
ESTUDIO ANALÍTICO Y EXPERIMENTAL DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS PERIÓDICAS EN EL TERRENO

por

Mariano Balbi

Tesis para completar las exigencias del grado de

Ingeniería Civil

Universidad de Buenos Aires

2012

Director: Dr. Raúl Domingo Bertero

Aprobado por _____

Laboratorio de Dinámica de Estructuras

Laboratorio de Materiales y Estructuras

Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires

Mail: mariano.balbi@gmail.com

Te. de contacto: 011-15-4162-6117

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

ESTUDIO ANALÍTICO Y EXPERIMENTAL DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS PERIÓDICAS EN EL TERRENO

Abstract

Este trabajo presenta un marco analítico riguroso para el estudio de la propagación de ondas periódicas (en régimen permanente) en el terreno, y la modelación de acciones que las generan, como el salto coordinado de personas o el paso del tráfico vehicular y de trenes. En primera instancia, se encara de manera detallada el problema de la propagación de ondas superficiales en un medio semi-infinito, isótropo y homogéneo (problema de Lamb), obteniéndose una expresión analítica para considerar las ondas de Rayleigh. Se incorpora la disipación de energía interna en el material, mediante un modelo constitutivo viscoelástico, y se analiza su influencia en la propagación de ondas, mostrándose la flexibilidad y sencillez del modelo para contemplar distintos comportamientos mecánicos. La modelación de las cargas es encarada con un fuerte sustento en la teoría de procesos aleatorios, y se centra fundamentalmente en la representación espectral de las cargas. Se obtienen los espectros de excitación sobre el suelo del salto de personas en recitales, del tráfico vehicular, y del paso de trenes, estos últimos modelados como procesos aleatorios estacionarios. Se analizan, además, distintas mediciones hechas en campo, de los fenómenos representados en los modelos, para poder comparar y analizar los alcances del modelo teórico planteado. Los resultados muestran cómo se puede representar la propagación de ondas en el suelo, utilizando un modelo viscoelástico simple.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia y mis amigos por brindarme el apoyo a lo largo de toda mi carrera, y en especial en este último y agotador tramo.

A Raúl Bertero por permitirme realizar este trabajo, y ser parte del Laboratorio de Dinámica; por su apoyo y motivación académica.

A todos los integrantes del Laboratorio de Dinámica, y mis compañeros tesisistas, por estar siempre a disposición. Un agradecimiento especial a Juan Mussat que me brindó apoyo en todo momento, y por su asistencia indispensable a la hora de realizar las mediciones y utilizar los equipos.

Al sistema de educación pública de Argentina.

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN	1
1 EL PROBLEMA DE LAMB.....	3
1.1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DE LA ELASTODINÁMICA.....	4
1.2 PLANTEO DEL PROBLEMA	7
1.2.1 TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES Y FUNCIONES.....	8
1.2.2 EVALUACIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE	9
1.2.3 EXPRESIONES ANALÍTICAS DE LOS DESPLAZAMIENTOS.....	11
1.3 EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES IMPROPIAS	12
1.3.1 EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL U	13
1.3.2 EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL W	18
1.4 EXPRESIONES FINALES PARA LOS DESPLAZAMIENTOS.....	23
1.4.1 DESPLAZAMIENTOS RADIALES U_R	23
1.4.2 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES W	24
1.5 CARACTERÍSTICAS DE LAS ONDAS DE RAYLEIGH.....	26
1.5.1 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA.....	27
1.5.2 ATENUACIÓN DE LAS ONDAS.....	29
2 EL EFECTO VISCOELÁSTICO EN EL PROBLEMA DE LAMB.....	31
2.1 INTRODUCCIÓN A LA VISCOELASTICIDAD LINEAL	31
2.1.1 VISCOELASTICIDAD UNIDIMENSIONAL.....	31
2.1.2 VISCOELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL.....	33
2.2 MODELOS MECÁNICOS SIMPLES	34
2.3 PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS DE RAYLEIGH	35
2.3.1 SOLUCIÓN APROXIMADA PARA LA INTEGRAL U	37
2.3.2 SOLUCIÓN APROXIMADA PARA LA INTEGRAL W	38
2.3.3 EXPRESIONES PARA LOS DESPLAZAMIENTOS.....	40
2.4 CARACTERÍSTICAS DE LAS ONDAS.....	40
2.4.1 MODELO MECÁNICO DE MAXWELL.....	42
2.4.2 MODELO MECÁNICO DE VOIGT.....	42
2.4.3 MODELO MECÁNICO DE VOIGT CON HYSTERETIC DAMPING.....	43
3 COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SUELO	45
3.1 PARÁMETROS ELÁSTICOS.....	45
3.2 PARÁMETROS VISCOSOS	47
4 MODELIZACIÓN DE ACCIONES Y RESPUESTA DEL SUELO	49
4.1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE PROCESOS ALEATORIOS	49
4.1.1 PROCESOS GAUSSLANOS Y ESTACIONARIOS	51
4.2 ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROCESOS	53
4.2.1 PROCESOS DETERMINÍSTICOS PERIÓDICOS	54
4.2.2 PROCESOS DETERMINÍSTICOS APERIÓDICOS	55
4.2.3 PROCESOS ALEATORIOS ESTACIONARIOS.....	56

4.3	ANÁLISIS ESPECTRAL DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA MECÁNICO	57
4.3.1	PROCESOS DETERMINÍSTICOS PERIÓDICOS	58
4.3.2	PROCESOS DETERMINÍSTICOS APERIÓDICOS	59
4.3.3	PROCESOS ALEATORIOS ESTACIONARIOS.....	59
4.3.4	MÚLTIPLES PROCESOS	61
4.4	MODELIZACIÓN DEL SALTO COORDINADO DE PERSONAS	64
4.4.1	ESPECTRO DE LA CARGA.....	66
4.4.2	ESPECTRO DE LAS VIBRACIONES EN EL TERRENO.....	67
4.5	MODELIZACIÓN DE LA ACCIÓN DE VEHÍCULOS SOBRE RIELES.....	67
4.5.1	GENERALIDADES DEL MODELO	68
4.5.2	IRREGULARIDADES EN LA TRASLACIÓN DEL TREN.....	69
4.5.3	MODELO MECÁNICO DEL TREN.....	71
4.5.4	INTERACCIÓN VÍA TERRENO	72
4.5.5	ESPECTRO DE LAS CARGAS	74
4.5.6	TRANSMISIÓN DE VIBRACIONES AL TERRENO.....	76
4.6	MODELIZACIÓN DE LA ACCIÓN DE VEHÍCULOS SOBRE CARRETERAS	77
4.6.1	GENERALIDADES DEL MODELO	78
4.6.2	PERFILES DE CARRETERAS	79
4.6.3	MODELO MECÁNICO DEL VEHÍCULO.....	80
4.6.4	ESPECTRO DE LA CARGA DE UN VEHÍCULO.....	82
4.6.5	MODELIZACIÓN DEL TRÁFICO VEHICULAR.....	83
4.6.6	TRANSMISIÓN DE VIBRACIONES AL TERRENO.....	85
4.6.7	PARÁMETROS DEL VEHÍCULO TIPO.....	86
4.7	ACCIÓN DE MÁQUINAS VIBRATORIAS.....	88
4.7.1	CONSTANTES DINÁMICAS DEL SISTEMA SUELO-FUNDACIÓN.....	89
5	ENSAYOS EXPERIMENTALES	93
5.1	INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES.....	94
5.1.1	ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS	95
5.1.2	PROCESAMIENTO DE REGISTROS	98
5.2	MEDICIONES.....	99
5.2.1	SALTO COORDINADO DE PERSONAS.....	99
5.2.2	ACCIÓN DE VEHÍCULOS SOBRE RIELES.....	102
5.2.3	ACCIÓN DE VEHÍCULOS SOBRE CARRETERAS.....	111
6	RESUMEN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	119
6.1	RESUMEN.....	119
6.2	CONCLUSIONES.....	120
6.3	RECOMENDACIONES.....	123
ANEXOS		125
	ANEXO 1: SOBRE LOS CORTES DE RAMIFICACIÓN	125
	ANEXO 2: SOBRE LAS RAÍCES DE LA FUNCIÓN DE RAYLEIGH.....	132
	ANEXO 3: SOBRE LOS RESIDUOS EN LOS POLOS DE RAYLEIGH	134
	ANEXO 4: SOBRE LAS FUNCIONES DE BESSEL.....	136
	ANEXO 5: SOBRE LAS FUNCIONES DE CORRELACIÓN ESPECTRAL.....	137
	ANEXO 6: SOBRE LA VIGA INFINITA SOBRE SOLERA VISCOELÁSTICA.....	138
	ANEXO 7: SOBRE LA ATENUACIÓN DE LAS ONDAS.....	141
BIBLIOGRAFÍA		143

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1-1 - Tensiones en un elemento diferencial.....	4
Fig. 1-2 - Deformaciones de un elemento diferencial	5
Fig. 1-3 - Sólido semi-infinito, coordenadas	7
Fig. 1-4 - Contorno de integración U.....	15
Fig. 1-5 - Contorno de integración U1	17
Fig. 1-6 - Contorno de integración W.....	19
Fig. 1-7 - Contorno de integración W1.....	21
Fig. 1-8 - Contorno de integración W2.....	22
Fig. 1-9 - Características de ondas de Rayleigh.....	26
Fig. 1-10 - Amplitud de desplazamiento de las ondas.....	27
Fig. 1-11 - Relación entre desplazamientos verticales y horizontales	28
Fig. 1-12 - Funciones de transferencia de velocidades y aceleraciones.....	29
Fig. 1-13 - Decaimiento de la amplitud con la distancia	30
Fig. 2-1 - Contorno de integración U (caso viscoelástico).....	37
Fig. 2-2 - Contorno de integración W (caso viscoelástico).....	39
Fig. 2-3 - Propiedades modelo mecánico de Maxwell.....	42
Fig. 2-4 - Propiedades modelo mecánico de Voigt.....	43
Fig. 2-5 - Propiedades modelo mecánico de Voigt con hysteretic damping.....	44
Fig. 3-1 - Variación de las ondas de Rayleigh con la profundidad	46
Fig. 4-1 – Proceso aleatorio	50
Fig. 4-2 - Variables aleatorias de un proceso	51
Fig. 4-3 - Función de autocorrelación.....	53
Fig. 4-4 - Muestra truncada del proceso	56
Fig. 4-5 - Transferencia de un proceso aleatorio.....	60
Fig. 4-6 - Disposición espacial de cargas y punto de observación	61
Fig. 4-7 - Transferencia de varios procesos aleatorios	63
Fig. 4-8 - Ciclos de carga para distintos sujetos de prueba (Parkhouse, et al., 2006)	64
Fig. 4-9 - PSD para el registro de 29s de cada sujeto de prueba (Parkhouse, et al., 2006)	65
Fig. 4-10 - Carga sincronizada equivalente (Parkhouse & Ewins, 2006).....	65
Fig. 4-11 - Carga sincronizada equivalente (bobbing)	66
Fig. 4-12 - Historia de aceleraciones, salto coordinado de personas.....	67
Fig. 4-13 - PSD de las irregularidades de la vía.....	71
Fig. 4-14 - Modelo mecánico de un vagón.....	71
Fig. 4-15 - Modelización dinámica de la vía.....	73
Fig. 4-16 - PSD de las cargas sobre las vías	75
Fig. 4-17 - Influencia del sistema de vías en el espectro	76
Fig. 4-18 - Distribución de cargas dinámicas debido al paso del tren.....	76
Fig. 4-19 - Espectro de vibraciones por la componente dinámica del paso del tren.....	77
Fig. 4-20 - Generación de vibraciones por un vehículo.....	79
Fig. 4-21 - PSD de la rugosidad del perfil longitudinal de la carretera	80
Fig. 4-22 - Modelización mecánica del automóvil (2 GL)	81
Fig. 4-23 - PSD para distintos tipos de vehículos	83
Fig. 4-24 - PSD para distintos tipos de carretera y distintas velocidades	83
Fig. 4-25 - Modelización del flujo vehicular.....	84
Fig. 4-26 - PSD de las aceleraciones verticales en el suelo	86

Fig. 4-27 - Sistema máquina-fundación-suelo.....	88
Fig. 4-28 - Función de transmisibilidad para distintos tamaños de fundación.....	90
Fig. 4-29 - Función de transmisibilidad para distintas rigideces del suelo de fundación.....	91
Fig. 5-1 - Esquema de adquisición de digital de datos.....	93
Fig. 5-2 - Aliasing effect.....	94
Fig. 5-3 - Periodograma de un espectro continuo.....	97
Fig. 5-4 - Ventana de Hanning para suavizado de espectro.....	97
Fig. 5-5 - Esquema del procesamiento de señales.....	98
Fig. 5-6 - Posición de las estacines de medición respecto del estadio y registros.....	100
Fig. 5-7 - Estimadores de aceleraciones en el terreno, recital Foo-Fighters.....	100
Fig. 5-8 - Estimación del amortiguamiento de las ondas.....	101
Fig. 5-9 - Equipos de medición in situ, Estación de Gerli, línea Roca.....	103
Fig. 5-10 - Estimadores de aceleraciones en el terreno, Estación Gerli - E1A y E2A.....	103
Fig. 5-11 - Estimadores de aceleraciones en el terreno, estación Gerli - E1B Y E2B.....	104
Fig. 5-12 - Estimadores de aceleraciones en el terreno, estación Gerli - E3A.....	104
Fig. 5-13 - Estimadores de aceleraciones en el terreno, estación Gerli - E3B.....	105
Fig. 5-14 - Estimación del amortiguamiento de las ondas, trenes E1A y E2A.....	106
Fig. 5-15 - Estimación del amortiguamiento de las ondas, trenes E1B Y E2B.....	106
Fig. 5-16 - Comparación modelo analítico y mediciones, trenes E1A.....	108
Fig. 5-17 - Comparación modelo analítico y mediciones, trenes E2A.....	108
Fig. 5-18 - Comparación modelo analítico y mediciones, trenes E3A.....	109
Fig. 5-19 - - Comparación modelo analítico y mediciones, trenes E1B.....	109
Fig. 5-20 - Comparación modelo analítico y mediciones, trenes E2B.....	110
Fig. 5-21 - Comparación modelo analítico y mediciones, trenes E3B.....	110
Fig. 5-22 - Equipos de medición in situ, Av. Madero.....	111
Fig. 5-23 - Esquema de posicionamiento de estaciones de medición.....	111
Fig. 5-24 - Estimadores de aceleraciones en el terreno, tráfico vehicular E1 y E2.....	112
Fig. 5-25 - Estimadores de aceleraciones en el terreno, tráfico vehicular E1 Y E3.....	112
Fig. 5-26 - Estimadores de aceleraciones en el terreno, tráfico vehicular, Av. Alcorta.....	113
Fig. 5-27 - Estimación del amortiguamiento de las ondas, tráfico vehicular E1 y E2.....	114
Fig. 5-28 - Estimación del amortiguamiento de las ondas, tráfico vehicular E1 Y E3.....	114
Fig. 5-29 - Comparación modelo analítico y mediciones, tráfico vehicular E1.....	116
Fig. 5-30 - Comparación modelo analítico y mediciones, tráfico vehicular E2.....	116
Fig. 5-31 - Comparación modelo analítico y mediciones, tráfico vehicular E1B.....	117
Fig. 5-32 - Comparación modelo analítico y mediciones, tráfico vehicular E3.....	117
Fig. 6-1 - El coeficiente de amortiguamiento y la distancia a la fuente.....	122
Fig. A0-1 - Notación función raíz compleja.....	126
Fig. A0-2 - Contornos admisibles en el plano complejo.....	126
Fig. A0-3 - Notación función raíz compleja.....	126
Fig. A0-4 - Distintos contorno cerrados alrededor de los puntos de ramificación.....	127
Fig. A0-5 - Notación funciones α y β	128
Fig. A0-6 - Cortes de ramificación funciones α y β	129
Fig. A0-7 - Cortes de ramificación funciones α y β	130
Fig. A0-8 - Cortes de ramificación funciones de polos complejos.....	131
Fig. A0-9 - Relaciones entre velocidades de onda y parámetros elásticos del suelo.....	133
Fig. A0-10 - Polos y contorno de integración viga sobre solera viscoelástica.....	139

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 - Modelos mecánicos básicos.....	35
Tabla 2 - Resumen de parámetros elásticos del suelo	47
Tabla 3 – DLF's de bobbing para grandes cantidades de espectadores (Parkhouse, et al., 2006)	66
Tabla 4 - Amplitud del EPD normalizado para los primeros 4 armónicos	67
Tabla 5 - Espectros del perfil irregular de las vías, por diferentes autores.....	70
Tabla 6 - Parámetros de rugosidad de carreteras según ISO 8606.....	80
Tabla 7 - Propiedades mecánicas de distintos vehículos (XU, et al., 2007)	82
Tabla 8 - Parámetros del modelo analítico, salto coordinado de personas.....	102
Tabla 9 - Comparación modelo analítico y mediciones, salto coordinado de personas	102
Tabla 10 - Parámetros del modelo analítico, trenes	107
Tabla 11 - Parámetros del modelo analítico, vehículos sobre carreteras.....	115

INTRODUCCIÓN

La consideración de las vibraciones en el suelo debido a la actividad humana, ha ido ganando relevancia en los últimos años, producto de diversos factores: una decreciente tolerancia de la gente a la vibración, la introducción de legislaciones medioambientales cada vez más rigurosas en esta materia, el uso de equipamientos muy sensibles al nivel de vibración, deterioro de construcciones añejas, entre otros. Siendo las principales actividades humanas que las producen: [a] operación de maquinarias, [b] Tráfico vehicular de carreteras y ferrocarril, [c] Actividades de construcción, [d] Movimiento coordinado de personas, entre algunas otras. Es por esto, que la necesidad de un entendimiento del comportamiento de dichas vibraciones es de gran interés hoy en día, y puede ser abarcado desde 3 enfoques distintos y complementarios: modelo analítico, mediciones experimentales y modelo numérico. Es objetivo del presente trabajo, un análisis detallado de los dos primeros enfoques.

Ahora bien, la naturaleza de las vibraciones está en relación directa con la naturaleza de las cargas que las generan, y las propiedades temporales de las mismas tendrán una gran influencia en la respuesta del medio a las excitaciones. En este trabajo se centra la atención en la propagación de ondas de carácter periódico, es decir, que presentan características repetitivas en el tiempo, y son también denominadas “vibraciones en régimen permanente”. Esto es en contrapartida a las acciones impulsivas, que se desarrollan en un período muy corto de tiempo, desapareciendo, luego, la acción. Las características de propagación, y las herramientas de análisis son sustancialmente distintas en ambos casos.

En primer lugar, para poder caracterizar este fenómeno, deben abarcarse dos aspectos indispensables en la representación, que son, la fuente de excitación que produce las vibraciones, y el medio que las propaga. Ambas partes deben ser analizadas en profundidad y con el mismo nivel de detalle, para una adecuada representación del fenómeno, siendo una deficiencia común, el darle prioridad a sólo una de ellas. De hecho, las dos partes del problema no son hechos independientes, y los análisis de ambos suelen ser complementarios. Es decir, que en la mayoría de los casos, las propiedades dinámicas del suelo (en este caso, el medio de propagación) influyen en la excitación que una carga externa transmite al mismo. El enfoque analítico del presente trabajo está en línea con lo dicho en este párrafo, y en los tres primeros capítulos se encara el tema de la modelización del medio de propagación (el suelo), y en el cuarto, la modelización de las excitaciones sobre el mismo. Por su parte, el enfoque experimental se centra únicamente en el medio de propagación, es decir, el de cuantificar las vibraciones en el suelo. Por cuestiones prácticas, no se realizaron mediciones de la magnitud de las excitaciones sobre el terreno.

Para representar el comportamiento dinámico del terreno, el modelo analítico a utilizar debe poder representar el comportamiento mecánico del suelo de manera razonable, y dentro de un marco físico-matemático riguroso, y sin embargo, debe ser lo suficientemente “simple” como para poder ser manejable analíticamente (es decir, sin recurrir a métodos numéricos). En una primera aproximación, la teoría dinámica de la elasticidad lineal será el marco de referencia a la hora de encarar el modelo para la propagación de vibraciones en el suelo. Se plantea el análisis dinámico de un sólido semi-infinito continuo, elástico, homogéneo e isótropo. Este modelo tiene sus inicios a finales del Siglo XIX (Lord Rayleigh, Poisson, Cauchy), y principios del Siglo XX (Horace Lamb), y los problemas de la propagación de ondas en el suelo han sido analizados y documentados por numerosos autores en el último siglo. En el primer capítulo se presenta una revisión rigurosa del problema planteado por el matemático inglés Horace Lamb en 1904 (Lamb, 1904), utilizando técnicas más elegantes desde el punto de vista matemático.

Se plantea luego, un modelo viscoelástico como modelo constitutivo, extendiendo así el comportamiento dinámico del suelo para contemplar la disipación de energía interna, como ocurre en todos los materia-

les. Si bien la teoría de la viscoelasticidad dio sus primeros pasos a fines del siglo XIX gracias a Boltzmann, esta no tuvo prácticamente desarrollo hasta mediados del siguiente siglo, gracias a los aportes de Volterra, Fung, Gurtin and Sternberg, entre otros. En el segundo capítulo, se encuentra un análisis del problema de Lamb considerando este modelo mecánico, siguiendo los lineamientos básicos de la teoría de la viscoelasticidad lineal.

Por su parte, el comportamiento real del suelo ante acciones dinámicas no es para nada trivial y es un tema que hoy en día sigue bajo profunda investigación. Es por eso que en el tercer capítulo del trabajo se hace una breve referencia acerca del comportamiento dinámico del suelo, y su modelización como sólido que sigue los lineamientos de las teorías simplificativas mencionadas en este y el anterior párrafo.

En el cuarto capítulo, se analizan y cuantifican de manera detallada los mecanismos que producen excitaciones en el terreno. Se estudian algunos de los casos descritos en el primer párrafo, que son las principales fuentes de ondas periódicas en el terreno. Se hace especial hincapié en el análisis espectral de los procesos, que pueden ser modelados como determinísticos o como procesos aleatorios.

La generación de vibraciones debidas al tráfico vehicular en carreteras ha sido objeto de estudio desde mediados de la década del 80', donde se destacan trabajos realizados por investigadores como, H. E. M. Hunt, T. C. Ang, H. Hao, entre otros. La problemática de los trenes en la generación de vibraciones es un tema que también ha sido muy estudiado en las últimas décadas, aunque ha recobrado impulso en esta última, debido a la aparición masiva de los trenes de alta velocidad. La modelización de los trenes es un tema analíticamente muy complicado, y donde no abundan soluciones analíticas explícitas (la mayoría de los trabajos son numéricos y/o experimentales). Este sigue siendo un tema de profundo debate y estudios que requieren modelos mucho más complejos. Sin embargo, con los modelos propuestos en este trabajo pueden obtenerse conclusiones de relevancia, y en línea con trabajos más sofisticados (Sheng, Jones, & Thompson, A theoretical model for ground vibration from trains generated by vertical track irregularities, 2003), (Lombaert & Degrande, 2007), (Salvador, Real, Zamorano, & Villanueva, 2010). En un caso muy diferente al de los trenes, el salto coordinado de personas (producto de espectáculos musicales en general), es un tema que requiere modelos menos sofisticados y cuyos lineamientos teóricos están mucho más definidos. En el caso del salto de personas, el estudio en la materia es muy reciente (Parkhouse & Ewins, 2006), (Bertero, 2010), (Sim, Blakeborough, Williams, & Parkhouse, 2008), y ha entregado resultados más que satisfactorios. Por último, las vibraciones producidas por máquinas también poseen un marco teórico robusto que puede verse resumido en (Gazetas, 1983), y que no ha sufrido sustanciales modificaciones desde entonces.

El trabajo, como se dijo antes, involucra una parte experimental donde se realizaron mediciones de las vibraciones en el suelo producidas por algunas de las fuentes caracterizadas en el tercer capítulo, con el objetivo de poder comparar con los modelos analíticos y obtener conclusiones de sus alcances. Dichas conclusiones se resumen en el último capítulo del trabajo. Todos los equipos fueron provistos por el Laboratorio de Dinámica de Estructuras, y con asistencia técnica por parte de sus integrantes, y los modelos teóricos fueron programados en Mathcad® y Matlab® para obtener resultados numéricos.

1 EL PROBLEMA DE LAMB

El problema del estudio de la propagación de ondas superficiales, bajo el amparo de la teoría matemática de la elasticidad, se remonta a los estudios realizados a principios del siglo XX, por el matemático inglés Horace Lamb (1904), sobre la propagación de ondas en la superficie libre de un sólido homogéneo, isótropo, elástico semi-infinito. Sus trabajos se basaron en estudios anteriores, de la propagación de ondas en sólidos infinitos, realizados por Green, Stokes, Cauchy, Poisson, entre otros; y principalmente en el estudio presentado por Lord Rayleigh (1885), acerca de ondas superficiales que aparecían al considerar una superficie libre como contorno de un sólido. Estos fueron los puntos de partida para el análisis riguroso de la propagación de ondas en la superficie de los sólidos.

En el trabajo presentado por H. Lamb, se investiga el problema de las vibraciones superficiales en un espacio elástico semi-infinito debido a distintos tipos de carga. Considera con mayor detenimiento el caso de una carga lineal, normal a la superficie libre, y el caso de una carga puntual; ambos con una variación armónica en el tiempo. Estas soluciones son obtenidas a partir de una superposición espacial de cargas armónicas, basándose en el Teorema de Fourier-Bessel. Las soluciones fueron obtenidas en forma de integrales definidas, y se dieron expresiones aproximadas para los desplazamientos a grandes distancia del origen (compuestas sólo por un tipo de ondas predominante). También se plantea, aunque que con menor detalle, el caso para una carga actuando a una profundidad determinada de la superficie, aunque sin obtener resultados generalizables. Éste último caso fue encarado con más detalle y detenimiento por C.L. Pekeris (1955) para el caso de una carga aplicada de manera súbita. Una solución para un caso más general de variación en el tiempo para la carga, es sugerida por Lamb en su paper, aunque su aplicación práctica es mucho más intrincada.

Desde la mencionada presentación de H. Lamb a principios del siglo XX, numerosos aportes se han publicado donde se analizan con mayor detenimiento los problemas originales, y se consideran distintos tipos de carga. L. Cagniard (1939) hace un considerable aporte, al introducir el uso de la transformada de Laplace del dominio del tiempo para resolver, de manera analítica, algunos problemas de elastodinámica, y el uso de las transformadas inversas, a través de distintos contornos en el plano complejo. Sin embargo, éste método no se hizo popularmente conocido hasta el trabajo publicado por A.T. De Hoop (1960). C.L. Pekeris (1955) es el primero en dar una solución completa y satisfactoria, al problema de la carga puntual aplicada de manera repentina (variación en el tiempo tipo función de Heavyside), y analiza también el problema de las fuentes en el interior del semi-espacio. Las investigaciones más modernas, centran su foco hacia la solución de problemas de vibraciones mucho más complejos, como el de sólidos estratificados y distintas condiciones de borde, y apelan mucho a la utilización de algoritmos numéricos para su resolución. No es éste, el objetivo del presente trabajo, si no, el de poder obtener soluciones analíticas de modelos que serán, lógicamente, más sencillos.

El trabajo original, siendo una de las obras más destacadas del estudio de la propagación de ondas superficiales, posee una nomenclatura y herramientas analíticas que han quedado superadas en el tiempo. Es por eso interesante, poder obtener una revisión detallada de la solución obtenida por H. Lamb, a la luz de las técnicas matemáticas más modernas y que más se aplican en la bibliografía actual. Una revisión similar fue hecha por (Miller & Pursey, *The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid*, 1954), aunque obteniendo una solución por el método numérico del “Descenso más rápido” (Steepest descent), despegándose del procedimiento original de Lamb. Este procedimiento es ampliamente retratado en la bibliografía del tema, donde se destacan los libros de (Ewing, Jardetzky, & Press, 1957), (Achenbach, 1973), (Graff, 1975), (Hudson, 1980). En este capítulo se hace una revisión detallada del problema original, y se analiza una solución mediante el uso de transformadas integrales, y la resolución analítica de las mismas.

1.1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DE LA ELASTODINÁMICA

Para obtener una representación completa del movimiento de un sólido, se deben obtener los desplazamientos del mismo, ante cualquier acción externa o interna, en cualquier instante de tiempo. Es decir, si puedo determinar de manera completa los desplazamientos $u_1, u_2, u_3 = F(x_1, x_2, x_3, t)$ según un determinado sistema de coordenadas, para cualquier punto del sólido (x_1, x_2, x_3) , en cualquier instante t , queda completamente resuelto el problema dinámico. De esta manera, hay que relacionar las fuerzas que actúan en un punto cualquiera del sólido, con los desplazamientos y deformaciones que sufre dicho punto. El problema general, involucra entonces tres conjuntos de magnitudes distintas: las tensiones, representadas por un tensor de tensiones σ_{ij} ; las deformaciones, representadas por un tensor de deformaciones ϵ_{ij} ; y los desplazamientos representados por el vector (u_1, u_2, u_3) .

Las ecuaciones de movimiento de un sólido continuo pueden ser obtenidas considerando un elemento infinitesimal del mismo. Utilizando coordenadas cartesianas, este elemento diferencial será un cubo de lados dx_1, dx_2 y dx_3 (Fig. 1-1). Entonces se debe plantear el equilibrio dinámico del cubo: la resultante de las fuerzas que actúan en el elemento diferencial y la fuerza de inercia del cubo $\rho dV|\ddot{\mathbf{u}}|$, debe ser nula (Principio de D'Alembert). Entonces se plantea el equilibrio de fuerzas según cada eje coordenado, suponiendo que no actúan fuerzas interiores al volumen infinitesimal (fuerzas de volumen),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad [1.1]$$

Donde ρ es la densidad de masa del material.

Hay que observar, que si bien se planteó el equilibrio de fuerzas, las ecuaciones quedaron en término de tensiones, debido a la cancelación del término diferencial de volumen a ambos lados del igual. Planteando además, el equilibrio de momentos del cubo, se llega a las relaciones $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (Teorema de Cauchy). También, hay que decir que se planteó el equilibrio de las fuerzas en la posición sin deformar del cubo (linealidad estática) Quedan entonces 6 incógnitas, y 3 ecuaciones de equilibrio.

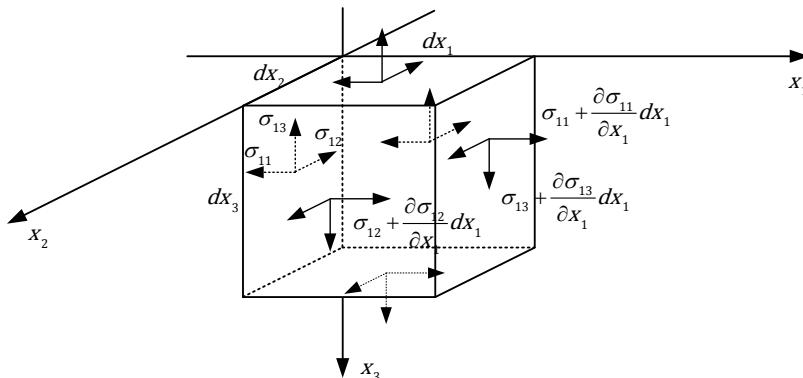


FIG. 1-1 - TENSIONES EN UN ELEMENTO DIFERENCIAL

El siguiente paso es plantear la cinemática del cubo. Es decir, obtener una relación entre los desplazamientos posibles de cada punto del mismo, y las deformaciones respectivas. Se plantean dichas relaciones dentro del ámbito de la cinemática lineal (pequeñas deformaciones). Despreciando término de orden superior, se tienen las siguientes relaciones cinemáticas:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad [1.2]$$

Donde ε_{ij} son las componentes del tensor de deformaciones del elemento. Las componentes ε_{kk} (traza del tensor) son las deformaciones normales, y representan al cambio de longitud, por unidad de longitud, en la dirección x_k . Por su parte, las componentes $2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}$ son las deformaciones angulares, y representan la variación total del ángulo entre las dirección x_i y x_j (Fig. 1-2). Es intuitivo ver que $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. De esta manera, se tienen 9 incógnitas (desplazamientos y deformaciones) y 6 ecuaciones, que sumadas a las ecuaciones de equilibrio dinámico, suman un total de 15 incógnitas y 9 ecuaciones.

