})^2 \mu_f \quad (5.62)$$

(h) Se evalúa la función de fluencia

$$F_s^{(i+1)} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad (5.63)$$

(i) Se itera hasta convergencia.

### Algoritmo E: Actualización de $\{p, \beta\}$

El objetivo del algoritmo es encontrar

$$p^{(i+1)} = \hat{p} - 3K\beta^{(i+1)}[\sigma, e_0] \lambda \quad (5.64)$$

con  $\lambda$  y  $K$  fijos. Dado que  $\beta[\sigma, e_0]$  es una función altamente no lineal de  $p$ , se opta por un algoritmo de bisección como sigue:

1. Se definen cotas  $p_{inf}^{(0)}$  y  $p_{sup}^{(0)}$  suficientemente amplias
2. Se inicializan dos variables auxiliares

$$p_1^{(0)} = p^{(0)} \quad p_2^{(0)} = p^{(0)} \quad (5.65)$$

3. Se calcula

$$\beta_1^{(0)} = \tilde{\beta} \left[ p_1^{(0)} \right] \quad (5.66)$$

4. Se define el error

$$\zeta_1^{(0)} = p_1^{(0)} - \left( \hat{p} - 3K\beta_1^{(0)} \lambda \right) \quad (5.67)$$

5. Se corrigen las cotas

$$\zeta^{(0)} < 0 \implies p_{inf}^{(0)} = \max \left[ p_{inf}^{(0)}, p_1^{(0)} \right] \quad (5.68)$$

$$\zeta^{(0)} > 0 \implies p_{sup}^{(0)} = \min \left[ p_{sup}^{(0)}, p_1^{(0)} \right] \quad (5.69)$$

6. Se calcula

$$p_2^{(0)} = \hat{p} - 3K\beta_1^{(0)}\lambda \quad (5.70)$$

7. Se controlan cotas

$$p_2^{(0)} > p_{sup}^{(0)} \vee p_2^{(0)} < p_{inf}^{(0)} \implies p_2^{(0)} = \frac{p_{sup}^{(0)} + p_{inf}^{(0)}}{2} \quad (5.71)$$

8. Se calcula

$$\beta_2^{(0)} = \tilde{\beta} \left[ p_2^{(0)} \right] \quad (5.72)$$

9. Se calcula el error

$$\zeta_2^{(0)} = p_2^{(0)} - \left( \hat{p} - 3K\beta_2^{(0)}\lambda \right) \quad (5.73)$$

10. Se corrigen cotas

$$\zeta_2^{(0)} < 0 \implies p_{inf}^{(0)} = \max \left[ p_{inf}^{(0)}, p_2^{(0)} \right] \quad (5.74)$$

$$\zeta_2^{(0)} > 0 \implies p_{sup}^{(0)} = \min \left[ p_{sup}^{(0)}, p_2^{(0)} \right] \quad (5.75)$$

11. Se inicializa

$$p^{(0)} = p_2^{(0)} \quad \beta^{(0)} = \beta_2^{(0)} \quad \zeta^{(0)} = \zeta_2^{(0)} \quad (5.76)$$

12. Mientras

$$\text{abs} \left[ \zeta^{(i)} \right] > \text{tol} \quad (5.77)$$

(a) Se interpola linealmente

$$\zeta_2^{(0)} \neq \zeta_1^{(0)} \implies p^{(i+1)} = \frac{\zeta_1^{(i)} p_2^{(i)} - \zeta_2^{(i)} p_1^{(i)}}{\zeta_2^{(i)} - \zeta_1^{(i)}} \quad (5.78)$$

$$\zeta_2^{(0)} = \zeta_1^{(0)} \implies p^{(i+1)} = \hat{p} - 3K\beta^{(i)}\lambda \quad (5.79)$$

(b) Si

$$p^{(i+1)} > p_{sup}^{(i)} \vee p^{(i+1)} < p_{inf}^{(i)} \implies p^{(i+1)} = \frac{p_{sup}^{(i)} + p_{inf}^{(i)}}{2} \quad (5.80)$$

(c) Se actualiza

$$\beta^{(i+1)} = \tilde{\beta} [p^{(i+1)}] \quad (5.81)$$

(d) Se actualiza

$$\zeta^{(i+1)} = p^{(i+1)} - \left( \hat{p} - 3K\beta^{(i+1)}\lambda \right) \quad (5.82)$$

(e) Se corrigen cotas

$$\zeta^{(i+1)} < 0 \implies p_{inf}^{(i+1)} = \max [p_{inf}^{(i)}, p^{(i+1)}] \quad (5.83)$$

$$\zeta^{(i)} > 0 \implies p_{sup}^{(i+1)} = \min [p_{sup}^{(i)}, p^{(i+1)}] \quad (5.84)$$

(f) Se actualiza

$$p_1^{(i+1)} = p_2^{(i+1)} \quad \zeta_1^{(i+1)} = \zeta_2^{(i+1)} \quad p_2^{(i+1)} = p^{(i+1)} \quad \zeta_2^{(i+1)} = \zeta^{(i+1)} \quad (5.85)$$

(g) Se itera hasta convergencia.

13. Se informa  $p^{(i+1)}$ ,  $\beta^{(i+1)}$  y FIN

## Algoritmo F: Actualización de $\varsigma$

El objetivo del algoritmo es encontrar

$$\varsigma^{(i+1)} = n_{\varsigma} + h[\sigma, e_0, \varsigma^{(i+1)}] \lambda \quad (5.86)$$

con  $\lambda$  fijo. Se emplea el algoritmo de Newton-Raphson convencional:

1. Se calcula el residuo

$$\zeta^{(0)} = \varsigma^{(0)} - (n_{\varsigma} + h^{(0)} \lambda) \quad (5.87)$$

2. Mientras

$$\zeta^{(i)} > tol \quad (5.88)$$

(a) Se calcula

$$\Delta\varsigma = -\xi^{(i)} / \left(1 - \lambda (\partial h / \partial \varsigma)^{(i)}\right) \quad (5.89)$$

(b) Se actualiza

$$\varsigma^{(i+1)} = \max [n_{\varsigma}, \min [1, \varsigma^{(i)} + \Delta\varsigma]] \quad (5.90)$$

$$h^{(i+1)} = \widehat{h} [p, \varsigma^{(i+1)}] \quad (5.91)$$

$$\zeta^{(i+1)} = \varsigma^{(i+1)} - (n_{\varsigma} + h^{(i+1)} \lambda) \quad (5.92)$$

(c) Se itera hasta convergencia.

3. Se informa  $\varsigma^{(i+1)}$ ,  $h[\sigma, e_0, \varsigma^{(i+1)}]$  y FIN.



## 5.5 Resultados

### 5.5.1 Lista de parámetros

Los parámetros del modelo son

Par.	unidad	Descripción
$e_{min}$	—	relación de vacíos mínima
$e_{max}$	—	relación de vacíos máxima
$c_s$	—	parámetro de rigidez al corte
$\phi_c$	°	ángulo de fricción interna crítico
$p_r$	—	parámetro de dureza de grano
$c_d$	—	parámetro de endurecimiento $(E_{50}/E)_{D_r=100\%}$
$c_l$	—	parámetro de endurecimiento $(E_{50}/E)_{D_r=50\%}$

Excepto por  $e_{min}$  y  $e_{max}$ , que son determinados por procedimientos normalizados, todos los parámetros pueden ser calibrados en una serie de ensayos de compresión triaxial drenada con medición local de deformaciones.

Existen cuatro parámetros adicionales con valores por defecto. En la ec. (4.21),  $c_e = 2.17$  y  $m = 0.5$ ; en la ec. (4.37),  $\Delta\phi = 3^\circ$  y  $b = 2^\circ$ . Si se requiere, estos parámetros pueden ser ajustados para un cierto material mediante una serie más extensa de ensayos triaxiales drenados y ensayos de columna resonante.

### 5.5.2 Análisis de parámetros materiales

Se evalúa el efecto que los cinco parámetros materiales  $c_s$ ,  $\phi_c$ ,  $p_r$ ,  $c_d$  y  $c_l$  tienen sobre la respuesta del modelo, para ensayos de compresión triaxial drenada. Para los parámetros materiales se eligieron valores previamente publicados para la arena Toyoura [12][28][29][44][66][109][110][130][142][143][145][154][158][164] y se los hizo variar dentro de su rango posible. En particular, para  $c_d$  y  $c_l$  estimaron valores en base a la información

publicada en [84][85][142][143][145]. La lista es

Par.	min	real	max
$c_s$	640	840	1040
$\phi_c$	28°	31°	34°
$p_r$	35	55	75
$c_d$	0.50	0.40	0.30
$c_l$	0.35	0.25	0.15

Se empleó una presión de confinamiento constante  $\sigma_3 = 100$  kPa y dos densidades relativas,  $D_r = 50\%$  y  $D_r = 100\%$ . Las figuras 5-4 a 5-8 muestran los resultados de las simulaciones. Puede observarse que los diferentes parámetros producen efectos no acoplados sobre la curva  $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$ , lo que facilita el proceso de selección de parámetros y la calibración del modelo.

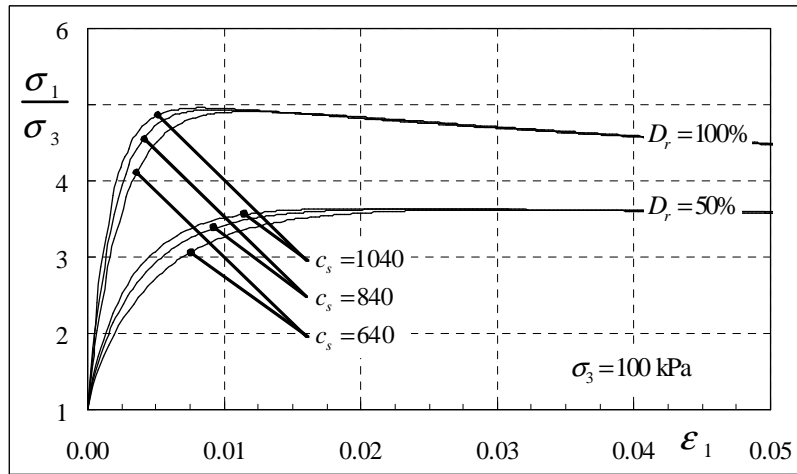


Figura 5-4: Efecto del parámetro  $c_s$  que controla la rigidez al corte.

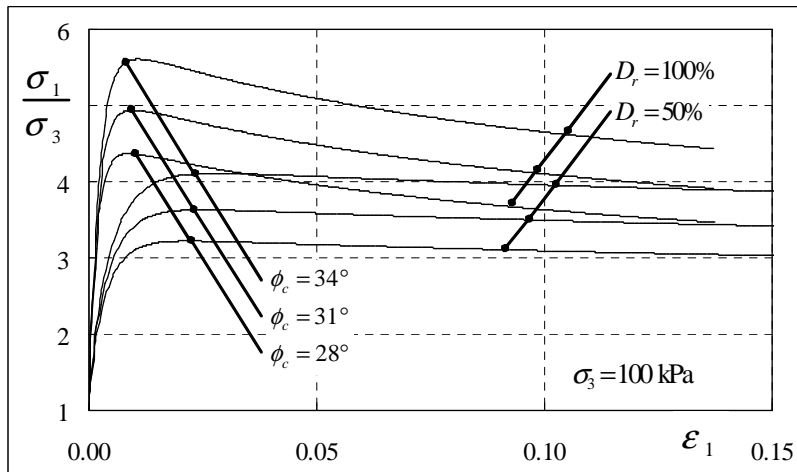


Figura 5-5: Efecto del parámetro  $\phi_c$  que controla el estado crítico.

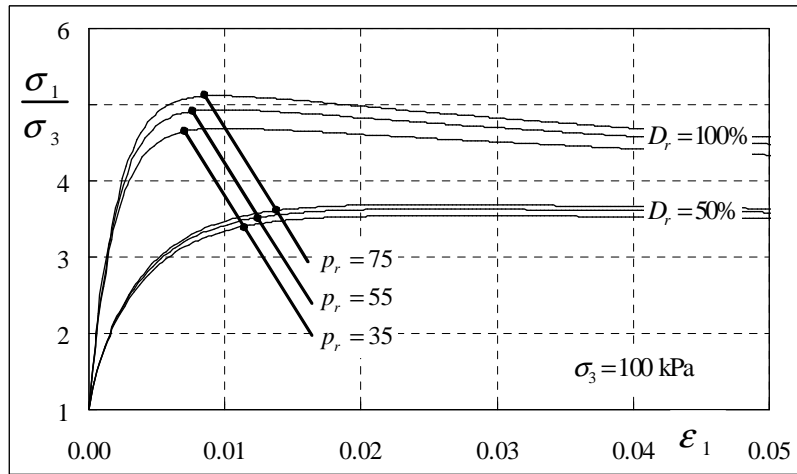


Figura 5-6: Efecto del parámetro  $p_r$  de dureza de grano que controla la diferencia  $\phi - \phi_c$ .

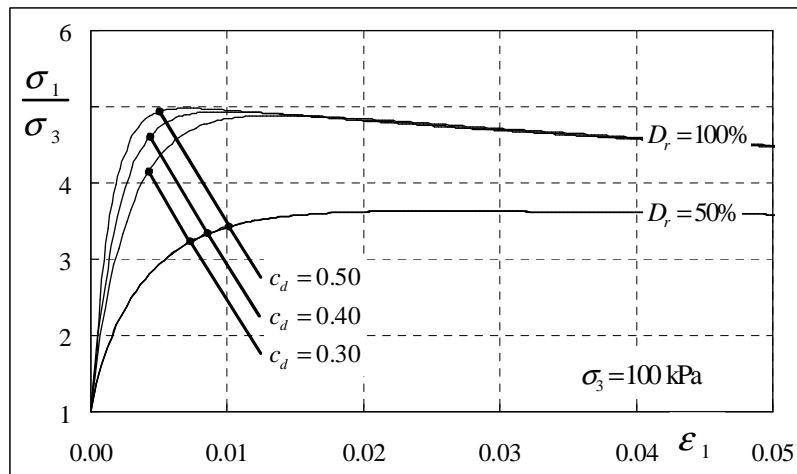


Figura 5-7: Efecto del parámetro  $c_d$  que controla la curva  $\sigma - \varepsilon$  para  $D_r = 100\%$ .

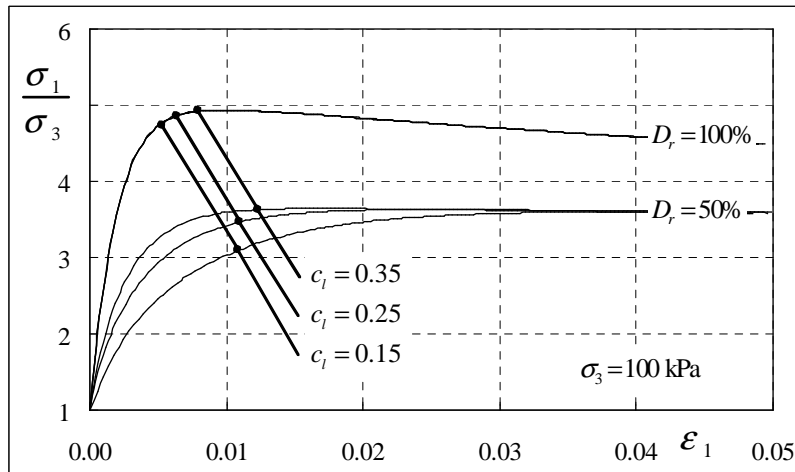


Figura 5-8: Efecto del parámetro  $c_l$  que controla la curva  $\sigma - \varepsilon$  para  $D_r = 50\%$ .

### 5.5.3 Análisis de parámetros de estado

#### Ensayos triaxiales drenados

Se simularon ensayos triaxiales drenados convencionales a presión de confinamiento constante y para un punto de integración. Se emplearon cuatro densidades relativas y tres presiones de confinamiento para mostrar la respuesta del modelo para diferentes parámetros de estado.

La figura 5-9 muestra la influencia de la densidad relativa sobre las curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$  y  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$ . Puede observarse que el modelo reproduce el comportamiento de las arenas en compresión drenada con suficiente precisión para aplicaciones prácticas. Como las simulaciones se efectuaron en un punto de integración, la respuesta de la rama descendente de las curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$  no puede ser comparada con resultados experimentales.

La figura 5-10 muestra la influencia de la presión de confinamiento sobre la respuesta del modelo.