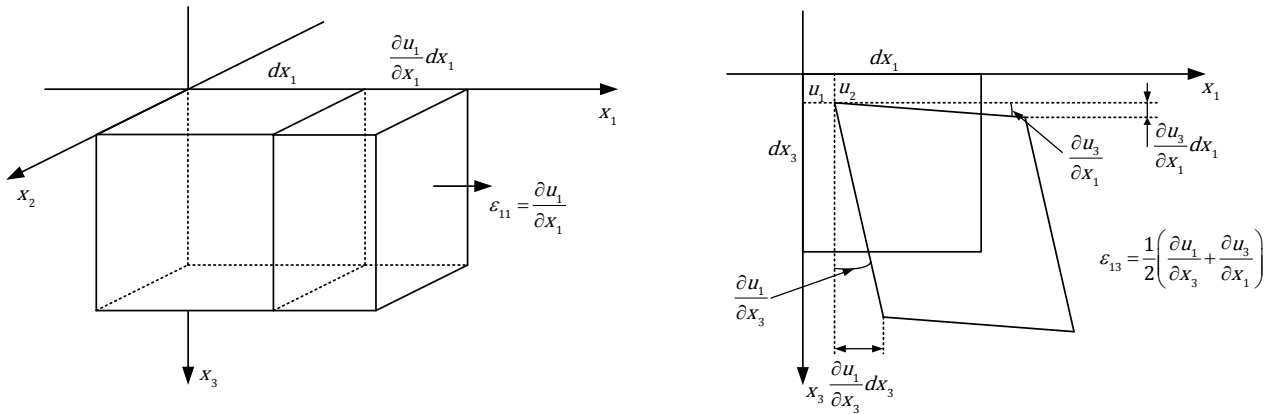


FIG. 1-2 - DEFORMACIONES DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL

Las seis ecuaciones que faltan para poder determinar una solución compatible y única para todas las variables estarán dadas por la relación constitutiva entre las tensiones y las deformaciones (transformación entre dos tensores). Esta relación será propia del modelo mecánico elegido para el material, que en este caso se trata de un material elástico e isótropo. Para este tipo de materiales, las leyes constitutivas son lineales (Ley de Hooke generalizada) y dependen de sólo dos parámetros (ver cualquier texto básico de elasticidad). La relación puede ser descrita, según una matriz de transformación entre el tensor de deformaciones y el tensor de tensiones $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$. En general, en los problemas de elastodinámica suele representarse esta relación descomponiendo el tensor de deformaciones en su componente de dilatación (o expansión volumétrica, e) y de distorsión.

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad [1.3]$$

Donde λ y μ , son la 1ra y 2da constante elásticas de Lamé respectivamente¹; $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ es la variación volumétrica. δ_{ij} es la función Delta de Kroenecker definida según $\delta_{ij} = 1(i = j) + 0(i \neq j)$. Aquí se obtuvieron seis ecuaciones adicionales, para compatibilizar un sistema de 15 incógnitas, y la misma cantidad de ecuaciones.

1 La relación entre las constantes elásticas de Lamé y otras constantes, usualmente utilizadas en estática y resistencia de materiales puede encontrarse en cualquier libro del tema. $\mu = G$ (módulo de elasticidad transversal), y de ahora más se utilizará G como notación.

Entonces, usando [1.2] y [1.3], se puede expresar a las tensiones en función de los desplazamientos, según,

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad [1.4]$$

Y por último, se reemplazan las relaciones de [1.4] en las ecuaciones de equilibrio interno [1.1], obteniéndose las ecuaciones de equilibrio dinámico en términos de los desplazamientos, para un sólido elástico e isótropo (Ecuaciones de Navier). Queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + G \nabla^2 u_1 &= \rho \ddot{u}_1 \\ (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + G \nabla^2 u_2 &= \rho \ddot{u}_2 \\ (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + G \nabla^2 u_3 &= \rho \ddot{u}_3 \end{aligned} \quad [1.5]$$

Donde se definió,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{1er constante de Lamé}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{módulo de rigidez transversal (2da constante de Lamé)}$$

ρ densidad de masa del sólido

Que escritas en forma vectorial toman la siguiente forma,

$$(\lambda + G) \nabla \nabla \mathbf{u} + G \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad [1.6]$$

Esta forma de expresar las ecuaciones de Navier es muy útil, pues vale para cualquier sistema de coordenadas (cartesianas, cilíndricas, esféricas, etc). En particular, en el problema que se analiza en este capítulo, interesará su expresión en coordenadas cilíndricas, como se verá más adelante. De todas maneras, la deducción es análoga a la mostrada en los párrafos anteriores para coordenadas cartesianas.

Ahora bien, Es posible obtener un sistema más simple de ecuaciones si descomponemos el vector solución como el gradiente de un campo escalar, y el rotor de un campo vectorial de divergencia nula. Este tipo de resolución se conoce como descomposición de Helmholtz:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi \quad [1.7]$$

Remplazando esta expresión de la solución en la ecuación vectorial de equilibrio dinámico [1.5], llegamos a que las funciones Φ y Ψ (denominadas potencial escalar y potencial vectorial respectivamente), deben cumplir las ecuaciones de onda en tres dimensiones:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_p^2} \ddot{\Phi} &= 0 \\ \nabla^2 \Psi_i - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i &= 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad [1.8]$$

Donde $c_p^2 = \frac{\lambda+2G}{\rho}$ y $c_s^2 = \frac{G}{\rho}$ son las velocidades de propagación¹ de las ondas de corte (S) y de presión (P), que son las conocidas ondas que se propagan en el interior de un volumen sólido.

Además debe cumplirse que $\text{Div}(\Psi) = 0$. Ésta condición suele ponerse para evitar la indeterminación que podría surgir de considerar las 3 variables u , v y w , como función de las 4 componentes potenciales. De todas maneras, no es una condición única posible.

1.2 PLANTEO DEL PROBLEMA

Se analizará el problema encarado por Lamb en su paper de 1904 (Lamb, 1904), que consiste en una carga puntual vertical armónica, aplicada en la superficie de un sólido semi-infinito elástico, homogéneo e isótropo limitado por una superficie libre horizontal (Fig. 1-3).

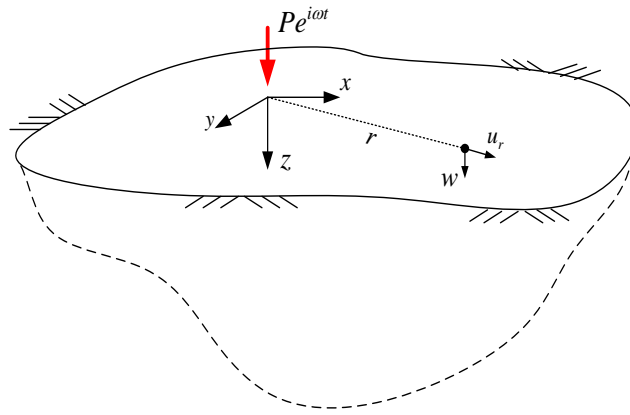


FIG. 1-3 - SÓLIDO SEMI-INFINITO, COORDENADAS

El problema, planteado de tal manera, implica una serie de simplificaciones a la ecuación vectorial [1.6], debido básicamente a la simetría axial del problema. Con esto en mente, usaremos coordenadas cilíndricas para plantear las ecuaciones de equilibrio. Dicha simetría implica que $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ y debido a que la carga es vertical, es razonable suponer también que $u_\theta = 0$.

Como se vio en el inciso 1.1, el problema consiste en resolver las ecuaciones potenciales, con las condiciones de borde que correspondan al problema. En coordenadas cilíndricas con simetría axial, las ecuaciones [1.7] toman la siguiente forma²:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_p^2} \ddot{\Phi} &= 0 \\ \nabla^2 \Psi_\theta - \frac{\Psi_\theta}{r} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_\theta &= 0 \end{aligned} \quad [1.9]$$

Donde el operador laplaciano está en coordenadas cilíndricas: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

1 Esto puede inferirse, por analogía del problema unidimensional de la propagación de ondas.

2 Al haber simetría axial el potencial vectorial Ψ tiene sólo una componente no nula: $\Psi = (0, \Psi_\theta, 0)$. La condición $\text{Div}(\Psi)$ es idénticamente nula, por lo que las cuatro ecuaciones potenciales se reducen a sólo dos. Ver (Achenbach, 1973, pp. 73 - 75).

En este problema, como vamos a considerar la solución en régimen permanente, es decir, una vez que pasó el tiempo suficiente para que desaparecieran los efectos dinámicos de la introducción de la carga, las funciones solución se pueden separar según¹,

$$F(r, z, t) = F(r, z)e^{i\omega t}$$

De ahora en más sólo se considerará la parte espacial de cada función, a la que se le agregará el factor de tiempo $e^{i\omega t}$ una vez resuelto el problema. Haciendo la separación de variables, las ecuaciones [1.9] se transforman en:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi + \Omega_p^2 \Phi &= 0 \\ \nabla^2 \Psi_\theta - \frac{\Psi_\theta}{r} + \Omega_s^2 \Psi_\theta &= 0 \end{aligned} \quad [1.10]$$

Donde $\Omega_p^2 = \frac{\omega^2}{c_p^2}$ y $\Omega_s^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}$

Los desplazamientos en cada punto, se definen a partir de la descomposición de Helmholtz [1.7], y en éste caso de simetría axial se reducen solo a la componente vertical y radial²:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\Psi)}{\partial r} \end{aligned} \quad [1.11]$$

Y las condiciones de borde a plantear son:

$$\begin{aligned} [\sigma_z]_{z=0} &= P \frac{\delta(r)}{2\pi r} e^{i\omega t} \\ [\tau_{zr}]_{z=0} &= 0 \end{aligned} \quad [1.12]$$

Que en términos de los desplazamientos pueden escribirse, para coordenadas cilíndricas con simetría axial, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} &= P \frac{\delta(r)}{2\pi r} e^{i\omega t} \\ G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \quad [1.13]$$

1.2.1 TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES Y FUNCIONES

Con el problema ya planteado, procedemos a resolver las ecuaciones [1.9]. Para eso, aplicamos la transformada de Hankel de orden 0 y de orden 1, tanto a las ecuaciones potenciales como a las condiciones de borde. Estas transformadas se definen para una función $f(r)$ como:

¹ A la función $F(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ se la denomina, también, “función de respuesta compleja del sistema”. Tiene una gran importancia en el análisis de la respuesta, en el dominio de la frecuencia.

² Usamos Ψ indistintamente sin el prefijo, pues no habrá confusión al ser la única componente del vector Ψ no nula.

$$\overline{f(k)}_{\alpha} = \int_0^{\infty} f(r) r J_{\alpha}(kr) dr$$

Donde α es el “orden” de la transformada.

Aplicando las transformadas mencionadas, a las ecuaciones [1.9], se transforman en¹:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{\Phi}_0}{\partial z^2} - (k^2 - \Omega_p^2) \overline{\Phi}_0 &= 0 \\ \frac{\partial^2 \overline{\Psi}_1}{\partial z^2} - (k^2 - \Omega_s^2) \overline{\Psi}_1 &= 0 \end{aligned} \quad [1.14]$$

Se trata de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, de la variable k que representa el número de onda. Su resolución es sencilla, y puede verse en cualquier texto básico de análisis matemático, obteniéndose las siguientes funciones²:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_0 &= A(k) e^{-\alpha z} \quad \text{donde } \alpha = \sqrt{k^2 - \Omega_p^2} \\ \overline{\Psi}_1 &= B(k) e^{-\beta z} \quad \text{donde } \beta = \sqrt{k^2 - \Omega_s^2} \end{aligned} \quad [1.15]$$

Siendo A y B funciones complejas de la variable real k .

En base a determinadas propiedades de la transformada de Hankel³, se transforman las funciones [1.11] y las ecuaciones de borde [1.13]:

$$\begin{aligned} \overline{u}_{r1} &= -k \overline{\Phi}_0 - \frac{\partial \overline{\Psi}_1}{\partial z} \\ \overline{w}_0 &= \frac{\partial \overline{\Phi}_0}{\partial z} + k \overline{\Psi}_1 \end{aligned} \quad [1.16]$$

$$\begin{aligned} \lambda \left(k \overline{u}_{r1} + \frac{\partial \overline{w}_0}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} + 2G \frac{\partial \overline{w}_0}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{P}{2\pi} \\ G \left(-k \overline{w}_0 + \frac{\partial \overline{u}_{r1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \quad [1.17]$$

1.2.2 EVALUACIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE

Al reemplazar las soluciones obtenidas para las funciones potenciales, las transformadas de los desplazamientos toman la siguiente forma:

1 Propiedad de la transformada de Hankel: $H_{\alpha}\{\nabla^2 w(r)\} = -k^2 H_{\alpha}(w)$

2 En este caso, se consideraron nulas los términos que incluyen exponenciales positivas, puesto que la solución debe estar acotada para valores grandes de z . Esto implícitamente supone que la parte real de α y de β debe ser positiva.

3 Transformadas de Hankel de algunas expresiones corrientes:

$$\begin{aligned} H_{\alpha} \left\{ r^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial r} [r^{1-\alpha} f(r)] \right\} &= -k H_{\alpha-1} \{f(r)\} \\ H_{\alpha} \left\{ r^{-(\alpha+1)} \frac{\partial}{\partial r} [r^{\alpha+1} f(r)] \right\} &= k H_{\alpha+1} \{f(r)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{u_{r1}} &= -Ake^{-\alpha z} + B\beta e^{-\beta z} \\ \overline{w_0} &= -A\alpha e^{-\alpha z} + Bke^{-\beta z}\end{aligned}\quad [1.18]$$

Reemplazamos en las ecuaciones de borde [1.17], para poder despejar las funciones $A(k)$ y $B(k)$ que definen la solución. Nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y que depende de la variable real k :

$$\begin{bmatrix} 2\mu(k^2 - \gamma_p^2) - \lambda\gamma_p^2 & -2\mu\beta k \\ 2\alpha k & -[2k^2 - \gamma_s^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 2\pi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{M}\vec{A} = \vec{P} \quad [1.19]$$

Como todo sistema lineal de ecuaciones, su comportamiento dependerá fuertemente del determinante de la matriz de coeficientes. Si el determinante es distinto de 0, entonces el sistema es compatible determinado y existe solución única del mismo. Si el determinante es nulo, el sistema puede no tener solución (sistema incompatible), o tener infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado). Entonces, como la matriz de coeficientes depende de la variable k , es importante verificar para qué valores de k , el sistema se comporta de una u otra manera.

Como se dijo recién, siempre y cuando el determinante de la matriz no sea nulo, se puede despejar: $\vec{A} = \vec{M}^{-1}\vec{P}$

$$A = \frac{P(2k^2 - \gamma_s^2)}{2\pi GF(k)} ; B = \frac{Pk\alpha}{\pi GF(k)}$$

Donde $F(k) = (2k^2 - \Omega_S^2)^2 - 4k^2\alpha\beta$ es la denominada “Función de Rayleigh”.

Ahora bien, la matriz \vec{M}^{-1} sólo existe cuando el determinante de la matriz \vec{M} es distinto de 0. Para aquellos valores de k , que hagan que se anule el determinante, el sistema $\vec{M}\vec{A} = \vec{P}$ será incompatible (se prueba fácilmente que no es compatible indeterminado, pues esto implicaría que una fila es múltiplo de la otra), pero existirán soluciones del problema homogéneo (la solución del sistema homogéneo para sistemas compatibles, es la trivial):

$$\vec{M}\vec{A} = 0 \quad [1.20]$$

Es decir, existe un comportamiento sustancialmente diferente de la solución del sistema, cuando la variable k toma uno, o más, valor determinado. Éste sistema tendrá una solución distinta de la trivial, siempre y cuando,

$$\text{Det}[\vec{M}] = 0 \rightarrow F(k) = 0$$

Es decir, para los ceros de $F(k)$, existirá una solución para el problema homogéneo. La solución completa del sistema, será la solución particular, más cualquiera de las infinitas soluciones homogéneas, cada una con sus correspondientes valores de k .

Las raíces de la función de Rayleigh son (ver Anexo 2): $\pm\Omega_R \in R, 0 < |\Omega_R| < \Omega_S$

Entonces se reemplaza $k = \pm\Omega_R$ en el sistema homogéneo [1.20]:

Para $+\Omega_R$:

$$\begin{bmatrix} 2G(\Omega_R^2 - \Omega_P^2) - \lambda\Omega_P^2 & -2G\beta\Omega_R \\ 2\alpha\Omega_R & -[2\Omega_R^2 - \Omega_S^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde se despeja,

$$A_0 = C \frac{2\Omega_R^2 - \Omega_S^2}{2\Omega_R\alpha_R} ; B_0 = C \quad \text{donde } \alpha_R = \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2}$$

De manera análoga, para $-\Omega_R$:

$$A_0 = -C \frac{2\Omega_R^2 - \Omega_S^2}{2\Omega_R\alpha_R} ; B_0 = C \quad \text{donde } \alpha_R = \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2}$$

Donde C es una constante compleja a determinar.

Como éstos valores de A y B obtenidos sólo valen cuando k toma el valor de las raíces de la función de Rayleigh, la solución completa para A y B, siendo funciones de la variable k, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{P(2k^2 - \Omega_S^2)}{2\pi GF(k)} + C \frac{2\Omega_R^2 - \Omega_S^2}{2\Omega_R\alpha_R} [\delta(\Omega_R) - \delta(-\Omega_R)] \\ B(k) &= \frac{Pk\alpha}{\pi GF(k)} + C [\delta(\Omega_R) + \delta(-\Omega_R)] \end{aligned} \quad [1.21]$$

Es sencillo probar que estas expresiones de A y B verifican el sistema [1.19] para todo $k \in R$, y siendo C una constante real cualquiera. Ahora reemplazamos las expresiones [1.21] en los desplazamientos [1.18] para la superficie del semi-espacio elástico ($z = 0$), y obtenemos las expresiones transformadas de los desplazamientos¹:

$$\begin{aligned} \overline{u_{r1}}(k, 0) &= -\frac{P}{2\pi G} \frac{k(2k^2 - \Omega_S^2 - 2\alpha\beta)}{F(k)} - C \frac{\Omega_R(2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\alpha_R\beta_R)}{2\alpha_R} [\delta(\Omega_R) - \delta(-\Omega_R)] \\ \overline{w_0}(k, 0) &= \frac{P}{2\pi G} \frac{\Omega_S^2\alpha}{F(k)} + C \frac{\Omega_S^2}{2\Omega_R} [\delta(\Omega_R) + \delta(-\Omega_R)] \end{aligned} \quad [1.22]$$

1.2.3 EXPRESIONES ANALÍTICAS DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Para obtener la expresión de los desplazamientos en las coordenadas originales geométricas, hay que antitransformar los desplazamientos. La antitransformada de Hankel de orden α , se define como:

$$f(r) = \int_0^{\infty} \overline{f(k)}_v k J_\nu(kr) dk$$

Donde ν es el "orden" de la transformada.

¹ Las expresiones de los desplazamientos difieren en un signo de las dadas por Lamb en su paper original. Esto resulta de que se considera la carga en sentido contrario (Lamb, 1904, p. 33). Esto no afecta en nada el resultado, pues se trata de una acción armónica.

Aplicando dicha expresión a los desplazamientos obtenidos en [1.22], queda:

$$u_r(r,0) = -\int_0^\infty \frac{P}{2\pi G} \frac{k(2k^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha\beta)}{F(k)} kJ_1(kr) dk - \int_0^\infty C \frac{\Omega_R(2\Omega_R^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha_R\beta_R)}{2\alpha_R} [\delta(\Omega_R) - \delta(-\Omega_R)] kJ_1(kr) dk$$

$$w(r,0) = \int_0^\infty \frac{P}{2\pi G} \frac{\Omega_s^2 \alpha}{F(k)} kJ_0(kr) dk + \int_0^\infty C \frac{\Omega_s^2}{2\Omega_R} [\delta(\Omega_R) + \delta(-\Omega_R)] kJ_0(kr) dk$$

El segundo término de cada expresión es de evaluación inmediata, debido a las funciones Delta de Dirac que aparecen en el integrando,

$$u_r(r,0) = -\frac{P}{2\pi G} \int_0^\infty \frac{k^2(2k^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha\beta)}{F(k)} J_1(kr) dk - C \frac{\Omega_R(2\Omega_R^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha_R\beta_R)}{2\alpha_R} J_1(\Omega_R r)$$

$$w(r,0) = \frac{P}{2\pi G} \int_0^\infty \frac{k\Omega_s^2 \alpha}{F(k)} J_0(kr) dk + C \frac{\Omega_s^2}{2} J_0(\Omega_R r)$$
[1.23]

Se obtiene así una expresión analítica exacta de los desplazamientos en coordenadas geométricas. Resta resolver las integrales impropias y determinar el valor de la constante C, que supone la postulación de una condición de borde adicional.

1.3 EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES IMPROPIAS

Se analizarán en detalle las integrales que surgieron en las expresiones [1.23] de los desplazamientos radial, y vertical del problema planteado. Dichas integrales son:

$$I_u = \int_0^\infty \frac{k^2(2k^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha\beta)}{F(k)} J_1(kr) dk$$

$$I_w = \int_0^\infty \frac{k\Omega_s^2 \alpha}{F(k)} J_0(kr) dk$$

Para poder analizar las integrales impropias, debemos escribir de manera explícita las funciones de Bessel. Si reemplazamos las expresiones que aparecen en el Anexo 4, en las integrales, y realizando algunas operaciones, quedan:

$$I_u = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{k^2(2k^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha\beta)}{F(k)} e^{ikx} dk \right] \cosh s ds$$

$$I_w = -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{k\Omega_s^2 \alpha}{F(k)} e^{ikx} dk \right] ds$$

Por lo tanto, el problema se reduce, en primera instancia, a evaluar las integrales de los corchetes¹:

¹ Estas integrales son del mismo tipo de las que se obtienen en los desplazamientos para el problema bidimensional (Lamb, 1904, p. 10), por lo que el análisis de uno de los dos problemas, prácticamente resuelve el otro.

$$\begin{aligned}
U &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 (2k^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha\beta)}{F(k)} e^{ikx} dk \\
W &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\Omega_s^2\alpha}{F(k)} e^{ikx} dk
\end{aligned}
\tag{1.24}$$

1.3.1 EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL U

Se tiene que resolver la siguiente integral,

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 (2k^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha\beta)}{(2k^2 - \Omega_s^2)^2 - 4k^2\alpha\beta} e^{ikx} dk$$

Donde $\alpha = \sqrt{k^2 - \Omega_p^2}$ y $\beta = \sqrt{k^2 - \Omega_s^2}$

Se deben aplicar los conceptos de la integración en el dominio de los números complejos. Para ello se debe extender la función del integrando, a una función en algún recinto del plano complejo, donde esté continua y uniformemente definida.

$$\Theta(z) = \frac{z^2 (2z^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha(z)\beta(z))}{(2z^2 - \Omega_s^2)^2 - 4z^2\alpha(z)\beta(z)} e^{izx} \tag{1.25}$$

Ahora bien, $\Theta(z)$ contiene a las funciones α y β (definidas en [1.15]) que son funciones raíz, que son por definición “multiformes”, es decir, pueden tomar más de un valor en cada punto del dominio (hacer la analogía con el caso real $\sqrt{2} = \pm 1.414 \dots$). Estas funciones, al ser extendidas al dominio complejo implican discontinuidades que deben ser salvadas para poder incluir a las curvas de integración en el plano complejo dentro del dominio de definición de la función compleja. Las técnicas de integración en el plano complejo, son útiles cuando la función es analítica sobre toda la curva de integración, es por esto muy importante que las funciones sean continuas y uniformes sobre dichas curvas.

Lo dicho en el párrafo anterior hace notar que la función $\Theta(z)$ no será continua y uniforme para cualquier curva del plano complejo, y además posee polos coincidentes con los ceros de la función del denominador (Función de Rayleigh). Sin embargo, se puede definir una “rama” continua de la función, realizando determinados “cortes” en el plano, que definirán los límites del dominio de definición de la rama (ver Anexo 1). Estos “cortes” definirán el valor que tomará la función compleja para cualquier punto, en particular para cualquier valor del eje real. De esta manera, el valor de estas funciones extendidas al dominio complejo, puede no coincidir con el valor de la misma función de variable real. Hay que recordar que se asumió, al resolver las ecuaciones potenciales, que las partes reales de α y β deben ser positivas (es análogo a haber definido que $\sqrt{2} = +1.414 \dots$). Resumiendo, las funciones α y β de variable real toman los siguientes valores,

$$\alpha, \beta = \begin{cases} \left| \sqrt{k^2 - \Omega^2} \right|, & k > \Omega \\ i \left| \sqrt{\Omega^2 - k^2} \right|, & k < \Omega \end{cases}
\tag{1.26}$$

Para ser claros, los valores de las funciones dados en [1.26] corresponden a funciones raíz de variable real, cuyos valores se definen simplemente eligiendo si la función tomará el valor positivo o negativo de la raíz (piénsese en que la raíz de cualquier número tiene dos valores posibles, uno negativo y otro positivo). El pro-

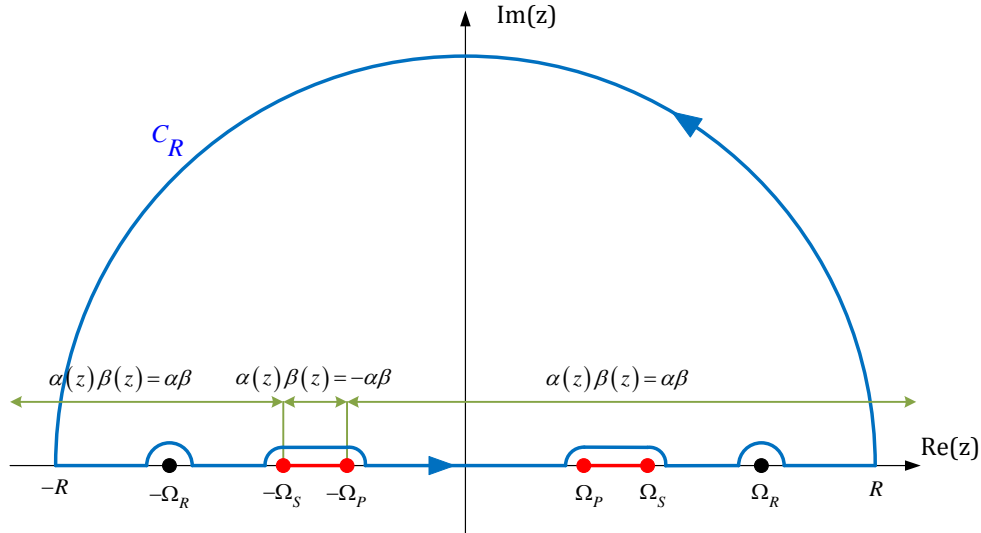
blema surge al extender la función al dominio complejo, ya que entonces no se puede asegurar la continuidad de la función en todo el plano complejo simplemente eligiendo uno de los posibles valores para la raíz, y como se dijo antes, es preciso limitar dicho dominio de definición. En la definición de las funciones reales α y β se eligió adoptar el valor positivo de las mismas como se ve en [1.26], y esto automáticamente define ciertos “cortes” en el plano complejo que limitan el dominio. Viéndolo de otra manera, se puede definir un corte (según algún criterio que se ve en el Anexo 1) que sea simple analíticamente, pero esto supondrá que las funciones complejas $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ pueden no tomar los mismos valores que las análogas funciones reales [1.26], a lo largo del eje real ($\alpha(z) \neq \alpha$). En lo que respecta al trabajo, siempre que se mencionen las funciones α y β sin el término (z) , se referirán a las funciones reales.

Es posible deducir inmediatamente, de lo visto en el Anexo 1, que los puntos de ramificación de la función [1.25] son $(\pm\Omega_S^2; \pm\Omega_P^2)$ donde $\pm\Omega_S > \Omega_P$. De lo visto en dicho anexo, se pueden definir los cortes de ramificación y los valores que toma la función $\Theta(z)$ en cada segmento del eje real respecto de los valores de la función real $\alpha\beta$ (que aparece tanto en el numerador como en el denominador) según [1.26], para la rama elegida (Fig. 1-4). Se observa que la función compleja $\alpha(z)\beta(z)$ toma valores distintos que los correspondientes a considerar la función real $\alpha\beta$ para algunos segmentos del eje real.

Como lo que interesa es resolver la integral cuya función del integrando es la de variable real, debe hacerse una comparación entre los términos de esta función y los de la función compleja $\Theta(z)$, a lo largo del eje real (que se resume a comparar los valores de la función $\alpha\beta$, con la misma extendida al plano complejo $\alpha(z)\beta(z)$, puesto que los otros términos de la función del integrando no son funciones multiformes). Para ello, es útil desglosar la integral U según los distintos segmentos, poniendo en evidencia los valores de la función del integrando para cualquier valor real k .

$$\begin{aligned}
 U = & \int_{-\infty}^{-\Omega_S} \frac{k^2 \left(2k^2 - \Omega_S^2 - 2\sqrt{k^2 - \Omega_S^2}\sqrt{k^2 - \Omega_P^2} \right)}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 - 4k^2\sqrt{k^2 - \Omega_S^2}\sqrt{k^2 - \Omega_P^2}} e^{ikx} dk \\
 & + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} \frac{k^2 \left(2k^2 - \Omega_S^2 - 2i\sqrt{\Omega_S^2 - k^2}\sqrt{k^2 - \Omega_P^2} \right)}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 - 4k^2i\sqrt{\Omega_S^2 - k^2}\sqrt{k^2 - \Omega_P^2}} e^{ikx} dk \\
 & + \int_{-\Omega_P}^{\Omega_S} \frac{k^2 \left(2k^2 - \Omega_S^2 + 2\sqrt{\Omega_S^2 - k^2}\sqrt{\Omega_P^2 - k^2} \right)}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 + 4k^2\sqrt{\Omega_S^2 - k^2}\sqrt{\Omega_P^2 - k^2}} e^{ikx} dk + \dots \\
 U = & \int_{-\infty}^{-\Omega_S} I_1 + \int_{-\Omega_P}^{-\Omega_S} I_2 + \int_{-\Omega_P}^{\Omega_S} I_3 + \int_{\Omega_P}^{\Omega_S} I_4 + \int_{\Omega_S}^{\infty} I_5
 \end{aligned}$$

Ahora se ve en la figura siguiente los valores que toma la función $\alpha(z)\beta(z)$ al definir una rama continua y uniforme de la misma (ver Anexo 1):



Contorno de integración para la evaluación de la integral U. Se integra en la parte superior del plano, para que el término exponencial del integrando esté acotado para cualquier valor positivo de x ($x = r \cosh(s)$). Los valores que toma la función de variable compleja a lo largo del eje real, y por sobre los cortes de ramificación, se pueden ver en el Anexo 1.

FIG. 1-4 - CONTORNO DE INTEGRACIÓN U

Se ve de la figura que para el segmento $(-\Omega_S - \Omega_P)$ la integral U no coincide con el valor de la rama de la función definida en el recinto. En el resto del eje real sí coinciden. De esta manera, se puede encontrar la relación entre la integral de la función compleja a lo largo del contorno de la Fig. 1-4, y los distintos términos de la integral U. Integrando en el contorno se obtiene, y considerando la contribución de los contornos semi-circulares rodeando los polos del integrando¹:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint \Theta(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \Theta(z) dz + \int_{-\infty}^{-\Omega_S} I_1 - \pi i \text{Res}(\Theta(z), -\Omega_R) + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2^* + \int_{-\Omega_S}^{\Omega_P} I_3 + \int_{\Omega_P}^{\Omega_S} I_4 + \int_{\Omega_S}^{\infty} I_5 - \pi i \text{Res}(\Theta(z), \Omega_R)$$

$$\text{Donde } I_2^* = \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} \frac{k^2 (2k^2 - \Omega_S^2 + 2\alpha\beta)}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 + 4k^2 \alpha\beta} e^{ikx} dk$$

Como no hay polos dentro del contorno:

$$\oint \Theta(z) dz = 0$$

Y es fácil ver que la integral en el semicírculo de radio R, se anula, al tender R a infinito²: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \Theta(z) dz = 0$

Entonces queda:

1 Según Teorema de Jordan, la contribución de un segmento de circunferencia de radio infinitesimal alrededor de un polo de primer orden es, $(\theta_f - \theta_i) \text{Res}(f(z), z_0)$

2 Basta con probar que $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R L = 0$, siendo M_R un número real positivo tal que, $|\Theta(z)| \leq M_R$ para todo $z \in C_R$ y L la longitud del arco CR. Ver (Churchill. & Brown, 1992, pág. 10).

$$\int_{-\infty}^{-\Omega_S} I_1 + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2^* + \int_{-\Omega_P}^{\Omega_P} I_3 + \int_{\Omega_P}^{\Omega_S} I_4 + \int_{\Omega_S}^{\infty} I_5 = \pi i \left[\text{Res}(\Theta(z), -\Omega_R) + \text{Res}(\Theta(z), \Omega_R) \right]$$

Sumando y restando $\int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2$ en el lado izquierdo de la ecuación,

$$\int_{-\infty}^{-\Omega_S} I_1 + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2 + \int_{-\Omega_P}^{\Omega_P} I_3 + \int_{\Omega_P}^{\Omega_S} I_4 + \int_{\Omega_S}^{\infty} I_5 + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2^* - I_2 = \pi i \left[\text{Res}(\Theta(z), -\Omega_R) + \text{Res}(\Theta(z), \Omega_R) \right]$$

$$U + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2^* - I_2 = \pi i \left[\text{Res}(\Theta(z), -\Omega_R) + \text{Res}(\Theta(z), \Omega_R) \right]$$

De donde se despeja,

$$U = \pi i \left[\text{Res}(\Theta(z), -\Omega_R) + \text{Res}(\Theta(z), \Omega_R) \right] + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2 - I_2^*$$

Escribiendo de manera explícita los residuos (ver Anexo 3) y las integrales,

$$U = 2\pi\Omega_R H \sin(\Omega_R x) + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} \frac{4k^2\Omega_S^2\alpha\beta(2k^2 - \Omega_S^2)}{F(k)f(k)} e^{ikx} dk$$

$$U = 2\pi\Omega_R H \sin(\Omega_R x) + U_1 \quad [1.27]$$

Donde

$$H = -\frac{\Omega_R \left(2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_S^2} \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2} \right)}{F'(\Omega_R)}$$

$$f(k) = (2k^2 - \Omega_S^2)^2 + 4k^2\alpha\beta$$

$$F(k)f(k) = (2k^2 - \Omega_S^2)^4 - 16k^4\alpha^2\beta^2$$

1.3.1.1 EVALUACIÓN DEL TÉRMINO U_1

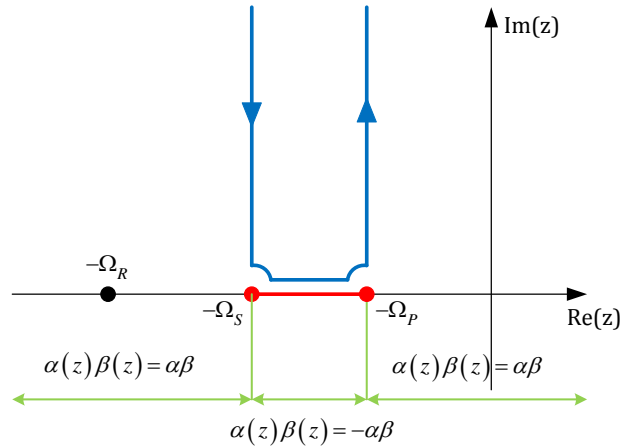
Se analiza ahora el término U_1 que aparece en la expresión de U ,

$$U_1 = \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} \frac{4k^2\Omega_S^2\alpha\beta(2k^2 - \Omega_S^2)}{F(k)f(k)} e^{ikx} dk = - \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} \frac{4k^2\Omega_S^2(-\alpha\beta)(2k^2 - \Omega_S^2)}{F(k)f(k)} e^{ikx} dk$$

Nuevamente se extiende la función del integrando al plano complejo:

$$\Phi(z) = \frac{4z^2\Omega_S^2(-\alpha(z)\beta(z))(2z^2 - \Omega_S^2)}{F(z)f(z)} e^{izx}$$

Se analiza la integral en el contorno de la figura siguiente:



Contorno de integración para la evaluación de la integral U_1 . Se integra en la parte superior del plano, para que el término exponencial del integrando esté acotado para cualquier valor positivo de x ($x = r \cosh(s)$).

FIG. 1-5 - CONTORNO DE INTEGRACIÓN U_1

La integral a lo largo del contorno queda,

$$\oint \Phi dz = \int_{\Gamma_p} \Phi + \int_{\Gamma_s} \Phi - U_1 = 0$$

De donde se despeja,

$$U_1 = \int_{\Gamma_p} \Phi + \int_{\Gamma_s} \Phi = U_p + U_s$$

Donde,

$$U_p = \int_0^{\infty} \frac{4(-\Omega_p + i\xi)^2 \Omega_s^2 \alpha_1 \beta_1 (2(-\Omega_p + i\xi)^2 - \Omega_s^2)}{F(-\Omega_p + i\xi) f(-\Omega_p + i\xi)} e^{i(-\Omega_p + i\xi)x} i d\xi$$

Siendo $\alpha_1 = \sqrt{(-\Omega_p + i\xi)^2 - \Omega_p^2}$; $\beta_1 = \sqrt{(-\Omega_p + i\xi)^2 - \Omega_s^2}$

Que puede reescribirse como,

$$U_p = 4i\Omega_s^2 e^{-i\Omega_p x} \int_0^{\infty} \frac{(-\Omega_p + i\xi)^2 \alpha_1 \beta_1 (2(-\Omega_p + i\xi)^2 - \Omega_s^2)}{F(-\Omega_p + i\xi) f(-\Omega_p + i\xi)} e^{-\xi x} d\xi \quad [1.28]$$

Observando el factor $e^{-i\Omega_p x}$, se ve que se trata de un tren de ondas de número Ω_p (número de onda), por lo que este término será la contribución de las ya conocidas ondas P (ondas primarias o de presión).

Y por otro lado,

$$U_s = \int_{-\infty}^0 \frac{4(-\Omega_s + i\xi)^2 \Omega_s^2 \alpha_2 \beta_2 (2(-\Omega_s + i\xi)^2 - \Omega_s^2)}{F(-\Omega_s + i\xi) f(-\Omega_s + i\xi)} e^{i(-\Omega_s + i\xi)x} i d\xi$$

Recordando que $\alpha_2 = \sqrt{(-\Omega_s + i\xi)^2 - \Omega_p^2}$; $\beta_2 = \sqrt{(-\Omega_s + i\xi)^2 - \Omega_s^2}$

Que puede reescribirse como,

$$U_S = 4i\Omega_S^2 e^{-i\Omega_S x} \int_0^\infty \frac{4(-\Omega_S + i\xi)^2 \Omega_S^2 \alpha_2 \beta_2 (2(-\Omega_S + i\xi)^2 - \Omega_S^2)}{F(-\Omega_S + i\xi) f(-\Omega_S + i\xi)} e^{-\xi x} d\xi \quad [1.29]$$

Nuevamente, puede deducirse, que este término describe la contribución de las ondas S (ondas secundarias o de corte). Finalmente, volviendo a la ecuación [1.27], la integral U, puede expresarse como:

$$U = 2\pi\Omega_R H \sin(\Omega_R x) + U_P + U_S \quad [1.30]$$

1.3.2 EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL W

Se tiene que resolver ahora, la integral,

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\Omega_S^2 \alpha}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 - 4k^2 \alpha \beta} e^{ikx} dk$$

Donde $\alpha = \sqrt{k^2 - \Omega_P^2}$ y $\beta = \sqrt{k^2 - \Omega_S^2}$

Nuevamente se debe extender la función del integrando al dominio complejo:

$$Y(z) = \frac{z\Omega_S^2 \alpha(z)}{(2z^2 - \Omega_S^2)^2 - 4z^2 \alpha(z) \beta(z)} e^{izx} \quad [1.31]$$

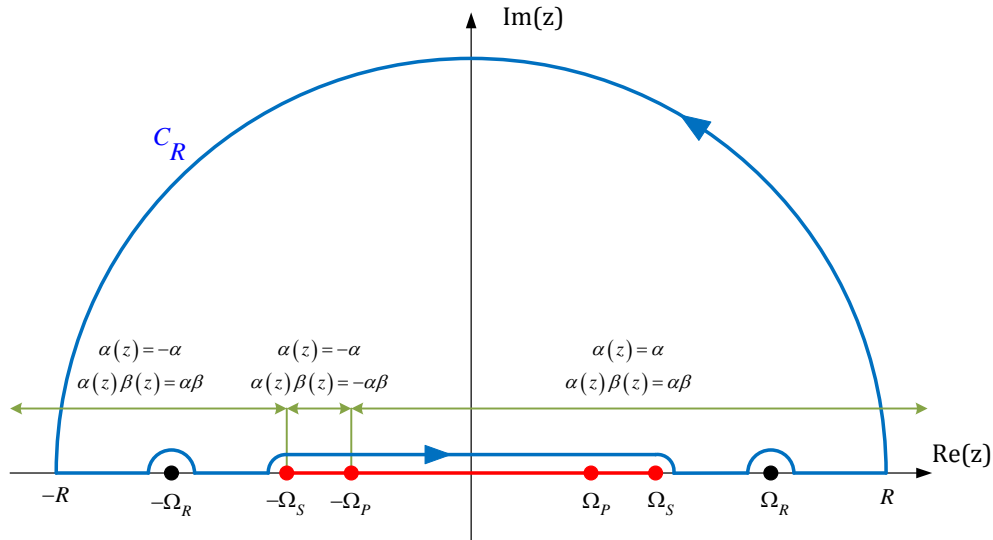
Para esta integral las consideraciones en cuánto a los valores de las raíces, son las mismas que para la integral U. La principal diferencia en este caso, radica en que las funciones radicales que aparecen en el numerador ($\alpha(z)$) y en el denominador ($\alpha(z)\beta(z)$) no son la misma, por lo que los cortes de ramificación deberán contemplar los cortes de ambas funciones (ver Anexo 1). En otras palabras, los cortes de ramificación serán la unión de los cortes de las funciones $\alpha(z)$ y $\alpha(z)\beta(z)$. Por su parte, los polos de la función serán los mismos que para la del inciso anterior.

Nuevamente hay que analizar la coincidencia entre la función de variable real del integrando de W, con la función de variable compleja $Y(z)$ a lo largo del eje real. En la Fig. 1-6, aparece el contorno de integración a seguir en el plano complejo, y los valores que toman la función de variable compleja en cada segmento del eje real, para la rama definida por los cortes. El procedimiento a seguir es análogo que para la integral del punto anterior; se desglosa la integral W escribiendo de manera explícita la función de variable real del integrando, según van variando los términos α y $\alpha\beta$ de acuerdo a [1.26]:

$$\begin{aligned}
 W = & \int_{-\infty}^{-\Omega_S} \frac{k\Omega_S^2 \sqrt{k^2 - \Omega_P^2}}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - \Omega_S^2} \sqrt{k^2 - \Omega_P^2}} e^{ikx} dk \\
 & + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} \frac{k\Omega_S^2 \sqrt{k^2 - \Omega_P^2}}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 - 4k^2 i \sqrt{\Omega_S^2 - k^2} \sqrt{k^2 - \Omega_P^2}} e^{ikx} dk \\
 & + \int_{-\Omega_P}^{\Omega_P} \frac{k\Omega_S^2 i \sqrt{\Omega_P^2 - k^2}}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 + 4k^2 \sqrt{\Omega_S^2 - k^2} \sqrt{\Omega_P^2 - k^2}} e^{ikx} dk + \dots
 \end{aligned}$$

$$W = \int_{-\infty}^{-\Omega_S} I_1 + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2 + \int_{-\Omega_P}^{\Omega_P} I_3 + \int_{\Omega_P}^{\Omega_S} I_4 + \int_{\Omega_S}^{\infty} I_5$$

Se ve en la figura siguiente los valores que toman las funciones $\alpha(z)$ y $\alpha(z)\beta(z)$ al definir una rama continua y uniforme de las mismas (ver Anexo 1):



Contorno de integración para la evaluación de la integral W. Se integra en la parte superior del plano, para que el término exponencial del integrando esté acotado para cualquier valor positivo de x ($x = r \cosh(s)$). Los valores que toma la función de variable compleja a lo largo del eje real, y por sobre los cortes de ramificación, se pueden ver en el Anexo 1.

FIG. 1-6 - CONTORNO DE INTEGRACIÓN W

Por otro lado, se ve de la figura que para los segmentos $(-\infty, -\Omega_S)$ y $(-\Omega_S, -\Omega_P)$ el integrando de W no coincide con el valor de la rama de la función compleja definida en el recinto.

Integrando a lo largo del contorno, se obtiene:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \oint \Upsilon(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \Upsilon(z) dz + \int_{-\infty}^{-\Omega_S} I_1^* - \pi i \text{Res}(-\Upsilon(z), -\Omega_R) + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2^* + \int_{-\Omega_P}^{\Omega_P} I_3 + \int_{\Omega_P}^{\Omega_S} I_4 + \int_{\Omega_S}^{\infty} I_5 - \pi i \text{Res}(\Upsilon(z), \Omega_R)$$

Donde,

$$I_1^* = \int_{-\infty}^{-\Omega_S} \frac{k\Omega_S^2(-\alpha)}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 - 4k^2\alpha\beta} e^{ikx} dk = -I_1$$

$$I_2^* = \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} \frac{k\Omega_S^2(-\alpha)}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 + 4k^2\alpha\beta} e^{ikx} dk$$

Como no hay polos dentro del contorno:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint \Upsilon(z) dz = 0$$

Y es fácil ver que la integral en el semicírculo de radio R, se anula, al tender R a infinito: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \Theta(z) dz = 0$

Sumando y restando $\int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_1$ y $\int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2$

$$W + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2^* - I_2 - 2 \int_{-\infty}^{-\Omega_S} I_1 = \pi i \left[\text{Res}(-\Upsilon(z), -\Omega_R) + \text{Res}(\Upsilon(z), \Omega_R) \right]$$

De donde se despeja¹,

$$W = \pi i \left[\text{Res}(-\Upsilon(z), -\Omega_R) + \text{Res}(\Upsilon(z), \Omega_R) \right] + 2 \int_{-\infty}^{-\Omega_S} I_1 + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} I_2 - I_2^*$$

Escribiendo de manera explícita los residuos (ver Anexo 3) y las integrales:

$$W = 2\pi\Omega_R K \sin(\Omega_R x) + \int_{-\infty}^{-\Omega_S} \frac{2k\Omega_S^2 \sqrt{k^2 - \Omega_P^2}}{F(k)} e^{ikx} dk + \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} \frac{2k\Omega_S^2 \sqrt{k^2 - \Omega_P^2} (2k^2 - \Omega_S^2)^2}{F(k)f(k)} e^{ikx} dk$$

$$W = 2\pi\Omega_R K \sin(\Omega_R x) + W_1 + W_2 \quad [1.32]$$

$$\text{Donde } K = -\frac{\Omega_S^2 \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2}}{F'(\Omega_R)}$$

1.3.2.1 EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL W_1

En este caso es la integral,

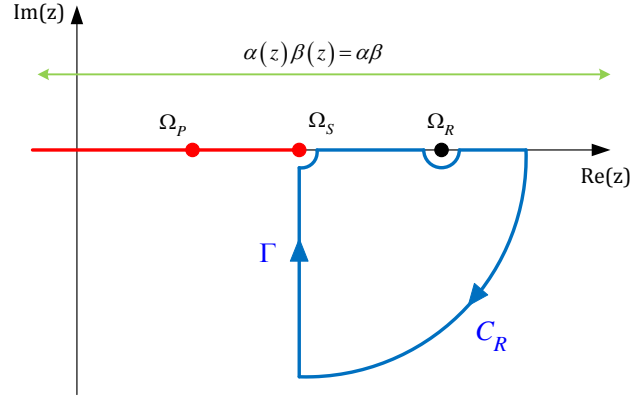
$$W_1 = \int_{-\infty}^{-\Omega_S} \frac{2k\Omega_S^2 \alpha}{F(k)} e^{ikx} dk = -2 \int_{\Omega_S}^{\infty} \frac{k\Omega_S^2 \alpha}{F(k)} e^{-ikx} dk$$

Se extiende la función del integrando al plano complejo:

1 Observar que el residuo en $-\Omega_R$ es de la función $-\Upsilon(z)$, puesto que en el eje real ese es el valor que toma la rama. Puede observarse claramente en la Fig. 1-6.

$$\Phi(z) = -2 \frac{z \Omega_s^2 \alpha(z)}{F(z)} e^{-izx}$$

Se analiza la integral alrededor del contorno de la figura siguiente:



Contorno de integración para la evaluación de la integral W1. Se integra en la parte inferior del plano, para que el término exponencial del integrando esté acotado para cualquier valor positivo de x ($x = r \cosh(s)$).

FIG. 1-7 - CONTORNO DE INTEGRACIÓN W1

El valor que adquiere la función compleja en el eje real se puede ver en Fig. 1-6. En este caso, la rama de la función en la integral de contorno (en el eje real en particular) coincide con el valor esperado para W1.

$$\oint \Phi dz = \int_{C_R} \Phi dz + \int_{\Gamma} \Phi dz - W_1 + \pi i \text{Res}(\Phi(z), \Omega_R) = 0$$

De nuevo, la integral a lo largo del segmento de circunferencia se anula, al tender a infinito el radio de la misma. El valor del residuo se obtiene de manera directa, a partir de lo visto en el Anexo 3.

$$\text{Res}(\Phi(z), \Omega_R) = 2\Omega_R K e^{-i\Omega_R x}$$

Entonces,

$$W_1 = 2\pi i \Omega_R K e^{-i\Omega_R x} + \int_{\Gamma} \Phi dz = 2\pi i \Omega_R K e^{-i\Omega_R x} + W_S$$

Donde,

$$W_S = \int_{-\infty}^0 \frac{2(\Omega_s + i\xi) \Omega_s^2 \alpha_1 e^{-i(\Omega_s + i\xi)x}}{F(\Omega_s + i\xi)} id\xi$$

Siendo $\alpha_1 = \sqrt{(\Omega_s + i\xi)^2 - \Omega_p^2}$

Se puede reescribir como,

$$W_S = 2i\Omega_s^2 e^{-i\Omega_s x} \int_0^{\infty} \frac{(\Omega_s - i\xi) \alpha_1}{F(\Omega_s - i\xi)} e^{-\xi x} d\xi \quad [1.33]$$

Análogamente a lo visto para la integral U, este término representa una contribución de las ondas S a los desplazamientos verticales.

1.3.2.2 EVALUACIÓN DEL TÉRMINO W_2

En este caso, es la integral,

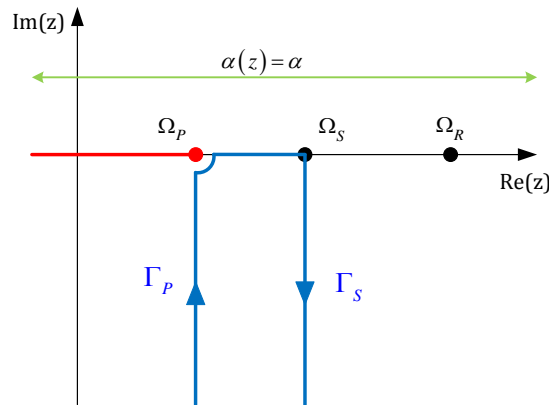
$$W_2 = \int_{-\Omega_S}^{-\Omega_P} \frac{2k\Omega_S^2\alpha(2k^2 - \Omega_S^2)^2}{F(k)f(k)} e^{ikx} dk = - \int_{\Omega_P}^{\Omega_S} \frac{2k\Omega_S^2\alpha(2k^2 - \Omega_S^2)^2}{F(k)f(k)} e^{-ikx} dk$$

Donde $F(k)f(k) = (2k^2 - \Omega_S^2)^4 - 16k^4\alpha^2\beta^2$

Extendemos la función del integrando al plano complejo:

$$\Phi(z) = \frac{2z\Omega_S^2\alpha(z)(2z^2 - \Omega_S^2)^2}{F(z)f(z)} e^{-izx}$$

Se observa que el único término que define la rama de la función es α , pues es la única raíz que aparece. Los signos para esta función compleja aparecen en la Fig. 1-8.



Contorno de integración para la evaluación de la integral W_2 . Se integra en la parte inferior del plano, para que el término exponencial del integrando esté acotado para cualquier valor positivo de x ($x = r \cosh(s)$).

FIG. 1-8 - CONTORNO DE INTEGRACIÓN W_2

La integral a lo largo del contorno queda,

$$\oint \Phi dz = \int_{\Gamma_P} \Phi dz + \int_{\Gamma_S} \Phi dz - W_2 = 0$$

De donde se despeja,

$$W_2 = \int_{\Gamma_P} \Phi dz + \int_{\Gamma_S} \Phi dz = W_P + W_S^*$$

Donde,

$$W_P = \int_{-\infty}^0 \frac{2(\Omega_P + i\xi)\Omega_S^2\alpha_2(2(\Omega_P + i\xi)^2 - \Omega_S^2)^2}{F(\Omega_P + i\xi)f(\Omega_P + i\xi)} e^{-i(\Omega_P + i\xi)x} i d\xi$$

Siendo $\alpha_2 = \sqrt{(\Omega_p + i\xi)^2 - \Omega_p^2}$

Que puede reescribirse como,

$$W_s^* = -2i\Omega_s^2 e^{-i\Omega_s x} \int_0^\infty \frac{(\Omega_s - i\xi) \overline{\alpha_1} (2(\Omega_s - i\xi)^2 - \Omega_s^2)^2}{F(\Omega_s - i\xi) f(\Omega_s - i\xi)} e^{-\xi x} d\xi \quad [1.34]$$

Finalmente, volviendo a la ecuación [1.32], la integral W, puede expresarse como:

$$W = 2\pi\Omega_R K \sin(\Omega_R x) - 2\pi i\Omega_R K e^{-i\Omega_R x} + W_p + W_s + W_s^* \quad [1.35]$$

Donde se ven claramente, los términos correspondiente a las colaboraciones de las ondas P y S (en este caso, hay dos términos de ondas S, que bien podrían resumirse en uno solo).

1.4 EXPRESIONES FINALES PARA LOS DESPLAZAMIENTOS

Una vez obtenidas las expresiones para las integrales U y W pueden obtenerse expresiones analíticas para las ondas que se propagan en el suelo realizando algunas simplificaciones.

1.4.1 DESPLAZAMIENTOS RADIALES U_R

Recordando la expresión [1.30],

$$U = 2\pi\Omega_R H \sin(\Omega_R x) + U_p + U_s$$

Donde,

$$H = -\frac{\Omega_R (2\Omega_R^2 - \Omega_s^2 - 2\sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_s^2} \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_p^2})}{F'(\Omega_R)}$$

$$U_p = 4i\Omega_s^2 e^{i\Omega_p x} \int_0^\infty \frac{(\Omega_p + i\xi)^2 \alpha_2 \beta_2 (2(\Omega_p + i\xi)^2 - \Omega_s^2)}{F(\Omega_p + i\xi) f(\Omega_p + i\xi)} e^{-\xi x} d\xi$$

$$U_s = 4i\Omega_s^2 e^{-i\Omega_s x} \int_0^\infty \frac{4(\Omega_s - i\xi)^2 \Omega_s^2 \overline{\alpha_1} \beta_1 (2(\Omega_s - i\xi)^2 - \Omega_s^2)}{F(\Omega_s - i\xi) f(\Omega_s - i\xi)} e^{-\xi x} d\xi$$

Ahora bien, para obtener la expresión de los desplazamientos radiales, como primer paso, se debe volver a la primera de las ecuaciones [1.24]:

$$\begin{aligned} I_u &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty [2\pi\Omega_R H \sin(\Omega_R x) + U_p + U_s] \cosh(s) ds \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty 2\pi\Omega_R H \sin(\Omega_R r \cosh(s)) \cosh(s) ds + \int_0^\infty U_p \cosh(s) ds + \int_0^\infty U_s \cosh(s) ds \right] \end{aligned}$$

De las identidades para las funciones de Bessel (ver Anexo 4), queda:

$$I_u = \pi\Omega_R HY_1(\Omega_R r) - \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty U_P \cosh(s) ds + \int_0^\infty U_S \cosh(s) ds \right] \quad [1.36]$$

Para poder determinar la constante C, es conveniente expresar las funciones de Bessel de 1er y 2do orden, en términos de las funciones de Hankel (ver Anexo 4):

$$u_r(r) = \left[\frac{P\Omega_R i}{4G} H - C \frac{\Omega_R^2 (2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\alpha_R \beta_R)}{4\alpha_R} \right] H_1^{(1)}(\Omega_R r) - \left[\frac{P\Omega_R i}{4G} H + C \frac{\Omega_R^2 (2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\alpha_R \beta_R)}{4\alpha_R} \right] H_1^{(2)}(\Omega_R r)$$

En virtud de la “condición de radiación” definida por Sommerfeld:

*“La energía que es radiada desde una fuente debe propagarse hacia el infinito; no puede haber energía que sea irradiada desde el infinito hacia las fuentes...”*¹.

Se puede determinar, que el término correspondiente a $H_1^{(1)}(\Omega_R r)$ debe anularse, pues consiste (agregándole el factor de tiempo $e^{i\omega t}$) de ondas que viajan hacia el origen. Entonces,

$$\frac{P\Omega_R i}{4G} H - C \frac{\Omega_R^2 (2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\alpha_R \beta_R)}{4\alpha_R} = 0 \rightarrow C = -\frac{P\alpha_R i}{G} \frac{1}{F'(\Omega_R)}$$

Reemplazando en la expresión de $u_r(r)$, y agregando el factor de tiempo, queda²:

$$u_r(r, t) = \frac{P\Omega_R i}{2G} H H_1^{(2)}(\Omega_R r) e^{i\omega t} + P + S$$

Los términos P y S, son las componentes de ondas P y S que se vieron antes, y que están definidas en la ecuación [1.36]. Éstos términos suelen disiparse mucho más rápido para valores crecientes de r, por lo que en general, se considera sólo el primer término, el de las ondas de Rayleigh, como la solución del problema, para valores alejados de la fuente. Éste análisis fue hecho en (Miller & Pursey, On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid, 1955), donde se muestra que las ondas de Rayleigh llevan el 67% de la energía, el 26% es llevado por las ondas S, y el 7% por las ondas P. No obstante, se ha presentado evidencia empírica de que dicha partición de la energía es dependiente de la frecuencia.

1.4.2 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES W

Recordamos la expresión [1.35],

$$W = 2\pi\Omega_R K \sin(\Omega_R x) - 2\pi i\Omega_R K e^{-i\Omega_R x} + W_P + W_S + W_S^*$$

Donde,

¹ La condición de radiación de Sommerfeld tiene una deducción matemática rigurosa, y puede verse en (Sommerfeld, 1949).

² En el paper original de Lamb, en la solución aparece la función $D_1(r)$, que según está definida en su trabajo (Lamb, 1904, p. 3), es equivalente a $-iH_1^{(2)}(r)$

$$K = -\frac{\Omega_S^2 \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2}}{F(\Omega_R)}$$

$$W_P = 2i\Omega_S^2 e^{-i\Omega_P x} \int_0^\infty \frac{(\Omega_P - i\xi) \overline{\alpha_2} (2(\Omega_P - i\xi)^2 - \Omega_S^2)^2}{F(\Omega_P - i\xi) f(\Omega_P - i\xi)} e^{-\xi x} d\xi$$

$$W_S = 2i\Omega_S^2 e^{-i\Omega_S x} \int_0^\infty \frac{(\Omega_S - i\xi) \overline{\alpha_1}}{F(\Omega_S - i\xi)} e^{-\xi x} d\xi$$

$$W_S^* = -2i\Omega_S^2 e^{-i\Omega_S x} \int_0^\infty \frac{(\Omega_S - i\xi) \overline{\alpha_1} (2(\Omega_S - i\xi)^2 - \Omega_S^2)^2}{F(\Omega_S - i\xi) f(\Omega_S - i\xi)} e^{-\xi x} d\xi$$

Ahora bien, para obtener la expresión de los desplazamientos verticales, como primer paso, se debe volver a la primera de las ecuaciones [1.24]:

$$I_w = -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \left[2\pi\Omega_R K \sin(\Omega_R r \cosh(s)) - 2\pi i\Omega_R K e^{-i\Omega_R r \cosh(s)} + W_P + W_S + W_S^* \right] ds$$

De las identidades para las funciones de Bessel (ver Anexo 4), queda:

$$I_u = -i\pi\Omega_R K J_0(\Omega_R r) + i\pi\Omega_R K H_0^{(2)}(\Omega_R r) - \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty W_P \cosh(s) ds + \int_0^\infty W_S \cosh(s) ds + \int_0^\infty W_S^* \cosh(s) ds \right] \quad [1.37]$$

Ahora volviendo a la primera de las [1.23], y reemplazamos por el valor de I_w (nos olvidamos por el momento de los términos W_P , W_S y W_S^*):

$$w(r) = \frac{P\Omega_R i}{2G} K \left[-J_0(\Omega_R r) + H_0^{(2)}(\Omega_R r) \right] + C \frac{\Omega_S^2}{2} J_0(\Omega_R r)$$

Para poder determinar la constante C , es conveniente expresar las funciones de Bessel de 1er y 2do orden, en términos de las funciones de Hankel (ver Anexo 4):

$$w(r) = \left[-\frac{P\Omega_R i}{4G} K + C \frac{\Omega_S^2}{4} \right] H_0^{(1)}(\Omega_R r) + \left[\frac{P\Omega_R i}{4G} K + C \frac{\Omega_S^2}{4} \right] H_0^{(2)}(\Omega_R r)$$

Nuevamente se aplica la “condición de radiación” de Sommerfeld vista en el punto anterior para despejar la constante C . Entonces,

$$-\frac{P\Omega_R i}{4G} K + C \frac{\Omega_S^2}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad C = \frac{P\Omega_R i}{G\Omega_S^2} K$$

Reemplazando en la expresión de $w(r)$, y agregando el factor de tiempo, queda¹:

$$w(r, t) = \frac{P\Omega_R i}{2G} K H_0^{(2)}(\Omega_R r) e^{i\omega t} + P + S + S^*$$

Los términos P , S y S^* son las componentes de ondas P y S que se vieron antes, y que están definidas en la ecuación [1.37]. Éstos términos suelen disiparse muy rápido para valores crecientes de r , por lo que en gene-

1 En el paper original de Lamb, en la solución aparece la función $D_0(r)$, que según está definida en su trabajo (Lamb, 1904, p. 3) es equivalente a $-iH_0^{(2)}(r)$.

ral, se considera sólo el primer término, el de las ondas de Rayleigh, como la solución del problema, para valores alejados de la fuente.

1.5 CARACTERÍSTICAS DE LAS ONDAS DE RAYLEIGH

En el punto anterior obtuvimos una expresión analítica para los desplazamientos radiales y verticales, dónde éstos estaban compuestos por ondas de Rayleigh y ondas P y S. Analizamos acá, un poco más detalladamente algunas características de las ondas de Rayleigh obtenidas, que son las que más influyen en el fenómeno de propagación de ondas.

$$u_r(r,t) = \frac{P\Omega_R i}{2G} HH_1^{(2)}(\Omega_R r) e^{i\omega t}$$

$$w(r,t) = \frac{P\Omega_R i}{2G} KH_0^{(2)}(\Omega_R r) e^{i\omega t}$$

Como las funciones de Hankel no tienen forma explícita, para obtener conclusiones acerca de la naturaleza de las funciones, conviene expresarlas según su expansión asintótica.

$$H_\nu^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i\left[\rho - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]} \left[1 + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \right]$$

Despreciando los términos de orden superior los desplazamientos puede ser expresados según,

$$u_r(r,t) = \frac{P\Omega_R i}{2G} H \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega_R r}} e^{-i\left(\Omega_R r - \omega t - \frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$w(r,t) = \frac{P\Omega_R i}{2G} K \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega_R r}} e^{-i\left(\Omega_R r - \omega t - \frac{\pi}{4}\right)}$$
[1.38]

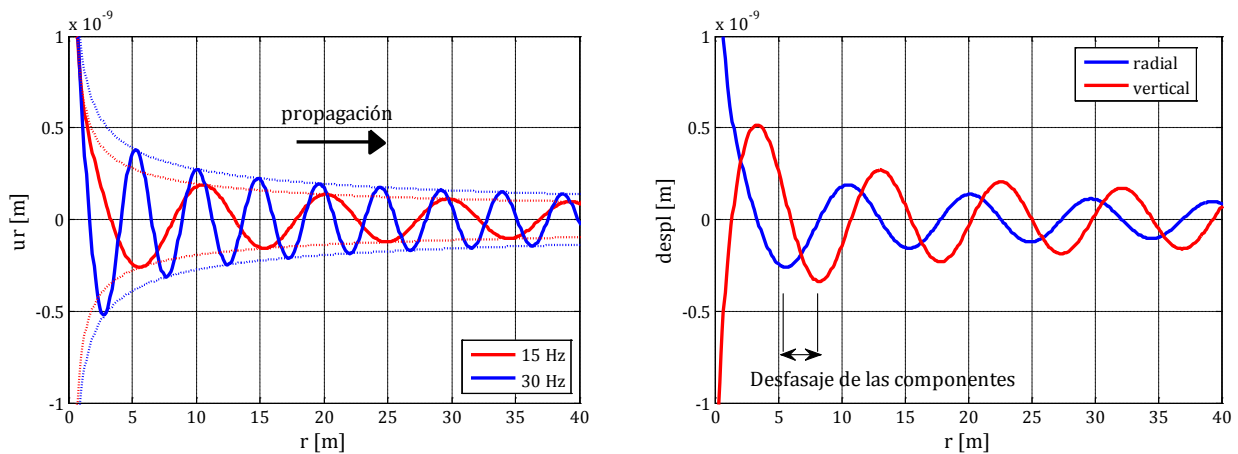


FIG. 1-9 - CARACTERÍSTICAS DE ONDAS DE RAYLEIGH

Se ve claramente que se trata de un tren de ondas que se propagan alejándose del origen con velocidad $c_R = \omega/\Omega_R$ y cuya amplitud se ve atenuada con la raíz cuadrada de la distancia al origen, y dicha atenuación depende de la frecuencia de excitación. Ésta atenuación no se debe a efectos de disipación propios del material (recordar que se supuso un material perfectamente elástico), sino se trata de un “amortiguamiento por radiación”, debido a que la energía entregada por la fuerza se debe propagar en zonas cada vez más grandes del

espacio elástico. También, de los gráficos se puede deducir que el desplazamiento de una partícula de la superficie sufre un movimiento elíptico anti horario, cuyo eje mayor es casi vertical.