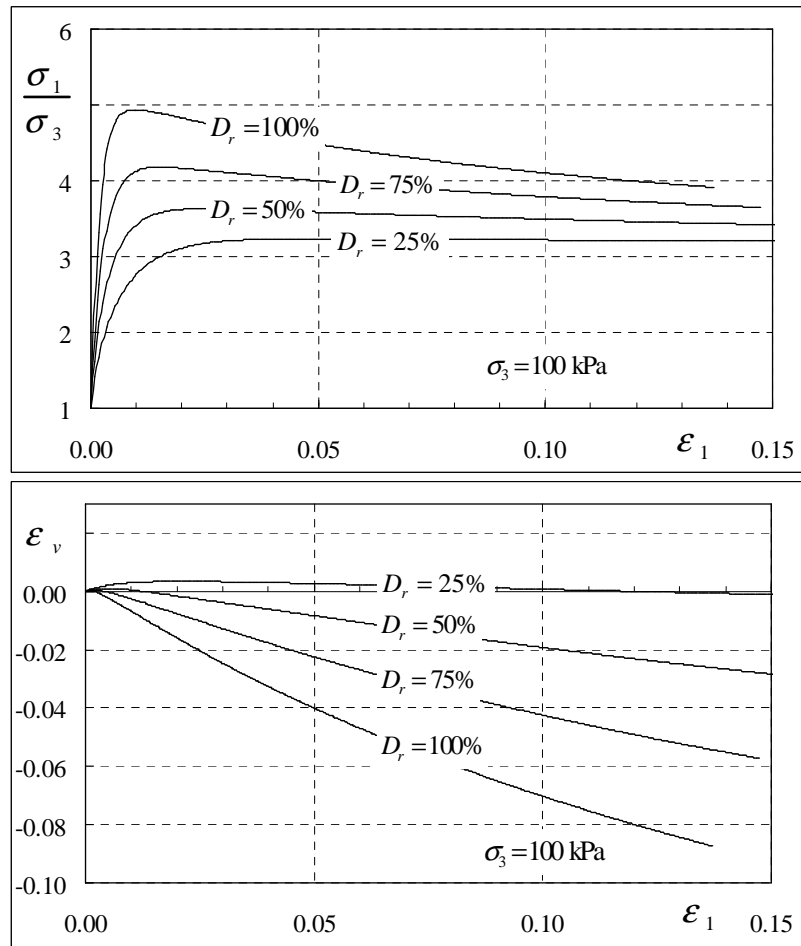


Figura 5-9: Efecto de la densidad relativa sobre la respuesta del modelo. Ensayos triaxiales drenados.

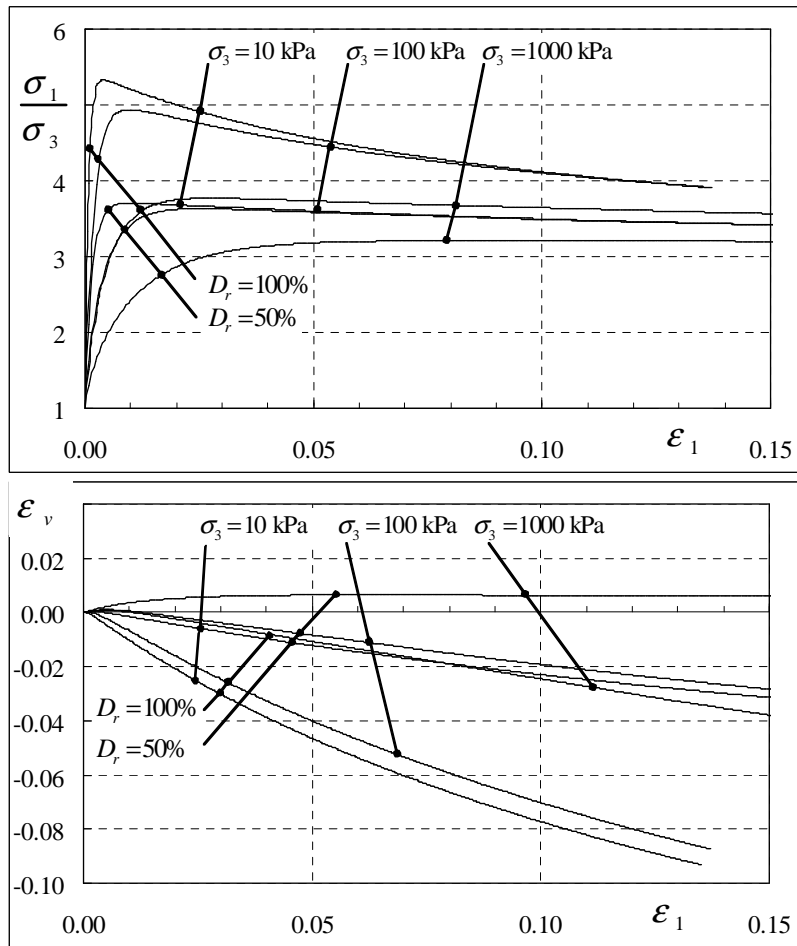


Figura 5-10: Efecto de la presión de confinamiento sobre la respuesta del modelo. Ensayos triaxiales drenados.

## Ensayos triaxiales no drenados

Se simuló ensayos triaxiales no drenados convencionales para un punto de integración. Se emplearon cinco densidades relativas y tres presiones de confinamiento.

La figura 5-11 muestra la influencia de la densidad relativa sobre la respuesta del modelo. En la figura no se aprecia la curva correspondiente a  $D_r = 15\%$  porque el modelo informa que el suelo licúa con esa densidad relativa. En la parte superior de la figura se muestra el diagrama  $q - \varepsilon_1$  completo. Se observa que todas las simulaciones alcanzan un estado de deformación constante cuando la presión media es suficientemente alta como para impedir la dilatancia. En la parte media de la figura se muestra una vista ampliada del mismo diagrama, donde puede verse que la muestra con  $D_r = 15\%$  alcanza un pico de resistencia reducido y luego decae hasta  $q = 0$  kPa. En la simulación con  $D_r = 25\%$  se aprecia el desarrollo del estado de cuasi-deformación constante, mientras que las muestras más densas presentan comportamiento dilatante en toda la curva. El efecto de la densidad relativa sobre la tendencia del material a contraer o dilatar se aprecia más claramente en el diagrama  $p - q$  que se muestra en la parte inferior de la figura.

La realidad física es que aún con densidades muy bajas como  $D_r = 15\%$  el material exhibe una resistencia al corte residual no nula [21][22][58][59][115][154]. El modelo no captura este comportamiento porque se emplea una presión mínima en la evaluación de la función  $\psi [p, e_0]$ , necesaria para evitar la sobre-estimación del ángulo de fricción interna máximo.

La figura 5-12 muestra la influencia de la presión de confinamiento sobre la respuesta del modelo. Se aprecia que la influencia de la presión de confinamiento inicial se limita a la porción inicial de las curvas  $q - \varepsilon_1$  hasta el estado de cuasi-deformación constante ( $\varsigma < 1$ ). A partir del desarrollo de la plasticidad en falla, todas las curvas  $q - \varepsilon_1$  coinciden y predicen correctamente la evolución hasta el estado de deformación constante.



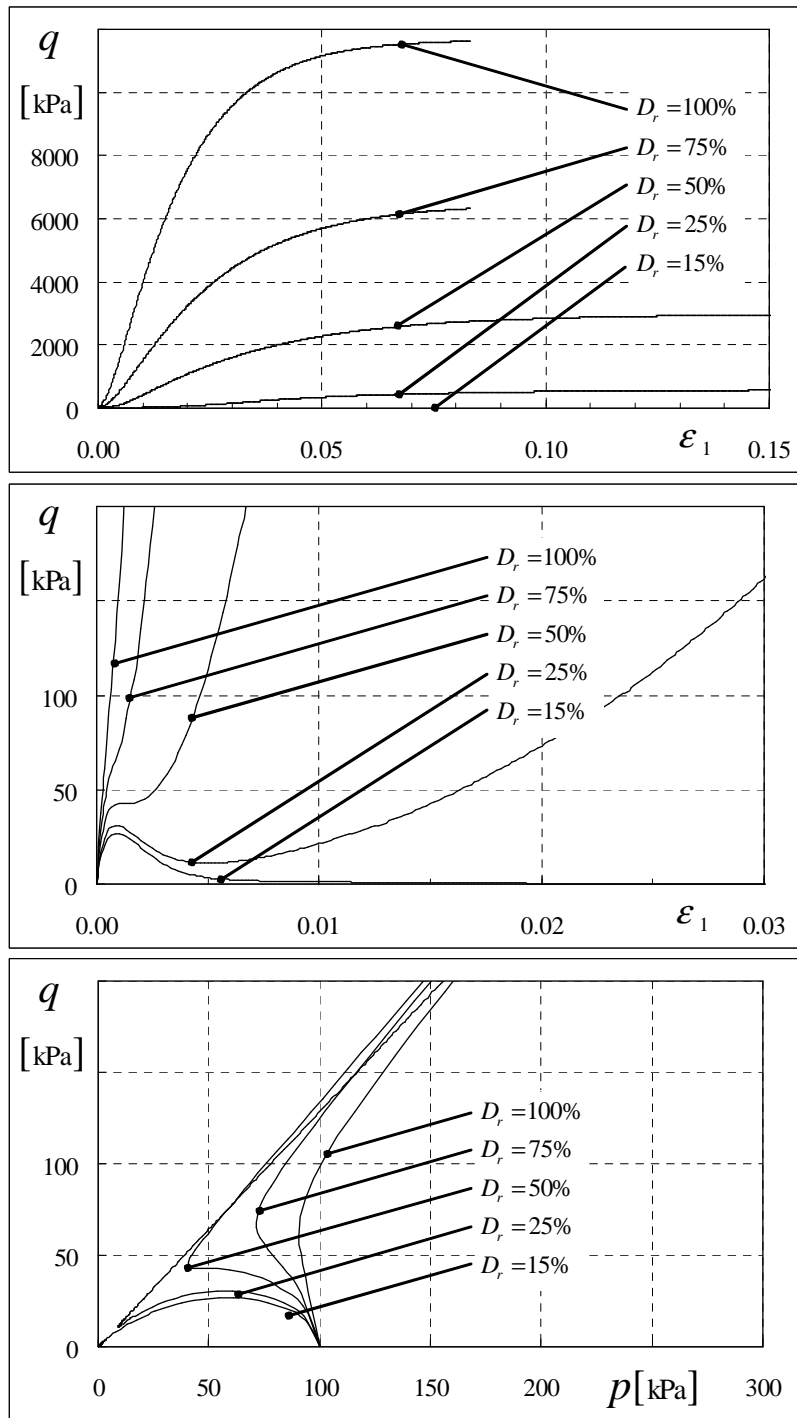


Figura 5-11: Simulación de ensayos de compresión triaxial no drenada para diferentes densidades relativas.

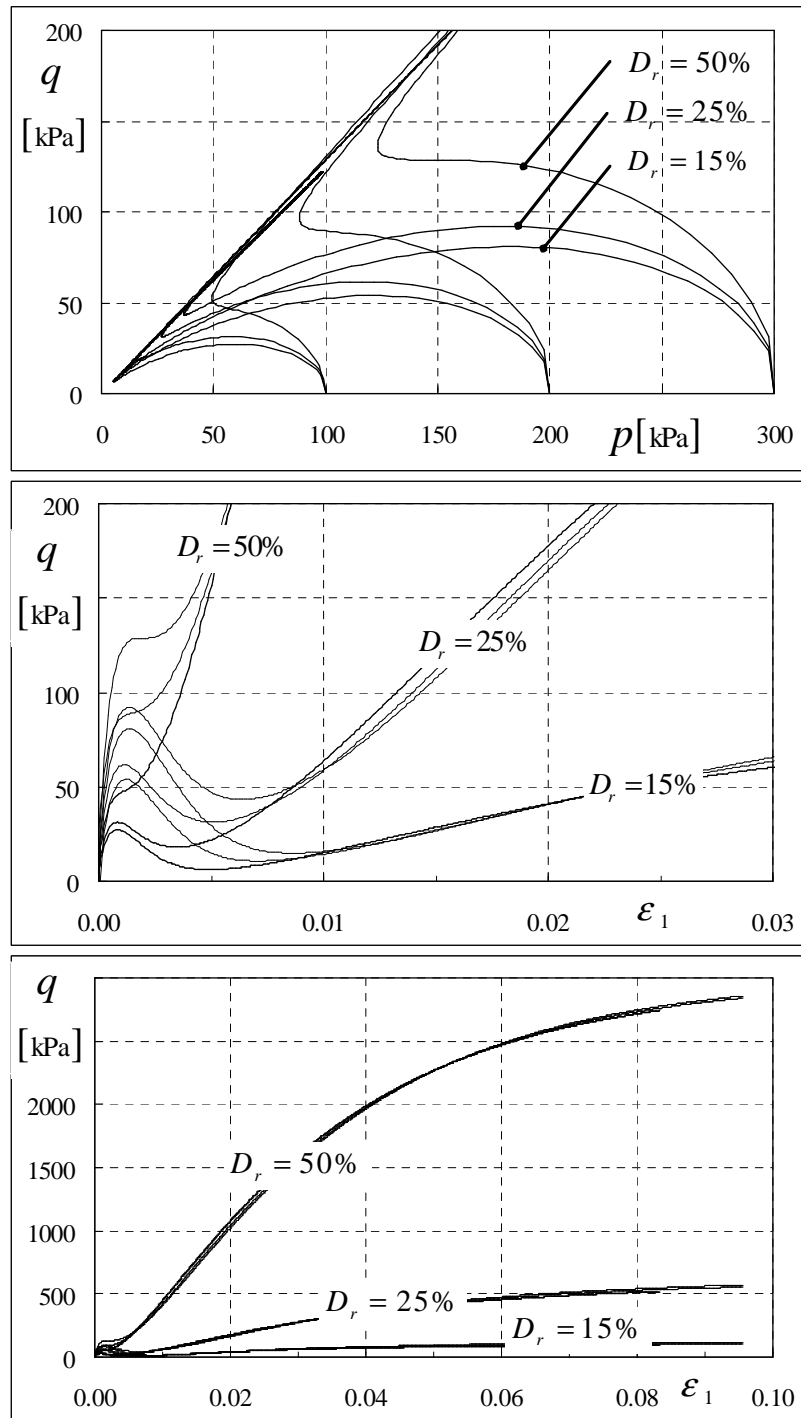


Figura 5-12: Simulación de ensayos de compresión triaxial no drenada para diferentes presiones de confinamiento y densidades relativas.

Se concluye que el modelo también reproduce el comportamiento de las arenas en compresión no drenada con suficiente precisión para aplicaciones prácticas. Es interesante destacar que el modelo captura correctamente la dependencia del ángulo de transformación de fase respecto de la densidad relativa, la licuefacción estática de arenas muy sueltas, el estado de cuasi-deformación constante de las arenas sueltas y el estado de deformación constante de todas las arenas [58][59][115][154].

### **Ensayos de deformación plana drenados**

Las ecs. (4.58) a (4.59) tienen un punto común en el caso de la deformación plana, donde se define la ec. (4.60), para el que  $\beta$  presenta una discontinuidad en su derivada. En la ec. (4.69) se presentó una formulación alternativa, que emplea los factores de dilatación en compresión y extensión triaxial y calcula una solución interpolada para otros ángulos de Lode. En la figura 5-13 se comparan las dos fórmulas mediante la simulación de ensayos de deformación plana drenados para cuatro densidades relativas y una presión de confinamiento  $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$ . En la figura,  $\beta$  es el factor de dilatación de las ecs. (4.58) y (4.59), mientras que  $\bar{\beta}$  según ec. (4.69).

Ambas predicciones producen idénticas curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$ , hasta el punto que sólo puede apreciarse la existencia de dos formulaciones como un engrosamiento en la línea de la curva  $\sigma - \varepsilon$  para  $D_r = 100\%$ . En cambio, las dos formulaciones producen diferentes líneas  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$ , como puede apreciarse en la mitad inferior de la figura 5-13. La diferencia entre los resultados de las ecs. (4.58) y (4.59) respecto de la ec. (4.69) es reducida e ignorable para todos los fines prácticos. Es más, no existe evidencia contundente que permita establecer cual de las dos formulaciones reproduce mejor el comportamiento real de las arenas, porque la diferencia entre ambas es, aproximadamente, de igual orden que el error de las mediciones. Por lo tanto, se concluye que la ec. (4.69) es adecuada para la aplicación práctica del modelo. Es interesante destacar que el modelo predice correctamente que  $(\sigma_1/\sigma_3)_f$  en deformación plana es aproximadamente un 20% superior a lo que se obtiene en compresión triaxial (figura 5-9).

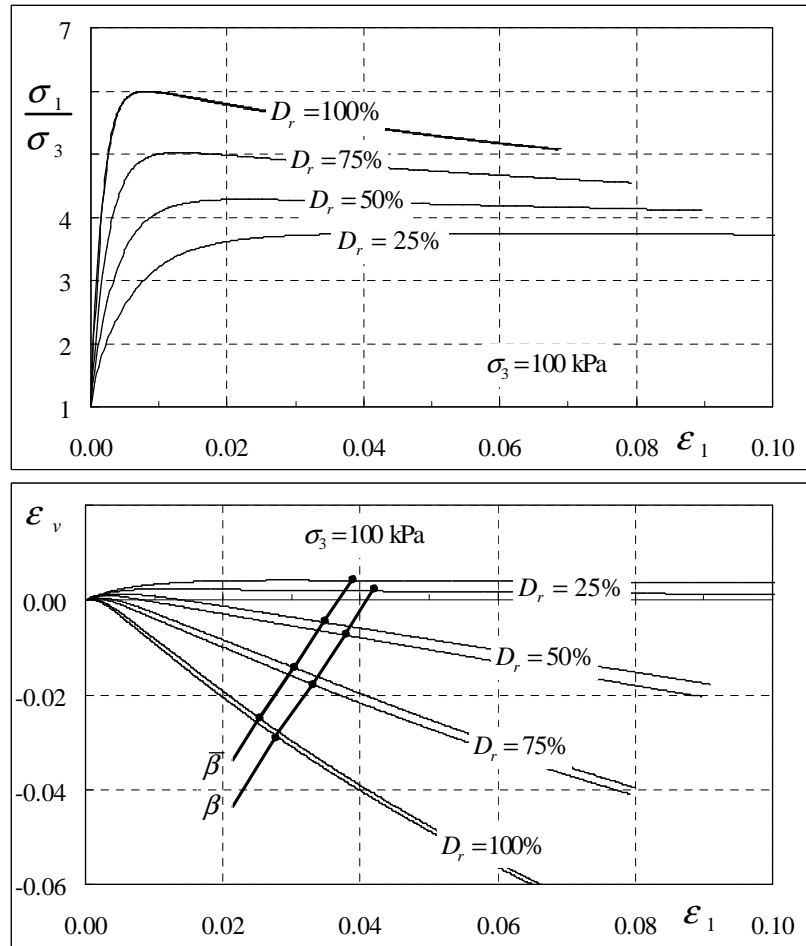


Figura 5-13: Simulación de ensayos de deformación plana drenados.  $\beta$  según ecs. (4.58) y (4.59);  $\bar{\beta}$  según ec. (4.69).

### 5.5.4 Calibración para la arena Puelchense

En esta sección se presenta la calibración del modelo para la serie de ensayos experimentales presentada en las figuras 4-27 y 4-28. Para esta arena se determinó  $e_{min} = 0.58$  y  $e_{max} = 0.89$  mediante ensayos convencionales de laboratorio. En la figura 4-26 se mostró la determinación de otros dos parámetros:  $\phi_c = 30^\circ$ ,  $p_r = 50$ . Como no se dispone de elementos para medirlo, se estima a partir de la bibliografía que  $c_s = 740$  [49][59][66]. Por lo tanto, los parámetros a ajustar son  $c_d$  y  $c_l$ .

Únicamente se presentan las simulaciones de los ensayos ejecutados con presión de confinamiento  $\sigma_3$  100 kPa, 300 kPa y 600 kPa para que los gráficos resulten legibles. Los parámetros de mejor ajuste fueron  $c_d = 0.35$  y  $c_l = 0.15$ . Aunque estos valores son algo bajos, debe tenerse en cuenta que las mediciones de desplazamientos de los ensayos experimentales fueron externas, por lo que las curvas  $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$  incluyen los errores introducidos por los contactos cabezal-muestra. En las figuras 5-14 y 5-15 se muestran los resultados numéricos vs. los experimentales. Puede observarse que el ajuste del modelo es razonable para  $D_r = 97\%$ , mientras que para  $D_r = 35\%$  el modelo informa más dilatancia que los ensayos.

### 5.5.5 Calibración para la arena Toyoura

El modelo que se presenta en este capítulo está expresado en términos de presiones efectivas, desarrollado alrededor de la teoría de estado crítico y tiene siete parámetros materiales. Por lo tanto, la reproducción de resultados experimentales de ensayos triaxiales drenados es relativamente trivial y no permite apreciar la verdadera capacidad predictiva de la formulación.

Distinto es el caso de la compresión triaxial no drenada de arenas. En este ensayo, el material es saturado con agua, comprimido isotrópicamente hasta una cierta presión de confinamiento, y luego sometido a un esfuerzo  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  monotónicamente creciente mientras se mantiene constante el volumen de la muestra. Por lo tanto, la tendencia del material a contraer se traduce en un aumento de la presión del agua intersticial y en

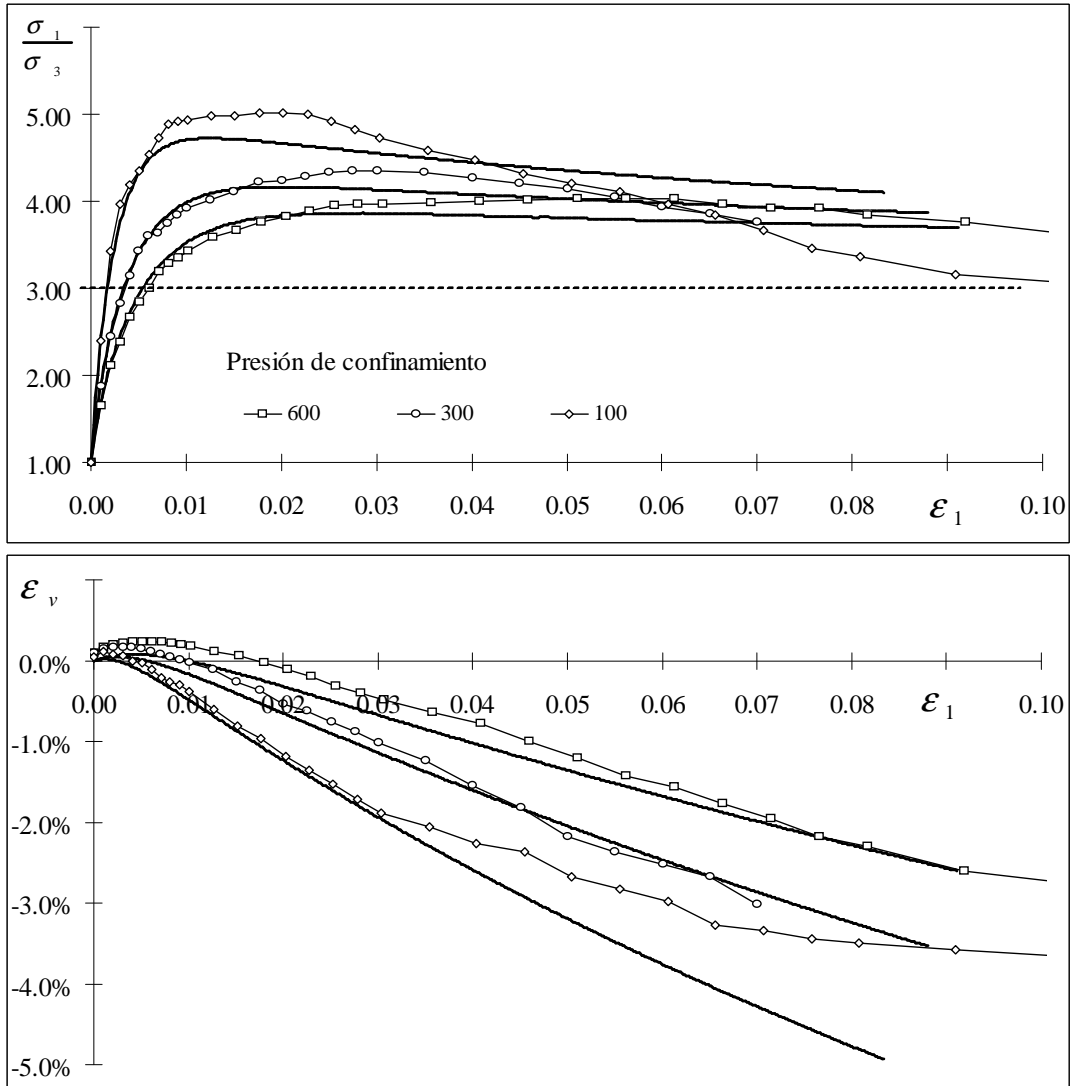


Figura 5-14: Ensayos triaxiales drenados de arena del Puelchense con  $D_r \approx 97\%$ . Comparación entre mediciones experimentales y resultados de la simulación numérica.

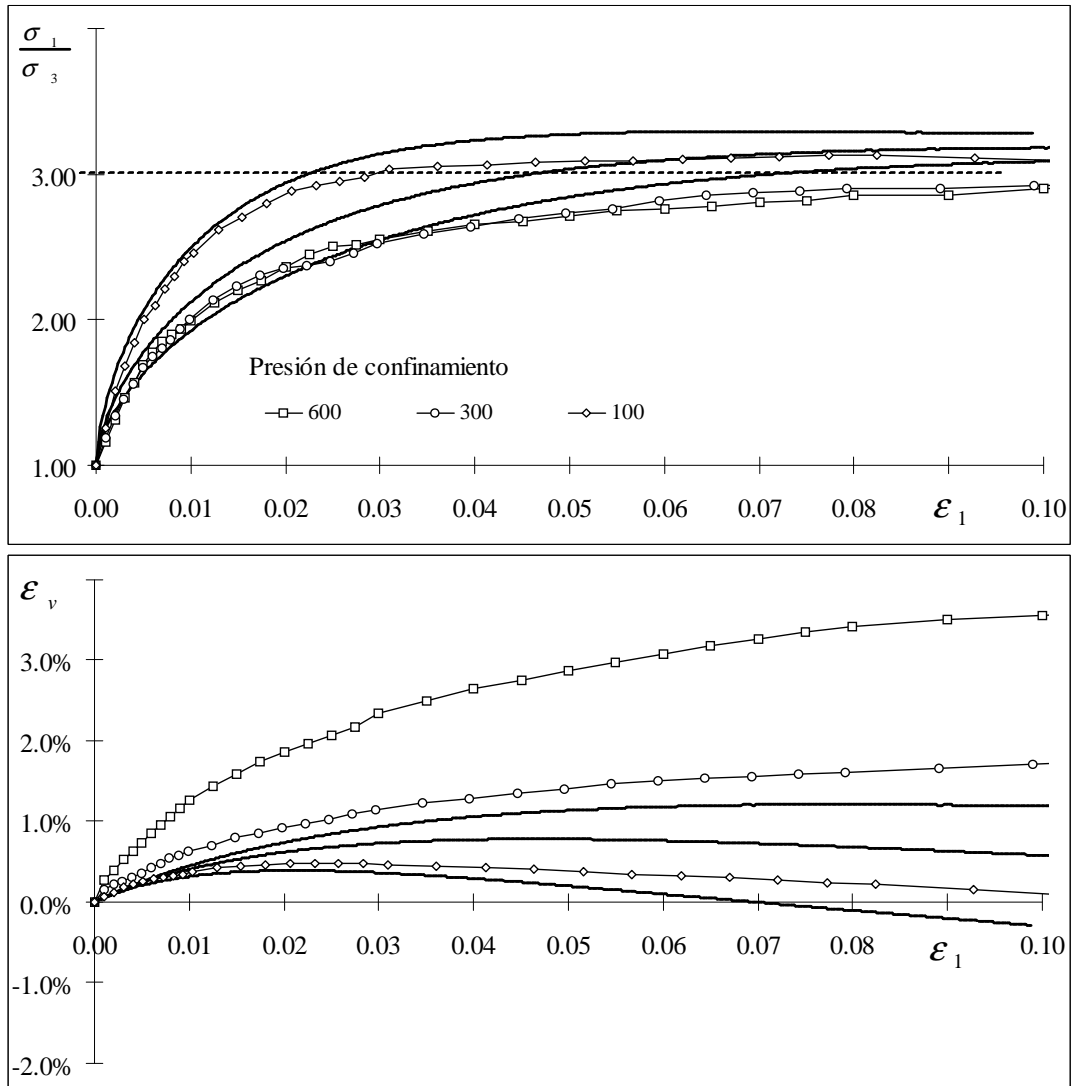


Figura 5-15: Ensayos triaxiales drenados de arena del Puelchense con  $D_r \approx 35\%$ . Comparación entre mediciones experimentales y resultados de la simulación numérica.

una consiguiente disminución de la presión efectiva media. En cambio, la tendencia del material a dilatar se traduce en una disminución de la presión intersticial de agua y en el consiguiente aumento de la presión efectiva. Si las partículas fueran rígidas, el aumento de la presión efectiva sólo terminaría con la cavitación del agua intersticial. Como las partículas se rompen, el aumento de la presión efectiva termina cuando se alcanza un nivel de presión que suprime la dilatancia o, en otras palabras, cuando la muestra alcanza el estado de deformación constante. Por lo tanto, en el ensayo de compresión no drenada se puede probar el funcionamiento conjunto de las funciones de estado para rigidez elástica, tensión-dilatancia, ángulo de fricción interna y función de endurecimiento y, sobre todo, la dependencia de todas estas funciones de estado respecto de la presión y la densidad relativa.

En las figuras 5-16 a 5-18 se presenta la simulación numérica de ensayos de compresión no drenada de la arena Toyoura, para cuatro presiones de confinamiento y tres densidades relativas. Los datos experimentales fueron obtenidos de Verdugo & Ishihara [154]. Tres de los parámetros de entrada del modelo están reportados en [154]:  $e_{min} = 0.60$ ,  $e_{max} = 0.98$  y  $\phi_c = 31^\circ$ . Los otros cuatro parámetros se seleccionaron para obtener el mejor ajuste a los datos experimentales. Quedó  $c_s = 350$ ,  $p_r = 50$ ,  $c_d = 0.93$  y  $c_l = 0.56$ . Para cada densidad relativa, los ensayos fueron ejecutados a una misma relación de vacíos  $e_c$  luego de la consolidación hasta la presión  $p_c$ . Para cada simulación se calculó el parámetro  $e_0$  correspondiente mediante la expresión

$$e_0 = (1 + e_c) \exp [p_c/K] - 1 \quad (5.93)$$

Los ensayos triaxiales de Verdugo e Ishihara fueron ejecutados con medición de la deformación axial [154]. Esta técnica experimental produce una fuerte subestimación de la rigidez inicial de los. Para lograr un buen ajuste debió adoptarse  $c_s = 350$ . Consecuentemente, los parámetros  $c_d$  y  $c_l$  que miden el cociente  $E_{50}/E$  debieron aumentarse. Si se duplicara  $c_s$  a  $c_s = 700$  y se redujera a la mitad  $c_d = 0.46$  y  $c_l = 0.28$  se obtendría el resultado que se muestra en la figura 5-19.



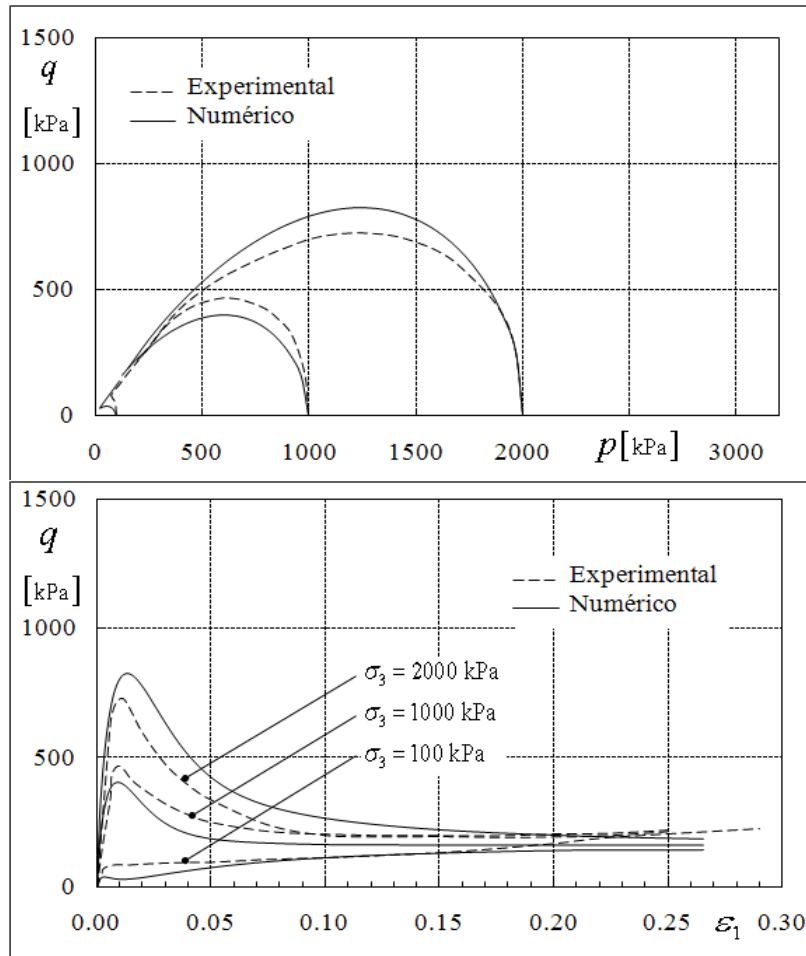


Figura 5-16: Compresión no drenada de Arena Toyoura,  $D_r = 18.5\%$ . Comparación numérica vs experimental. Data de [154].

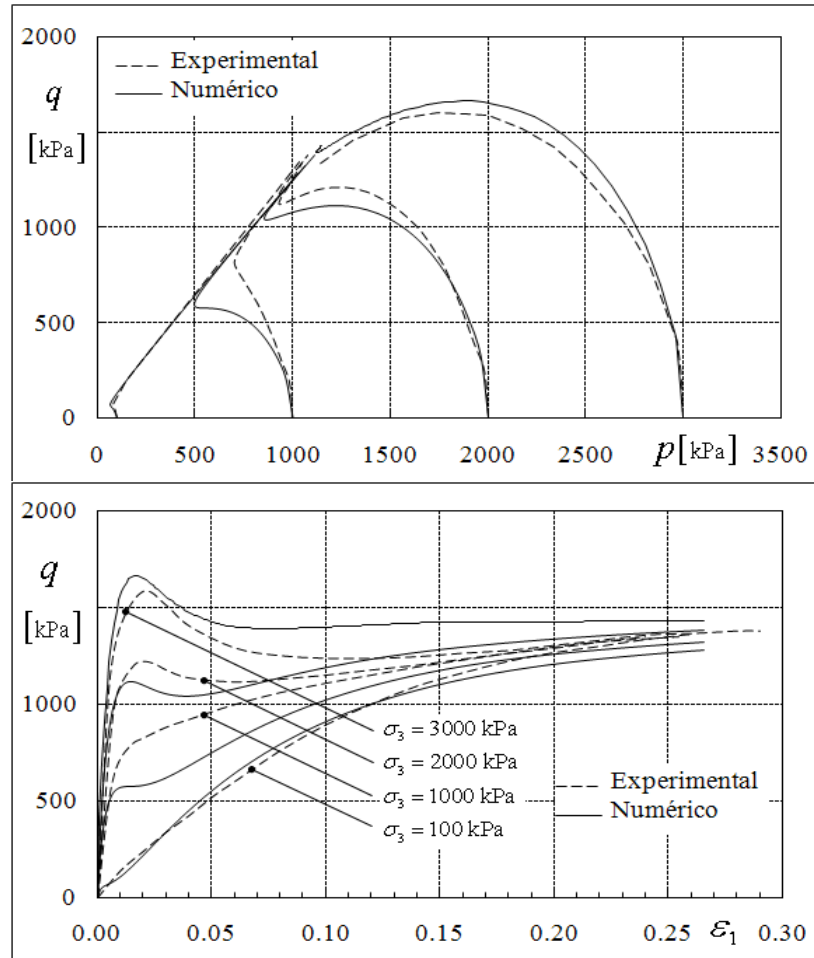


Figura 5-17: Compresión no drenada de Arena Toyoura,  $D_r = 38\%$ . Comparación numérica vs experimental. Data de [154].