1.5.1 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Ya se vio que las ondas son armónicas en el tiempo, y que se propagan alejándose del origen. Nos resta caracterizar entonces, la amplitud y su variación a lo largo de la superficie del terreno. Para mayor visualización, separamos la parte temporal de las expresiones de las ondas.

$$\begin{aligned} u_r(r, \omega, t) &= H_u(r, \omega) P e^{i\omega t} \\ w(r, \omega, t) &= H_w(r, \omega) P e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{1.39}$$

Esta forma de expresar la respuesta, permite poner en evidencia el factor amplitud, relativo al valor de la carga. En otras palabras, las funciones $H(r, \omega)$ son la relación entre la amplitud de los desplazamientos en un punto dado del espacio, y la amplitud de la carga, para un valor cualquiera de la frecuencia de excitación ω . Como se vio al inicio del capítulo a esta función $H(r, \omega)$ se la denomina “Función de transferencia compleja” del terreno ante una carga puntual y vertical (hágase la analogía con la función de transferencia típica de un sistema dinámico de 1 GL). Se observa que la función de transferencia es función también de la distancia r entre el punto de aplicación de la excitación, y el punto de observación. Se puede pensar que es una función de transferencia entre dos puntos cualesquiera de la superficie, uno donde actúa la carga, y el otro en donde se observan los desplazamientos

Por lo tanto, las funciones de transferencia de las ondas de Rayleigh ante una excitación puntual, están dadas por:

$$\begin{aligned} H_u(r, \omega) &= \frac{\Omega_R^i}{2G} H H_1^{(2)}(\Omega_R r) \\ H_w(r, \omega) &= \frac{\Omega_R^i}{2G} K H_0^{(2)}(\Omega_R r) \end{aligned} \tag{1.40}$$

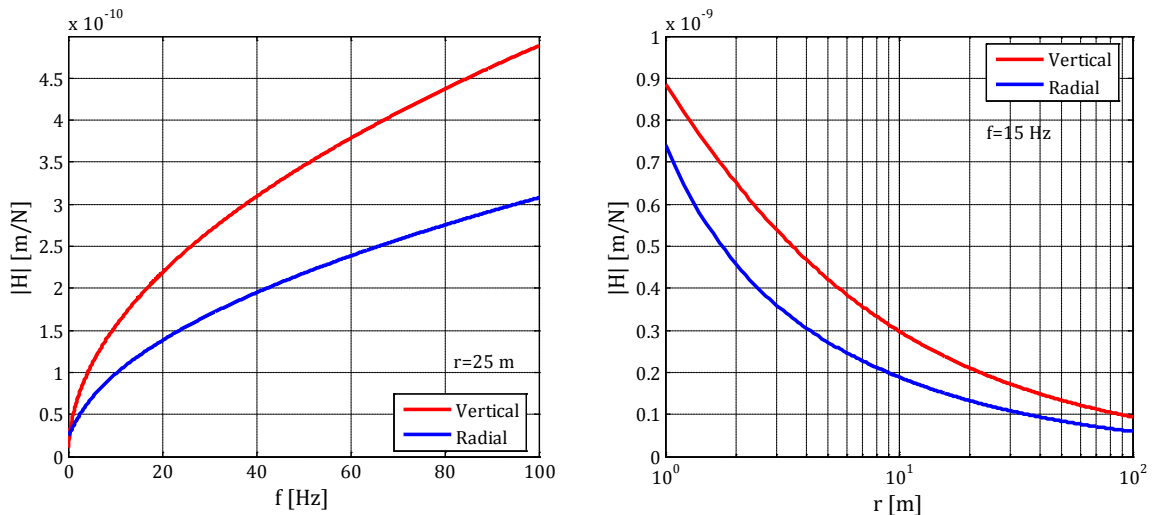


FIG. 1-10 - AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTO DE LAS ONDAS

Se ve que la amplitud crece con la frecuencia de excitación (aunque las frecuencias mayores se amortigüen más según [1.38]), y tiene un rápido decaimiento cerca de la fuente, que luego va achatándose a medida que se aleja el punto de observación. Estas características pueden observarse mejor al expresar las funciones de

Hankel según su expansión asintótica, como se hizo en el inciso anterior. También se observa que la amplitud de los desplazamientos verticales es mayor que la de los desplazamientos horizontales. Esto queda cuantificado en el siguiente gráfico.

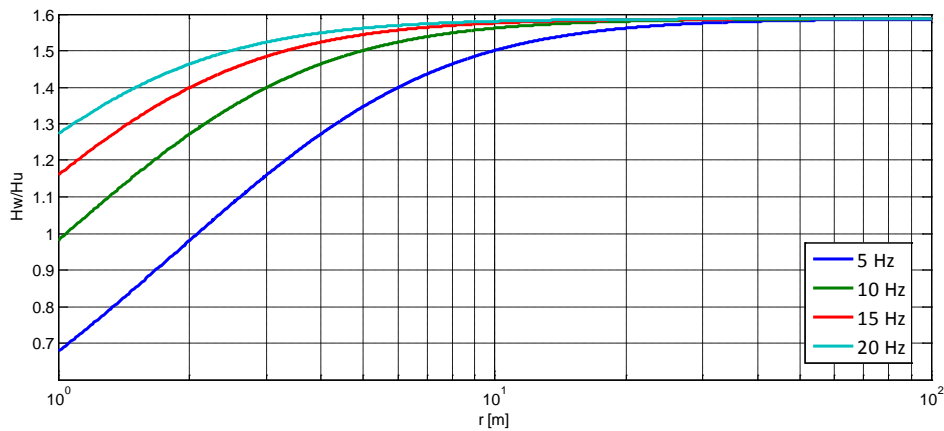


FIG. 1-11 - RELACIÓN ENTRE DESPLAZAMIENTOS VERTICALES Y HORIZONTALES

Puede observarse que la relación aumenta con la frecuencia y es casi siempre mayor a 1, lo que implica amplitudes verticales más grandes, como se veía en los gráficos de la Fig. 1-10. Sin embargo, hay que aclarar que si bien para distancias muy cercanas a la fuente (menores a 1m) las amplitudes radiales pueden ser mayores a las verticales. Esto se sucede en una zona donde las ondas de Rayleigh no son las que más pesan en la respuesta total, por lo que considerar la respuesta para distancias tan chicas no es compatible con el modelo planteado. Para cualquier distancia razonable de la fuente, y cualquier valor de excitación, la relación entre amplitudes variará entre 1.5 y 1.6 como cota superior.

Para obtener las expresiones de las funciones de transferencia de las velocidades y aceleraciones en un punto cualquiera, hay que derivar respecto del tiempo las expresiones [1.39]. Es sencillo ver que las funciones de transferencia estarán dadas por:

$$\begin{aligned} H_{\dot{w}}(\omega, r) &= (i\omega)H_w(\omega, r) \\ H_{\ddot{w}}(\omega, r) &= (-\omega^2)H_w(\omega, r) \end{aligned} \quad [1.41]$$

Los cocientes entre magnitudes verticales y horizontales serán iguales que para los desplazamientos (Fig. 1-11), puesto que el factor de la frecuencia se anula en cualquier caso.

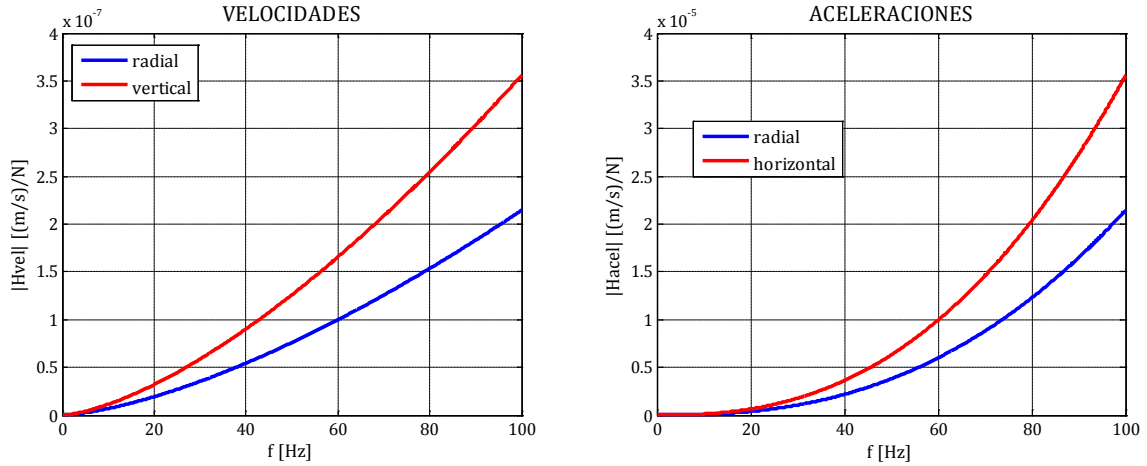


FIG. 1-12 - FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES

1.5.2 ATENUACIÓN DE LAS ONDAS

Es útil también, obtener una medida de la atenuación de la amplitud de las ondas. Esto es, encontrar un parámetro que defina que tanto disminuye la amplitud de la onda a medida que se aleja de la fuente. Lo más común, es definir al decaimiento mediante la relación entre la amplitud de dos puntos situados distancias r_1 y r_2 de la fuente.

$$\Delta_{r_2-r_1} = \frac{|H(r_2, \omega)|}{|H(r_1, \omega)|} = \frac{H_1^{(2)}(\Omega_R r_1)}{H_1^{(2)}(\Omega_R r_2)}$$

$$\Delta_{r_2-r_1} \cong \frac{\frac{P\Omega_R i}{2G} H \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega_R r_1}} e^{-i(\Omega_R r_1 - \omega t - \frac{3\pi}{4})}}{\frac{P\Omega_R i}{2G} H \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega_R r_2}} e^{-i(\Omega_R r_2 - \omega t - \frac{3\pi}{4})}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$$

Si se expresa $r_2 = r_1 + \Delta r$, entonces la expresión para la amplitud relativa queda,

$$\Delta_{r_2-r_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + \Delta r}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \Delta r / r_1}}$$

Se define la magnitud $\kappa = \Delta r / r_1$, que es una medida del espaciamento entre puntos, relativo a la distancia a la fuente.

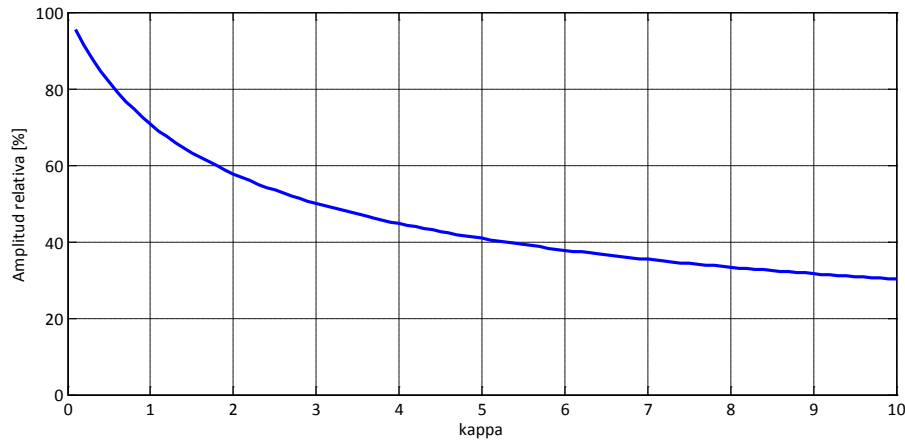


FIG. 1-13 - DECAIMIENTO DE LA AMPLITUD CON LA DISTANCIA

En el gráfico se ve como disminuye la amplitud relativa entre los puntos cuando aumenta el parámetro adimensional κ . Cuando la distancia entre puntos de observación está en el orden de la distancia del primer punto a la fuente, el decaimiento está cerca del 75%. Cuando la distancia entre puntos es muy chica respecto de la distancia a la fuente ($\kappa \ll 1$), la amplitud relativa se va acercando al 100%, por lo que la amplitud en ambos puntos es muy similar. Esto es de esperarse, puesto que estando muy lejos de la fuente, pequeñas diferencias de ubicación entre puntos de observación son despreciables. Hay que destacar, que el decaimiento sólo depende de cuestiones geométricas, y no están involucrados los parámetros mecánicos del suelo. Esto está en línea con la definición de amortiguamiento por radiación”, lo que implica un amortiguamiento debido a la geometría del problema, y no al comportamiento mecánico.

2 EL EFECTO VISCOELÁSTICO EN EL PROBLEMA DE LAMB

En la teoría de la elasticidad con la que fue encarado el problema original de Lamb, se supone que el estado tensional del material depende únicamente del estado de deformaciones en un punto del continuo, y que dicha relación es lineal (Ley generalizada de Hooke). Ahora bien, se puede tener en cuenta una ley constitutiva (también lineal, aunque no necesariamente) que involucre los estados pasados de las variables para su determinación en cada instante. A este tipo de materiales se los conoce como viscoelásticos; según (Fung, 1965 p. 20),

“...una clase de material que conserva linealidad entre carga y deflexión, pero la relación lineal depende de un tercer parámetro, el tiempo. Para esta clase de material, el estado presente de deformación no puede ser determinado por completo, a menos que se conozca la historia entera de carga.”

La principal implicancia de este modelo, es que la energía potencial es disipada en parte (en un material elástico, toda la energía es almacenada como deformación, y no se pierde nada en un ciclo de carga y descarga), y las ondas en dicho material se amortiguan con el tiempo (Hudson, 1980 pp. 188 - 189).

El modelo viscoelástico, lógicamente implicará la utilización de nuevas variables que describan la relación con la historia pasada de las tensiones y deformaciones. Estas variables pueden ser “físicas”, es decir, que se deben a razones físico-químicas propias del material, por ejemplo, efectos disipativos por la fricción interna entre partículas (muy común en materiales como el suelo). O pueden ser del tipo “fenomenológicas”, es decir que son construcciones puramente matemáticas, pero que responden a fenómenos empíricos. Ambos tipos suelen estar presentes a la hora de representar el comportamiento del material, en este caso particular, el suelo.

2.1 INTRODUCCIÓN A LA VISCOELASTICIDAD LINEAL

Se hace, en primer lugar, una revisión teórica de la teoría elemental de sólidos viscoelásticos, haciendo hincapié en los distintos modelos constitutivos. Para análisis más detallados se puede ver (Borcherdt, 2009) y (Christensen, 1982).

2.1.1 VISCOELASTICIDAD UNIDIMENSIONAL

Por simplicidad se comienza viendo cómo es la relación entre tensión y deformación para un problema unidimensional, como podría ser una barra sujeta a tracción simple. En este caso, la relación para un material viscoelástico puede ser expresada matemáticamente según¹:

$$p(t) = \int_{-\infty}^t r(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau$$

Donde $r(t)$ es la función de “relajación”, cuyo significado físico indica la forma con que varía $p(t)$ ante una deformación impuesta unitaria y constante en el tiempo (del tipo $u(t) = H(t)$)². Como la función de tensiones

¹ Ver (Borcherdt, 2009, p. 2)

² $H(t)$ se entiende a la función de Heavyside definida como $H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

$p(t)$, no puede depender de tiempos futuros (principio de causalidad), se puede extender, sin modificar en nada el resultado, la integral a todo el dominio real¹:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau = r * d\varepsilon \quad [2.1]$$

De manera inversa, se puede definir:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t-\tau) \frac{\partial p}{\partial \tau} d\tau = c * dp \quad [2.2]$$

Donde $c(t)$ es la denominada función de “creep”, y es la forma que tomarían las deformaciones en el tiempo, ante una carga unitaria $p(t) = H(t)$.

Consideramos ahora, un movimiento armónico, en régimen permanente del sistema, donde se deduce que las variables variarán en el tiempo según²:

$$\begin{aligned} p(t) &= P e^{i\omega t} \\ \varepsilon(t) &= E e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Si reemplazamos estas expresiones en las relaciones [2.1] y [2.2], queda,

$$\begin{aligned} P &= i\omega R(\omega) E = M(\omega) E \\ E &= i\omega C(\omega) P = J(\omega) P \end{aligned} \quad [2.3]$$

Donde,

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ C(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

Son las transformadas de Fourier de las funciones de relajación y creep respectivamente.

Se observa que las tensiones y deformaciones quedan completamente definidas, si conocemos la función de relajación $r(t)$, o la función de creep $c(t)$, correspondiente al modelo mecánico definido para el material (ver (Borcherdt, 2009) (Christensen, 1982) (Fung, 1965)).

Ahora bien, es importante hacer un análisis en términos energéticos del sistema para observar el comportamiento del mismo, y su comparación con el comportamiento de un sistema elástico. En un caso general, la energía del sistema en un instante infinitesimal de tiempo es $ed\mathbf{t} = \mathbf{p}d\boldsymbol{\varepsilon}$. Entonces, se puede despejar que la energía por unidad de tiempo, o en otras palabras, la tasa de cambio de la energía del sistema está dada por $e = \mathbf{p}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Donde el punto indica derivada respecto del tiempo. Si se considera una excitación armónica, la relación entre las tensiones y deformaciones está definida en las ecuaciones [2.3], y reemplazando las componentes

¹ Se define al producto de convolución como $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)d\tau$; este producto tiene la siguiente propiedad conmutativa $f * dg = df * g$

² Está claro que las magnitudes físicas están representadas por la parte real de las expresiones.

reales de dichas expresiones en la ecuación del cambio de energía, puede llegarse a que (ver (Borcherdt, 2009) y (Christensen, 1982)),

$$e = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{|M|^2}{\operatorname{Re}(M)} \varepsilon^2 \right) - \left(\frac{1}{\omega} \frac{|M|^2}{\operatorname{Im}(M)} \dot{\varepsilon}^2 \right)$$

Integrando la ecuación de arriba en el tiempo, a lo largo de un ciclo entero de carga y descarga, se observa que la integral del primer término se anula, por lo que la variación de energía neta a lo largo de un ciclo es el aporte del segundo término (con un signo negativo delante). Éste término representa la energía disipada en el ciclo, y es una de las características más importantes del comportamiento viscoelástico. En el caso de un material elástico, las magnitudes $M(\omega)$ y $J(\omega)$ son números reales¹, por lo que se observa que el segundo término de la ecuación anterior es nulo, y por lo tanto, también lo es la variación de energía luego de un ciclo de carga y descarga. En otras palabras, no hay energía disipada, sino que toda almacenada y devuelta.

2.1.2 VISCOELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL

En el punto anterior se describió como es la relación entre tensiones y deformaciones para un modelo unidimensional, de un material con comportamiento viscoelástico lineal. El objetivo es extender la relación constitutiva a la mecánica del sólido tridimensional. Es decir, encontrar una relación tensiones-deformaciones ($\sigma_{ij} \leftrightarrow \varepsilon_{ij}$) que represente el comportamiento viscoelástico lineal. En particular, debemos generalizar la relación constitutiva [2.1] para un problema que involucre las 3 coordenadas espaciales. Análogamente al caso unidimensional, se define un sólido viscoelástico lineal, a uno cuya historia de tensiones $\sigma_{ij}(t)$ se relaciona con la historia de deformaciones $\varepsilon_{ij}(t)$ según²,

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \tau}(\tau) d\tau$$

Donde C_{ijkl} es un tensor de 4to orden denominado “función de relajación tensorial”. En forma compacta, se puede definir según la notación del producto de convolución,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} * d\varepsilon_{kl}$$

Análogamente al sólido elástico lineal, la relación constitutiva puede expresarse como,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \delta_{ij} r_\lambda(t) * \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + 2r_G(t) * \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \\ \sigma_{ij} &= \delta_{ij} r_\lambda(t) * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + r_G(t) * \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad [2.4]$$

Donde $r(t)$ representa la función de relajación según el modelo mecánico elegido para el material; y el producto escalar es un producto de convolución.

Nuevamente, se considera un movimiento armónico:

¹ Para deducir esto, basta con seleccionar funciones de creep, o de relajación, constantes en el tiempo.

² Ver (Fung, 1965, pp. 412 - 415)

$$\begin{aligned} u_j &= U_j e^{i\omega t} \\ \sigma_{kl} &= P_{kl} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

La relación [2.4] toma la siguiente forma,

$$P_{ij} = \delta_{ij} i\omega \bar{r}_\lambda(\omega) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) + i\omega \bar{r}_G(\omega) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Siendo $\bar{r}(\omega)$ la transformada de Fourier de la función de relajación correspondiente al modelo mecánico adoptado para el material,

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Las ecuaciones de equilibrio dinámico pueden escribirse de manera análoga a las del material elástico lineal:

$$(M_\lambda(\omega) + M_G(\omega)) \nabla \nabla U + M_G(\omega) \nabla^2 U + \omega^2 \rho U = 0 \quad [2.5]$$

Donde,

$$M_\lambda(\omega) = i\omega R_\lambda(\omega)$$

$$M_G(\omega) = i\omega R_G(\omega)$$

De esta manera, se ve que para definir el comportamiento mecánico para el material viscoelástico deben determinarse los comportamientos de las funciones de relajación para dos constantes elásticas, como son la 1er constante de Lamé y el módulo de elasticidad transversal. Por lo general, y por simplicidad, suele asumirse que ambas constantes responden al mismo comportamiento viscoelástico, aunque podrían estudiarse las consecuencias de no seguir este criterio. Se ve claramente la simplicidad de la introducción de la viscoelasticidad en la propagación de ondas en régimen permanente.

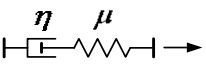
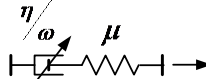
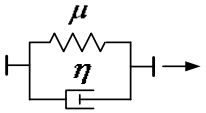
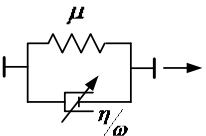
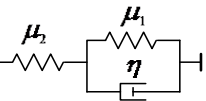
2.2 MODELOS MECÁNICOS SIMPLES

Como se vio antes, para definir el comportamiento mecánico del material, es preciso definir una función de relajación, que representa físicamente la manera en que varían las tensiones al aplicar una deformación unitaria y constante en el tiempo. Esta función se puede obtener a partir de modelos mecánicos simples como son, el resorte elástico ($\sigma = \mu \epsilon$) y el amortiguador viscoso clásico ($\sigma = \eta \dot{\epsilon}$), y su combinación para obtener distintos comportamientos viscoelásticos. Es importante destacar que el modelo elástico, puede aparecer como caso particular de cualquiera de los modelos viscoelásticos.

En la siguiente tabla se resumen algunos modelos básicos¹:

¹ Ver (Borcherdt, 2009, pp. 13 - 14)

TABLA 1 - MODELOS MECÁNICOS BÁSICOS

Modelo mecánico	Función de relajación $r(t)$	Coef. de amortiguamiento	$M(\omega) = i\omega R(\omega)$
Maxwell		$\mu e^{-(\mu/\eta)t} H(t)$	$\zeta = \frac{\mu}{\eta}$ $\mu(1 - i\omega\zeta)^{-1}$
Maxwell (hysteretic damping)		$\mu e^{-(\mu\omega/\eta)t} H(t)$	$\zeta = \frac{\mu}{\eta}$ $\mu(1 - i\zeta)^{-1}$
Voigt		$\eta\delta(t) + \mu H(t)$	$\zeta = \frac{\eta}{\mu}$ $\mu(1 + i\omega\zeta)$
Voigt (hysteretic damping)		$\frac{\eta}{\omega}\delta(t) + \mu H(t)$	$\zeta = \frac{\eta}{\mu}$ $\mu(1 + i\zeta)$
Standard linear ¹		$M_R \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_e} \right) e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right] H(t)$	--- $M_R \frac{1 + i\omega\tau_e}{1 + i\omega\tau_p}$

2.3 PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS DE RAYLEIGH

Para encarar el análisis del problema de Lamb, el procedimiento a seguir es el mismo que para el caso elástico lineal ya analizado, por lo que se hará hincapié solamente en aquellos pasos en el nuevo análisis difiera del ya realizado.

Hay que determinar los desplazamientos $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{i\omega t}$ que satisfagan la ecuación de equilibrio dinámico[2.5], con las condiciones de borde ya vistas en el análisis del problema elástico. Esto se debe a que lo único que cambió en el análisis es la relación constitutiva del material, y no las demás hipótesis de linealidad. Se descompone el vector solución según Helmholtz:

$$\mathbf{U} = \nabla\Phi + \nabla_x\Psi$$

La solución del problema se obtendrá luego de resolver las ya vistas ecuaciones potenciales, para problemas con simetría de revolución:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi + \Omega_p^2\Phi &= 0 \\ \nabla^2\Psi_\theta - \frac{\Psi_\theta}{r} + \Omega_s^2\Psi_\theta &= 0 \end{aligned}$$

Donde ahora,

¹ $M_R = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ Módulo de elasticidad relajado

$\tau_p = \frac{\eta}{\mu_1 + \mu_2}$ Tiempo de relajación bajo deformación constante

$\tau_e = \frac{\eta}{\mu_1}$ Tiempo de relajación bajo tensión constante

$$\Omega_p^2 = \frac{\rho\omega^2}{M_\lambda(\omega) + 2M_G(\omega)}$$

$$\Omega_s^2 = \frac{\rho\omega^2}{M_G(\omega)}$$

Es importante destacar acá que la parte real de ambos números es positiva, y la parte imaginaria negativa (se encuentran en el 3er cuadrante del plano complejo). Esto puede probarse viendo que las expresiones de $M(\omega)$ son siempre números complejos de parte real e imaginaria positivas.

Se observa que el problema a resolver es exactamente análogo que para el material perfectamente elástico, con la salvedad que los números de onda Ω_s y Ω_p son ahora número complejos, en lugar de reales puros, que dependen de la frecuencia de excitación ω . Esto implica en que el camino a seguir para la resolución del problema es el mismo.

De manera análoga al problema elástico, las transformadas de las funciones potenciales son:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_0 &= Ae^{-\alpha z} \\ \bar{\Psi}_1 &= Be^{-\beta z}\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\text{Donde } \alpha = \sqrt{k^2 + \Omega_p^2} \text{ y } \beta = \sqrt{k^2 + \Omega_s^2}$$

Y los desplazamientos,

$$\begin{aligned}\bar{u}_{r1} &= -Ake^{-\alpha z} + B\beta e^{-\beta z} \\ \bar{w}_0 &= -A\alpha e^{-\alpha z} + Bke^{-\beta z}\end{aligned}$$

Planteando las condiciones de borde se llega al mismo sistema de ecuaciones ya visto:

$$\begin{bmatrix} 2M_G(k^2 - \Omega_p^2) - \bar{\lambda}\Omega_p^2 & -2M_G\beta k \\ 2\alpha k & -[2k^2 - \Omega_s^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 2\pi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{M}\bar{A} = \bar{P}$$

Ahora bien, en este caso, la inversa \bar{M}^{-1} existe para todo $k \in \mathbb{R}$, debido a que el determinante de la matriz \bar{M} no tiene ceros reales (ver Anexo 2), por lo que el sistema homogéneo tendrá como única solución a la trivial, y la solución completa del sistema estará dada por: $\bar{A} = \bar{M}^{-1}\bar{P}$

$$A = \frac{P(2k^2 - \Omega_s^2)}{2\pi M_G F(k)} ; B = \frac{Pk\alpha}{\pi M_G F(k)}$$

Recordando que $F(k) = (2k^2 - \Omega_s^2)^2 - 4k^2\alpha\beta$ (función de Rayleigh compleja)

Se llega de esta manera a que las transformadas de los desplazamientos son:

$$\bar{u}_{r1}(k, 0) = -\frac{P}{2\pi M_G} \frac{k(2k^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha\beta)}{F(k)}$$

$$\bar{w}_0(k, 0) = \frac{P}{2\pi M_G} \frac{\Omega_s^2\alpha}{F(k)}$$

Y, de lo visto de las transformadas de Hankel, la expresión analítica para los desplazamientos superficiales es:

$$\begin{aligned}
 u_r(r,0) &= -\frac{P}{2\pi M_G} \int_0^\infty \frac{k^2(2k^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha\beta)}{F(k)} J_1(kr) dk \\
 w(r,0) &= \frac{P}{2\pi M_G} \int_0^\infty \frac{k\Omega_s^2\alpha}{F(k)} J_0(kr) dk
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Nuevamente podemos reducir el problema a resolver las siguientes integrales:

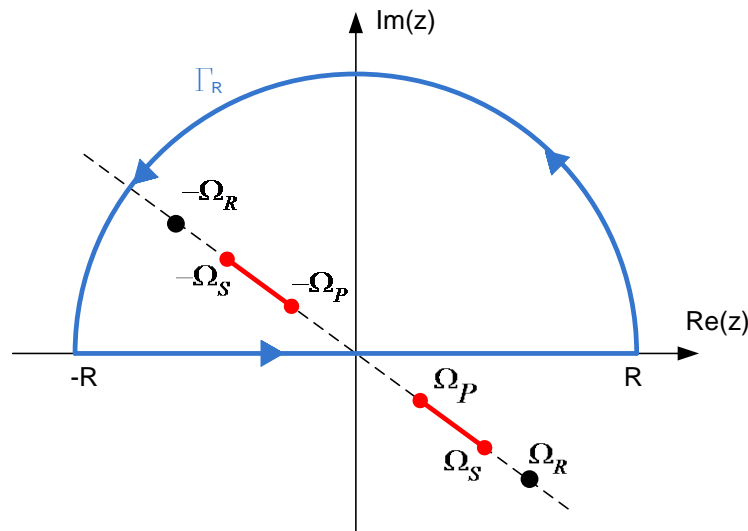
$$\begin{aligned}
 U &= \int_{-\infty}^\infty \frac{k^2(2k^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha\beta)}{F(k)} e^{ikx} dk \\
 W &= \int_{-\infty}^\infty \frac{k\Omega_s^2\alpha}{F(k)} e^{ikx} dk
 \end{aligned}$$

2.3.1 SOLUCIÓN APROXIMADA PARA LA INTEGRAL U

Nuevamente se debe extender la función del integrando al dominio complejo, para usar las herramientas de la integración en dicho dominio. Por analogía con el caso elástico, definimos,

$$\Theta(z) = \frac{z^2(2z^2 - \Omega_s^2 - 2\alpha\beta)}{(2z^2 - \Omega_s^2)^2 - 4z^2\alpha\beta} e^{izx}$$

En esta función aparece solamente el término $\alpha\beta$ cuyo dominio de definición y cortes de ramificación son señalados en el Anexo 1. Por lo tanto, se integra a través de un circuito cerrado, que contenga al eje real, y que no cruce dichos cortes de ramificación.