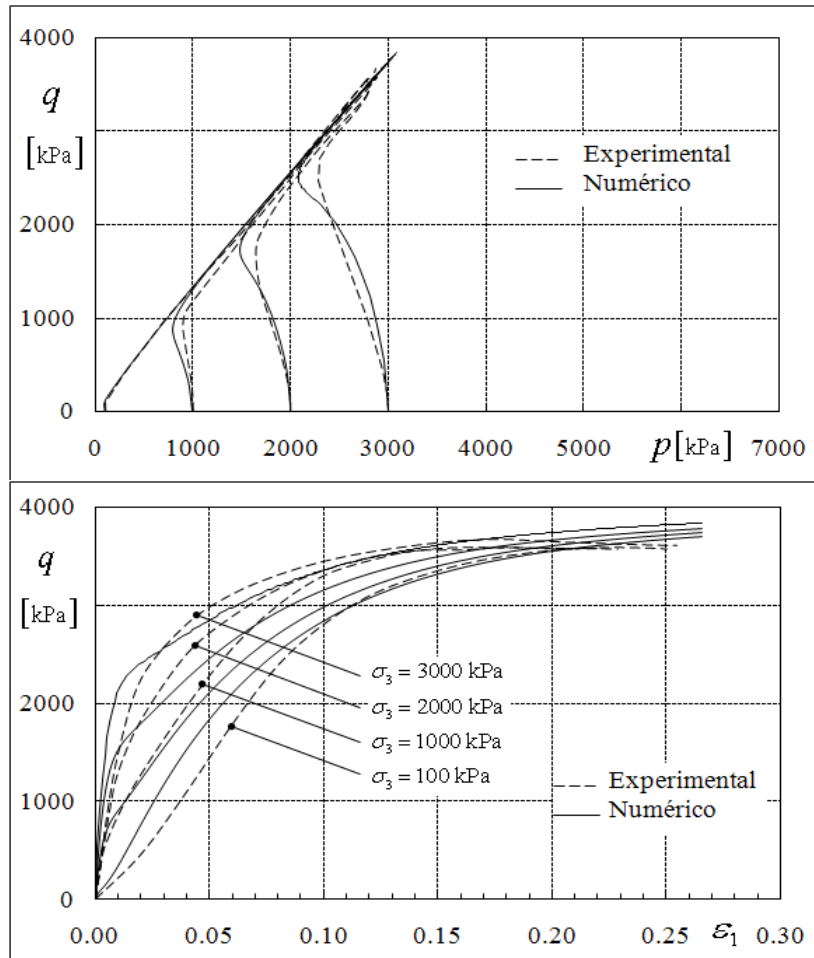


Figura 5-18: Compresión no drenada de Arena Toyoura,  $D_r = 63.5\%$ . Comparación numérica vs experimental. Data de [154].

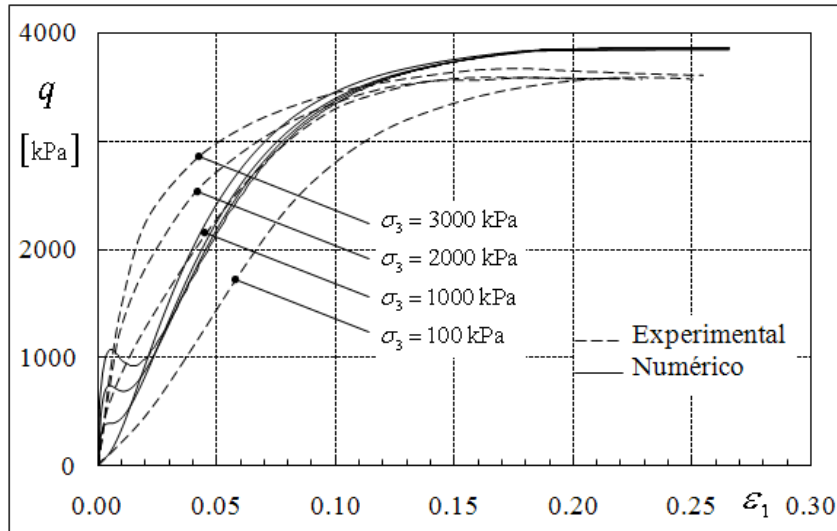


Figura 5-19: Compresión no drenada de Arena Toyoura,  $D_r = 63.5\%$ . Comparación numérica vs experimental. Parámetros realistas. Data de [154].

Nunca se logra un ajuste perfecto de las curvas tensión-deformación. Esto es debido a la falta de flexibilidad del modelo inducida por el reducido número de parámetros materiales. Esta es una limitación aceptada para un modelo desarrollado para su aplicación en la práctica profesional, donde es muy apreciado que el modelo tenga pocos parámetros de calibración simple y donde los ensayos experimentales de alta calidad como los usados para esta comparación [154] son muy escasos.

### 5.5.6 Análisis de las variables de estado

El modelo tiene tres variables de estado:  $\sigma$ ,  $e_0$  y  $\varsigma$ . Mientras que la primera está presente en todos los modelos de la mecánica del continuo, las otras dos son específicas de este modelo y requieren el siguiente análisis.

La variable de estado  $e_0$  es una medida del estado de densidad del material, y es la única que registra los cambios de volumen asociados a la deformación plástica. Su principal ventaja es que su determinación es muy simple; la segunda, que  $\dot{e}_0$  es una medida directa de la deformación finita del material.

En otros modelos para geomateriales se emplean medidas de la deformación plástica acumulada como variables de estado. Sin embargo, la deformación plástica acumulada no es una buena variable de estado para arenas. Aunque hay muchos argumentos que permitirían respaldar esta afirmación, no es necesario listarlos, sino que basta con reflexionar acerca de estas dos preguntas: ¿Cual es la deformación plástica acumulada de la arena de un reloj de arena que fue invertido una vez? ¿y luego de 100 inversiones?  $e_0$  es el mismo en ambos casos y el estado del material también.

La variable de estado  $\varsigma$  es indirecta. Para medirla es necesario calcular  $\mu_f [p, e_0]$  y aplicar la expresión

$$\varsigma = \sqrt{\frac{3}{\mu_f} \frac{r^2 - 3J_{3r}}{1 - r^2/2 + J_{3r}}} \quad (5.94)$$

o recurrir a la mecánica de suelos clásica. Queda

$$\varsigma = \frac{\tan [\phi_{mob}]}{\tan [\phi]} \quad (5.95)$$

No existe un estado físico en el material que pueda ser asociado a  $\varsigma$ , porque  $\varsigma$  es una variable de estado escalar - necesariamente asociada a una eventual característica isotrópica del material - y las arenas sometidas a trayectorias generales de carga no presentan un comportamiento isotrópico.

En carga monotónica de corte, es plausible que haya una relación entre la proporción de los contactos que sufren deslizamiento y  $\varsigma$ . De todas maneras,  $\varsigma$  es una variable de estado que, por definición, alcanza su valor de saturación antes del estado crítico y por lo tanto no controla los aspectos básicos del comportamiento del material para grandes deformaciones. Otro aspecto de gran importancia es que las variables de estado estén asociadas a procesos claramente identificables y, en la medida de lo posible, desacoplados.

El grado de acoplamiento entre variables de estado se puede estudiar de manera gráfica en mapas de evolución relativa. En la figura 5-20 se muestran los mapas  $\varsigma - e_0$  y  $\sigma_1/\sigma_3 - e_0$  para los ensayos triaxiales drenados que se presentaron en la figura 5-9. En la parte superior puede apreciarse que las trayectorias son prácticamente ortogonales entre

sí, que  $\varsigma$  controla el comportamiento del material hasta la falla y que  $e_0$  lo controla desde la falla y hacia el estado crítico. En la parte inferior de la figura puede apreciarse que una vez que se alcanza la falla y el material comienza a dilatar, describe una única curva. Cualquier punto en esa curva límite corresponde a un material que tiene un estado único, independiente de la relación de vacíos inicial del ensayo.

En la figura 5-21 se muestran los mapas  $\varsigma - e_0$  y  $q - e_0$  para los ensayos triaxiales no drenados que se presentaron en la figura 5-11. Puede apreciarse que en este caso  $e_0$  no cambia significativamente en la falla, como corresponde a un análisis no drenado, en el que la deformación volumétrica está limitada por la rigidez volumétrica del agua, y es prácticamente nula para todos los ensayos corrientes de laboratorio.

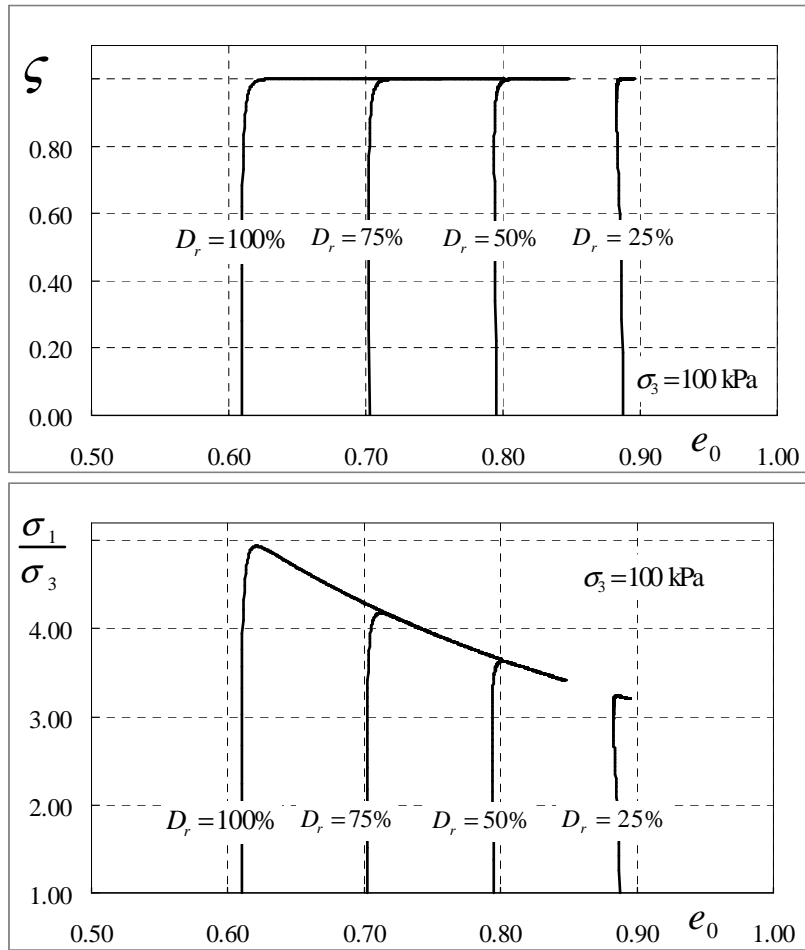


Figura 5-20: Mapas de variables de estado. Ensayo triaxial de compresión a presión de confinamiento constante.

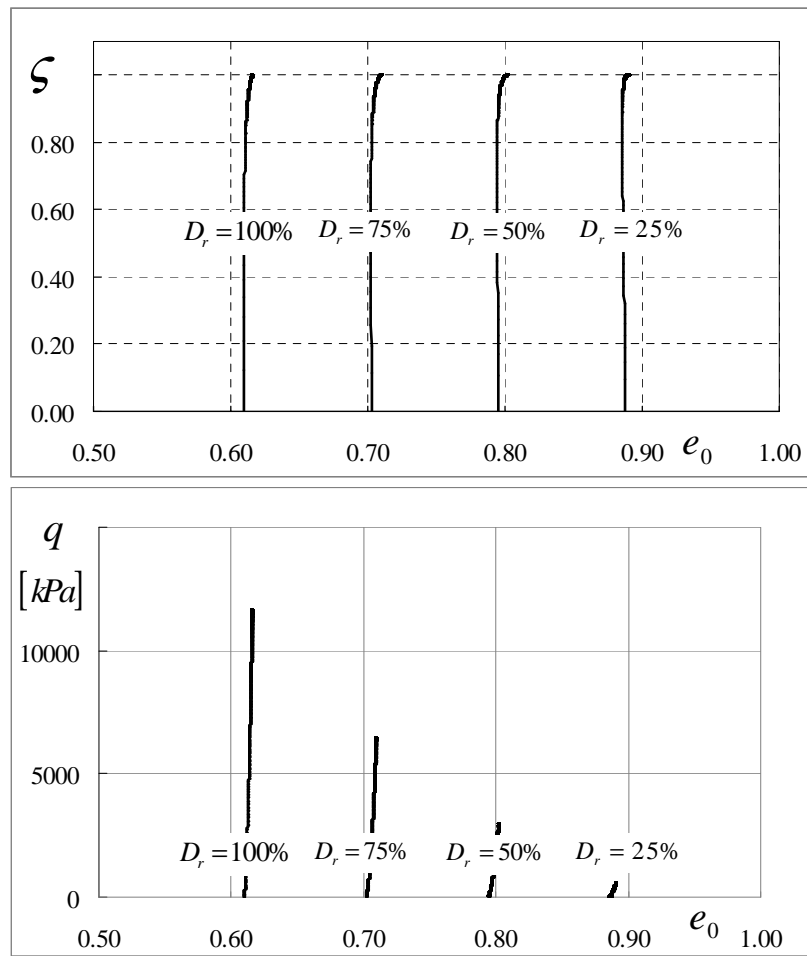


Figura 5-21: Mapas de variables de estado. Ensayo triaxial de compresión no drenada.



### 5.5.7 Análisis del tamaño del paso

Tanto el operador de integración como su algoritmo numérico son implícitos en todos sus niveles, por lo que la estabilidad numérica está asegurada. La consistencia del algoritmo y la dependencia de la respuesta del modelo respecto del tamaño del paso se muestran en las figuras 5-22 y 5-23 para el ensayo triaxial de compresión no drenada, en la que se muestra la predicción del modelo para una deformación total  $\|\Delta\varepsilon_d\| = 5\%$  en 5, 10 y 100 pasos.

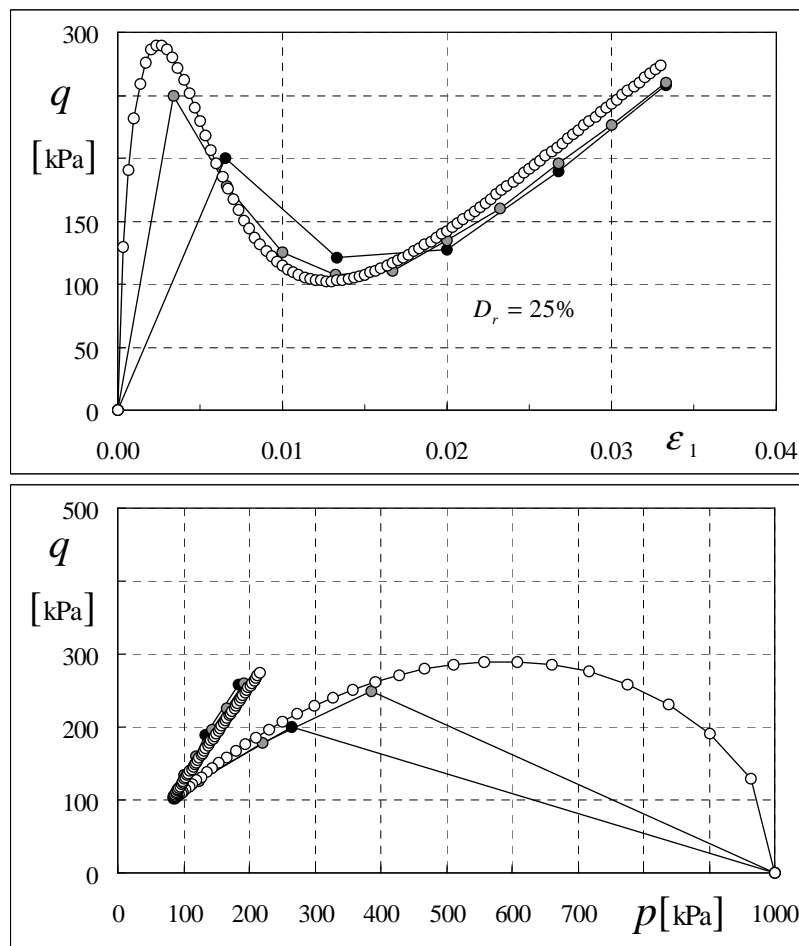


Figura 5-22: Influencia del tamaño del paso sobre la respuesta del modelo.  $\|\varepsilon_d\| = 5\%$  en 5 pasos, 10 pasos y 100 pasos.  $D_r = 25\%$ .

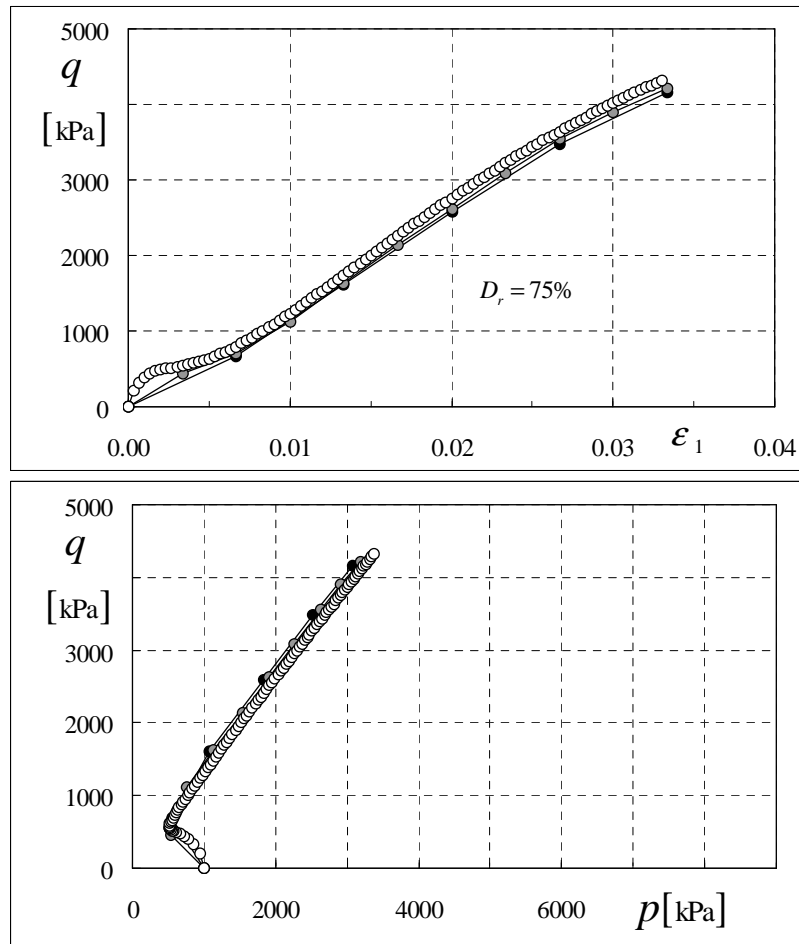


Figura 5-23: Influencia del tamaño del paso sobre la respuesta del modelo.  $\|\epsilon_d\| = 5\%$  en 5 pasos, 10 pasos y 100 pasos.  $D_r = 75\%$ .

### 5.5.8 Simulación de un ensayo de compresión plana

En esta sección se repite la simulación de un ensayo de compresión plana drenado que se presentó en la sección 4.5.3, con los mismos parámetros materiales, variables de estado y malla. La figura 5-24 muestra la curva tensión-deformación que puede calcularse con información del contorno de la muestra. Si se asume una deformación uniforme, el valor terminal de  $P/A$  se puede estimar con las fórmulas corrientes de la mecánica de suelos, y asumiendo  $\phi_{ps} = 1.15\phi_c$  [69]. Queda

$$\left(\frac{P}{A_0}\right)_c \approx \frac{1}{1 - \Delta H/H} \tan^2 \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1.15 \cdot \phi_c}{2} \right] \sigma_3 = 413 \text{ kPa} \quad (5.96)$$

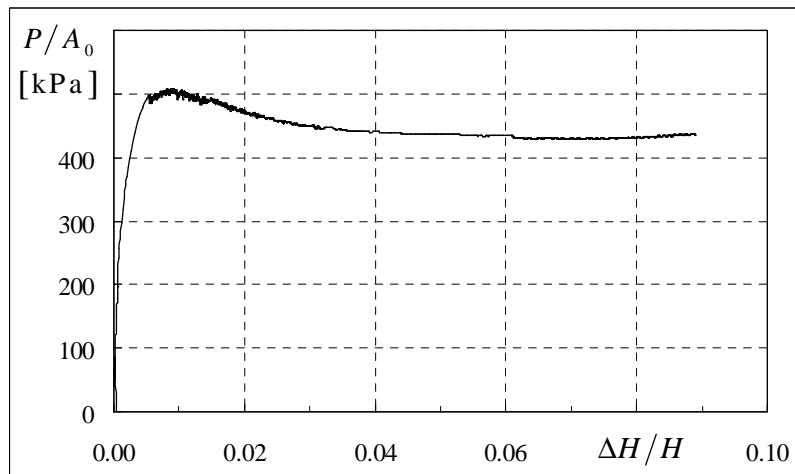


Figura 5-24: Ensayo de deformación plana. Curva tensión-deformación observable desde los contornos de la muestra.

En las figuras que siguen se muestra la evolución de algunas variables para acortamientos de la muestra de 2%, 4%, 6% y 8% de la altura inicial. En la figura 5-25 se muestra la malla deformada. En la figura 5-26 se muestra el contorno de desplazamientos verticales como porcentual de la altura inicial. En la figura 5-27 se muestra la evolución de  $\|\epsilon\|$ . En la figura 5-28 se muestra la evolución de  $e_0$ . Por último, en la figura 5-29 se muestra la evolución de  $\phi$ .

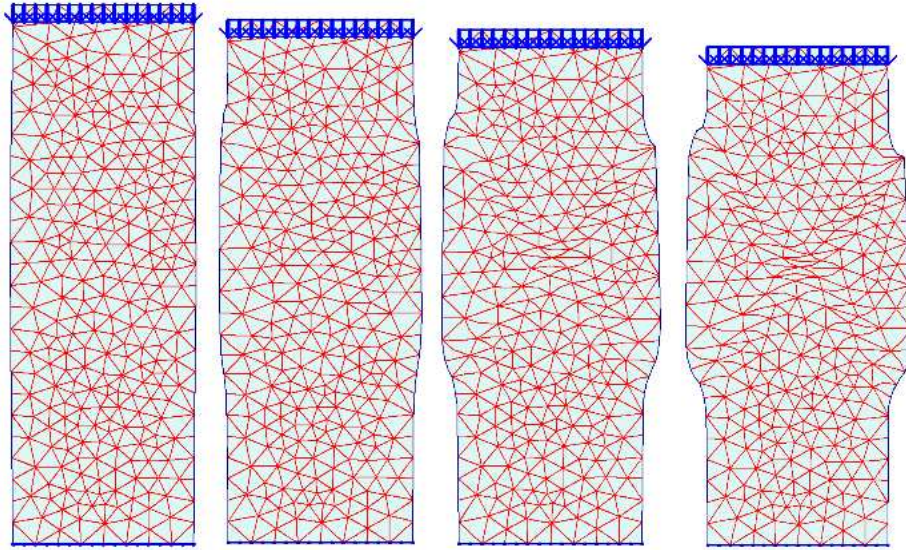


Figura 5-25: Ensayo de deformación plana. Malla deformada.  $\Delta H/H = 2\%$ ,  $4\%$ ,  $6\%$  y  $8\%$ .

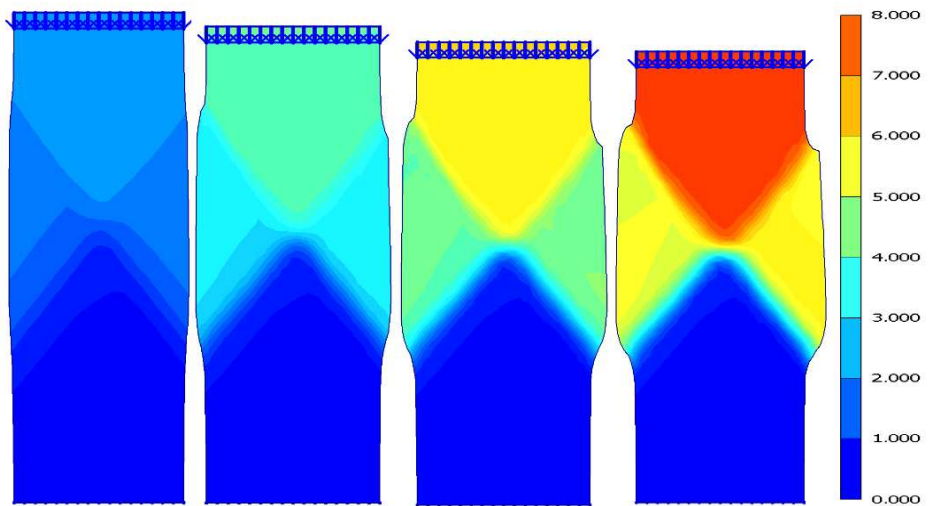


Figura 5-26: Ensayo de deformación plana. Contorno de desplazamientos.  $\Delta H/H = 2\%$ ,  $4\%$ ,  $6\%$  y  $8\%$ .

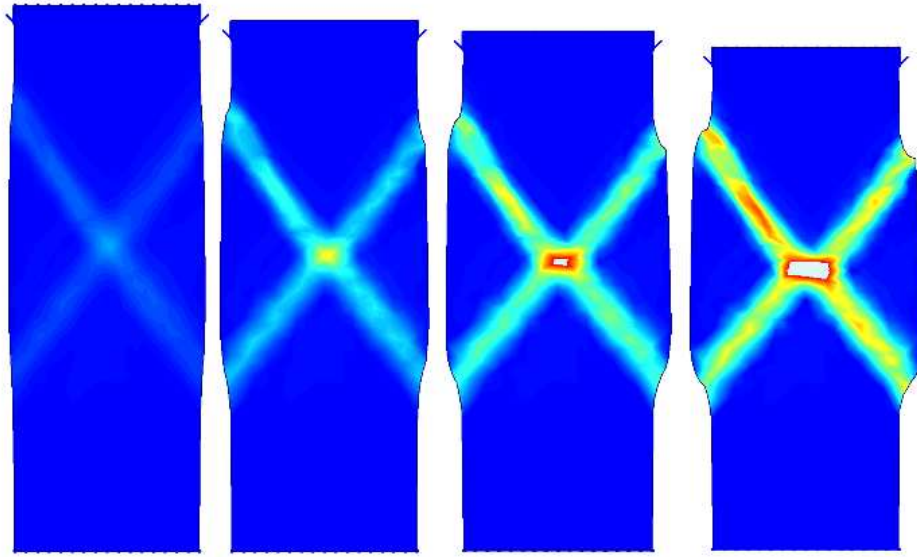


Figura 5-27: Ensayo de deformación plana. Contorno de  $\|\varepsilon\|$ .  $\Delta H/H = 2\%$ ,  $4\%$ ,  $6\%$  y  $8\%$ . Azul:  $\|\varepsilon\| = 0$ . Colorado:  $\|\varepsilon\| = 100\%$ .

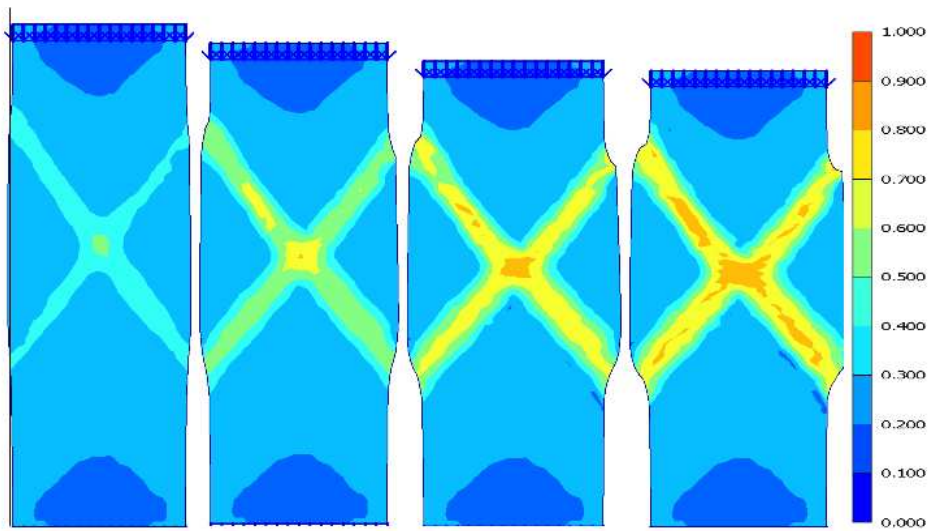


Figura 5-28: Ensayo de deformación plana. Contorno de  $e_0$ .  $\Delta H/H = 2\%$ ,  $4\%$ ,  $6\%$  y  $8\%$ . Azul:  $D_r = 0\%$ . Colorado:  $D_r = 100\%$ .

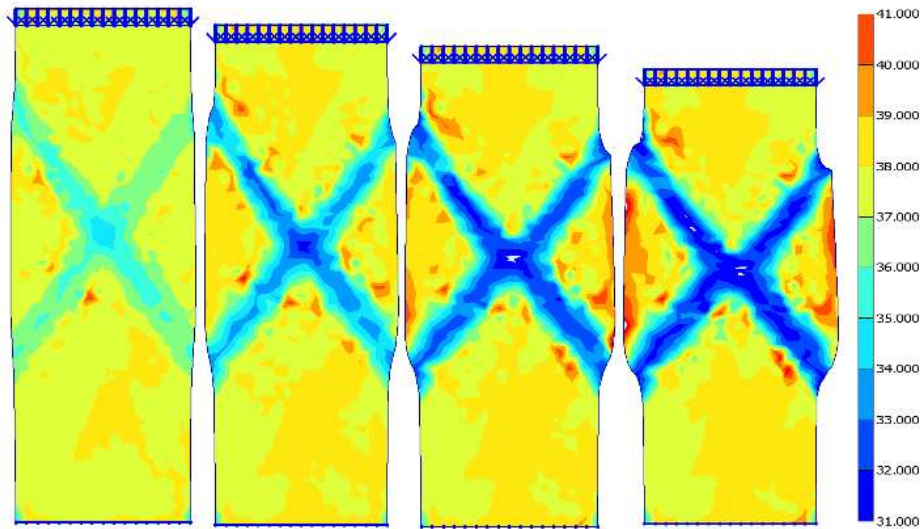


Figura 5-29: Ensayo de deformación plana. Contorno de  $\phi$ .  $\Delta H/H = 2\%$ ,  $4\%$ ,  $6\%$  y  $8\%$ . Azul:  $\phi = \phi_c = 31^\circ$ . Colorado:  $\phi = 41^\circ$ .

### 5.5.9 Simulación de un problema de valores de contorno complejo

En esta sección se presenta la simulación de un problema de valores de contorno complejo, típico de la ingeniería geotécnica práctica. Sólo se informan algunas salidas gráficas representativas, porque el único objeto de esta sección es mostrar la robustez de la implementación numérica modelo y su capacidad para resolver problemas prácticos. Se simula la construcción de una excavación cercana a un túnel existente. Los parámetros materiales son los de la arena de la Formación Puelchense. La relación de vacíos de todo el depósito es  $e_0 = 0.75$ . Se asumió un estado tensional inicial con  $\sigma_3 = \sigma_1/2$  y  $\sigma_1 = \gamma z$ , donde  $\gamma$  es el peso unitario del material y  $z$  es la profundidad de cada punto. Las etapas del proyecto que se simula son:

1. Construcción del túnel
  - (a) Se excava el terreno y se permite una relajación parcial del estado tensional

- (b) Se coloca el revestimiento del túnel

## 2. Ejecución de la excavación

- (a) Colocación de la tablestaca
- (b) Primera etapa de excavación
- (c) Colocación de un puntal
- (d) Segunda etapa de excavación

En la figura 5-30 se muestra la malla y las etapas del modelo. En la figura 5-31 se muestra la trayectoria de tensiones principales, el diagrama de empujes sobre la tablestaca, el diagrama de empujes pasivos del lado excavación, los desplazamientos de la tablestaca y su diagrama de momentos flexores. También se muestran los desplazamientos del túnel, su diagrama de esfuerzos normales y su diagrama de momentos flexores. Como el gráfico se presenta con fines ilustrativos, no se indican los valores máximos de las diferentes variables.

En la figura 5-32 se muestra el contorno de deformaciones. Puede observarse que la deformación máxima es del orden de  $\|\epsilon\| = 2.5\%$  y ocurre únicamente en el pie de la excavación, mientras que más del 80% de la malla tiene deformaciones menores a 0.5%. Este resultado, típico de los problemas rutinarios de geotecnia, explica porqué es importante mejorar los modelos constitutivos disponibles para predecir el comportamiento en el rango de baja deformación.

Por último, en la figura 5-33 se muestra el contorno de  $\zeta$ . Puede observarse que el pie de la excavación y el coronamiento alcanzaron localmente la falla. También se aprecia que algunos puntos en la superficie tienen  $\zeta = 1$ . Esto se debe a que, durante la construcción del túnel, esos puntos tuvieron un incremento de tensiones de compresión horizontal. Como está en la superficie, el material tiene rigidez y resistencia prácticamente nulas.