Contorno de integración para la evaluación de la integral U. Se integra en la parte superior del plano, para que el término exponencial del integrando esté acotado para cualquier valor positivo de x ($x = r \cosh(s)$).

FIG. 2-1 - CONTORNO DE INTEGRACIÓN U (CASO VISCOELÁSTICO)

Ahora bien, el problema, para nada menor, es determinar el valor de la función $\alpha\beta$ a lo largo del eje real, como se hizo en el primer capítulo. Es decir, cuál de sus dos posibles valores adopta, y si éste coincide con

el valor que adopta el integrando de la función real de acuerdo a [1.26]. En el presente trabajo, como se mencionó antes, solo se considerará el aporte de las ondas de Rayleigh en el fenómeno a analizar, que como bien sabemos del análisis para el caso elástico, están proporcionadas por los residuos en los polos de la función de Rayleigh (en este caso, número complejos). Si bien, la integral a lo largo del contorno de la figura anterior no coincidirá con el valor de la función de variable real a lo largo del eje real, éstos serán aportes únicamente a las ondas P y S.

La integral a lo largo del contorno de la figura es,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \Theta(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \Theta(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(k) dk = 2\pi i \text{Res}(\Theta(z), -\Omega_R)$$

Despreciando las contribuciones de las ondas P y S, la integral a lo largo del eje real de $\Theta(z)$ coincide con la integral U. Entonces queda,

$$U = 2\pi i \text{Res}(\Theta(z), -\Omega_R)$$

Para obtener la expresión del residuo, ver el Anexo 3:

$$\text{Res}(\Theta(z), -\Omega_R) = \frac{\Omega_R^2 (2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\alpha^* \beta^*)}{F'(-\Omega_R)} e^{-i\Omega_R x}$$

La expresión es la misma que para el caso elástico, con la salvedad de que las constantes γ son números complejos. Por lo tanto queda,

$$U = -2\pi i \Omega_R H e^{-i\Omega_R x} \quad [2.8]$$

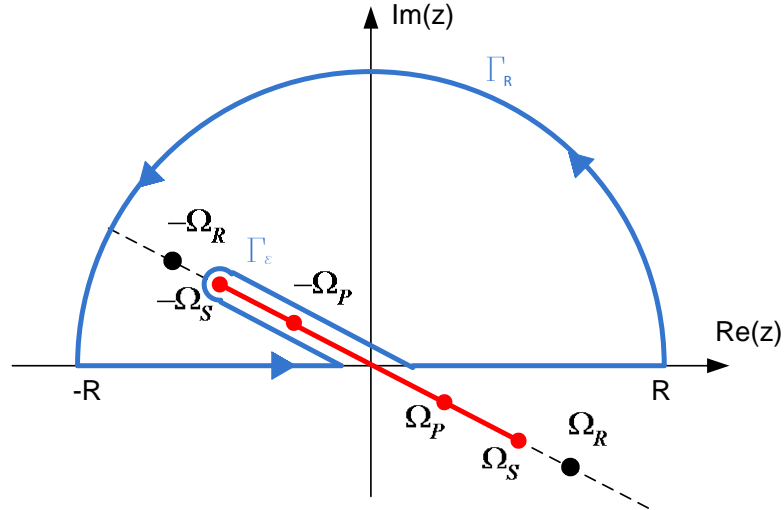
$$\text{Donde } H = -\frac{\Omega_R (2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2} \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_S^2})}{F'(-\Omega_R)}$$

2.3.2 SOLUCIÓN APROXIMADA PARA LA INTEGRAL W

De nuevo extendemos la función de variable real del integrando al plano complejo,

$$Y(z) = \frac{z\Omega_S^2 \alpha}{(2z^2 - \Omega_S^2)^2 - 4z^2 \alpha \beta} e^{izx}$$

Sin entrar en detalles, puesto que es el mismo procedimiento que antes, se analiza la integral de $Y(z)$ a lo largo del contorno de la siguiente figura. La diferencia radica en que ahora, hay que tener en cuenta los cortes de la función α , además de los de β (ver Anexo 1).



Contorno de integración para la evaluación de la integral W. Se integra en la parte superior del plano, para que el término exponencial del integrando esté acotado para cualquier valor positivo de x ($x = r \cosh(s)$).

FIG. 2-2 - CONTORNO DE INTEGRACIÓN W (CASO VISCOELÁSTICO)

Se recuerda de nuevo que solo nos interesan las ondas de Rayleigh que son aportadas por el residuo en el polo de la ecuación de Rayleigh, por lo que las partes en que la rama de la función compleja no coinciden con la función de variable real, y los segmentos de contorno alrededor de los cortes de ramificación (Γ_ϵ) son despreciables.

La integral a lo largo del contorno de la figura es,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \Upsilon(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \Upsilon(z) dz + \int_{\Gamma_\epsilon} \Upsilon(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon(k) dk = 2\pi i \text{Res}(\Upsilon(z), -\Omega_R)$$

Despreciando las contribuciones de las ondas P y S, la integral a lo largo del eje real de $\theta(z)$ coincide con la integral U. Entonces queda,

$$W = 2\pi i \text{Res}(\Upsilon(z), -\Omega_R)$$

Para obtener la expresión del residuo, ver el Anexo 3:

$$\text{Res}(\Upsilon(z), -\Omega_R) = \frac{-\Omega_R \Omega_S^2 \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2}}{F'(-\Omega_R)} e^{-i\Omega_R x}$$

Por lo tanto queda,

$$W = 2\pi i \Omega_R K e^{-i\Omega_R x} \tag{2.9}$$

Donde $K = -\frac{\Omega_S^2 \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2}}{F'(\Omega_R)}$

2.3.3 EXPRESIONES PARA LOS DESPLAZAMIENTOS

Resta ahora, reemplazar las expresiones obtenidas para U y W , y volver a las ecuaciones [2.7], mediante las definiciones de las funciones de Bessel, ya vistas en primer capítulo.

$$u_{,r}(r,0) = -\frac{P}{2\pi G^*} \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(-2\pi i \Omega_R^* H e^{-i\Omega_R^* r \cosh(s)} \right) \cosh(s) ds \right]$$

Recordando que $H_1^{(2)}(kr) = J_1(kr) - iY_1(kr) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ikr \cosh s} \cosh s ds$

Y agregando el factor de tiempo, los desplazamientos radiales puede expresarse según¹:

$$u_{,r}(r,t) = \frac{P\Omega_R^* i}{2G^*} H H_1^{(2)}(\Omega_R^* r) e^{i\omega t}$$

Se ve que la expresión es exactamente análoga a la obtenida para el caso elástico, pero incluye una diferencia radical al ser ahora, Ω_R un número complejo. Es fácil deducir que la expresión para los desplazamientos verticales también será análoga al caso elástico:

$$w(r,t) = \frac{P\Omega_R^* i}{2G^*} K H_0^{(2)}(\Omega_R^* r) e^{i\omega t}$$

Es importante observar, como se mencionó numerosas veces a lo largo del capítulo, que las funciones de transferencia compleja del sistema mecánico tienen las mismas expresiones que para el caso elástico, con la salvedad de que las constantes Ω_R y G son números complejos, y, en general, dependen de la frecuencia de excitación. Las funciones de transferencia para distintos modelos constitutivos simples, se pueden ver en el siguiente inciso.

2.4 CARACTERÍSTICAS DE LAS ONDAS

Para observar mejor cuál es el efecto de que la raíz de la ecuación de Rayleigh Ω_R sea un número complejo, conviene expresar a las funciones de Hankel, según su expansión asintótica:

$$H_\nu^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i\left[\rho - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]} \left[1 + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \right]$$

De esta manera, los desplazamientos se pueden expresar como,

$$u_{,r}(r,t) = \frac{P\Omega_R^* i}{2G^*} H \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega_R^* r}} e^{-i\left(\Omega_R^* r - \omega t - \frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$w(r,t) = \frac{P\Omega_R^* i}{2G^*} K \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega_R^* r}} e^{-i\left(\Omega_R^* r - \omega t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Si se denomina $\Omega_R(\omega) = \eta(\omega) - i\xi(\omega)$

¹ En las expresiones de los desplazamientos se utiliza la notación $(\cdot)^*$, para señalar que son constantes complejas, a diferencia del problema de Lamb para material elástico.

$$u_{,r}(r,t) = \frac{P\Omega_R^* i}{2G^*} H \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega_R^* r}} e^{-\xi r} e^{-i\eta(r-c_R^* t) - i\frac{3\pi}{4}}$$

$$w(r,t) = \frac{P\Omega_R^* i}{2G^*} K \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega_R^* r}} e^{-\xi r} e^{-i\eta(r-c_R^* t) - i\frac{\pi}{4}}$$

Donde se ve de las expresiones que,

$$c_R^*(\omega) = \frac{\omega}{\eta(\omega)} \text{ (Velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh)}^1$$

$\xi(\omega)$ (Factor de amortiguamiento de las ondas de Rayleigh)

Se ve que el efecto de considerar un comportamiento viscoelástico del material produce un amortiguamiento de las ondas, de forma exponencial y que depende además de la frecuencia de excitación. El segundo aspecto a remarcar es que ahora, la velocidad con que se propagan las ondas de Rayleigh ya no es una propiedad intrínseca del suelo, sino que depende también de la frecuencia de excitación, lo que dará lugar al fenómeno de dispersión de las ondas². Por lo tanto, en un material viscoelástico, existen dos mecanismos bien diferenciados de disipación de energía en el suelo: el geométrico (disipación por radiación, propio del caso elástico), y el amortiguamiento del material (propio del caso viscoelástico).

La atenuación de la amplitud de las ondas con la distancia se expresa simplemente como el cociente entre la amplitud de los desplazamientos entre dos puntos cualesquiera. Siendo w_1 y w_2 dos puntos a una distancia r_1 y r_2 del origen respectivamente, el cociente entre las amplitudes de sus desplazamientos está dado por,

$$\Delta_{r_2-r_1} = \frac{|w(r_2)|}{|w(r_1)|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{r_2}} e^{-\xi r_2}}{\sqrt{\frac{1}{r_1}} e^{-\xi r_1}}$$

Reacomodando un poco la expresión queda,

$$\Delta_{r_2-r_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} e^{-\xi(r_2-r_1)} \quad [2.10]$$

En esta expresión, se ven claramente diferenciados los dos mecanismos de disipación de energía. El amortiguamiento por radiación está representado por el factor radical, y el amortiguamiento del material por el factor exponencial.

Si se escribe $r_2 = r_1 + \Delta r$, la amplitud relativa se puede escribir según,

$$\Delta_{r_2-r_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + \Delta r}} e^{-\xi \Delta r} = \sqrt{\frac{1}{1 + \Delta r / r_1}} e^{-\xi \Delta r} \quad [2.11]$$

1 Se coloca el asterisco en c_R^* para diferenciar este valor del la raíz de la función de Rayleigh compleja c_R (ver 0), también denominada “velocidad compleja”. En general, para amortiguamiento bajos, la parte real de c_R se aproxima mucho a c_R^* .

2 Para una introducción al fenómenos de dispersión de las ondas, ver (Graff, 1975, pp. 58 - 67)

Se analizarán ahora, algunos de los modelos básicos propuestos en el inciso 2.2, en términos de las funciones de transferencia, velocidades de propagación de ondas, y del factor de amortiguamiento de las mismas.

2.4.1 MODELO MECÁNICO DE MAXWELL

El modelo de Maxwell puede ser representado por un amortiguador viscoso colocado en serie con un resorte elástico. El comportamiento viscoelástico puede ser definido por el coeficiente de amortiguamiento ζ , como se muestra en la Tabla 1. Por simplicidad, se supondrá que dicho coeficiente es el mismo, tanto para el comportamiento en compresión pura, como en corte. Es decir, ambas constantes elásticas tendrán el mismo coeficiente de amortiguamiento ζ .

Siendo entonces, $\lambda^*(\omega) = \lambda(1 - i\omega\zeta)^{-1}$ y $G^*(\omega) = G(1 - i\omega\zeta)^{-1}$

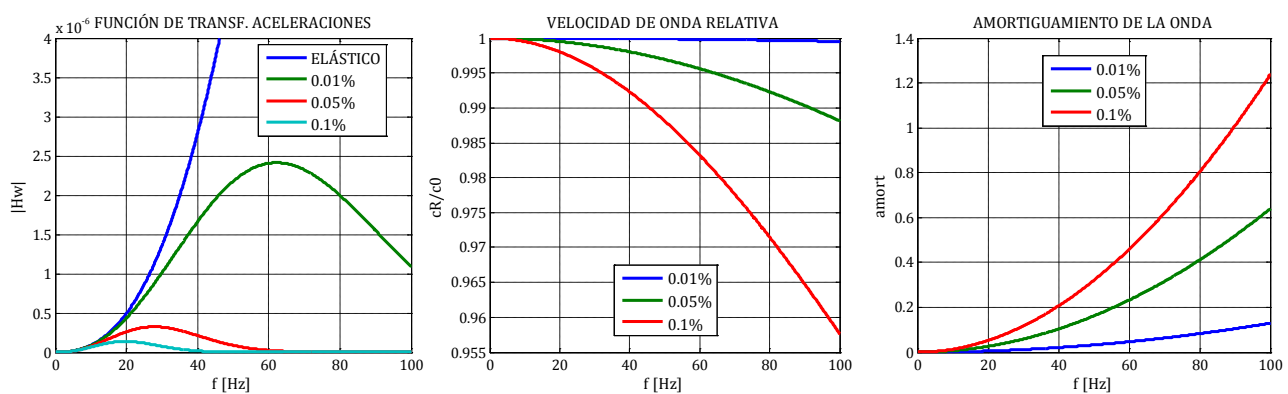


FIG. 2-3 - PROPIEDADES MODELO MECÁNICO DE MAXWELL

Se observa que la función de transferencia de los desplazamientos tiene un pronunciado descenso para las frecuencias más altas, y está claro que mayor será el descenso de la curva mientras más lejos se esté de la fuente. Esto es debido al rápido amortiguamiento de las frecuencias altas, que puede observarse en el tercero de los gráficos. También hay que resaltar que la velocidad de propagación es menor que para el caso elástico, aunque para un rango muy grande de frecuencias, la diferencia es muy chica, como puede verse en el segundo de los gráficos.

2.4.2 MODELO MECÁNICO DE VOIGT

Este modelo es también conocido como modelo de Kelvin-Voigt, y consiste en un amortiguador viscoso colocado en paralelo con un resorte elástico. Es uno de los modelos viscoelásticos más utilizados para representar el comportamiento dinámico del suelo y muchos otros materiales. Al igual que el modelo de Maxwell, sus propiedades viscoelásticas quedan definidas por un coeficiente de amortiguamiento ζ (aunque de expresión diferente al anterior, ver Tabla 1).

En este caso: $\lambda^*(\omega) = \lambda(1 + i\omega\zeta)$ y $G^*(\omega) = G(1 + i\omega\zeta)$

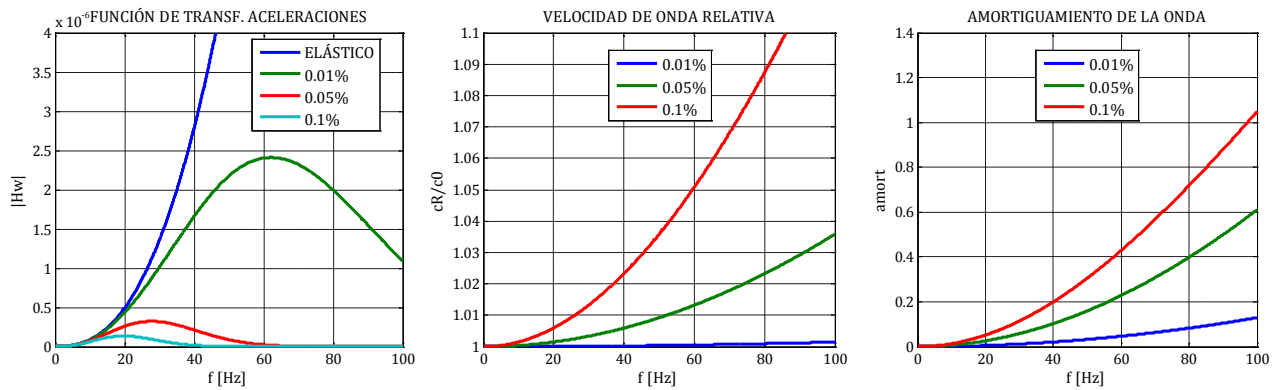


FIG. 2-4 - PROPIEDADES MODELO MECÁNICO DE VOIGT

El comportamiento de la función de transferencia de los desplazamientos es idéntico al del modelo de Maxwell, presentando el mismo decaimiento para las frecuencias más altas. En esto no hay diferencias. La diferencia principal radica en que la velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh es, para este modelo, mayores a las del modelo elástico, y su variación es un poco más pronunciada. En cuanto al amortiguamiento en la propagación de las ondas, no hay diferencias sustanciales respecto al modelo de Maxwell.

El modelo tiene ciertas limitaciones desde el punto de vista físico. El crecimiento indefinido de la velocidad de propagación de las ondas con la frecuencia, implica pulsos de energía que llegan a cualquier punto del medio en tiempo nulo, lo que es físicamente imposible. De todas maneras, el amortiguamiento prácticamente anula las frecuencias altas, por lo que esta limitación no tiene impacto práctico.

A partir de lo analizado para los dos modelos mecánicos vistos, se puede apreciar que no existen diferencias sustanciales entre un modelo y otro (Voigt y Maxwell) para el caso de ciclos periódicos de carga y descarga en régimen permanente, como es el caso que se está analizando en este trabajo. Es decir, la elección de uno u otro modelo no es decisiva para el comportamiento dinámico de la respuesta del sólido. A continuación se observa otro modelo que sí presenta algunas diferencias con los ya analizados.

2.4.3 MODELO MECÁNICO DE VOIGT CON HYSTERETIC DAMPING

En los modelos que se vieron previamente, la energía disipada por ciclo ante deformaciones armónicas, es proporcional a la amplitud de la deformación y a la frecuencia de la misma ($W_{cycle} \propto |\omega| \Delta_0^2$)¹. Sin embargo, en muchos materiales se observa una menor dependencia de la frecuencia, en la energía disipada por ciclo. De hecho, puede llegar a ser independiente para un amplio rango de frecuencias. A este comportamiento se lo denomina “histerético” (hysteretic). Este modelo es no-causal, esto es, la fuerza se anticipa a la historia de deformaciones para vibraciones transitorias. Esto violaría el principio físico de que en un sistema físico, el efecto no puede preceder a la causa. Es por esto, que este modelo se usa básicamente en vibraciones en régimen permanente². Suele representar la disipación de energía por fricción en seco.

En este caso las constantes son independientes de la frecuencia de excitación, $\lambda^* = \lambda(1 + i\zeta)$ y $G^* = G(1 + i\zeta)$

1 Esta deducción puede verse en cualquier libro de la bibliografía básica de viscoelasticidad.

2 Ver (Inaudi & Kelly, 1995). También se lo puede encontrar como “structural damping” o “complex-valued stiffness”.

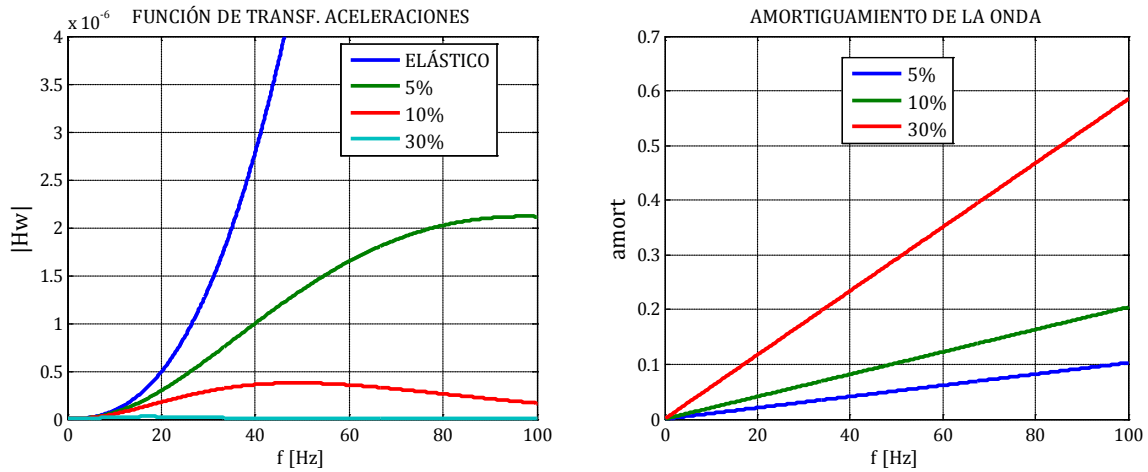


FIG. 2-5 - PROPIEDADES MODELO MECÁNICO DE VOIGT CON HYSTERETIC DAMPING

En este modelo, la función de transferencia presenta también un decaimiento en las frecuencias más altas, aunque mucho menos pronunciado que para los anteriores. Esto puede entenderse analizando el gráfico de la derecha, donde el crecimiento del amortiguamiento con la frecuencia es casi lineal, mientras que los anteriores modelos presentaban un crecimiento bastante más pronunciado. En este caso, la velocidad de propagación de las ondas no depende de la frecuencia de excitación, y no se produce el fenómeno de dispersión de las ondas.

3 COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SUELO

Hasta ahora se analizó un modelo analítico para representar el comportamiento dinámico de un sólido semi-infinito, viscoelástico lineal, isótropo y homogéneo. Ahora bien, la cuestión pasa por dilucidar si el suelo puede ser encasillado, de manera razonable, bajo esas hipótesis.

Puede definirse, de manera amplia, que el suelo es un material particulado, compuesto por un esqueleto de partículas sólidas, con una fase fluido-gaseosa entre medio. El tamaño de dichas partículas puede ser muy variado entre distintos tipos de suelo, y como en todo material particulado, sus propiedades macroscópicas dependerán fuertemente de la interacción entre las partículas, y de ellas con el medio fluido que las rodea. Esta definición parece tener poco que ver con el modelo de material utilizado en los capítulos previos, aunque se puede estudiar que en ciertos problemas, dicho modelo puede ser razonable. Una revisión exhaustiva de las hipótesis de distintos modelos y el comportamiento dinámico del suelo puede verse en (Santamarina, 2001). A propósito de la continuidad del medio de propagación, se puede citar de dicho texto,

“Small mechanical perturbations traverse particulate media without causing permanent effects or altering on-going processes. This observation is the foundation for dependable and versatile testing methods based on the propagation of elastic waves... If the wavelength is significantly larger than the characteristic dimension a_c of the medium, $\lambda \gg a_c$, then the wave traverses the material as a continuum.”

Ahora bien, el suelo en sí, dista mucho de ser homogéneo e isótropo siendo que suele estar compuesto de varios estratos con propiedades mecánicas diferentes, y además, dentro de un mismo estrato, la resistencia tiende a crecer con la profundidad. La presencia de inclusiones e interfaces no es de relevancia mientras el tamaño de la anomalía sea mucho menor que la longitud de onda, y en ese caso, puede suponerse un medio continuo y homogéneo cuyas propiedades combinen las del medio predominante, y de las demás anomalías. Sin embargo, la existencia de estas heterogeneidades en el medio, principalmente la existencia de distintos estratos, induce una atenuación aparente en la propagación de ondas superficiales, por encima de la intrínseca del material (Santamarina, 2001, p. 205). En cuanto al modelo constitutivo del suelo, suele elegirse un modelo viscoelástico lineal, principalmente por la simplicidad del modelo (cualquier modelo más complejo implicaría la inexistencia de soluciones analíticas explícitas), la capacidad analítica de representar disipación en el material, y sustentado por la baja magnitud de las oscilaciones en los problemas de vibraciones ambientales.

En resumen, puede considerarse, en los problemas involucrados en el presente trabajo, al suelo como un sólido continuo, homogéneo e isótropo, donde sus propiedades deben tener en cuenta la existencia de discontinuidades en el medio de propagación de la onda, y la ponderación de estratos con distintas propiedades. Esto se traduce también en la consideración de una atenuación mayor de la amplitud de la onda, además de la geométrica, y la intrínseca del material (Santamarina, 2001, p. 215).

3.1 PARÁMETROS ELÁSTICOS

Según el modelo viscoelástico propuesto para la modelización del suelo, son necesarios 3 parámetros para definir por completo su comportamiento elástico: densidad (ρ), Módulo de elasticidad transversal (G), Módulo de Poisson (ν). Ahora bien, la cuantificación de algunos de estos no es para nada sencilla, y depende fuertemente del fenómeno que se está analizando. Como se mencionó antes, las propiedades elásticas del medio, deben tener en cuenta la heterogeneidad que presenta el suelo en profundidad. La cuestión pasa, entonces, por determinar hasta qué profundidad deben considerarse los estratos de suelo, porque son influyentes en la propagación de las ondas superficiales.

En el análisis de propagación de ondas de Rayleigh visto en los primeros capítulos, se analizó únicamente la respuesta del semi-espacio en su superficie libre; nada se dijo acerca de la respuesta en estratos inferiores. Si bien ese análisis escapa al alcance del trabajo, es preciso obtener una idea de la influencia de esas ondas en niveles inferiores a la superficie. En la bibliografía relacionada¹ pueden encontrarse análisis detallados del comportamiento de las ondas de Rayleigh hacia el interior del semi-espacio (si bien se atenúan muy rápido hacia dentro del volumen). En la Fig. 3-1 se ve como varían los desplazamientos con la profundidad, según una ordenada normalizada con la longitud de onda $\lambda_r = c_r/f$. Puede verse que para una determinada profundidad y_1 , mayores serán los desplazamientos, a menor frecuencia f .

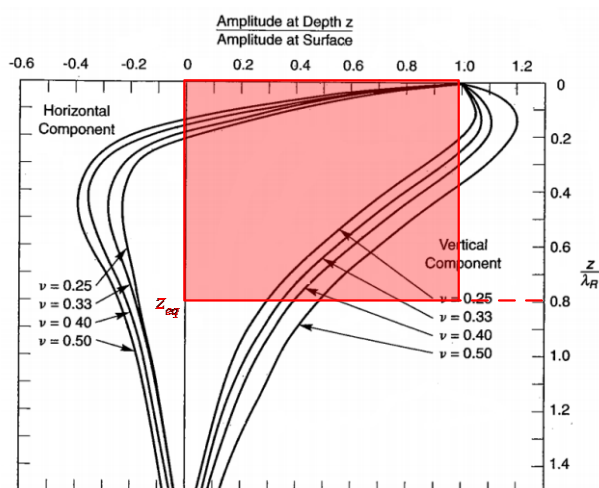


FIG. 3-1 - VARIACIÓN DE LAS ONDAS DE RAYLEIGH CON LA PROFUNDIDAD

Ahora bien, se ve que los desplazamientos se atenúan rápidamente con la profundidad, y que los estratos superficiales son los que propagan amplitudes más grandes. Esto indica que para obtener parámetros representativos del suelo como cuerpo homogéneo, se debe ponderar más los estratos superficiales que los más profundos, dentro del área de influencia de las ondas. En particular, la función de amplitudes relativas, puede usarse para ponderar las propiedades del suelo a distintas profundidades. En un método más simplificado, se puede reemplazar dicha función por una distribución rectangular de ordenada unitaria, y de profundidad tal, que sus áreas sean iguales (ver Fig. 3-1). De esta manera, la profundidad máxima de la función rectangular indica hasta qué profundidad se deben promediar las propiedades del suelo, para obtener un valor representativo para la propagación de las ondas. Se denominará a este valor, “profundidad de influencia equivalente” (z_{eq}).

Haciendo evaluaciones numéricas, se puede obtener que:

$$z_{eq} = 0.8 \frac{c_R}{f}$$

En el caso del salto coordinado de personas, por ejemplo, donde la frecuencia de excitación es muy baja, cercana a los 2 Hz, hay que considerar un promedio de los parámetros del suelo, hasta una profundidad considerable (Seguramente por encima de los 100 m). Esto en general implica, considerar suelos más rígidos (mayor G). En los problemas que involucran frecuencias superiores, sólo habrá que tener en cuenta los estratos más superficiales (en general, más blandos) de suelo. De todas maneras, no es el objetivo de este capítulo encontrar algún método riguroso para la determinación de las propiedades del suelo, si no encontrar alguna justificación cualitativa para la consideración de parámetros mecánicos del suelo en los distintos casos de análisis.

¹ Ver (Graff, 1975) (Achenbach, 1973) (Ewing, Jardetzky, & Press, 1957)

La estimación del Módulo de Poisson también estará relacionada con lo mencionado hasta ahora. El módulo de Poisson en suelos, puede variar en un amplio rango (0.20~0.50), y depende mucho del tipo de suelo. Los valores adoptados son tentativos, y se utiliza un módulo de 0.45 para estratos más superficiales, correspondiente a suelos cohesivos, y 0.35 para un promedio de estratos más profundos, o suelos granulares. Esto está en coincidencia con numerosos estudios publicados al respecto ((Yokota & Masashi, 1980), (Yang Fang, 2002)).

En la siguiente tabla se resumen los valores estimados para los parámetros del suelo, de acuerdo a diferentes estudios de suelos en la Ciudad de Buenos Aires.

TABLA 2 - RESUMEN DE PARÁMETROS ELÁSTICOS DEL SUELO

Tipo de excitación	Ubicación de mediciones	Frecuencia predominante [Hz]	z_{eq} [m]	G [MPa]	ν [-]
Salto coordinado de personas	Nuñez (CABA)	2.6	105	200	0.35
Vehículos sobre rieles	Gerli (Lanús)	20~30	5~10	50	0.45
Vehículos sobre carreteras	Belgrano (CABA)	10~20	10~20	40	0.45

3.2 PARÁMETROS VISCOSOS

Una vez establecido el modelo general, hay que plantear el problema de la elección de un determinado modelo constitutivo. Ya se mencionó anteriormente que la elección de un modelo viscoelástico lineal respondía a cuestiones de simplicidad analítica principalmente. Sin embargo, existen numerosos modelos viscoelásticos. La elección de uno de dichos modelos (descritos en el inciso 2.2) para describir el comportamiento dinámico del suelo no es trivial, y se requiere de muchos ensayos, y un profundo conocimiento del suelo, para adoptar racionalmente uno. Lo que sí está claro, es que no existe uno solo de estos modelos que se adecúe a cualquier tipo de suelo y en cualquier circunstancia (por lo menos estos modelos relativamente sencillos).

Por ejemplo, la consideración de un amortiguamiento tipo Voigt histerético es de uso frecuente para modelar el comportamiento dinámico de arenas secas. Citando a (Cornejo Córdoba, 2002),

“...With the assumption that the ratio viscosity times frequency to shear modulus is constant with frequency, Hardin [1965] suggested that within a large range of excitation frequencies, the damping behavior of dry sand can be described by the hysteretic damping...”

Esto se debe, principalmente, a que el principal mecanismo de disipación de energía en suelos granulares, es la fricción entre partículas (la disipación por fricción es un caso típico de amortiguamiento independiente de la frecuencia). Sin embargo este es un caso particular para arenas secas, y no puede extrapolarse a otros tipos de suelos. Es decir, no necesariamente este modelo representará adecuadamente el comportamiento de otros suelos sustancialmente distintos. De todas maneras, no es objetivo del presente trabajo realizar un estudio detallado del comportamiento mecánico del suelo, y de la ley constitutiva que lo gobierna, siendo esto, tema del área de la mecánica de suelos. En el trabajo se utilizará el modelo de Voigt con hysteretic damping para representar el comportamiento dinámico del suelo. Ya se vio en el capítulo anterior que prácticamente no hay diferencias entre el modelo de Voigt y el de Maxwell para oscilaciones en régimen permanente. La consideración de un amortiguamiento histerético responde a que es el modelo más utilizado en la bibliografía, aunque no están claras las razones para su implementación, en cualquier tipo de suelo.

Para estos modelos simples (Voigt y Maxwell), es necesario determinar sólo dos constantes para definir el comportamiento viscoso del material: los coeficientes de amortiguamiento para cada una de las constantes elásticas. Por ejemplo, para el modelo mecánico de Voigt habría que definir las constantes G^* y λ^* , correspondientes a las constantes complejas, $M_G = G + i\omega G^*$ y $M_\lambda = \lambda + i\omega\lambda^*$ respectivamente (ver ecuación [2.5]). En general, suelen definirse en términos del coeficiente de amortiguamiento dado por $\zeta = G^*/G$ (para el modelo de Voigt. Es la inversa para el modelo de Maxwell). La mayoría de los autores, acuerdan en señalar el mismo coeficiente de amortiguamiento para ambas constantes, lo que lleva a obtener un coeficiente de Poisson real; sin embargo, esto es sólo por simplicidad matemática, y no hay razón física para suponer que podrían tener coeficientes distintos (Hunt, Stochastic modelling of traffic-induced ground vibration, 1991).