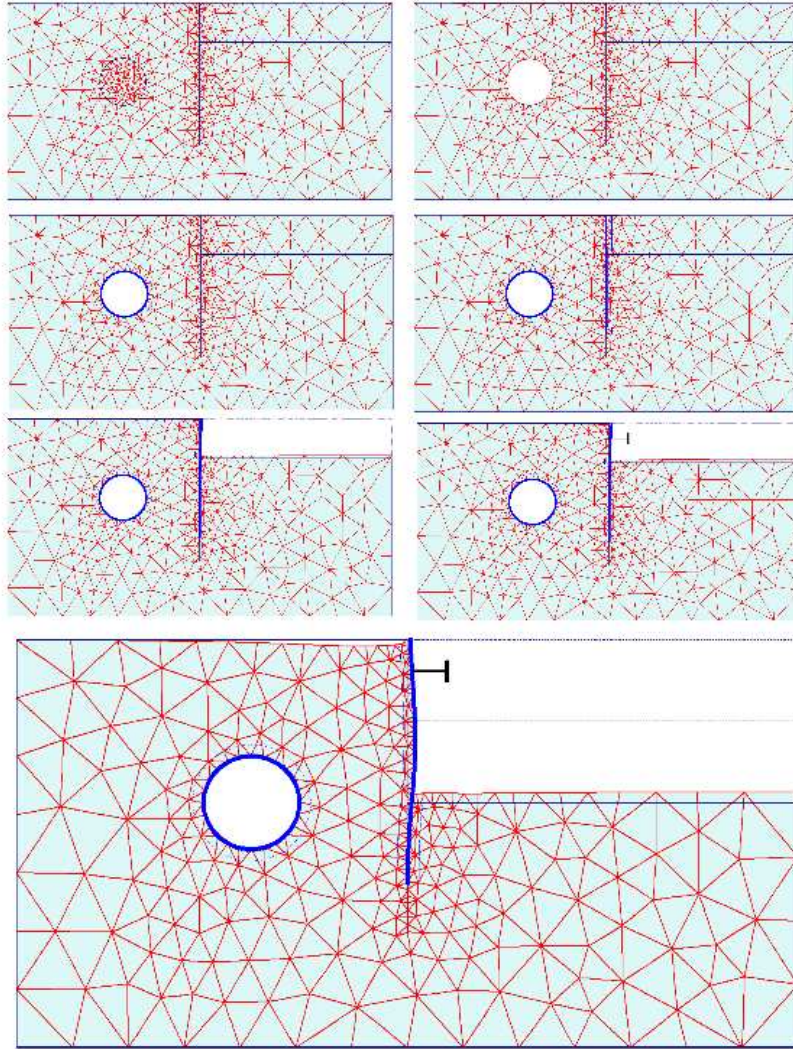


Figura 5-30: Malla de elementos finitos y etapas de construcción. Las mallas están deformadas con un factor de amplificación 50.



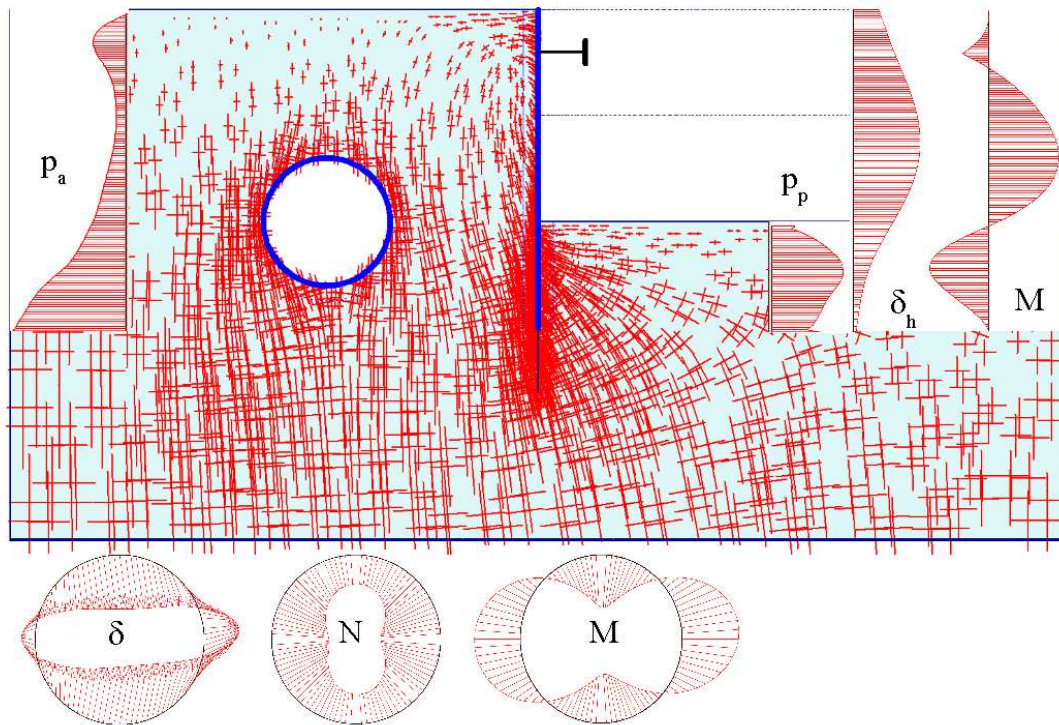


Figura 5-31: Estado final del modelo. Se muestran la trayectoria de tensiones, los empujes del terreno lado tierra y lado excavación, los desplazamientos de la tablestaca, sus momentos flexores y los desplazamientos, esfuerzos normales y momentos flexores del túnel.

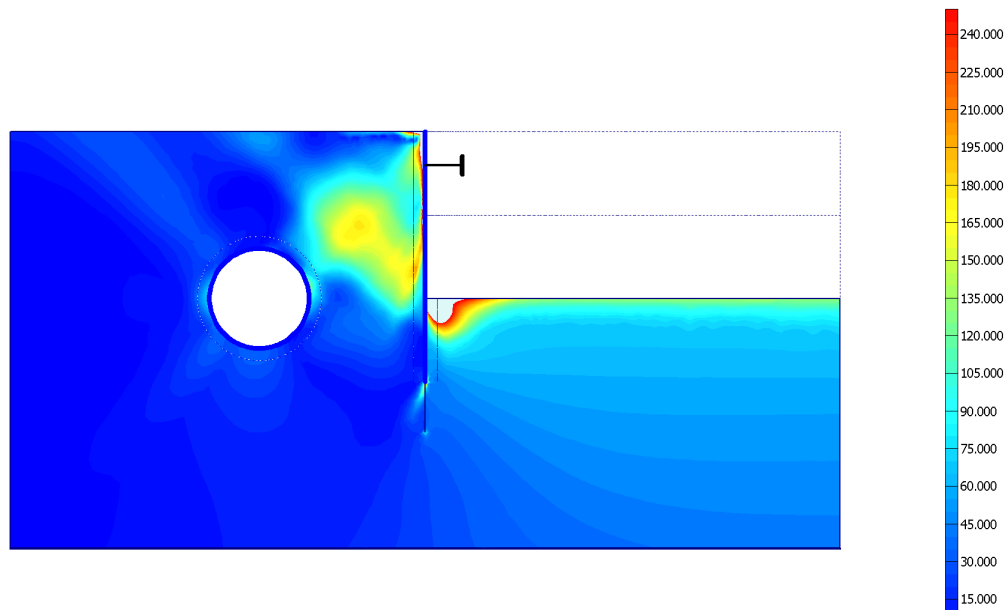


Figura 5-32: Contorno de deformaciones  $\|\epsilon\|$ . La deformación máxima es  $\|\epsilon\| = 2.5\%$ . La escala está multiplicada por  $10^5$ .

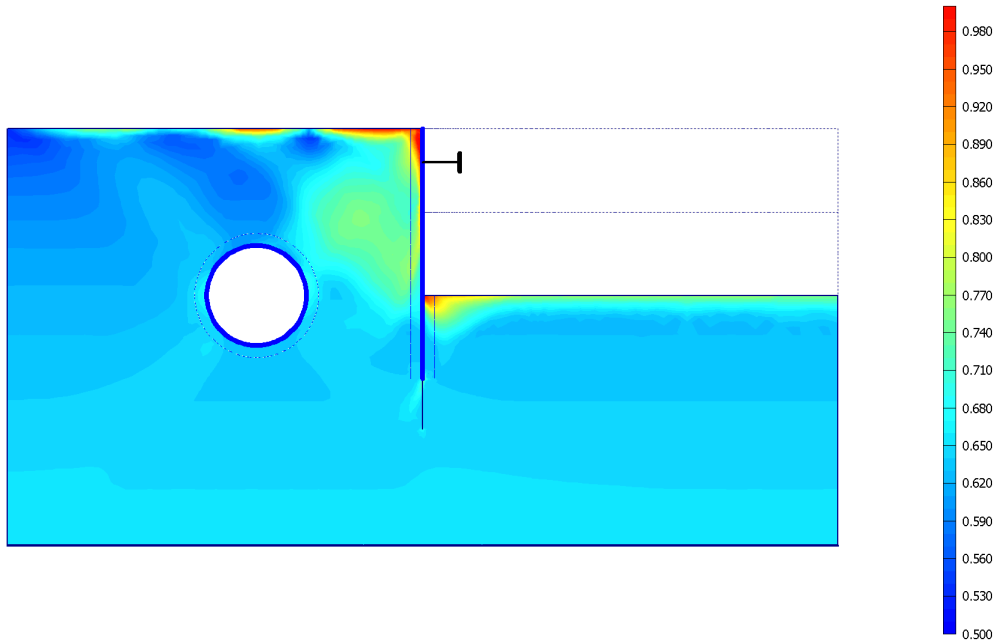


Figura 5-33: Movilización de la resistencia al corte  $\zeta$  para el fin de construcción.

# Capítulo 6

## Consideraciones finales y oportunidades de investigación futura

### 6.1 Resumen del comportamiento de las arenas

El comportamiento macroscópico de las arenas es la resultante de la interacción entre granos aislados que, sometidos a cargas, rotan, se desplazan y se rompen. El estudio de este comportamiento con las herramientas de la mecánica del continuo es, por lo tanto, necesariamente complejo y de alcance limitado.

Hay algunos aspectos básicos del comportamiento de las arenas que están bien establecidos, mientras que otros son aún objeto de investigación. Entre los primeros están:

1. Las arenas sometidas a procesos de deformación por corte continuada alcanzan un estado terminal, denominado estado crítico, que es independiente del estado inicial del material, y que sólo depende de la presión media que actúa en el estado crítico.
2. En el estado crítico, tanto la relación de vacíos como el tensor de tensiones alcanzan

valores estacionarios.

3. Existe una interrelación bien establecida entre la resistencia máxima y la tendencia del material a cambiar de volumen.
4. Las arenas son materiales disipativos - sin dominio elástico - para cualquier escala de deformación.
5. La resistencia al corte depende de la tensión y la densidad.
6. La rigidez instantánea depende de la tensión, la densidad, y de la trayectoria de carga.

Muchos otros aspectos del comportamiento de las arenas son objeto de investigación actual. Entre los que se requieren para desarrollar nuevos modelos constitutivos para arenas están:

1. El desarrollo de técnicas de medición experimental de nuevas variables de estado que caractericen la topología del material y su evolución. El número de coordinación, los cambios de granulometría, los cambios de esfericidad y redondez de las partículas y la densidad direccional de contactos son candidatos posibles, para los que hay desarrollos continuos en sus técnicas de medición.
2. La comprensión de la interrelación entre esas variables de estado y los efectos de memoria que el material exhibe cuando se lo somete a trayectorias complejas de carga. La simulación de estos mecanismos se hace hoy con modelos que tienen un número de variables internas que no pueden medirse experimentalmente.
3. La caracterización de los efectos de velocidad de carga sobre la respuesta del material.

## 6.2 Resumen de los modelos constitutivos para arenas

Existen varias familias de modelos constitutivos para arenas, desde el más simple - el modelo de elasticidad lineal y plasticidad de Mohr-Coulomb - hasta modelos muy complejos que tienen múltiples superficies de fluencia móviles, ecuaciones de evolución generalizadas y numerosas variables de estado tensoriales.

La industria resuelve la enorme mayoría de sus problemas con el modelo de Mohr-Coulomb, aún a sabiendas de que tiene baja capacidad predictiva. Los problemas que no se resuelven con el modelo de Mohr-Coulomb se resuelven con el modelo hiperbólico o modelos similares, que tienen mejor capacidad predictiva pero que, como el primero, no reproducen el comportamiento del material ni aún en los aspectos que están mejor comprendidos y universalmente aceptados. En particular, en estos modelos:

1. El ángulo de fricción interna es un parámetro material, no una función de estado. Por lo tanto, es constante a lo largo del proceso de deformación, aunque cambie la presión y la relación de vacíos.
2. El ángulo de fricción interna crítico no es un parámetro de material. Por lo tanto, los modelos no simulan la evolución desde el estado inicial al estado crítico.

Por estas y otras razones, estos modelos arrastran una limitación severa que es común en geotecnia aplicada pero que es poco comprensible para analistas ajenos a este campo: Los parámetros de entrada dependen del problema que se estudia.

En el otro extremo están los modelos constitutivos para arenas que ofrece la academia. Todos los modelos simulan el comportamiento básico del material, y muchos tienen notable capacidad predictiva aún para trayectorias muy complejas de carga. Sin embargo, muy pocos están implementados en códigos disponibles para su empleo en la industria, hasta el punto que casi no se reportan aplicaciones de modelos constitutivos avanzados para construcciones reales.

## 6.3 Características del modelo constitutivo desarrollado en esta tesis

El modelo constitutivo desarrollado en esta tesis es una contribución que llena parcialmente el espacio que hay entre lo que produce la academia y lo que emplea la industria. Está orientado al análisis de problemas de ingeniería geotécnica en los que el material está sometido a procesos de carga por corte dominante, desde las vibraciones producidas por fundaciones y hasta el análisis de procesos de falla. Los procesos que pueden ser simulados son los mismos que se simulan con los modelos de Mohr-Coulomb e hiperbólico y constituyen, por lejos, el grupo de problemas que se presenta con más frecuencia en la geotecnia práctica.

Las principales cualidades de este modelo constitutivo son:

### 1. Formulación

- (a) Tiene siete parámetros de entrada, independientes del problema que se estudia y determinables mediante ensayos triaxiales convencionales. Los parámetros no superponen su efecto sobre la respuesta del modelo para los ensayos de calibración.
- (b) Tiene tres variables de estado: la tensión, la relación de vacíos para tensión cero y la movilización de resistencia al corte, que pueden ser determinadas con mediciones convencionales de laboratorio. Como lo requiere la teoría de estado crítico, las variables de estado alcanzan un valor estacionario para el estado crítico.
- (c) El ángulo de fricción interna crítico es un parámetro de entrada (queda fijo durante el proceso de deformación).
- (d) El ángulo de fricción interna máximo es una función de estado; varía durante el proceso de deformación y alcanza el valor crítico para deformaciones suficientemente grandes.

- (e) El ángulo de fricción interna máximo controla la evolución de una superficie de fluencia de tres invariantes que reproduce la resistencia al corte para cualquier presión, densidad y trayectoria de carga, tanto drenada como no drenada.
- (f) El ángulo de fricción interna a volumen constante controla el término de dilatancia que se calcula con la teoría de tensión-dilatancia de Rowe en su forma más general.
- (g) La formulación hiperelástica reproduce la rigidez máxima del material, lo que permite la simulación de procesos de baja deformación, como propagación de ondas y análisis de vibraciones elásticas. El módulo de rigidez al corte elástico utilizado tiene procedimientos normalizados de medición, tanto en campo como en laboratorio.
- (h) El modelo reproduce la degradación de la rigidez aparente con la deformación desde la rigidez elástica hasta la falla y luego hasta el estado crítico.

## 2. Respecto de la implementación

- (a) Está completamente implementado en un programa de elementos finitos general y probado para los problemas rutinarios de geotecnia.
- (b) Tiene un algoritmo encestado consistente que resuelve una incógnita escalar por vez.
- (c) La implementación es suficientemente robusta como para permitir el estudio de problemas en los que ocurre falla localizada y otros en los que el material alcanza el estado  $\sigma = \mathbf{0}$  kPa.
- (d) El algoritmo entrega una respuesta para cualquier juego de parámetros de entrada y variables de estado y cualquier incremento de deformación.

## 6.4 Caminos de investigación futura

El modelo constitutivo presentado en esta tesis resuelve satisfactoriamente los problemas para los que fue diseñado. Como todos los modelos que producen curvas tensión-deformación con ablandamiento, requiere técnicas de regularización de deformaciones localizadas. La implementación de una de estas técnicas es el primer paso en la evolución de este trabajo. El segundo es la implementación del modelo en otros códigos generales de elementos finitos.

Este modelo no resuelve los siguientes problemas:

1. Carga cíclica en régimen irreversible, como la que ocurre en los depósitos de arenas sometidos a terremotos.
2. Compresión plástica para alta presión, como la que ocurre en la punta de pilotes cargados hasta la falla y en los niveles inferiores de las presas de materiales sueltos altas.

Sfriso [137] presentó un modelo para corte y compresión plástica que comparte elementos con este trabajo. Sfriso [136] también presentó un modelo constitutivo orientado a la simulación de los procesos de carga cíclica, basado en plasticidad generalizada. Estos modelos no son compatibles entre sí, porque emplean diferentes variables de estado.

Por lo tanto, la unificación de los elementos presentados en [136] y [137] para el desarrollo e implementación de un modelo para compresión plástica y carga cíclica son el tercer paso en el camino de investigación futura en el campo de la modelización constitutiva para geomateriales.