En resumen, el comportamiento viscoso del material estará definido según una única constante: el coeficiente de amortiguamiento. Esto supone, claro, una gran simplicidad analítica al reducir el número de parámetros, pero tiene, en contraposición sus serias limitaciones de alcance, y es natural esperar que modelos constitutivos que involucren un mayor número de parámetros (Standard linear por ejemplo) se adapten mejor a distintos tipos de suelos.

4 MODELIZACIÓN DE ACCIONES Y RESPUESTA DEL SUELO

Dentro del proceso de modelar la propagación de ondas en el suelo, se mencionó previamente la necesidad de estudiar, por un lado la respuesta del medio ante acciones dinámicas (en este caso, una acción armónica), y por otro, la acción dinámica en sí. Hasta ahora se analizó con detalle el primero de estos dos aspectos. En este capítulo se analizan entonces, modelos analíticos para representar distintas cargas de carácter predominantemente periódico que son comunes de encontrar en el ámbito urbano: tráfico de vehículos y trenes, recitales masivos de personas y acción de maquinarias vibradoras. Una vez obtenidas las expresiones analíticas para las acciones, se acoplan al marco teórico estudiado en los capítulos anteriores para obtener expresiones analíticas de la respuesta del suelo ante cada una de las acciones mencionadas.

En la gran mayoría de las aplicaciones prácticas de la ingeniería y la física en general, los procesos físicos dependen de una innumerable cantidad de factores que son imposibles de modelizar en su totalidad. Debido a esto, cualquier modelo analítico está sujeto a cierto grado de incertidumbre, que no significa estar librado al azar en un sentido estricto, sino que depende de muchísimas variables que no pueden ser tenidas en cuenta en la modelización. En particular, en la mecánica sucede lo mismo, y las incertidumbres tendrán que ver con la dificultad para estimar la variación de las cargas en el tiempo, su magnitud, los parámetros mecánicos del sistema, los “ruidos” asociados al instrumento de medición, etc.

Para la modelización de procesos físicos existen entonces, dos caminos distintos: considerar un proceso determinístico adecuado (es decir, una muestra del proceso) cuyas propiedades estadísticas sean apropiadas (por ejemplo elegir valores promedio para los parámetros, o valores máximos con una determinada probabilidad de ocurrencia); considerar un modelo probabilístico para su determinación, que se encuentra enmarcado en lo que se conoce como “Teoría de los procesos aleatorios”. Estas alternativas no son exhaustivas, y puede haber situaciones intermedias.

4.1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE PROCESOS ALEATORIOS

En una primera definición, un proceso aleatorio (o estocástico) $\{P(t)\}$ es un conjunto de variables aleatorias P_i que están asociadas a un determinado parámetro, que en este caso será el tiempo. En un proceso aleatorio, para cada instante t_i dentro de un dominio definido, la variable no se conoce de manera unívoca, sino que se conoce una determinada probabilidad de que tome ciertos valores dentro de un rango (continuo o discreto). Esto es, se tiene una función de distribución de probabilidades para el proceso, en cada punto t . Para cada t , $p_i = P(t_i)$ es una variable aleatoria. Se supondrá que cada variable aleatoria es continua, es decir, que puede tomar un valor dentro de un conjunto continuo de valores (esto es el caso en la mayoría de las variables físicas).

Otra forma de ver un proceso aleatorio, es como un conjunto de funciones (o muestras), todas diferentes entre sí, que son el resultado de la evaluación, instante a instante, de las variables aleatorias. Un conjunto infinito de dichas muestras, representan en su totalidad, al proceso aleatorio (Fig. 4-1). En resumen, es una “función aleatoria” (en analogía con el concepto de variable aleatoria).

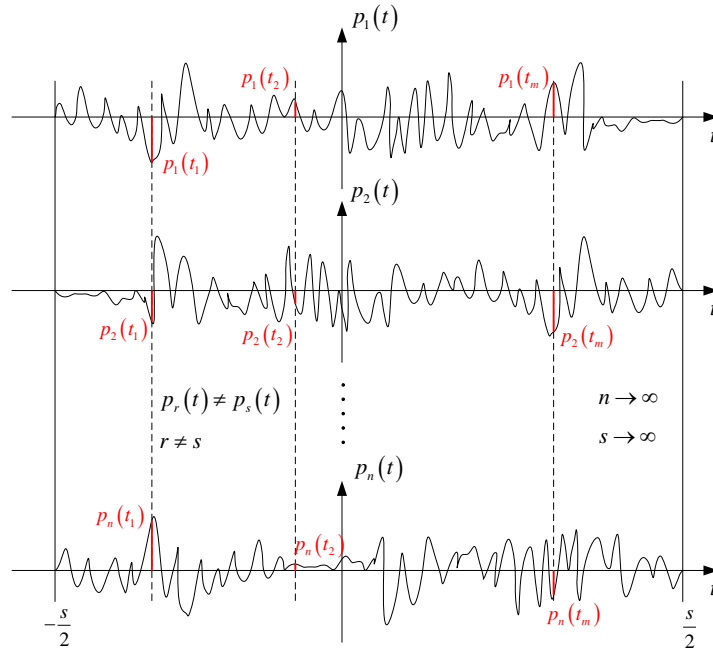


FIG. 4-1 – PROCESO ALEATORIO

En definitiva, un proceso aleatorio, es una sucesión (discreta o continua; finita o infinita) de puntos $p_i = P(t_i)$, cada uno siendo una variable aleatoria. Por lo tanto, para definir al proceso en términos probabilísticos, necesitamos conocer la función de densidad de probabilidad conjunta para la sucesión de variables aleatorias:

$$f_{p_1, p_2, \dots, p_N}(p_1, p_2, \dots, p_N)$$

En la gran mayoría de los casos no es posible conocer dicha función de distribución, sea por complejidad del proceso, o porque simplemente éste consta de una sucesión infinita de variables aleatorias. En general, bastará con conocer la distribución de probabilidad conjunta para una determinada cantidad de variables N , para representar de manera acertada a todo el proceso (Priestley, 1981, pp. 100 - 103). Más aún, se consigue una buena aproximación de las propiedades estadísticas del proceso, conociendo solo algunos parámetros importantes de dichas variables, como lo son la media μ_i , y las covarianzas σ_{ij} (momentos de primer y segundo orden)¹:

$$\begin{aligned} \mu_i &= E[P(t_i)] \\ \sigma_{ij} &= \text{cov}[P(t_i)P(t_j)] = E[(P(t_i) - \mu_i)(P(t_j) - \mu_j)] \end{aligned} \tag{4.1}$$

¹ En lo que respecta a la nomenclatura, es lo mismo mencionar a las variables con el subíndice i , que considerarlas como variables del tiempo $\mu_i = \mu(t_i)$ $\sigma_{ij} = \sigma(t_i, t_j)$. No debe confundirse esta nomenclatura con los parámetros mecánicos del material y el tensor de tensiones.

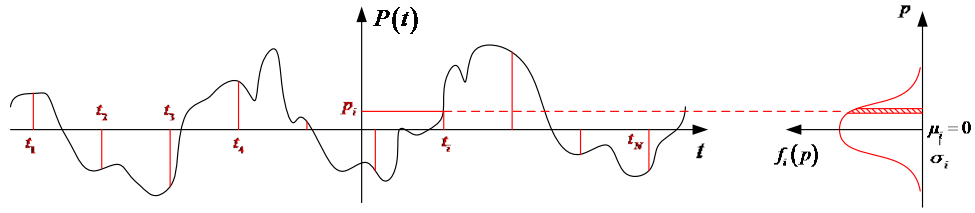


FIG. 4-2 - VARIABLES ALEATORIAS DE UN PROCESO

A la segunda de las ecuaciones [4.1]¹ se la denomina Función de Autocovarianza $K_{PP}(t_i, t_j)$, y depende de dos instantes de tiempo, para los cuales se calcule la covarianza entre las dos respectivas variables aleatorias (del mismo proceso, por eso se la llama Autocovarianza). También se define a la función de Autocorrelación según,

$$R_{PP}(\tau) = E[P(t_i)P(t_j)] \tag{4.2}$$

Y por las propiedades del operador $E[.]$, ambas funciones se relacionan según,

$$K_{PP}(t_i, t_j) = R_{PP}(t_i, t_j) - \mu_i \mu_j \tag{4.3}$$

Observar además que,

$$K_{PP}(t_i, t_i) = \sigma_i^2$$

Hay que hacer una aclaración acerca de cuándo se está hablando de una función de parámetro t continuo, y cuándo hablamos de una sucesión discreta de variables en t_1, t_2, \dots, t_N . Si lo que se tiene es un conjunto de datos, obtenido de mediciones digitales por ejemplo, del cual queremos determinar sus propiedades probabilísticas, entonces tenemos que hablar de una sucesión discreta. En cambio, si se trata de procesos aleatorios definidos mediante modelos analíticos, se podría hablar, en general, de funciones de t continuo (por ej. $0 < t < \infty$). En cuanto a los parámetros probabilísticos, esto no representa mayor complejidad, ya que conceptualmente la diferencia es de carácter numérico, y no físico. Se puede encontrar un análisis detallado y separado de estos tipos de procesos en (Priestley, 1981). En lo que sigue, se los tratará de manera indistinta.

4.1.1 PROCESOS GAUSSIANOS Y ESTACIONARIOS

Muchos procesos aleatorios en el campo de la ingeniería pueden ser representados como procesos aleatorios Gaussianos, es decir, cuya función de densidad de probabilidad conjunta es una función normal multivaluada. Esto se debe a varias razones. En primer lugar, se debe al “Teorema del límite central”, que establece que, bajo ciertas condiciones, la suma de un gran número de variables aleatorias se distribuye como una función Normal. En los procesos físicos, especialmente en el análisis de vibraciones mecánicas, esta suma representa la contribución de los numerosos factores “indeterminados” que afectan el proceso, y por eso la distribución Gaussiana suele ser una buena modelización. Por otro lado, dicha distribución tiene una forma analítica relativamente simple y puede determinarse a partir de las medias y covarianzas, lo que la hace una distribución idónea en muchas ocasiones. Un proceso aleatorio Gaussiano, implica que las distribuciones marginales de las

¹ $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ es el operador “esperanza” de $g(x)$ siendo ésta, una función de la variable aleatoria x , y $f(x)$ su función de distribución.

distintas variables son Gaussianas, que una combinación lineal de procesos Gaussianos es también un Gaussiano, y las derivadas de dichos procesos también lo son¹.

Suponer, entonces, un proceso aleatorio gaussiano, implica conocer la forma de la función de densidad de probabilidad conjunta del proceso, y que solo depende de la media de cada variable P_i y la covarianza entre cualesquiera dos variables. La función de distribución está dada por,

$$f(P_1, P_2, \dots, P_N) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\mathbf{Cov}_p|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_p)^T \mathbf{Cov}_p^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_p)] \right\} \quad [4.4]$$

Para la sucesión de variables aleatorias $p_i = P(t_i)$, necesitamos conocer:

$$\boldsymbol{\mu}_p = \begin{bmatrix} E\{P_1\} \\ \vdots \\ E\{P_N\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Cov}_p = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de la matriz \mathbf{Cov}_p se determinan según [4.1].

La siguiente hipótesis que se hace, es que los parámetros estadísticos de las distintas variables aleatorias es el mismo, es decir, las propiedades estadísticas del proceso no varían a lo largo del tiempo. Esto implica que las medias de cada variable son iguales $\mu_1 = \dots = \mu_N$ y que las covarianzas no dependen de los instantes t_i y t_j , sino sólo de su diferencia $\tau = |t_i - t_j|$. A un proceso de este estilo se lo denomina “estacionario”². Para este tipo de procesos las funciones [4.1] a [4.3] se pueden reescribir según,

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mu \\ K_{pp}(\tau) &= E[(P(t) - \mu)(P(t + \tau) - \mu)] \\ R_{pp}(\tau) &= E[P(t)P(t + \tau)] \\ K_{pp}(\tau) &= R_{pp}(\tau) - \mu^2 \end{aligned} \quad [4.5]$$

Para cada desfase τ , $K_{pp}(\tau)$ mide la covarianza entre los pares de variables aleatorias separadas ese tiempo³. Se puede interpretar a esta función, como una medida del grado de fluctuación de una función, puesto que mientras menos correlacionados estén los distintos valores del proceso (menor valor de $K_{pp}(\tau)$), más errá-

1 Esto es particularmente importante en el análisis de sistemas mecánicos lineales, como se verá más adelante.

2 En rigor, se lo denomina estacionario de 2do orden al proceso que cumple con dichas propiedades de su media (μ), su desvío (σ) y sus covarianzas. No indica nada acerca de los momentos de orden superior. Sin embargo, si el proceso es Gaussiano, la estacionalidad de 2do orden implica la de cualquier orden superior (Priestley, 1981, pp. 104 - 106; 113 - 114).

3 Se deduce aquí, que si se trata de una sucesión de variables en t_i , cada una separada un tiempo Δt , la función $R_{pp}(\tau)$ será discreta, y tendrá valores en $i\Delta t$ ($i = 1, 2, \dots, N$). De la misma manera, si la sucesión fuera continua, también lo será la función de Autocorrelación.

tica será la forma de la función¹. En la mayoría de los casos, dicha correlación decae a medida que crece el desfase, como es intuitivo esperar. Mientras más rápido decaiga, menos “memoria” tiene el proceso, y en el caso en que no haya correlación entre las variables se denomina “ruido blanco”, donde todas las variables son independientes de las anteriores.

En lo que respecta al presente trabajo, se trabajará siempre con procesos cuya media es 0, por lo que las funciones $K_{PP}(\tau)$ y $R_{PP}(\tau)$, coincidirán y la utilización de cualquiera de ellas, será indistinto. Esto, además implica que la varianza del proceso $\sigma^2 = E[(P(t) - \mu)^2]$ coincidirá con el cuadrado del valor rms, definido según $RMS^2 = E[P(t)^2]$, que es un parámetro muy utilizado en la física para medir valores promedio de potencia, contenidos en una señal (de cualquier magnitud física).

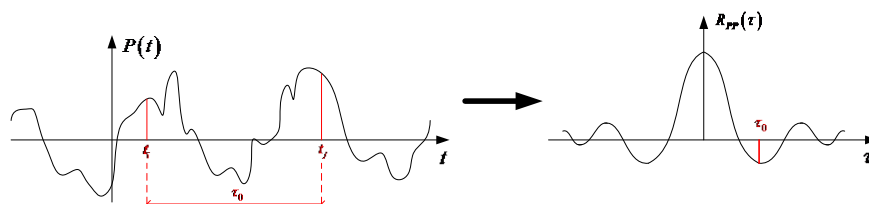


FIG. 4-3 - FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

Con lo visto anteriormente, se puede resumir que si se trata de un proceso aleatorio Gaussiano y estacionario, dicho proceso quedará completamente definido, en términos probabilísticos, si se conoce la media μ y su función $R_{PP}(\tau)$ (o $K_{PP}(\tau)$), puesto que ella determina las covarianzas entre los distintos valores instantáneos.

4.2 ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROCESOS

La importancia del análisis espectral radica en el hecho, de que dada una función del tiempo, que representa un proceso físico, la energía almacenada en dicho proceso (sea energía mecánica, eléctrica, térmica, etc) puede ser dividida entre la energía que lleva una suma (discreta o continua) de funciones armónicas. Esto hace sencillo el análisis de funciones cuya forma temporal pareciera complicada, y de la que es difícil obtener información en el dominio del tiempo. El análisis espectral se basa en la descomposición de la función temporal mediante Series de Fourier (para funciones periódicas), y Transformada de Fourier (para funciones aperiódicas). En el caso de procesos aleatorios, el concepto de análisis espectral es algo diferente, pero tiene un significado físico análogo al de los procesos determinísticos.

Otro aspecto importante del análisis espectral, es la relación entre los espectros de energía (o potencia) de una señal y su valor RMS. El valor RMS es una medida estadística de la magnitud de una señal, y es particularmente útil en el caso de señales altamente oscilatorias como los son las vibraciones. Se lo define como la raíz cuadrada de la media cuadrática de una función.

$$RMS = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt} \quad [4.6]$$

¹ Aquí se entiende que dos variables no correlacionadas, son dos variables independientes, aunque, en rigor de definición, esto no se cumple siempre.

4.2.1 PROCESOS DETERMINÍSTICOS PERIÓDICOS

Las funciones periódicas son aquellas en que se cumple que $f(t) = f(t + T)$, siendo T el período de dicha función. Comenzamos analizando una función de periodicidad $2T$. Esta función puede ser descompuesta como Serie de Fourier según,

$$X(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n t}{T}\right) \right] \quad [4.7]$$

O en su forma exponencial,

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n}{T}t} \quad [4.8]$$

Donde $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t} dt$

Observar que en [4.8] las frecuencias están definidas en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, mientras que para la expresión [4.7], sólo en el intervalo positivo. Esto, sin embargo es simplemente un artificio matemático, y las expresiones son análogas. La relación entre cada uno de los c_n con los a_n y b_n es unívoca y por ello no hay mayores inconvenientes con las expresiones.

Se puede demostrar, a partir del Teorema de Parseval¹, que la energía de la función $X(t)$, para un período de la misma (recordar que para funciones periódicas, la energía total es infinita), está dada por,

$$\text{Energía total en } (-T, T) = \int_{-T}^T X^2(t) dt = 2T \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

Ahora bien, si interesa computar la energía total de la función, es decir para $t \in (0, \infty)$, se encontrará el problema de que esta cantidad es infinita (la función no decae nunca). Sin embargo, al ser periódica, la energía concentrada en uno solo de sus ciclos alcanza para caracterizar el comportamiento total de la función (Priestley, 1981, p. 195). Lo que interesará, sin embargo, no es la energía total por cada período, sino la potencia de la señal, que es la energía que lleva por unidad de tiempo.

$$\text{Potencia total en } (-T, T) = \frac{\text{Energía total en } (-T, T)}{2T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2) \quad [4.9]$$

Por lo tanto, se puede ver que cada término de la sumatoria de [4.9] es la contribución total a la potencia, del término de la Serie de Fourier de período $2T/n$. Acá es donde se ve, el objetivo del análisis espectral, puesto que la expresión vista, permite conocer cómo se reparte la potencia (o energía) de la señal en las distintas frecuencias de las que está compuesto el proceso físico. Se define, de manera general, como espectro de potencia $S_X(\omega)$ a la función que representa, para cada frecuencia ω , la energía o potencia concentrada. Como se ve de la ecuación [4.9], el espectro será discreto, y tendrá valores en las frecuencias fundamentales de la fun-

¹ Según el Teorema de Parseval para series de Fourier, $\int_{-T}^T X^2(t) dt = 2T \{ \sum_0^{\infty} c_n^2 \}$ donde el término de la izquierda representa la energía contenida en la función $X(t)$ en el intervalo $(-T, T)$. Dicha integral converge solo para un determinado tipo de funciones, conocidas como "cuadráticamente integrables".

ción periódica, es decir, en $\left\{\frac{1}{2T}, \frac{2}{2T}, \dots, \frac{n}{2T}\right\}$. A esta función discreta se la denomina “Espectro de Potencia discreto” (Discrete Power Spectrum).

$$S_x(\omega_n) = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2) = 2|c_n^2| \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad [4.10]$$

Esta expresión, indica la potencia que aporta cada armónico ω_n a la potencia total de la señal. Hay que mencionar también, que $n = 0$ corresponde al término $a_0/2$, que es un término constante. En este trabajo siempre consideramos procesos con parte constante nula (o media 0, para el caso de procesos aleatorios), pues la parte constante no tiene influencia en la generación de vibraciones en el suelo.

El valor RMS de una función periódica es igual al valor RMS de un período de la función. Volviendo a la expresión del Teorema de Parseval, puede verse que para una función periódica la relación entre su valor RMS y su espectro de potencia está dada por,

$$RMS^2 = \sum_{n=0}^{\infty} S_x(\omega_n) \quad [4.11]$$

4.2.2 PROCESOS DETERMINÍSTICOS APERIÓDICOS

De igual manera, para una función aperiódica, puede representarse la energía que dicha señal contiene aplicando el Teorema de Parseval para funciones aperiódicas.

$$\text{Energía total en } (-\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{X}(\omega)|^2 d\omega \quad [4.12]$$

Nuevamente, se tiene la descomposición de la energía total, como la suma (en su forma límite) de términos que representan la contribución de un determinado grupo de frecuencias. Más precisamente, se ve que $|\bar{X}(\omega)|^2 d\omega$ representa la contribución a la energía total, de las componentes cuyas frecuencias están en el rango $(\omega, \omega + d\omega)$. La función $\bar{X}(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función original, y la anterior, es una medida de la densidad de energía de la señal en una frecuencia dada (la energía para un frecuencia puntual sería nula). En este caso no tiene sentido hablar de potencia, puesto que se trata de una función con período teóricamente infinito. Esto implicaría una potencia nula [4.9].

De esta manera se define al “Espectro de densidad de energía” de un proceso determinístico aperiódico al doble del cuadrado del módulo de la transformada de Fourier de la función. Esto es,

$$S_X(\omega) = 2|\bar{X}(\omega)|^2 \quad [4.13]$$

El factor 2, aparece porque suele considerarse solo el rango de frecuencias positivas del espectro. Si $X(t)$ es una función real, entonces su transformada es una función par, por lo que, al definirla solo en el rango positivo de frecuencias y conservar el valor de la energía total, solo hay que duplicarla¹.

El valor RMS de la función está relacionada con su espectro de densidad de energía según,

¹ Se observa que hay completa analogía con el caso de funciones periódicas.

$$RMS^2 = \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \int_0^\infty 2|\bar{X}(\omega)|^2 d\omega \tag{4.14}$$

4.2.3 PROCESOS ALEATORIOS ESTACIONARIOS¹

En el caso de los procesos aleatorios estacionarios no se puede aplicar de manera directa el análisis espectral que se realiza en el campo de las funciones determinísticas, puesto que en general una muestra de un proceso aleatorio estacionario no será una función periódica, ni tendrá Transformada de Fourier². Hay que aclarar inmediatamente, que una muestra de un proceso aleatorio no será, excepto en algún caso muy particular³, una función periódica, y por lo tanto no puede aplicarse el desarrollo mencionado en el punto anterior.

Se recurre a formalizar una expresión que represente la cantidad de energía de la señal, por cada intervalo de tiempo $2T$, y hacer tender el mismo a infinito. Esto es similar al concepto de espectro de energía para funciones aperiódicas, pero con la diferencia de que ahora la energía total no es 0, sino todo lo contrario, es infinita (esto debido a que se trata de procesos estacionarios). Por ello se recurre, al igual que en funciones periódicas, al concepto de potencia. La interpretación física es que, no se busca representar la energía total con que contribuye cada frecuencia (este es el significado físico de la Transformada de Fourier), puesto que ésta sería infinita, sino que se representa la potencia que aporta cada frecuencia, es decir, la energía por unidad de tiempo (Priestley, 1981, pp. 206 - 210). El concepto es análogo al de las funciones periódicas.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{P}_T(\omega)|^2}{2T} = \text{contribución a la potencia total de } P(t), \text{ de las componentes con frecuencias entre } \omega + d\omega$$

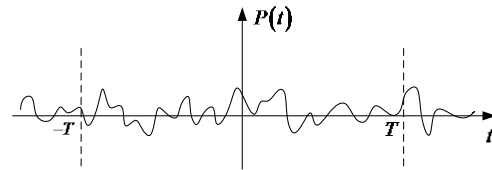


FIG. 4-4 - MUESTRA TRUNCADA DEL PROCESO

Donde $\tilde{P}_T(t)$ es la transformada de Fourier de la muestra truncada de longitud $2T$ (Fig. 4-4).

Este valor particular calculado depende únicamente de la muestra analizada, y se recuerda que un proceso es un conjunto de funciones, en rigor, son infinitas muestras aleatorias. Es decir el valor de la densidad de potencia calculada⁴ arriba, variará de muestra a muestra para un mismo proceso. Por lo tanto, si se quiere definir un valor que tenga en cuenta todo el proceso, se debe promediar dichos valores en todos las realizaciones. Se define entonces a la función de “Densidad de Potencia Espectral” (PSD).

$$S_{PP}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ E \left[\frac{|\tilde{P}_T(\omega)|^2}{2T} \right] \right\} \tag{4.15}$$

1 (Priestley, 1981, pp. 206 - 218)

2 Esto se debe a que, en general, no son funciones absolutamente integrales (no decaen a 0, a medida que el tiempo tiende a ∞). El hecho de que tienda a 0, hace que el proceso no sea estacionario, pues sus propiedades cambiarían cuando $t \rightarrow \infty$.

3 Este caso particular se trata de los Procesos Armónicos, que son funciones armónicas de amplitud y período constantes, y un desfase que es una variable aleatoria con densidad uniforme en los 360° (Priestley, 1981, pp. 147 - 150).

4 Se usa ahora el término, densidad de potencia, puesto que se trata de potencia concentrada en un entorno infinitesimal de una frecuencia dada (análogo al concepto de densidad de energía). El rango de frecuencias es continuo.

Donde $P_T(t)$ es una muestra truncada del proceso aleatorio, y $\tilde{P}_T(\omega)$ es su transformada de Fourier.

No es difícil ver, que la función $S_{PP}(\omega)$ (de ahora en adelante PSD), se definirá, en general, sobre un conjunto continuo de frecuencias (en general, $(-\infty, \infty)$), al igual que la Transformada de Fourier para funciones determinísticas continuas. Sin embargo, si las muestras del proceso son discretas, también lo será la PSD, como es normal en el caso de estimaciones de espectros a partir de registros digitales (se verá en el siguiente capítulo).

Al igual que para el espectro discreto analizado en el punto anterior, la PSD puede ser definida también solo para el intervalo positivo de frecuencias, teniendo este espectro el doble del valor del que se define para todo el eje real (esto se debe a que la función PSD, al igual que el espectro discreto, es simétrica respecto del origen). De esta manera se extiende el concepto de análisis espectral a procesos aleatorios estacionarios, y cuyo significado físico es análogo al de las funciones determinísticas. Si bien [4.15] es una definición rigurosa de PSD, se puede demostrar una relación con la función de Autocorrelación que hace más aplicable la definición de la función de Densidad de Potencia Espectral¹:

$$S_{PP}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{PP}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad [4.16]$$

$$R_{PP}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{PP}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

Y de la definición en [4.16], se puede obtener otro resultado importante de la PSD,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{PP}(\omega) d\omega = R_{PP}(0) = \sigma^2 \quad [4.17]$$

Queda entonces claro, que conocer cualquiera de dichas funciones conlleva la misma información del proceso, puesto que una define a la otra, y viceversa. Es inmediato entonces, que si un proceso es Gaussiano y estacionario, el conocer su PSD (y por ende, su función de Autocorrelación) quedará completamente definido, en términos probabilísticos, el proceso.

Resumiendo las propiedades espectrales, se puede decir que:

- Para funciones periódicas, se tiene una distribución de potencia, dada por [4.9], sobre una sucesión discreta de frecuencias.
- Para funciones aperiódicas se tiene una distribución de energía sobre un rango continuo de frecuencias.
- Para procesos aleatorios, para los cuales existe la función PSD, se tiene una densidad de potencia sobre un rango continuo de frecuencias, dada por [4.16], con la excepción de los Procesos armónicos ya mencionados, de características similares a las funciones periódicas.

4.3 ANÁLISIS ESPECTRAL DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA MECÁNICO

El análisis espectral de la respuesta de un sistema mecánico está íntimamente relacionado con el concepto de “Función de transferencia compleja” de un sistema, ya visto en los dos primeros capítulos de este

¹ Recordar que para procesos con media 0, es indistinto el uso de $K_{PP}(\tau)$ o $R_{PP}(\tau)$

trabajo. A continuación se estudia la relación entre el espectro de la excitación sobre un sistema mecánico, y el espectro de la respuesta del sistema.

4.3.1 PROCESOS DETERMINÍSTICOS PERIÓDICOS

En primer lugar se considera la respuesta del sistema ante una excitación determinística. Se analiza la respuesta del sistema físico ante una excitación armónica $P_0 e^{i\omega t}$ y se obtiene lo que se conoce como “respuesta de frecuencia compleja del sistema” (Newland, 1993, pp. 53-58). Este tipo de análisis es útil para encontrar la respuesta en el dominio de la frecuencia ante distintas acciones¹.

$$\text{INPUT: } p(t) = P_0 e^{i\omega t}$$

$$\text{OUTPUT: } u(t) = H(\omega) P_0 e^{i\omega t}$$

Es importante destacar que conociendo la función $H(\omega)$, que sólo depende de las características mecánicas y geométricas del sistema, se puede definir completamente la respuesta. Conocida la respuesta del sistema ante una excitación armónica, se puede conocer inmediatamente la respuesta para una carga periódica, puesto que ésta se puede descomponer en una suma de funciones armónicas (Serie de Fourier) según [4.7]. Esto puede hacerse para sistemas lineales, como lo es el problema de Lamb, en donde vale el principio de superposición de efectos.

Escribiendo la carga según [4.8], y su EPD dado por [4.9],

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{i\frac{n\pi}{T}t}$$

$$S_p(\omega_n) = |p_n|^2 \quad n = -\infty, \dots, \infty$$

La respuesta del sistema estará dada por,

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n\pi}{T}\right) p_n e^{i\frac{n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{T}t} \quad [4.18]$$

Donde p_n es la amplitud de la carga de frecuencia $\omega_n = \pi n/T$

Se ve que la respuesta es también una función periódica, de período $2T$, por lo que para determinar sus propiedades espectrales, necesitamos conocer su Espectro de Potencia Discreto (EPD de ahora en adelante). Para eso se aplica la ecuación [4.9], en la [4.18].

$$S_u(\omega_n) = 2|c_n|^2 = \left| H\left(\frac{n\pi}{T}\right) \right|^2 2|p_n|^2$$

El espectro de potencia de la respuesta está dado, entonces, por:

$$S_u(\omega_n) = |H(\omega_n)|^2 S_p(\omega_n) \quad [4.19]$$

¹ Esto valdrá en sistemas lineales, para los cuales la respuesta está relacionada con la excitación mediante una (o un sistema) ecuación diferencial lineal.

Esta expresión vale tanto, para la definición del espectro en el rango $(-\infty, \infty)$ como en el $(0, \infty)$, siempre y cuando, sean congruentes el espectro de la excitación con el de la respuesta (es decir, si el espectro del input está definido sobre todo los números enteros, también lo estará el de la respuesta).

4.3.2 PROCESOS DETERMINÍSTICOS APERIÓDICOS

Como se vio en el inciso 4.2.1, las funciones aperiódicas pueden ser interpretadas como una suma continua de funciones armónicas, cuya amplitud para cada conjunto de frecuencias entre ω y $\omega + d\omega$ está dada por su transformada de Fourier. En otras palabras, una función aperiódica puede representarse como una suma continua de funciones armónicas, cuyas amplitudes están dadas por $\bar{P}(\omega)d\omega$, siendo $\bar{P}(\omega)$ la transformada de Fourier de la función de excitación $P(t)$ ¹.

Entonces, haciendo el mismo razonamiento que para funciones periódicas, la respuesta del sistema será una suma continua de las respuestas para cada una de dichas excitaciones armónicas. Esto es, para cada conjunto de armónicos entre ω y $\omega + d\omega$, la respuesta del sistema estará dada por,

$$du(t) = H(\omega)\bar{P}(\omega)d\omega e^{i\omega t}$$

La respuesta del sistema a la excitación completa, será sumar la contribución de cada uno de esos segmentos diferenciales. Esta suma límite, es una integral en todo el dominio de la frecuencia. Entonces,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\bar{P}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Se deduce entonces, que la respuesta es la antitransformada de Fourier de la función $H(\omega)\bar{P}(\omega)$, de lo que deriva una importante relación entre el espectro de Fourier de la respuesta del sistema, y el de la excitación.

$$\bar{u}(\omega) = H(\omega)\bar{P}(\omega) \quad [4.20]$$

A partir de [4.20] se obtiene la relación entre el espectro de la respuesta y el espectro de la excitación:

$$2|\bar{u}(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 2|\bar{P}(\omega)|^2$$

$$S_u(\omega) = |H(\omega)|^2 S_p(\omega) \quad [4.21]$$

4.3.3 PROCESOS ALEATORIOS ESTACIONARIOS

Para cada muestra del proceso aleatorio de entrada, el sistema entregará una respuesta, que, al no ser exactamente iguales las excitaciones, también variará. Por lo tanto, la misma también será sólo una muestra de un proceso aleatorio, y se debe, entonces, definirlo en términos probabilísticos (Fig. 4-5).

¹ La literatura sobre la teoría de Fourier es extensa y pueden verse allí los detalles de los conceptos de serie y transformada de Fourier.

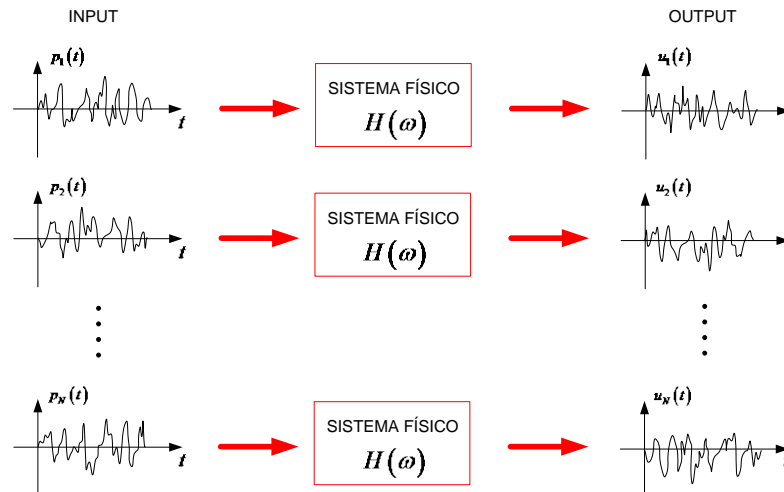


FIG. 4-5 - TRANSFERENCIA DE UN PROCESO ALEATORIO

Se puede probar (Newland, 1993, pp. 69-71), en primer lugar, que si la excitación $p(t)$ es un proceso estacionario, también lo será la respuesta $u(t)$. Yendo un paso más lejos, puede también probarse (Solnes, 1997, pp. 250 - 265), que la respuesta de un sistema lineal a un proceso aleatorio Gaussiano, será también un proceso Gaussiano (Esto ya fue mencionado en un párrafo anterior). En definitiva, si se asume que la excitación está dada por un proceso aleatorio estacionario y Gaussiano, la respuesta tendrá estas mismas características. La última, y más importante deducción que se hace, es que sólo se necesitará conocer la función de Auto-correlación o la PSD de la respuesta, y su media (que en este caso será siempre 0), para definirla de manera completa (en términos probabilísticos).

Utilizando la teoría de procesos aleatorios para sistemas lineales, se llega a la siguiente relación entre las funciones PSD (definidas según [4.16]) y la media, de la excitación y la respuesta, supuestos como procesos aleatorios estacionarios, que tiene extenso desarrollo en la bibliografía del tema¹:

$$\begin{aligned} \mu_u &= \mu_p H(0) \\ S_u(\omega) &= H^*(\omega) H(\omega) S_p(\omega) = |H(\omega)|^2 S_p(\omega) \end{aligned} \quad [4.22]$$

Donde la notación *, representa el conjugado complejo. Y de la primera ecuación se deduce, que si la excitación tiene una media igual 0, también lo tendrá la respuesta.

Nuevamente, la expresión obtenida es válida para las funciones PSD, estén definidas en todo el eje real, o sólo en el semieje positivo. Hay que tener en cuenta que las unidades de la PSD, serán las de la magnitud física a analizar, al cuadrado, dividido la unidad de frecuencia angular. Si se trata de fuerzas será $[kN^2/1/s]$. Las relaciones [4.22] son unos de los resultados fundamentales de la teoría de vibraciones aleatorias en sistemas mecánicos lineales invariantes. De ahí, la importancia del análisis espectral de la respuesta de dichos sistemas. Subsecuentemente la función de Autocorrelación del proceso puede ser calculada según [4.16].

En resumen, se puede ver que la expresión de los espectros de la respuesta para cualquiera de los procesos analizados en estos incisos, tienen formas análogas. El enfoque está orientado a encontrar el espectro de la excitación, según cuál sea el tipo de proceso, y luego multiplicarlo por el módulo cuadrado de la función de transferencia de la magnitud que se esté estudiando. En este trabajo, las funciones de transferencia del sistema,

¹ (Clough & Penzien, 2003) (Newland, 1993) (Solnes, 1997) (Priestley, 1981) (Shanmugan & Breipohl, 1988) (Lutes & Sarkani, 2004)

fueron estudiadas en los primeros capítulos, para distintos modelos mecánicos, y para distintas magnitudes de la respuesta (desplazamientos, velocidades y aceleraciones), que vale la pena recordar en este momento.

$$H_{\dot{w}}(\omega, r) = (i\omega)H_w(\omega, r)$$

$$H_{\ddot{w}}(\omega, r) = (-\omega^2)H_w(\omega, r)$$

4.3.4 MÚLTIPLES PROCESOS

En la mayoría de los problemas, la excitación sobre el sistema no es una sola, y existen varias acciones actuando conjuntamente sobre el mismo, y en distintos puntos del mismo sistema (o grados de libertad para mayor generalidad). En particular, en el problema analizado, esto representa la acción de múltiples cargas sobre el terreno.

4.3.4.1 MÚLTIPLES PROCESOS DETERMINÍSTICOS

Para determinar la respuesta a varios procesos, se debe utilizar el principio de superposición, aplicable debido a la linealidad de las ecuaciones dinámicas (ver [1.6]). Se supone que la carga, se encuentra distribuida en una o más zonas de la superficie, y que su magnitud es variable.

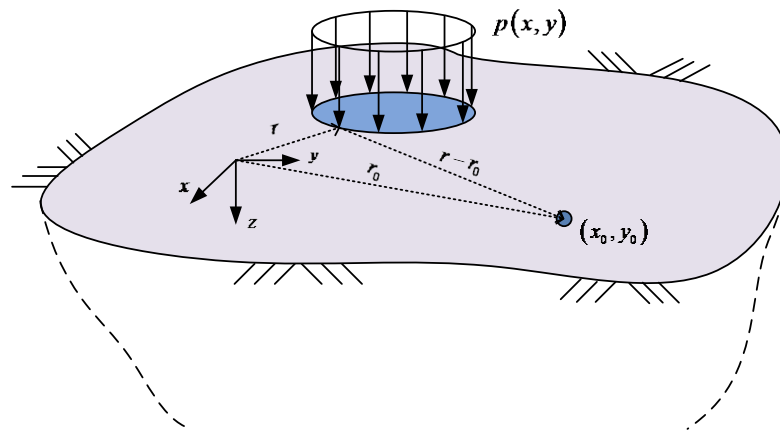


FIG. 4-6 - DISPOSICIÓN ESPACIAL DE CARGAS Y PUNTO DE OBSERVACIÓN

Siendo \$(x_0, y_0)\$ las coordenadas del punto de observación, la respuesta en dicho punto, ante un elemento diferencial de excitación armónica en las coordenadas \$(x, y)\$ está dada por,

$$dw = dP(\omega)H(\omega, x_0 - x, y_0 - y)e^{i\omega t}$$

Sumando la colaboración de cada elemento diferencial de carga, se obtiene la respuesta total.

$$w(t, x_0, y_0) = \iint_{D_p} H(\omega, x_0 - x, y_0 - y)P(\omega, x, y)e^{i\omega t} dx dy \quad [4.23]$$

Ahora bien, recordando el análisis hecho para obtener el espectro de la respuesta para cargas de variación arbitraria en el tiempo, se ve que se puede generalizar ese resultado para considerar la variación espacial de la carga. A partir de [4.23], se deduce inmediatamente que el espectro de la respuesta es,

$$\bar{w}(\omega, x_0, y_0) = \iint_{D_p} H(\omega, x_0 - x, y_0 - y)\bar{P}(\omega, x, y) dx dy \quad [4.24]$$

Donde $P(\omega, x, y)$ es la Transformada de Fourier respecto del tiempo, de la carga, y D_P es la región del plano en la que está definida la carga. Hay que aclarar, que para el caso de cargas periódicas, la expresión es análoga, con la diferencia que ahora $\bar{P}(\omega, x, y)$ es una serie discreta.

Como caso particular, se considera una distribución de cargas puntuales en el espacio. Es decir, el espectro de las cargas es discreta, y concentrado en puntos del plano. La expresión [4.24] toma la forma,

$$\bar{w}(\omega, x_0, y_0) = \iint_{D_P} H(\omega, x_0 - x, y_0 - y) \sum_{i=1}^N \bar{P}(\omega, x_i, y_i) \delta(x_i) \delta(y_i) dx dy$$

Evaluando la integral,

$$\bar{w}(\omega, x_0, y_0) = \sum_{i=1}^N \bar{P}(\omega, x_i, y_i) H(\omega, x_0 - x_i, y_0 - y_i) \quad [4.25]$$

Se observa, que para un sistema de cargas puntuales, la transformada de la respuesta es la suma de los espectros de respuesta para cada carga individualmente. Pero es importante ver que esto también se cumple para el espectro de densidad de energía de la respuesta. Éste está dado por,

$$S_w(\omega) = 2 \left| \sum_{i=1}^N \bar{P}(\omega, x_i, y_i) H(\omega, x_0 - x_i, y_0 - y_i) \right|^2 = \sum_{i=1}^N S_P(\omega, x_i, y_i) |H(\omega, x_0 - x_i, y_0 - y_i)|^2$$

$$S_w(\omega) = \sum_{i=1}^N S_{w_i}(\omega)$$

Además se deduce que la varianza de la respuesta, es la suma de las varianzas de la respuesta a cada proceso individualmente, como se deduce de la expresión [4.29]. Esta sencilla relación es otra de las facilidades que presenta el análisis espectral en la teoría de procesos aleatorios.

4.3.4.2 MÚLTIPLES PROCESOS ALEATORIOS

Para analizar la respuesta de un sistema a dos procesos aleatorios estacionarios $X(t)$, $Y(t)$ primero debe conocerse la correlación entre ambos procesos. Esto se hace de manera análoga a como se obtiene la función de autocorrelación, que mide la correlación entre los valores de las distintas variables dentro de un mismo proceso. La diferencia es que en este caso, además, se busca la covarianza entre dos variables aleatorias pertenecientes a diferentes procesos. Haciendo uso de lo mencionado en el primer punto del trabajo, se necesitará vincular ahora todas las variables aleatorias pertenecientes a la cantidad de procesos en cuestión. Por ejemplo si se tratara de dos procesos diferentes $X(t)$ e $Y(t)$, se necesitaría,

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, Y_2, \dots, Y_N} (X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$$

En este caso, se definirá una función de correlación cruzada que se define según¹,

$$R_{XY}(\tau) = E \{ X(t) Y(t + \tau) \}$$

$$R_{YX}(\tau) = E \{ Y(t) X(t + \tau) \} \quad [4.26]$$

De manera análoga se definen las funciones de correlación espectral (C-PSD) según,

¹ Siempre se sostiene el hecho de que las medias de los procesos son 0.

$$S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad [4.27]$$

Cuando existen varias excitaciones superpuestas sobre el sistema, la respuesta en el dominio del tiempo, será la suma de las respuestas individuales (principio de superposición). En este caso, la excitación es un conjunto de procesos aleatorios, cada uno siendo a su vez, un conjunto de funciones o muestras aleatorias.

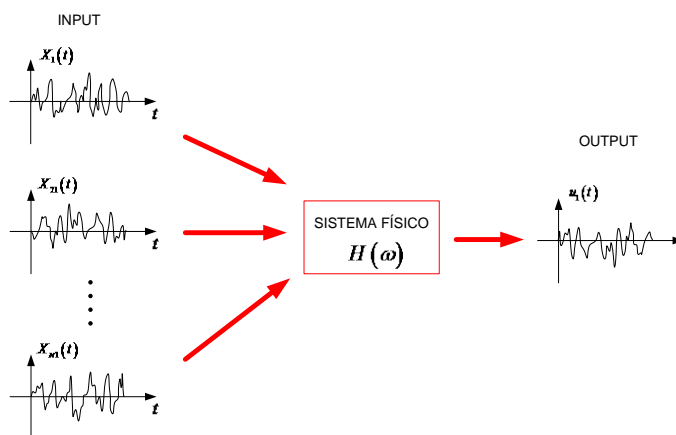


FIG. 4-7 - TRANSFERENCIA DE VARIOS PROCESOS ALEATORIOS

Haciendo un análisis similar que para un solo proceso aleatorio, se puede generalizar la segunda de las relaciones [4.22] para cuando existen N inputs aleatorios actuando sobre el sistema mecánico¹ (Newland, 1993, pp. 71-73):

$$S_u(\omega) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{X_r X_s}(\omega) \quad [4.28]$$

Donde $S_{X_r X_s}(\omega)$ representa la C-PSD (*Cross-Power Spectral Density*) entre el Input r y el s.

Las funciones de transferencia $H_r(\omega)$ serán las que relacionan la excitación X_r , en la coordenada en que actúe, con la respuesta en el punto de observación. Como el caso de Lamb se trata de un sistema continuo, existirán infinitos puntos donde puede estar aplicada la excitación, y para cada uno de ellos habrá una función de transferencia distinta (se diferencian básicamente en la distancia al punto de observación).

Las funciones C-PSD se definen de manera análoga a las PSD, con la diferencia que las primeras, se definen para dos procesos aleatorios diferentes. De igual manera sucede con las funciones de correlación cruzada R_{XY} . Se definen entonces:

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Y de la definición se puede deducir que,

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega)$$

¹ Se supone que las cargas actuarán en un conjunto discreto (acciones puntuales) de puntos del sistema.

Donde el asterisco denota el conjugado complejo.

Cuando las excitaciones no tienen correlación alguna entre sí, la expresión queda¹:

$$S_u(\omega) = \sum_{r=1}^N |H_r(\omega)|^2 S_{x_r x_r}(\omega) \quad [4.29]$$

Se ve que, en el caso de no estar correlacionados los procesos, la densidad de energía que lleva cada proceso de excitación se suma en la respuesta. Esto es análogo a los procesos determinísticos, y la varianza de la respuesta, será la suma de las varianzas para cada respuesta individual.

4.4 MODELIZACIÓN DEL SALTO COORDINADO DE PERSONAS

Se trata del caso de recitales u otros eventos masivos de personas, en donde el conjunto salta de manera coordinada y acompasada sobre el suelo. Esto genera una sollicitación, aproximadamente periódica y puntual en el suelo (para grandes distancias de la fuente). El estudio de este tipo de acciones es nuevo, y los estudios al respecto datan de esta última década (Parkhouse & Ewins, 2006), (Bertero, 2010).

Para la modelización de este tipo de cargas se parte de un estudio realizado en la Univesidad de Surrey (UK) (Parkhouse & Ewins, 2006). En él, se midieron las fuerzas producidas por el salto de distintas personas, sobre una plataforma rígida, al compás de un determinado beat (1.5, 2, 2.67, 3.5 Hz). Se obtiene un registro de la fuerza en función del tiempo, y se divide al mismo en una componente sincronizada (ciclo promedio o “mean cycle”) y una componente estocástica que contiene la parte aleatoria de la carga transmitida al suelo. La componente estocástica es un proceso aleatorio de media 0, y por lo tanto puede ser definida por su PSD. También se realizó más recientemente un estudio de las vibraciones inducidas por recitales de rock en la Ciudad de Buenos Aires y cómo afectaba esto los edificios del entorno (Bertero, 2010). En dicho estudio también se hace referencia a los ensayos de la Universidad de Surrey, y se presentan resultados numéricos para la consideración de las vibraciones.

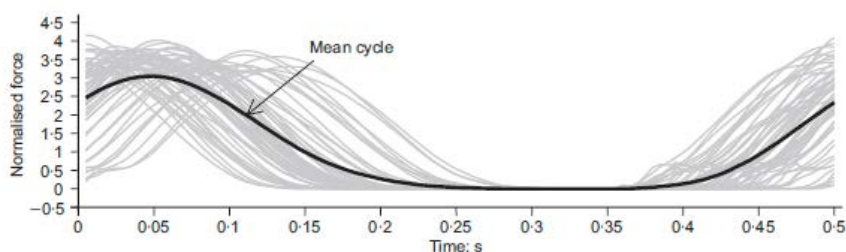


FIG. 4-8 - CICLOS DE CARGA PARA DISTINTOS SUJETOS DE PRUEBA (PARKHOUSE, ET AL., 2006)

Lo que se buscó, fue modelizar el salto de una persona, como una carga puramente periódica, pero cuyas amplitudes de los armónicos tuvieran en cuenta, no sólo el ciclo promedio, sino también la contribución de las componentes estocásticas del salto. Es decir, la contribución de los infinitos armónicos de pequeñas amplitudes, distintos de las frecuencias fundamentales. Esto se hizo a partir de la PSD obtenida para los registros del salto de distintas personas, considerando que las magnitudes de las frecuencias distintas de las fundamentales (que son la parte aleatoria) se concentran en los armónicos fundamentales (por ejemplo, para 2Hz serían 2, 4,

¹ Si no existe correlación entre las distintas excitaciones del sistema, entonces las PSD-cruzadas serán 0 siempre que $r \neq s$ (cuando $r = s$ se trata de la PSD). La expresión es análoga a los procesos determinísticos.

6Hz,...). Es decir, se define una carga periódica equivalente, que posee un valor RMS total, igual al de la carga promedio más la componente aleatoria (Parkhouse & Ewins, 2006).

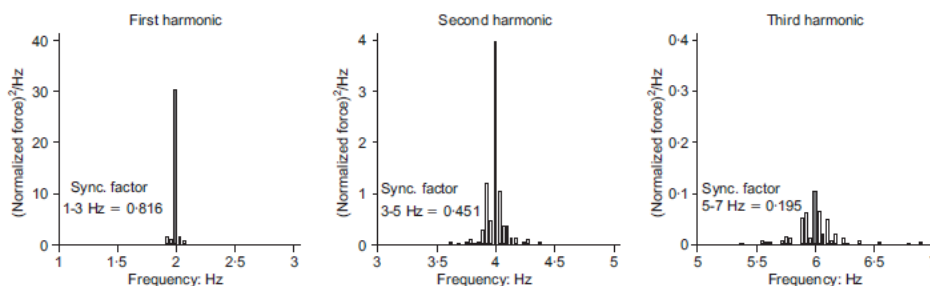


FIG. 4-9 - PSD PARA EL REGISTRO DE 29S DE CADA SUJETO DE PRUEBA (PARKHOUSE, ET AL., 2006)

Con lo dicho en el último párrafo, se definieron los valores r_n (Dynamic load factors) que son justamente las amplitudes de los armónicos fundamentales amplificadas con la componente estocástica.

$$P(t) = W \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(360nft - \phi_n) \right) \quad [4.30]$$

Donde r_n son los ya mencionados “Factores de carga dinámicos” (DLFs) y fueron obtenidos en el paper a partir de las mediciones; ϕ_n es el desfase (Phase lag) de cada armónico, y W es el peso de la persona.

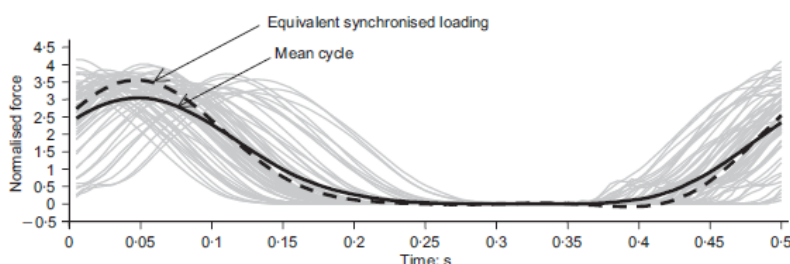


FIG. 4-10 - CARGA SINCRONIZADA EQUIVALENTE (PARKHOUSE & EWINS, 2006)

Estos factores de carga fueron medidos sobre el salto en una base rígida. En el caso de espectadores en recitales, los mismos saltan sobre elementos flexibles o pasto, con lo que la carga se ve reducida. Siguiendo el criterio expuesto en (Bertero, 2010), se considera la acción de una multitud correspondiente a la oscilación vertical con los pies en contacto permanente con el suelo (“bobbing”). Además, para tener en cuenta el salto en simultáneo de una cantidad determinada de espectadores se sumaron las cargas equivalentes de varias personas, pero con un desfase en el tiempo modelizado de manera aleatoria, para describir la falta de sincronización entre el salto de distintos espectadores. Se obtuvo como conclusión que la carga normalizada (Carga total/Peso estático) disminuía a medida que aumentaba la cantidad de espectadores, y que a medida que se consideraban grupos más grandes de personas, la componente estocástica se hacía menos importante en la carga total.

De los datos que figuran en dicho estudio, se pueden obtener los valores de los factores de carga para una gran cantidad de espectadores (r_{∞} en dicho trabajo):

TABLA 3 – DLF'S DE BOBBING PARA GRANDES CANTIDADES DE ESPECTADORES (PARKHOUSE, ET AL., 2006)

	1er armónico	2do armónico	3er armónico	4to armónico
90bpm (1.5Hz)	0.190	0.091	0.021	0.007
120bpm (2Hz)	0.319	0.078	0.008	0.005
160bpm (2.67Hz)	0.404	0.062	0.008	0.003

En la Fig. 4-11 se grafica la carga equivalente para una gran cantidad de espectadores y distintos beats:

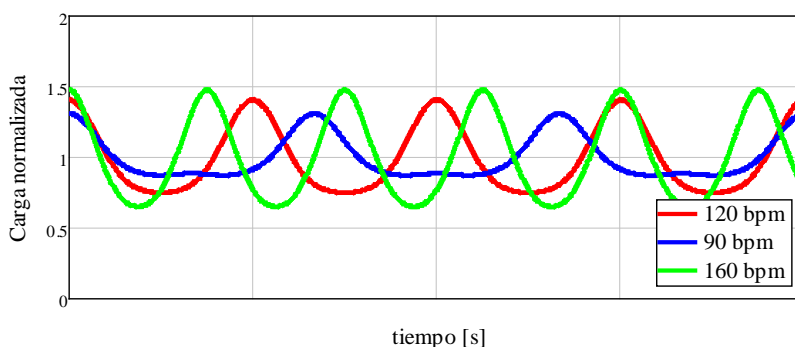


FIG. 4-11 - CARGA SINCRONIZADA EQUIVALENTE (BOBBING)

Por otra parte, se observa que hay una amplitud mayor para un beat de 160 bpm. Esto se debe, principalmente, a que para esa frecuencia, el espectador se encuentra en un ritmo de salto que le es cómodo en cuanto a timing e impulso en el salto, o en este caso, bobbing. Beats menores, pueden requerir cierto apoyo relativamente prolongado en el piso, perjudicando el impulso posterior; y pulsos mayores, puede requerir un apuro excesivo por parte de los espectadores para acoplarse al beat. De todas maneras, se observa que la carga pico, se encuentra alrededor de un 50% más del peso de la multitud.

Por último, hay que mencionar que se trabajará con la carga equivalente pero con media nula, es decir, restándole el primer término constante a la expresión [4.30].

$$P^0(t) = P(t) - W = W \sum_{n=1}^3 DLF_n \cos(2\pi nft - \phi_n) \quad [4.31]$$

4.4.1 ESPECTRO DE LA CARGA

Como se vio en los primeros incisos del presente trabajo, para analizar espectralmente una carga determinística periódica, como es la carga equivalente definida en [4.31], se utiliza el “Espectro de potencia discreto” definido en [4.10]. Se puede deducir fácilmente, que el espectro para una función del tipo $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi)$ es:

$$S_f(\omega_n) = \frac{|A_n|^2}{2}$$

Donde $\omega_n = n\omega_0$. Por lo que el EPD de la Carga equivalente, definido en [4.31] estará dado por:

$$S_{p^0}(\omega_n) = \frac{r_n^2}{2} W^2 \quad [4.32]$$

TABLA 4 - AMPLITUD DEL EPD NORMALIZADO PARA LOS PRIMEROS 4 ARMÓNICOS

$r_n^2/2$ [-]				
	1er armónico	2do armónico	3er armónico	4to armónico
90bpm (1.5Hz)	0.191	5.128×10^{-3}	2.059×10^{-4}	8.185×10^{-6}
120bpm (2Hz)	0.595	0.042	2.906×10^{-3}	1.784×10^{-5}
160bpm (2.67Hz)	0.427	0.035	5.526×10^{-4}	0

4.4.2 ESPECTRO DE LAS VIBRACIONES EN EL TERRENO

Habiendo obtenido el espectro de la carga modelada como un proceso periódico determinístico (Espectro de potencia discreto), se puede obtener el espectro de la respuesta en el terreno mediante [4.19]. La función de transferencia es la ya vista en los dos primeros capítulos del trabajo.

El espectro de respuesta de aceleraciones verticales está dado por:

$$S_{\ddot{w}}(f_n) = |H_{\ddot{w}}(f_n, r)|^2 \frac{r_n^2}{2} W^2 \tag{4.33}$$

Donde $f_n = n f_{beat}$ y la función de transferencia dependerá del modelo mecánico elegido, teniendo en cuenta las consideraciones del capítulo 3. El espectro de aceleraciones horizontales será análogo. En la figura siguiente se muestra la historia de aceleraciones en un punto cualquiera del terreno, obtenida a partir del espectro de respuesta [4.33]:

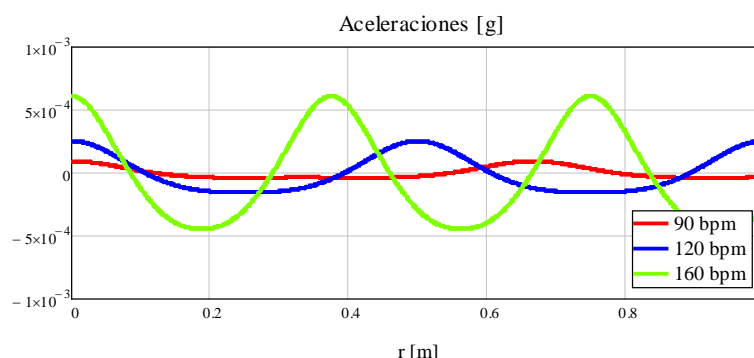


FIG. 4-12 - HISTORIA DE ACELERACIONES, SALTO COORDINADO DE PERSONAS

4.5 MODELIZACIÓN DE LA ACCIÓN DE VEHÍCULOS SOBRE RIELES

La generación de vibraciones debido al paso de trenes es un problema que empezó a ser tratado de manera intensa en las últimas dos décadas. Esto se debe principalmente a la aparición de trenes de grandes velocidades, y a la utilización de equipamientos cada vez más sensibles a bajos niveles de vibración, como pueden ser los generados en las construcciones en las adyacencias de la zona de vías. De esta manera, interesa desde el punto de vista del impacto ambiental, realizar estudios sobre la naturaleza y magnitud de las vibraciones que puede ocasionar el paso de un tren en las inmediaciones. En el presente capítulo se estudiará el caso de los trenes urbanos, cuyas velocidades son relativamente bajas (alrededor de los 60 km/h).

Numerosos estudios analíticos han sido realizados recientemente en esta materia, donde se destacan los realizados en (Sheng, Jones, & Thompson, A theoretical model for ground vibration from trains generated by vertical track irregularities, 2003) y (Lombaert & Degrande, 2007) donde se plantea un modelo acoplado de vías y medio estratificado, y se tiene en cuenta la influencia de la velocidad del tren en la propagación de ondas. En (Cai, Cao, Sun, & Xu, 2010) se estudia el mismo problema, pero considerando un medio poroelástico según la teoría de Biot. Todos estos papers plantean un problema complejo de la propagación de ondas, considerando los diferentes modos, y la heterogeneidad del medio, y obtienen soluciones mediante procedimiento numéricos. Una solución analítica cerrada para la carga cuasi-estática generada por el paso del tren (se explica en los siguientes párrafos) puede verse en (Krylov & Ferguson, 1993), donde considera sólo la influencia de las ondas de Rayleigh en un medio viscoelástico.

4.5.1 GENERALIDADES DEL MODELO

El problema de la modelización de cargas debidas a vehículos, sea sobre rieles o sobre carreteras, es muy complejo y se deben tener en cuenta numerosos factores. En primer lugar, está el movimiento de la carga, puesto que ahora se trata de una carga que se desplaza a lo largo de la superficie del terreno. Éste factor tendrá como parámetros que lo determinan, la trayectoria de la carga y su velocidad en cada instante. Para una amplia gama de aplicaciones prácticas, puede aceptarse que la trayectoria de la carga es rectilínea y la velocidad constante. De igual manera, se debe pensar en cómo varía temporalmente la carga. En un sentido general, podría pensarse que la carga varía de manera aleatoria alrededor de un valor medio que sería la carga muerta (es decir, el peso total del vehículo). Esto nos lleva a pensar en una doble componente temporal de la carga; una componente constante, o media, y una componente aleatoria de media nula.

Con lo dicho, puede aceptarse como modelo general, la suma de una carga constante y móvil (en trayectoria rectilínea y velocidad constante), y de una carga aleatoria y móvil (idéntica a la anterior). El problema de una carga móvil en la superficie de un semi-espacio elástico fue abordado por numerosos autores en la segunda mitad del siglo XX, aunque la solución requiere el manejo de complicadas y extensas expresiones analíticas, cuyas deducciones son aún más complicadas. Como corolario de estos estudios, y en lo que respecta a nuestro trabajo, hay que mencionar que se observa un incremento muy importante de la respuesta dinámica del semi-espacio cuando la velocidad V de la carga se aproxima a la velocidad de las ondas de Rayleigh (ver (Krylov, 1994), (Sheng, Jones, & Petyt, 1999) entre otros), mientras que para velocidades relativamente bajas, la respuesta no difiere mucho de la estática (es decir, la respuesta estática del semi-espacio trasladada en el espacio¹) (Xia, Cao, & De Roeck, 2009). Éste será el caso en este trabajo, puesto que tanto vehículos como trenes urbanos suelen circular a velocidades bastante menores a la velocidad de las ondas de Rayleigh promedio del suelo. En definitiva, se vio que podemos desprejiciar el efecto del movimiento de la carga en la superficie y considerar la respuesta para una carga fija², y luego trasladarla en el espacio (esto se verá más adelante que tampoco será necesario).

Por lo tanto, con las aclaraciones hechas, se tiene ahora el problema de determinar la acción de una carga de magnitud constante (también llamada cuasi-estática por razones que se verán a continuación) y otra de carácter aleatorio (debido a irregularidades en la traslación del tren), cuyo desplazamiento puede desprejiciarse en la generación de ondas. Ahora bien, podría pensarse que el efecto de una carga constante de la que se despreja

1 Esto de trasladar en el espacio la solución obtenida, que ya se mencionó varias veces, es análogo a considerar que la respuesta de un problema dinámico de un grado de libertad, es la respuesta estática del problema, que varía temporalmente solidaria a la carga. Esto es, $u(t) = P(t)/k$

2 Hay que aclarar que se puede desprejiciar el efecto de la velocidad del vehículo en la generación de ondas en el semi-espacio, aunque no se puede desprejiciar su efecto en la generación de la carga, puesto que la componente aleatoria es básicamente producto del desplazamiento de la carga. Esto se detalla más adelante también.

su desplazamiento no genera ondas en el terreno (se reduciría al problema estático de Bussinessq); pero es importante destacar, de nuevo, que si bien se desprecia la influencia del movimiento en la generación de ondas en el terreno, no se puede despreciar el efecto que éste tiene en la generación de cargas. Una carga estática genera una deformación en el semi-espacio, que en principio sería estática. Ahora al desplazarse la carga, se desplaza la deformada cuasi-estáticamente con la carga (por esto es que decimos que se desprecia el efecto del movimiento en la generación de ondas, porque la deformación generada se calcula estáticamente), lo que genera una oscilación de los puntos del semi-espacio desde su punto de reposo, hasta el de deformación estática, y nuevamente al reposo una vez que se alejó la carga. Si luego, se piensa en una sucesión periódica de cargas, no es difícil intuir en que se generará un desplazamiento periódico de los puntos coincidente con el paso de las cargas. De esta manera se ve que, aunque se desprecie el efecto dinámico del desplazamiento de la carga en el suelo, la traslación cuasi-estática de una sucesión de cargas, es fuente de ondas periódicas en el terreno.