## 6.5 Addenda 28/10/2010

El jurado de esta tesis solicitó que se ampliaran las conclusiones, incorporando un breve resumen de los aportes salientes de este trabajo de tesis. A juicio de su autor, los aportes



originales del trabajo son:

1. La selección de variables de estado de evolución desacoplada:  $\varsigma$  caracteriza el régimen pre-pico mientras que  $e_0$  caracteriza el régimen post-pico. Otros modelos constitutivos emplean variables de estado con inconsistencias teóricas como  $\phi_{mob}$  u otras que acoplan elasticidad y plasticidad como  $e$ . Este aporte es importante porque permite calibrar el modelo de manera más independiente del operador.
2. Una fórmula para el ángulo de fricción interna que mejora y supera la expresión de Bolton. La fórmula presentada en esta tesis permite la predicción simultánea del ángulo de fricción interna máximo y de la relación de vacíos crítica, lo que implica que se puede estimar la resistencia no drenada de arenas a partir de los resultados de ensayos drenados.
3. La implementación exacta de la teoría tensión-dilatancia de Rowe para un estado general de tensiones.
4. Una integración numérica de un paso, totalmente implícita, que admite incrementos de deformación arbitrarios para cualquier estado convergido, sin subincrementación. La consecuencia práctica de este aporte es que el modelo puede usarse para resolver cualquier problema industrial, y que por lo tanto es comparable - en robustez y capacidades - a cualquiera de los modelos constitutivos incorporados por el desarrollador del programa computacional empleado.

En resumen, este trabajo aporta un modelo constitutivo simple, robusto y operativo, que permite simular el comportamiento de las arenas de manera más precisa que los otros modelos industriales disponibles a la fecha de publicación de esta tesis.

# Capítulo 7

## Apéndice: Algebra Tensorial

Se presentan los elementos básicos de álgebra tensorial que se emplearon en las deducciones de fórmulas y en la implementación del modelo constitutivo. Una parte importante de las definiciones y fórmulas fueron obtenidas o derivadas de [42].

### 7.A Tensores unitarios

El tensor unitario de segundo orden se define como

$$\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad \delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (7.1)$$

El tensor unitario de cuarto orden simétrico se define como

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \quad (7.2)$$

y puede separarse en sus proyecciones esféricas y deviatorías  $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{esf} + \mathbf{I}^{dev}$  donde

$$\mathbf{I}^{esf} = \frac{1}{3} \mathbf{1}\mathbf{1} \quad \mathbf{I}^{dev} = \mathbf{I} - \mathbf{I}^{esf} \quad (7.3)$$

## 7.B Invariantes de tensores de segundo orden

Para un tensor simétrico de segundo orden se definen los invariantes

$$I_1 = \mathbf{T} : \mathbf{1} = T_{ii} \quad (7.4)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \mathbf{T} : \mathbf{T}) \quad (7.5)$$

$$I_3 = \frac{1}{6} (2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) : \mathbf{T} - 3I_1(\mathbf{T} : \mathbf{T}) + I_1^3) = \det[\mathbf{T}] \quad (7.6)$$

$$J_1 = \text{tr}(\mathbf{T}^d) = 0 \quad (7.7)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{T}^d : \mathbf{T}^d \quad (7.8)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (\mathbf{T}^d \cdot \mathbf{T}^d) : \mathbf{T}^d \quad (7.9)$$

Estos invariantes están relacionados mediante

$$J_2 = \frac{1}{3} (I_1^2 - 3I_2) \quad (7.10)$$

$$J_3 = \frac{1}{27} (2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3) \quad (7.11)$$

$$I_2 = \frac{1}{3} (I_1^2 - 3J_2) \quad (7.12)$$

$$I_3 = \frac{1}{27} (I_1^3 - 9I_1J_2 + 27J_3) \quad (7.13)$$

Otras operaciones frecuentes entre invariantes son

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^d \cdot \mathbf{T}^d + \frac{I_1^2}{9} \mathbf{1} + \frac{2}{3} I_1 \mathbf{T}^d \quad (7.14)$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) : \mathbf{1} = \mathbf{T} : \mathbf{T} \quad (7.15)$$

$$\mathbf{T} : \mathbf{T} = I_1^2 - 2I_2 = \frac{1}{3}I_1^2 + 2J_2 \quad (7.16)$$

## 7.C Derivadas de invariantes

Las siguientes son las derivadas primeras de los principales invariantes de tensores simétricos de segundo orden

$$I_{1,\mathbf{T}} = \mathbf{1} \quad (7.17)$$

$$I_{2,\mathbf{T}} = I_1\mathbf{1} - \mathbf{T} \quad (7.18)$$

$$I_{3,\mathbf{T}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + I_2\mathbf{1} - I_1\mathbf{T} \quad (7.19)$$

$$J_{2,\mathbf{T}} = \mathbf{T}^d \quad (7.20)$$

$$J_{2,\mathbf{T}^d} = \mathbf{T}^d \quad (7.21)$$

$$J_{3,\mathbf{T}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \left( \frac{I_1^2}{9} - \frac{2}{3}J_2 \right) \mathbf{1} - \frac{2}{3}I_1\mathbf{T} = \mathbf{T}^d \cdot \mathbf{T}^d - \frac{2}{3}J_2\mathbf{1} \quad (7.22)$$

$$J_{3,\mathbf{T}^d} = \mathbf{T}^d \cdot \mathbf{T}^d - \frac{2}{3}J_2\mathbf{1} = \mathbf{T}^d \cdot \mathbf{T}^d - \frac{1}{3}(\mathbf{T}^d : \mathbf{T}^d) \mathbf{1} \quad (7.23)$$

Otras derivadas de interés son

$$(\mathbf{T} : \mathbf{T})_{,\mathbf{T}} = 2\mathbf{T} \quad (7.24)$$

$$\mathbf{T}_{,\mathbf{T}}^d = \mathbf{I}^{dev} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T})_{,\mathbf{T}} &= \frac{\partial (t_{im}t_{mj})}{\partial t_{kl}} = (\delta_{ik}t_{lj} + \delta_{jl}t_{ik}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = (\delta_{ik}s_{lj} + \delta_{jl}s_{ik}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l + 2p\mathbf{I} \\
&= \begin{matrix} 2t_1 & 0 & 0 & 2t_4 & 0 & 2t_6 & 2s_1 & 0 & 0 & 2s_4 & 0 & 2s_6 \\ 0 & 2t_2 & 0 & 2t_4 & 2t_5 & 0 & 0 & 2s_2 & 0 & 2s_4 & 2s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 2t_3 & 0 & 2t_5 & 2t_6 & 0 & 0 & 2s_3 & 0 & 2s_5 & 2s_6 \\ t_4 & t_4 & 0 & t_1 + t_2 & t_6 & t_5 & s_4 & s_4 & 0 & -s_3 & s_6 & s_5 \\ 0 & t_5 & t_5 & t_6 & t_2 + t_3 & t_4 & 0 & s_5 & s_5 & s_6 & -s_1 & s_4 \\ t_6 & 0 & t_6 & t_5 & t_4 & t_1 + t_3 & s_6 & 0 & s_6 & s_5 & s_4 & -s_2 \end{matrix} + 2p\mathbf{I}
\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{T}\|_{,\mathbf{T}} = \frac{\partial \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{\sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}}} = \widehat{\mathbf{T}} \quad (7.26)$$

$$\left( \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} \right)_{,\mathbf{T}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{T}} \|\mathbf{T}\| - \mathbf{T} \frac{\partial \|\mathbf{T}\|}{\partial \mathbf{T}}}{\|\mathbf{T}\|^2} = \frac{\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}\widehat{\mathbf{T}}}{\|\mathbf{T}\|} \quad (7.27)$$

$$\|\mathbf{A}\|_{,\mathbf{T}} = \frac{\partial \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\mathbf{A} : \mathbf{A}_{,\mathbf{T}}}{\|\mathbf{A}\|} \quad (7.28)$$

$$\left( \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} \right)_{,\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{A}_{,\mathbf{T}}}{\|\mathbf{A}\|} - \left( \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} \right) : \frac{\mathbf{A}_{,\mathbf{T}}}{\|\mathbf{A}\|} \quad (7.29)$$

## 7.D Medidas de tensión y deformación

Existen diferentes medidas del estado de tensiones y deformaciones que se emplean corrientemente en modelos para geotecnia. Algunas son

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{s}}{p} \quad r = \sqrt{\mathbf{r} : \mathbf{r}} \quad (7.30)$$

$$q = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}\| \quad (7.31)$$

$$\gamma_{oct}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_d^p\| \quad (7.32)$$

Para el estado triaxial de compresión ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ), valen

$$N = \sigma_1/\sigma_3 \quad K = \sigma_3/\sigma_1 \quad q = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (7.33)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3p}{N+2} \{N, 1, 1\} = \frac{3p}{1+2K} \{1, K, K\} \quad (7.34)$$

$$\tau = \|\mathbf{s}\| = \sqrt{6} \frac{N-1}{N+2} p \quad (7.35)$$

$$\mathbf{r} = \frac{1-K}{1+2K} \{2, -1, -1\} \quad r = \sqrt{6} \frac{1-K}{1+2K} \quad (7.36)$$

$$J_{3r} = 2 \left( \frac{1-K}{1+2K} \right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{6}} r^3 \quad (7.37)$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \{4, 1, 1\} \left( \frac{1-K}{1+2K} \right)^2 \quad (7.38)$$

## 7.E Derivadas de las medidas de tensión

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma})_{,\sigma} = (\delta_{ik} s_{lj} + \delta_{jl} s_{ik}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l + 2p \mathbf{I} \quad (7.39)$$

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})_{,\sigma} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma})_{,\sigma} - \frac{2}{3} \mathbf{s} \mathbf{1} - 2p \mathbf{I} = (\delta_{ik} s_{lj} + \delta_{jl} s_{ik}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l - \frac{2}{3} \mathbf{s} \mathbf{1} \quad (7.40)$$

$$\tau_{,\sigma} = (\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}})_{,\sigma} = \frac{\mathbf{s}}{\tau} \quad (7.41)$$

$$r_{,\sigma} = \frac{\partial(\tau/p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{p} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{r}{3} \mathbf{1} \right) \quad (7.42)$$

$$\mathbf{r}_{,\sigma} = \frac{\partial(\mathbf{s}/p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{p} \left( \mathbf{I}^{dev} - \frac{1}{3} \mathbf{r} \mathbf{1} \right) \quad (7.43)$$

$$J_{3r,\sigma} = \frac{\partial(J_3/p^3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{p} \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \frac{r^2}{3} \mathbf{I} - J_{3r} \mathbf{1} \right) \quad (7.44)$$

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})_{,\sigma} = \left( \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}{p^2} \right)_{,\sigma} = \frac{1}{p} \left( (\delta_{ik} r_{lj} + \delta_{jl} r_{ik}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l - \frac{2}{3} \mathbf{r} \mathbf{1} - \frac{2}{3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \mathbf{1} \right) \quad (7.45)$$

# Referencias

- [1] Ahadi A, Krenk S (2003) Implicit integration of plasticity models for granular materials. *Comp Meth Apl Mech Engrg* 192:3471-3488
- [2] Arulmoni K et al (1992) VELACS Laboratory testing program. ETP 90-0562
- [3] Bauer E (1996) Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. *Soil Found* 36(1):13-26
- [4] Been K, Jefferies G (1985) A state parameter for sands. *Geotechnique* 35(2):99-112
- [5] Been K, Jefferies G, Hachey J (1991) The critical state of sands. *Geotechnique* 41(3):365-381
- [6] Benz T, Vermeer A, Schwab R (2008) A small-strain overlay model. *Int J Numer Anal Meth Geomech* doi 10.1002/nag.701
- [7] Bishop A, Webb D, Skinner A (1965) Triaxial tests on soil at elevated cell pressures. VI ICSMFE Montreal, 1:170-174
- [8] Bishop A (1954) Correspondence on shear characteristics of a saturated silt, measured in triaxial compression. *Geotechnique* 36(1):43-45
- [9] Bissio J, Tejada C (2006) Caracoles, análisis dinámico de la presa. IV CAP, Posadas (Argentina), 57-74
- [10] Bolognesi A (1989) Materiales granulares en condición no drenada. X CAMSIF (1):1-31

- [11] Bolton M (1986) The strength and dilatancy of sands. *Geotechnique* 36(1):65-78
- [12] Bolton M (1987) The strength and dilatancy of sands: Discussion. *Geotechnique* 37(2):219-226
- [13] Borja R, Lee S (1990). Cam-Clay plasticity I: Implicit integration of elastoplastic constitutive relations. *Comp meth appl mech eng* 78:49-72
- [14] Borja R, Lee S (1991) Cam-Clay plasticity II: Implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor. *Comp meth appl mech eng* 88:225-240
- [15] Borja R, Lin C, Montans F (2001) Cam-Clay plasticity IV: Implicit integration of anisotropic bounding surface model with nonlinear hyperelasticity and ellipsoidal loading function". *Comp meth appl mech eng* 190:3293-3323
- [16] Borja R, Sama K, Sanz P (2003) On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models. *Comp meth appl mech eng* 192:1227-1258
- [17] Briaud J, Gibbens R (1995) Predicted and measured behavior of five spread footings on sand. *ASCE Geot Sp Publ* 41
- [18] Brinkgreve R (2002) *Plaxis users manual*. Balkema, Rotterdam
- [19] Casagrande A (1936) Characteristics of cohesionless soils affecting the stability of slopes and earth fills. *J. Boston Soc Civil Eng* 23(1):13-32
- [20] Casagrande A (1975) Liquefaction and cyclic deformation of sands - a critical review. *V PCSMFE*, Buenos Aires, 1-25
- [21] Castro G (1975) Liquefaction and cyclic mobility of saturated sands. *ASCE J Geot Eng* 101(GT6):551-569
- [22] Castro G, Poulos S (1977) Factors affecting liquefaction and cyclic mobility. *ASCE J Geot Eng* 103(GT6):501-516



- [23] Collins I, Muhunthan B (2003) On the relationship between stress-dilatancy, anisotropy, and plastic dissipation for granular materials. *Geotechnique* 53(7):611-618
- [24] Cooke J (1984) Progress in rockfill dams. *ASCE J Geot Eng* 110(10):1381-1414
- [25] Cooke J, Sherard J (1987) Concrete-face rockfill dam: II. Design. *ASCE J Geot Eng*, 113(10):1113-1132
- [26] Cooke J (1997) The concrete face rockfill dam. 17 USCOLD San Diego (USA), 117-132
- [27] Cornforth D (1964) Some experiments on the influence of strain conditions on the strength of sand. *Geotechnique* 14(2):143-167
- [28] Cubrinovski M, Ishihara K (1998) Modelling of sand behaviour based on state concept. *Soils Found* 38(3):115-127
- [29] Cubrinovski M, Ishihara K (1998) State concept and modified elastoplasticity for sand modelling. *Soils Found* 38(4):213-225
- [30] Cundall P (2000) *FLAC 4.0 Users Manual*. Itasca Consulting Group, Minnesota
- [31] Dafalias Y, Popov E (1975) A model of nonlinearly hardening materials for complex loadings. *Acta Mech* 21:173-192
- [32] Dafalias Y, Manzari M (2004) Simple Plasticity Sand Model Accounting for Fabric Change Effects. *J Eng Mech* 130(6):622-634
- [33] Dakoulas P, Yu S (1995) Stress dependency of elastic moduli for cross-anisotropic soils. *Geotechnique* 45(2):325-332
- [34] Davoudzadeh F (1982) Response of sand to three independently controlled principal stresses. Ph.D. Thesis U College, London

- [35] De Beer E (1965) Influence of the mean normal stress on the shearing resistance of sand. VI ICSMFE Montreal, 1:165-169
- [36] De Borst R (1986) Nonlinear analysis of frictional materials. Ph. D. Thesis, TU Delt
- [37] De Borst R, Groen A (2000) Computational strategies for standard soil plasticity models. En: Modeling in Geomechanics, Wiley
- [38] De Josseling de Jong G (1976) Rowe's stress-dilatancy relation based on friction. Geotechnique 26(3):527-534
- [39] Dobry R et al (1982) Prediction of pore water pressure buildup and liquefaction of sands during earthquakes by the cyclic strain method. Build Sc 138, NBS, Washington
- [40] Duncan J, Chang C (1970) Nonlinear analysis of stress and strain in soils. ASCE J Soil Mech Found Div 96(SM5):1629-1653
- [41] Duncan J, Byrne P, Wong K, Mabry P (1980) Strength, stress-strain and bulk modulus parameters for finite element analyses of stresses and movements in soil masses. Report UCB/GT/80-01 Berkeley
- [42] Dvorkin E (1993) Notas de cursos de mecánica del continuo y elementos finitos. FCEFNUBA
- [43] Etse G, Willam K (1996) Integration algorithms for concrete plasticity. Eng Comp 13(8):38-65
- [44] Fukushima S, Tatsuoka F (1984) Strength and deformation characteristics of saturated sand at extremely low pressures. Soil Found 24(4):30-48
- [45] Gazetas G, Dakoulas P (1992) Seismic analysis and design of rockfill dams: State of the art. Soil Dyn Earthq Eng 11(1):27-61

- [46] Gudehus G (1996) A comprehensive constitutive equation for granular materials. *Soil Found*, 36, 1, 1-12
- [47] Guo P, Stolle D (2004) The extension of Rowe's stress-dilatancy model to general stress condition. *Soil Found* 44(4):1-10
- [48] Guo P, Wan R (2007) Rational approach to stress-dilatancy modelling using an explicit micromechanical formulation. In *Bifurcations, Instabilities, Degradation in Geomechanics*, Springer, doi 10.1007/978-3-540-49342-6\_10
- [49] Hardin B, Richart F (1963) Elastic wave velocities in granular soils. *ASCE J Soil Mech Found Div* 89(SM1):33-65
- [50] Hardin B, Drnevich V (1972) Shear modulus and damping in soils: Measurement and parameter effects. *ASCE J Soil Mech Found Div* 98(SM6):603-624
- [51] Hardin B (1985) Crushing of soil particles. *ASCE J Geot Eng* 111(10):1117-1192
- [52] Hardin B (1987) 1-D strain in normally consolidated cohesionless soils. *ASCE J Geot Eng* 113(12):1449-1467
- [53] Hashiguchi K (1995) On the linear relations of  $v\text{-ln } p$  and  $\ln v - \ln p$  for isotropic consolidation of soils. *Int J Num Anal Meth Geomech* 19:367-376
- [54] Heeres O (2001) Modern Strategies for the Numerical Modeling of the Cyclic and Transient Behavior of Soils. PhD Thesis, TU Delft.
- [55] Horne M (1965) The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles I, II. *Proc Roy Soc London A*(286):68-97
- [56] Horne M (1969) The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles III. *Proc Roy Soc London A*(310):21-34
- [57] Ishibashi I, Chen Y, Chen M (1991) Anisotropic behavior of ottawa sand in comparison with glass spheres. *Soil Found* 31(1):145-155

- [58] Ishihara K (1993) Liquefaction and flow failure during earthquakes, The 33rd Rankine Lecture. *Geotechnique* 43:349-415
- [59] Ishihara K (1996) *Soil behaviour in earthquake geotechnics*. Clarendon Press, Oxford
- [60] Jambu N (1963) Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests. *Proc Eur Conf Wiesbaden* I:19-25
- [61] Jefferies M (1993) Nor-Sand: a simple critical state model for sand. *Geotechnique* 43(1):91-103
- [62] Kim M, Lade P (1988) Single hardening constitutive model for frictional materials I. Plastic potential function. *Comp Geotech* 5(4):307-324
- [63] Kirkpatrick W (1957) The condition of failure for sands. *IV Int Conf Soil Mech Found Eng London* 1:172-178
- [64] Ko H, Scott R (1968) Deformation of sand at failure. *ASCE J Soil Mech Found Div* 94(SM4):883-898
- [65] Ko H, Scott R (1969) Deformation of sand in hydrostatic compression. *ASCE J Soil Mech Found Div* 97(SM3):137-156
- [66] Kokusho T (1980) Cyclic triaxial test of dynamic soil properties for wide strain range. *Soil Found*, 20:45-60
- [67] Kondner R, Zelasko J (1963) Void ratio effects on the hyperbolic stress-strain response of a sand. *Lab Shear Testing Soils ASTM*, 250-257
- [68] Kondner R (1963) Hyperbolic stress-strain response; cohesive soils. *ASCE J Soil Mech Found Div* 78(SM1):115-143
- [69] Kulhawi F, Mayne P (1990) *Manual on estimating soil properties for foundation design*. Report EL-6800/1493-6, EPRI

- [70] Lade P, Duncan J (1973) Cubical triaxial tests on cohesionless soils. ASCE J Soil Mech Found Div, 99(SM10):793-811
- [71] Lade P, Duncan M (1975) Elastoplastic stress strain theory for cohesionless soils. ASCE J Geot Eng Div 101(GT10):1037-1053
- [72] Lade P (1977) Elastoplastic stress strain theories for cohesionless soils with curved yield surfaces. Int J Solids Struct 13:1014-1035
- [73] Lade P(1978) Prediction of undrained behavior of sand. ASCE J Geot Eng Div 104(GT6):721-735
- [74] Lade P (1988) Double hardening constitutive model for soils: parameter determination and predictions for two sands. Proc. Cleveland Workshop Const Eq Granular Non-Cohesive Soils 367-382
- [75] Lade P, Kim M (1988) Single hardening constitutive model for frictional materials II. Yield criterion and plastic work contours. Computers and Geotechnics 6(1):13-30
- [76] Lade P, Kim M (1988) Single hardening constitutive model for frictional materials III. Comparison with experimental data. Computers and Geotechnics 6(1):31-48
- [77] Lambe W, Whitman R (1969) Soil Mechanics. Wiley, New York
- [78] Lee, K(1965) Triaxial compressive strength of saturated sands under seismic loading conditions. PhD Dissertation, Berkeley
- [79] Lee K, Seed H (1967) Drained strength characteristics of sands. ASCE J Soil Mech Found Div 93(SM6):117-141
- [80] Leps T (1970) Review of Shearing Strength of Rockfill. ASCE J Soil Mech Found Div 96(4):1159-1170

- [81] Lush A, Weber G, Anand L (1989) An implicit time-integration procedure for a set of internal variable constitutive equations for isotropic elasto-viscoplasticity. *Int J Plast* 5:521-549
- [82] Macari E (1989) Behavior of granular materials in a reduced gravity environment and under low effective stresses. PhD Thesis, U Colorado
- [83] Macari E, Weihe S, Arduino P (1997) Implicit integration of elastoplastic constitutive models for frictional materials with highly nonlinear hardening functions. *Mech coh frict mat* 2:1-29
- [84] Maeda K, Miura K (1999) Confining stress dependency of mechanical properties of sands. *Soil Found*, 39(1):53-67
- [85] Maeda K, Miura K (1999) Relative density dependency of mechanical properties of sands. *Soil Found*, 39(1):69-79
- [86] Makdisi F, Seed B (1978) Simplified procedure for estimating dam and embankment earthquakes induced deformation. *ASCE J Geot Eng* 104(7):849-867
- [87] Manzari M, Dafalias Y (1997) A two-surface critical plasticity model for sand. *Geotechnique* 47(2):255–272
- [88] Marsal, R (1967) Large scale testing of rockfill materials. *ASCE J Soil Mech Found Div*, 93, SM2, 27-43
- [89] Marsal R, Reséndiz Núñez D (1983) *Presas de tierra y enrocamiento*. Limusa, México
- [90] Matsuoka H, Nakai T (1974) Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. *Proc Japan Soc Civil Eng* 233:59-70
- [91] Matsuoka H, Nakai T (1985) Relationship among Tresca, Mises, Mohr-Coulomb and Matsuoka-Nakai failure criteria. *Soil Found*, 25(4):123-128

- [92] Mitchell J (1993) Fundamentals of soil behavior. 2° Ed, Wiley, New York
- [93] Miura N(1979) A consideration of the stress - strain relation of a sand under high pressures. Proc Japan Soc Civ Eng 282(2):127-130
- [94] Miura N, Murata H, Yasufuku N (1984) Stress - strain characteristics of sand in a particle crushing region. Soil Found, 24(1):77-89
- [95] Molenkamp F (1988) A simple model for isotropic non-linear elasticity of frictional materials. Int J Numer Anal Meth Geomech 12(5):467-475
- [96] Mohr O (1900) Welche umstände bedingen die elastizitätsgrenze und den bruch eines materials?. ZeitschrVereines deutschIngenieure, 44:1-12 citado en [151]
- [97] Mroz Z, Norris V, Zienkiewicz O (1981) An anisotropic critical state model for soils subjected to cyclic loading. Geotechnique, 31(4):451-469
- [98] Murata H, Miura N, Hyodo M, Yasufuku N (1989) Experimental study on yielding of sands. En: Mech Granular Mat, ISSMFE TC13, 173-178
- [99] Nakai T, Matsuoka H (1986) A generalized elastoplastic constitutive model for clay in three dimensional stresses. Soil Found, 26(3):91-98
- [100] Nakata Y, Hyodo M, Hyde A, Kato Y, Murata H (2001) Microscopic particle crushing of sand subjected to high pressure one dimensional compression. Soil Found, 41(1):69-82
- [101] Naylor D, Marahna Das Neves D, Mattar D, Veiga Pinto A (1986) Prediction of construction perfomance of Beliche Dam. Geotechnique 36(3):359-376
- [102] Newmark N (1965) Effects of earthquakes on dams and embankments. Geotechnique 15(2):139-160
- [103] Niemunis A, Cudny M (1998) On hyperelasticity for clays. Comp Geot 23:221-236

- [104] Núñez E (1995) Propiedades mecánicas de materiales granulares incoherentes. Acad Nac Cs Ex Fís Nat Bs As 46:71-89
- [105] Núñez E (2000) Investigación aplicada en la ingeniería geotécnica. Acad Nac Cs Ex Fís Nat Bs As 52:29-66
- [106] Núñez E (2007) Uncertainties and approximations in geotechnics. XIII PCSMGE, Margarita (Venezuela) 26-39
- [107] Núñez E (2007) Behavior of coarse alluvium slopes subjected to earthquakes. XIII PCSMGE, Margarita (Venezuela) 862-867
- [108] Okada N, Nemat-Nasser S (1994) Energy dissipation in inelastic flow of saturated cohesionless granular media. Geotechnique 44(1):1-19
- [109] Pestana J (1994) A unified constitutive model for clays and sands. DScThesis MIT
- [110] Pestana J, Whittle A (1995) Compression model for cohesionless soils. Geotechnique 45(4):611-631
- [111] Pestana J, Whittle A (1999) Formulation of a unified constitutive model for clays and sands. Int J Numer Anal Meth Geomech 23(1):1215-1243
- [112] Pestana J, Whittle A, Salvati L (2002) Evaluation of a constitutive model for clays and sands: Part I – sand behaviour. Int J Numer Anal Meth Geomech 26(2):1097-1121
- [113] Pietruszczak S, Mroz Z (2000) Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor. Comp Geot 26:105-112
- [114] Poorooshab H, Holubec I, Sherbourne A (1966) Yielding and flow of sand in triaxial compression. Can Geot J 3:179-190
- [115] Poulos S (1981) The steady state of deformation. ASCE J Geot Eng Div 107(5):553-562



- [116] Puzrin A, Tatsuoka F (1998) Elastic strain energy potential for uncemented granular materials. *Soil Found* 38(4):267-274
- [117] Reynolds O (1886) Experiments showing dilatancy properties of granular material. *Proc Royal Inst London*, 2:354-363, citado en [?]
- [118] Richart F, Hall J, Woods D (1970) *Vibrations of Soil Found. Int Series Theo Appl Mech*, Prentice-Hall
- [119] Roberts J, De Souza J (1958) The compressibility of sands. *Proc ASTM*, 58:1269-1277
- [120] Roscoe K, Schofield A, Wroth C (1958) On the yielding of soils. *Geotechnique* 8(1):22-53
- [121] Roscoe K, Schofield A, Thurairajah A (1963) Yielding of clays in state wetter than critical. *Geotechnique* 13(3):211-240
- [122] Roscoe K, Burland J (1968) On the generalized stress strain behaviour of wet clay. *Geotechnique* 18(4):535-608
- [123] Rowe P (1962) The stress dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proc Royal Soc London* 269:500-527
- [124] Rowe P, Barden L, Lee K (1964) Energy components during the triaxial cell and direct shear tests. *Geotechnique* 14(3):247-261
- [125] Rowe P (1971) Stress - strain relationships for particulate materials at equilibrium. *Spec Conf Performance Earth Earth Supported Struct* 3:327-359
- [126] Saboya F, Byrne P (1993) Parameters for stress and deformation analysis of rockfill dams. *Can Geotl J* 30:690-701
- [127] Santamarina J C, Cascante G (1996) Stress anisotropy and wave propagation – A micromechanical review. *Can Geot J* 33:770-782

- [128] Santamarina J, Klein K, Fam M (2001) Soils and Waves: Particulate Materials Behavior, Characterization and Process Monitoring. ISBN: 978-0-471-49058-6, Wiley
- [129] Schanz T, Vermeer P (1996) Angles of friction and dilatancy of sand. *Geotechnique* 46(1):145-151
- [130] Schanz T, Vermeer P, Bonnier P (1999) The hardening soil model: formulation and verification. *Proc Plaxis Symp Beyond 2000 Comp Geotech Balkema*, 55-58
- [131] Schofield A, Wroth C (1968) *Critical State Soil Mechanics*. McGraw-Hill, London
- [132] Schultze E, Moussa A (1961) Factors affecting the compressibility of sand, 5<sup>th</sup> Int Conf Soil Mech Found Eng, Paris, I:335-340
- [133] Seed H (1979) Considerations in the earthquake-resistant design of earth and rockfill dams. *Geotechnique* 29(3), 215-283
- [134] Seed H et al (1984) Moduli and damping factors for dynamic analyses of cohesionless soils. Report UCB/EERC-84/14, Berkeley
- [135] Sfriso A (1996) Una ecuación constitutiva para arenas. *Enc Geot Arg GT96 I:38-46*
- [136] Sfriso A (2006) Calibration of ARENA for Nevada sand based on VELACS project results. VII World Conf Comp Mech Los Angeles (CD-ROM)
- [137] Sfriso A (2007) A constitutive model for sands: Evaluation of predictive capability. XIII Conf Panam Mec Suelos Ing Geot, 242-247
- [138] Sfriso A (2008) Numerical assessment of the deformation of CFRD dams during earthquakes. XII Int Assoc Comp Meth Adv Geomech 4054:4061
- [139] Sfriso A (2009) The friction angle and dilatancy of sands. XVII ICSMGE, Alexandria, Egypt, 433-435

- [140] Sfriso A, Weber G (2010) Formulation and validation of a constitutive model for sands in monotonic shear. *Acta Geotechnica*, in press
- [141] Sherard J, Cooke J (1987) Concrete-face rockfill dam: I Assessment. *ASCE J Geot Eng* 113(10):1096-1112
- [142] Tatsuoka F, Shibuya S (1992) Deformation characteristics of soils and rocks from field and laboratory tests. *Inst Ind Sc U Tokio*, 37:1
- [143] Tatsuoka F, Siddiquee M, Park C, Sakamoto M, Abe F (1993) Modelling stress strain relations of sand. *Soil Found* 33(2):60-81
- [144] Taylor D (1948) *Fundamentals of soil mechanics*. Wiley, New York
- [145] Teachavorasinskum S, Shibuya S, Tatsuoka F (1991) Stiffness of sands in monotonic and cyclic loading in simple shear. *ASCE Geot Eng Congress Boulder* (1):7863-7878
- [146] Tobita Y, Yanagisawa E (1992) Modified stress tensors for anisotropic behavior of granular materials. *Soil Found* 32(1):85-99
- [147] Terzaghi K (1943) *Theoretical soil mechanics*. Wiley, New York
- [148] Terzaghi K, Peck R (1948) *Soil Mechanics in Engineering Practice*. Wiley, New York (1996), 3<sup>rd</sup> Ed
- [149] Trautmann C, Kulhawy F (1987) CUFAD - A Computer program for compression and uplift foundation analysis and design. Report EPRI EL-4540-CCM
- [150] Uddin N, Gazetas G (1995) Dynamic response of CFRD to strong seismic excitation. *ASCE J Geot Eng* 121(2):185-197
- [151] Vardoulakis I, Sulem J (1995) *Bifurcation analysis in geomechanics*. Blackie Academic & Professional, UK

- [152] Vardoulakis I (1996) Deformation of water-saturated sand: I. uniform undrained deformation and shear banding. *Geotechnique* 46(3):441-456
- [153] Vardoulakis I (1996) Deformation of water-saturated sand: II. effect of pore water flow and shear banding. *Geotechnique* 46(3):457-472
- [154] Verdugo R, Ishihara K (1996) The steady state of sandy soils. *Soil Found*, 36(2):81-91
- [155] Vermeer P (1978) A double hardening model for sand. *Geotechnique* 28(4):413-433
- [156] Vesic A, Clough G (1968) Behaviour of granular materials under high stresses. *ASCE J Soil Mech Found Div*, 94(SM3):661-688
- [157] Viggiani C, Hall S (2008) Full-field measurements, a new tool for laboratory experimental geomechanics. *IV Intl Symp Def Charac Geomat CH001:3-26*
- [158] Wan R, Guo P (1999) A pressure and density dependent dilatancy model for granular materials. *Soil Found* 39(6):1-11
- [159] Weber G, Anand L (1990) Finite deformation constitutive equations, and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic viscoplastic solids. *Comp Meth App Mech Eng* 79:173–202
- [160] Weber G, Lush A, Zavaliangos A, Anand L (1990) An objective time-integration procedure for isotropic rate-independent and rate-dependent elastic-plastic constitutive equations. *Int J Plast* 6:701–744
- [161] Wong R, Arthur J (1985) Induced and inherent anisotropy in sand. *Geotechnique*, 35(4):471-481
- [162] Woodward P, Molenkamp F (1999) Application of an advanced multi surface kinematic constitutive soil model. *Int J Numer Anal Meth Geomech* 23(15):1995-2043

- [163] Wroth C, Houlsby G (1985) Soil mechanics property characterization and analysis procedures. 11 Int Conf Soil Mech Found Eng, San Francisco, 1:1-55
- [164] Yamashita S, Jamiolkowski M, Lo Presti D (2000) Stiffness nonlinearity of three sands. J Geot Geoenv Eng ASCE 126(10):929-938
- [165] Yasuda N, Matsumoto N (1993) Dynamic deformation characteristics of sands and rockfill materials. Can Geot J 30:747-757
- [166] Yasuda N, Matsumoto N (1994) Comparison of deformation characteristics of rockfill materials using monotonic and cyclic loading laboratory tests and in situ tests. Can Geot J, 31:162-174
- [167] Yasufutu N, Murata H, Hyodo M, Hyde A (1991) A stress strain relationship for anisotropically consolidated sand over a wide stress region. Soil Found, 31(4):75-92
- [168] Yasufutu N, Murata H, Hyodo M (1991) Yield characteristics of anisotropically consolidated sand under low and high stresses. Soil Found, 31(1):95-109
- [169] Zlatovic S, Ishihara K (1997) Normalized behavior of very loose non plastic soils: effects of fabric. Soil Found 37(4):47-56