En cuanto a la componente aleatoria, su efecto en la generación de ondas es más intuitivo, puesto que se trata de una carga variable en el tiempo. Al igual que la componente estática, también se considera que su movimiento puede despreciarse en lo que respecta al problema dinámico de propagación de ondas, por lo que la solución para la carga fija puede extenderse, “trasladando solidariamente” la solución obtenida con la carga.

Las investigaciones realizadas en esta materia, han obtenido resultados, tanto numéricos como experimentales, que indican que cada una de las componentes de la generación de vibraciones por el paso del tren (componente cuasi-estática y componente dinámica) tiene una influencia predominante en distintos dominios de frecuencias: la zona de bajas frecuencias (hasta los 10 Hz generalmente) es gobernado mayoritariamente por la componente cuasi-estática de la carga, mientras que en la zona de más altas frecuencias, tiene predominancia la componente dinámica (Sheng, Jones, & Thompson, 2003) (Xia, Cao, & De Roeck, 2009). Sin embargo, para velocidades de traslación del tren mucho menores que la velocidad de ondas de Rayleigh del terreno (como es el presente caso de estudio) la influencia de la componente cuasi-estática se hace mucho menor que la dinámica, incluso en el rango de bajas frecuencias, haciéndose despreciable su consideración. Esto puede verse en cualquiera de los estudios realizados al respecto (Sheng, Jones, & Thompson, 2003), (Xia, Cao, & De Roeck, 2009), (Lombaert & Degrande, 2007), (Cai, Cao, Sun, & Xu, 2010)). De esta manera, sólo se tendrá en cuenta la componente dinámica a la hora de analizar las vibraciones originadas por el paso de los trenes¹.

4.5.2 IRREGULARIDADES EN LA TRASLACIÓN DEL TREN

La traslación de los vehículos que forman el tren está viciada de “defectos” que excitan el sistema mecánico del tren, generando una carga variable sobre el sistema de vías. Esta carga se debe a numerosas irregularidades del sistema de vías y del propio tren, que son enumeradas en numerosos estudios del tema. Se citan las que se presentan en (Salvador, Real, Zamorano, & Villanueva, 2010):

- Falta de alineamiento vertical del riel: Abarca los rangos de frecuencias bajas de excitación, con longitudes de ondas que pueden variar desde algunos metros, hasta cientos. Excita un rango de frecuencias que puede coincidir con las de resonancia del sistema mecánico del tren.
- Rugosidad del riel: Longitudes de onda cortas (30-120mm). No genera problemas de resonancia con el sistema mecánico del tren, pero tiene amplitudes grandes.
- Juntas entre rieles: Longitudes de onda de algunas decenas de metros.
- Otros defectos del riel: Deslizamiento relativo de las ruedas, falta de fijación de los rieles, etc.
- Rueda plana: La longitud de onda de la excitación, coincide con el perímetro de la rueda (2.8m aprox.).

¹ Para estudiar un modelo simple que tenga en cuenta la componente cuasi-estática puede verse (Krylov & Ferguson, Calculation of Low-Frequency ground vibrations from railway trains, 1993). En los otros estudios citados en los párrafos también se tiene en cuenta esta componente, llegando a las conclusiones mencionadas.

- Deflexión de los rieles: Se denomina también, deflexión secundaria, y refleja el hecho de que los rieles están discretamente soportados por los durmientes, lo que produce pequeñas deflexiones mientras la rueda pasa entre dos de ellos.

Cada uno de los ítems mencionados recién, ocasionan una excitación vertical en las ruedas del tren, a medida que éste circula a una determinada velocidad. Ciertamente, buscar un modelo determinístico que tenga en cuenta todos estos factores parece impracticable, y generalmente suelen agruparse todos estos factores en una función de potencia espectral que define un proceso aleatorio global de irregularidades.

En la literatura del tema existen numerosas referencias de espectros de potencia para definir la rugosidad de la vía¹. En general, se trata de funciones ajustadas experimentalmente, y es común a todas, que la amplitud del espectro decaea fuertemente al aumentar la longitud de onda. Sin embargo, no existe alguna norma general que permita obtener valores para el espectro, y estos dependen fuertemente de la zona donde fueron realizados los estudios y de los métodos de estimación.

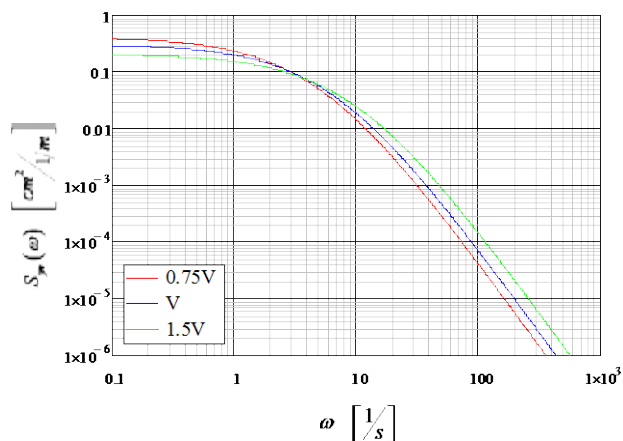
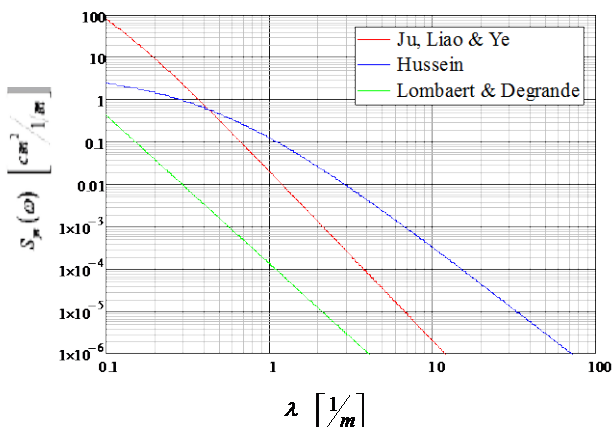
TABLA 5 - ESPECTROS DEL PERFIL IRREGULAR DE LAS VÍAS, POR DIFERENTES AUTORES

	PSD [$m^2/(1/m)$]	Parámetros
(Ju, Liao, & L., 2009)	$S_{ye}(\lambda) = \frac{A_r \omega_2^2 (\lambda^2 + \omega_1^2)}{\lambda^4 (\lambda^2 + \omega_2^2)}$	$A_r; \omega_1; \omega_2$
(Hussein, 2010)	$S_{ye}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{\left(b + \frac{\lambda}{2\pi}\right)^3}$	$a; b$
(Lombaert & Degrande, 2007)	$S_{ye}(\lambda) = S_0 \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^{-n}$	$S_0; \omega_0; n$

Las irregularidades en el perfil del riel, se traducen en excitaciones verticales sobre las ruedas, cuya frecuencia depende del espectro de las rugosidades, y de la velocidad de circulación. La relación entre ambos procesos aleatorios se expresa según,

$$S_{yt}(\omega) = \frac{1}{V} S_{ye}\left(\frac{\omega}{V}\right) \quad [4.34]$$

Donde $S_{yt}(\omega)$ es la PSD de la excitación sobre las ruedas, y V es la velocidad del tren.



¹ Ver (Ju, Liao, & L., 2009), (Lombaert & Degrande, 2007), (Hussein, 2010), (Auersch, 2008).

FIG. 4-13 - PSD DE LAS IRREGULARIDADES DE LA VÍA

Del segundo gráfico de la Fig. 4-13, se observa que la velocidad no tiene una influencia significativa en el espectro de excitaciones sobre las ruedas. Esto está en concordancia con los estudios de los autores ya mencionados.

4.5.3 MODELO MECÁNICO DEL TREN

Se debe modelar el sistema mecánico del vagón tipo de un tren. En términos generales se lo puede presentar como un gran cuerpo rígido con dos grados de libertad (movimiento vertical y giro alrededor de su eje), apoyado en dos boggies de dos ruedas cada uno, y que tiene un doble sistema de suspensión. La siguiente figura ilustra claramente el modelo:

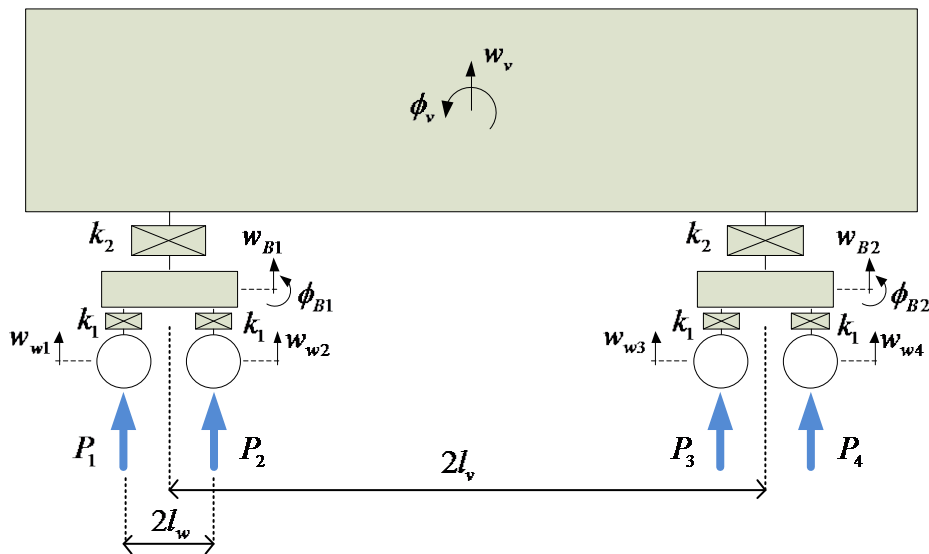


FIG. 4-14 - MODELO MECÁNICO DE UN VAGÓN

El modelo mecánico consta de 10 grados de libertad, y tiene 4 inputs, que son las excitaciones sobre cada una de las ruedas. Se debe determinar entonces, la magnitud de las fuerzas P_i ante una excitación armónica y de amplitud unitaria del riel. En otras palabras, la función de transferencia entre las excitaciones sobre cada rueda y la amplitud de las cargas que transmite cada rueda a las vías. Es así, que se necesita definir, en base al modelo planteado en Fig. 4-14, la relación entre un desplazamiento armónico unitario en la rueda j y la carga que transmite a la vía la rueda i . A esta relación se la denomina “impedancia entre las ruedas i y j ”, y para el vagón, será una matriz de 4x4. El análisis subsiguiente se basa en el que se encuentra en (Sheng, Jones, & Thompson, 2003).

La ecuación de equilibrio dinámico del vagón se plantea matricialmente según,

$$[\mathbf{M}_v]\{\ddot{\mathbf{w}}_v(t)\} + [\mathbf{K}_v]\{\mathbf{w}_v(t)\} = -[\mathbf{B}]\{\mathbf{P}(t)\} \quad [4.35]$$

Donde $\{\mathbf{w}_v(t)\}$ es el vector de los grados de libertad del vagón y $[\mathbf{M}_v]$ y $[\mathbf{K}_v]$ son las matrices de masa y de rigidez del modelo, respectivamente; $[\mathbf{B}]$ es una matriz de unos y ceros.

Como se busca una solución en régimen permanente, $[\mathbf{P}(t)] = [\bar{\mathbf{P}}(\omega)]e^{i\omega t}$ y $\{\mathbf{w}_v(t)\} = [\bar{\mathbf{w}}_v(\omega)]e^{i\omega t}$. Por lo que podemos despejar entonces,

$$\{\bar{\mathbf{w}}_v(\omega)\} = -([\mathbf{K}_v] - \omega^2 [\mathbf{M}_v])^{-1} [\mathbf{B}] \{\bar{\mathbf{P}}(\omega)\} = -[\boldsymbol{\Sigma}_v] \{\bar{\mathbf{P}}(\omega)\} \quad [4.36]$$

Ahora bien, lo que se está buscando es la relación entre las cargas transmitidas por el vagón al riel $[\bar{\mathbf{P}}(\omega)]$ y los desplazamientos en las ruedas, $\{\bar{\mathbf{w}}_w(\omega)\}$ según el esquema de la Fig. 4-14. Por lo que es necesario obtener una relación entre los grados de libertad del vagón $\{\bar{\mathbf{w}}_v(\omega)\}$ y el vector de desplazamientos de cada rueda $\{\bar{\mathbf{w}}_w(\omega)\}$. La relación entre ambos es directa, y se puede escribir según,

$$\{\bar{\mathbf{w}}_w(t)\} = [\mathbf{A}] \{\bar{\mathbf{w}}_v(t)\}$$

Donde $[\mathbf{A}] = [\mathbf{B}]^T$. Por lo que [4.36] se puede escribir según,

$$\begin{aligned} \{\bar{\mathbf{w}}_w(\omega)\} &= -[\mathbf{A}]([\mathbf{K}_v] - \omega^2 [\mathbf{M}_v])^{-1} [\mathbf{B}] \{\bar{\mathbf{P}}(t)\} \\ \{\bar{\mathbf{w}}_w(\omega)\} &= [\boldsymbol{\Sigma}_v(\omega)] \{\bar{\mathbf{P}}(t)\} \end{aligned} \quad [4.37]$$

La matriz de impedancia entre ruedas i y j está dada por,

$$[\mathbf{H}_w(\omega)] = [\boldsymbol{\Sigma}_v(\omega)]^{-1} \quad [4.38]$$

En (Sheng, Jones, & Thompson, 2003) se dan las expresiones para las distintas matrices:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{6 \times 4} \\ [\mathbf{I}]_{4 \times 4} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{M}_v] = \text{diag}\{M_C, J_C, M_B, J_B, M_B, J_B, M_w, M_w, M_w, M_w\}$$

$$[\mathbf{K}_v] = \begin{bmatrix} 2k_2 & 0 & -k_2 & 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k_2 l_v^2 & -k_2 l_v & 0 & k_2 l_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & -k_2 l_v & k_2 + 2k_1 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_1 l_w^2 & 0 & 0 & -k_1 l_w & k_1 l_w & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 l_v & 0 & 0 & k_2 + 2k_1 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_1 l_w^2 & 0 & 0 & -k_1 l_w & k_1 l_w \\ 0 & 0 & -k_1 & -k_1 l_w & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & k_1 l_w & 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & -k_1 l_w & 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & k_1 l_w & 0 & 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

Se ve que los parámetros involucrados en las matrices dependen de la geometría y las propiedades mecánicas del vagón. Si queremos considerar el amortiguamiento en los sistemas de suspensión, basta con considerar los coeficientes de la matriz de rigidez como números complejos (modelo viscoelástico en régimen permanente), cuya parte imaginaria representa el amortiguamiento y puede ser dependiente de la frecuencia de excitación ($k^* = k(1 + i\omega\xi)$).

4.5.4 INTERACCIÓN VÍA TERRENO

Habiendo definido la respuesta del sistema mecánico del tren ante desplazamientos verticales en las ruedas, hay que analizar cómo influye el sistema de vías sobre el que circula el tren, en la magnitud de las cargas que transmiten las ruedas. Se propone, entonces, un modelo teórico para representar el sistema de vías, que consiste en una viga infinita (con comportamiento flexional del tipo Bernoulli-Navier) apoyada en una solera continua viscoelástica (Fig. 4-15), que busca representar la subestructura en la que apoyan los rieles, conformada por los durmientes, pads de goma y el balasto.

Se modelizará en este caso, la acción de una carga puntual y periódica sobre una viga de Bernoulli de sección constante, longitud infinita y apoyada sobre una solera visco-elástica continua¹.

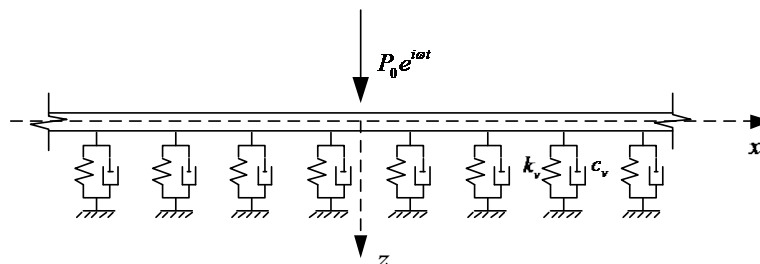


FIG. 4-15 - MODELIZACIÓN DINÁMICA DE LA VÍA

La ecuación que gobierna el comportamiento dinámico de una viga, bajo las conocidas hipótesis de Bernoulli-Navier, pueden encontrarse en la bibliografía avanzada de dinámica estructural y ondas elásticas². El equilibrio dinámico se plantea según,

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k_v w + c_v \frac{\partial w}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \delta(x) e^{i\omega t} \quad [4.39]$$

La solución a dicha ecuación se presenta en el Anexo 6, y está dada por,

$$w(x, t, \omega) = \frac{e^{-\beta|x|}}{8EJ\beta^3} [\cos(\beta|x|) + \sin(\beta|x|)] P e^{i\omega t} = H_w(x, \omega) P e^{i\omega t} \quad [4.40]$$

Donde $\beta(\omega) = \sqrt[4]{\frac{k_v + i c_v \omega}{4EJ} - \frac{\rho A}{EJ} \omega^2}$

Hasta el momento, se ha modelizado la respuesta del sistema mecánico del vagón ante excitaciones armónicas en las ruedas, y también, la respuesta de la vía, representada por una viga infinita sobre una solera viscoelástica, excitada por carga puntual y armónica. Ahora, debemos acoplar ambos sistemas, para encontrar la carga que transmiten las ruedas a la vía, suponiendo excitaciones aleatorias en las ruedas debido a las irregularidades antes detalladas, sumado a las deflexiones que sufre la viga ante la acción de las mismas.

La excitación vertical en cada rueda, estará dada ahora, por la diferencia entre la rugosidad del riel y lo que éste se deflexiona ante la acción de la carga incógnita P_i . Se tiene un sistema de dos ecuaciones acopladas,

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_w(\omega)] \{\mathbf{w}\} &= \{\mathbf{P}\} \\ \{\mathbf{w}^*\} &= H_{w^*}(0, \omega) \{\mathbf{P}\} \end{aligned}$$

Donde $\{\mathbf{w}\}$ es el vector de excitaciones verticales sobre las ruedas, y $\{\mathbf{w}^*\}$ es el vector de deflexiones del riel debajo de cada rueda. Por continuidad de desplazamientos se tiene que $\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{w}_{irr}\} - \{\mathbf{w}^*\}$

El sistema de ecuaciones acoplado queda¹,

1 Las razones para no considerar la traslación de la carga en la viga fueron vistas en el inicio del capítulo.

2 Ver (Clough & Penzien, 2003); (Graff, 1975)

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_w(\omega)](\{\mathbf{w}_{\text{irr}}\} - \{\mathbf{w}^*\}) &= \{\mathbf{P}\} \\ \{\mathbf{w}^*\} &= H_{w^*}(0, \omega)\{\mathbf{P}\} \end{aligned}$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera, y despejando el vector de cargas, llegamos a la expresión final para la matriz de impedancia entre ruedas de un vagón, para el sistema acoplado.

$$\begin{aligned} [[\mathbf{I}] - [\mathbf{H}_w(\omega)]H_{w^*}(0, \omega)]^{-1}[\mathbf{H}_w(\omega)]\{\mathbf{w}_{\text{irr}}(\omega)\} &= \{\mathbf{P}(\omega)\} \\ [\mathbf{H}_p(\omega)]\{\mathbf{w}_{\text{irr}}(\omega)\} &= \{\mathbf{P}(\omega)\} \end{aligned} \quad [4.41]$$

Donde $H_{w^*}(0, \omega) = 1/8EJ\beta(\omega)^3$

La matriz $[\mathbf{H}_p(\omega)]$ es la “matriz de transferencia compleja” del sistema acoplado vagón/vías, que relaciona los desplazamientos verticales en las ruedas, con las fuerzas que éstas transmiten como reacción. La influencia del sistema de vías en la transmisión de cargas al terreno está dado por la rigidez flexional de los rieles (EJ), por la sección transversal de los rieles, la densidad del material de los mismos, y la rigidez y amortiguamiento del balasto. Estos últimos parámetros suelen ser muy complicados de estimar.

4.5.5 ESPECTRO DE LAS CARGAS

Se tiene, en este caso, un problema de un sistema de múltiples grados de libertad sujeto a múltiples acciones aleatorias. El problema es algo más complejo que para la transmisión de un procesos a través de un sistema de un grado de libertad, puesto que ahora deberán conocerse las funciones PSD de los inputs, y además la correlación entre ellos (es decir, las funciones C-PSD de los inputs). De la misma manera se obtiene un output compuesto de funciones autoespectrales y de correlación espectral.

La teoría de la respuesta de sistemas mecánicos de múltiples grados de libertad (MDOF) ante excitaciones aleatorias puede encontrarse brevemente en la bibliografía básica de vibraciones aleatorias, aunque sin demasiada extensión. En (Solnes, 1997) puede encontrarse un capítulo dedicado a este tema, en donde se da la expresión de los espectros de la respuesta, como aparece a continuación²,

$$[\mathbf{S}_p(\omega)] = [\mathbf{H}_p(\omega)][\mathbf{S}_{yw}(\omega)][\mathbf{H}_p^*(\omega)]^T \quad [4.42]$$

Donde $[\mathbf{H}_w]$ es la matriz de transferencia compleja definida en [4.38], y $[\mathbf{S}_{yw}(\omega)]$ es una matriz donde aparecen las funciones PSD y C-PSD de las excitaciones sobre las ruedas: $S_{yw_{ij}}$ será la función de correlación espectral entre la excitación de la rueda i y la rueda j .

En el presente modelo, al tratarse de un sistema de 4 grados de libertad, las matrices serán de 4x4. Los elementos de la matriz de excitaciones están dados por,

$$S_{yw_{ij}} = e^{-i\omega \frac{|x_i - x_j|}{v}} S_{yr}(\omega) \quad [4.43]$$

1 Esto vale, considerando que la deflexión debajo de una rueda, debido a dicha carga, no afecta la deflexión debajo de cualquier otra rueda. Esto es perfectamente válido para ruedas de distintos boggies, pero no así, para ruedas adyacentes. Sin embargo, la diferencia es poco apreciable.

2 Observar que esta expresión es la generalización de la ecuación [4.22], para múltiples grados de libertad.

Donde el factor exponencial complejo aparece en los elementos fuera de la diagonal, y representa la correlación entre dos excitaciones aleatorias desfasadas temporalmente (Ver Anexo 5).

Queda entonces, definida completamente la acción de un vagón tipo sobre el sistema de vías, mediante la ecuación [4.42]. Si se quisiera conocer la acción de un tren, es decir de la sucesión de N vagones sobre las vías, se debería extender la matriz de transferencia $[\mathbf{H}_P(\omega)]$ y la de excitaciones $[\mathbf{S}_{yw}(\omega)]$, para considerar la correlación entre ruedas de diferentes vagones. Como es intuitivo, no habrá una correlación mediante el sistema mecánico, puesto que pertenecen a vagones independientes, pero sí la habrá, en términos de las excitaciones sobre las ruedas puesto que la vía que circulan es la misma.

Por lo tanto, se extiende la matriz de transferencia compleja para N vagones según,

$$[\mathbf{H}_T(\omega)] = \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_P(\omega)] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & [\mathbf{H}_P(\omega)] \end{bmatrix} \quad [4.44]$$

Suponiendo que todos los vagones tienen idénticas características. Sobre la matriz de excitaciones, ésta tendrá la misma expresión que figura en [4.43], simplemente considerando todas las ruedas del tren (N x 4 ruedas).

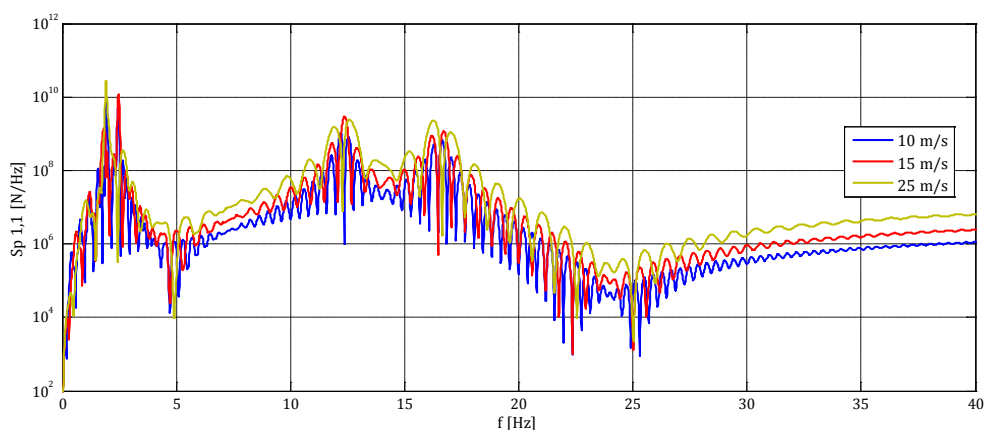


FIG. 4-16 - PSD DE LAS CARGAS COBRE LAS VÍAS

En la Fig. 4-16 se ve la forma de las funciones espectrales de las cargas de las ruedas del tren sobre las vías. Se observan picos que coinciden con las frecuencias naturales del sistema mecánico de vagón y boggies, y oscilaciones intermedias. Estas “oscilaciones” del espectro se deben al desfase temporal entre las excitaciones de las ruedas, que funciona como un filtro de la excitación. Este fenómeno es conocido como “wheel-base filtering”, y su influencia en el espectro final de las vibraciones todavía no ha sido del todo estudiada. Se observa además, que la influencia de la velocidad, no es solo un tema de magnitud del espectro, sino también afecta el wheelbase filtering, aumentando el tamaño de las oscilaciones, y desplazando la ubicación de los picos. Esto indica que la influencia de la velocidad del tren, en el espectro, no es un tema trivial, aunque sí hay que destacar, como se mencionó en los primeros párrafos, que su influencia no es grande para bajas velocidades.

La influencia del sistema de vías en el espectro de las cargas, es la de suavizar los picos del espectro. El sistema de vías tiene una mayor influencia sobre los dos picos de mayor frecuencia, correspondiente al sistema primario de suspensión (sistema de suspensión boggie-rueda). Sin embargo, al no ser sencilla la determinación de los parámetros del sistema de vías, y no ser determinante su influencia, es razonable despreciar su influencia en el modelo.

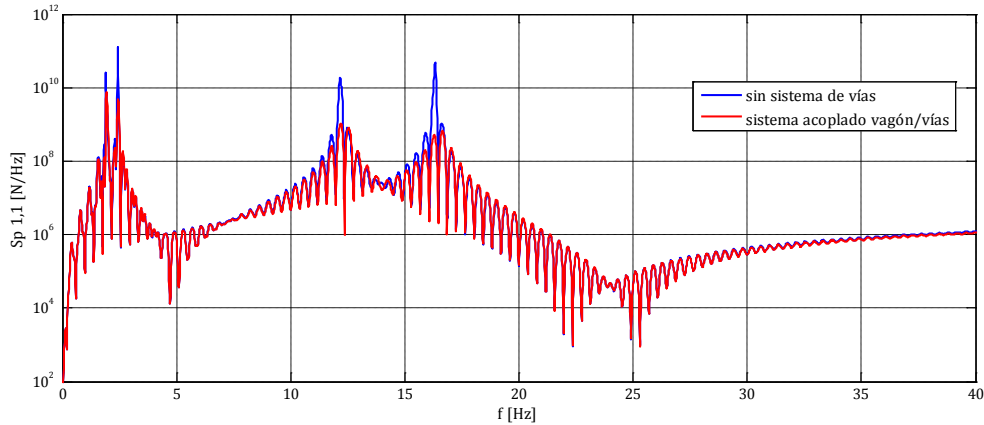


FIG. 4-17 - INFLUENCIA DEL SISTEMA DE VÍAS EN EL ESPECTRO

4.5.6 TRANSMISIÓN DE VIBRACIONES AL TERRENO

El sistema de vía y apoyos (pads y balasto) proporciona una superficie flexible para el paso del tren, lo que generará una distribución de la carga puntual que transmite la rueda al riel. Sin embargo, si el punto de observación se encuentra suficientemente alejado del paso del tren, dicha distribución de la carga no influirá en las vibraciones registradas, y por lo tanto, puede aceptarse que la carga se transmite como puntual al terreno directamente (principio de Saint-Venant). Entonces, para el modelo, el sistema de rieles, pads y balasto solo tendrá influencia en la forma del espectro de las cargas, pero no en su distribución en el terreno.

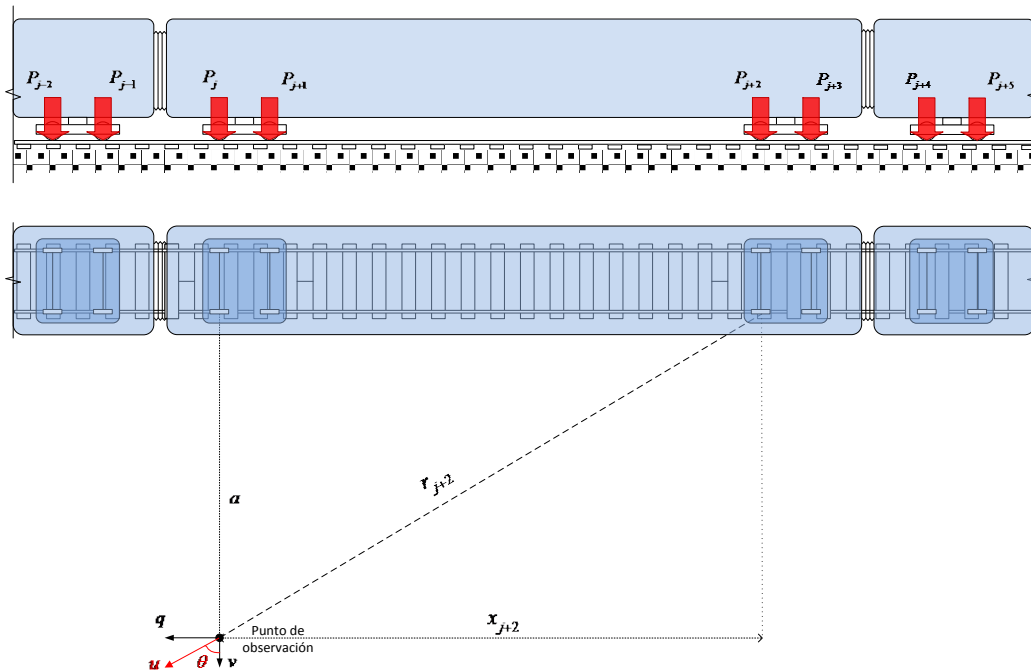


FIG. 4-18 - DISTRIBUCIÓN DE CARGAS DINÁMICAS DEBIDO AL PASO DEL TREN

Las vibraciones observadas en un punto del terreno serán producto de la acción conjunta de todas las ruedas del tren. Es decir, se está ante un caso de múltiples acciones aleatorias, como se vio en el inciso 4.3.4. La respuesta en el punto de observación estará dada por [4.28]. Además, las vibraciones en el punto de observación serán descompuestas según tres ejes coordenados según se indica en la Fig. 4-18. La posición de cada una de las cargas (como se dijo en la introducción de esta sección, son cargas fijas en el espacio) será fijada simétricamente respecto del punto de observación, ya que ésta es la distribución que genera máxima respuesta en el

punto. Para distancias relativamente cercanas al paso del tren, la mayor parte de la excitación puede considerarse con esta distribución simétrica, al ser bastante mayor la longitud total del tren, respecto de la distancia al punto de observación.

Las expresiones finales de los espectros de aceleraciones en un punto de observación, están dadas por:

$$\begin{aligned}
 S_{\ddot{q}}(\omega) &= \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \left(-\frac{x_j}{r_j} \right) H_{\ddot{u}}(r_j, \omega) \left(-\frac{x_k}{r_k} \right) H_{\ddot{u}}^*(r_k, \omega) S_{P_{jk}}(\omega) \\
 S_{\ddot{v}}(\omega) &= \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \left(-\frac{a}{r_j} \right) H_{\ddot{u}}(r_j, \omega) \left(-\frac{a}{r_k} \right) H_{\ddot{u}}^*(r_k, \omega) S_{P_{jk}}(\omega) \\
 S_{\ddot{w}}(\omega) &= \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 H_{\ddot{w}}(r_j, \omega) H_{\ddot{w}}^*(r_k, \omega) S_{P_{jk}}(\omega)
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Donde x representa la coordenada sobre el eje de las vías de cada rueda.

Para obtener los espectros de respuesta de desplazamientos y velocidades, bastará reemplazar en [4.45] por las funciones de transferencia de velocidades y aceleraciones respectivamente (relacionadas según [1.41]). En la siguiente figura se muestran los espectros de las aceleraciones debidas al paso del tren:

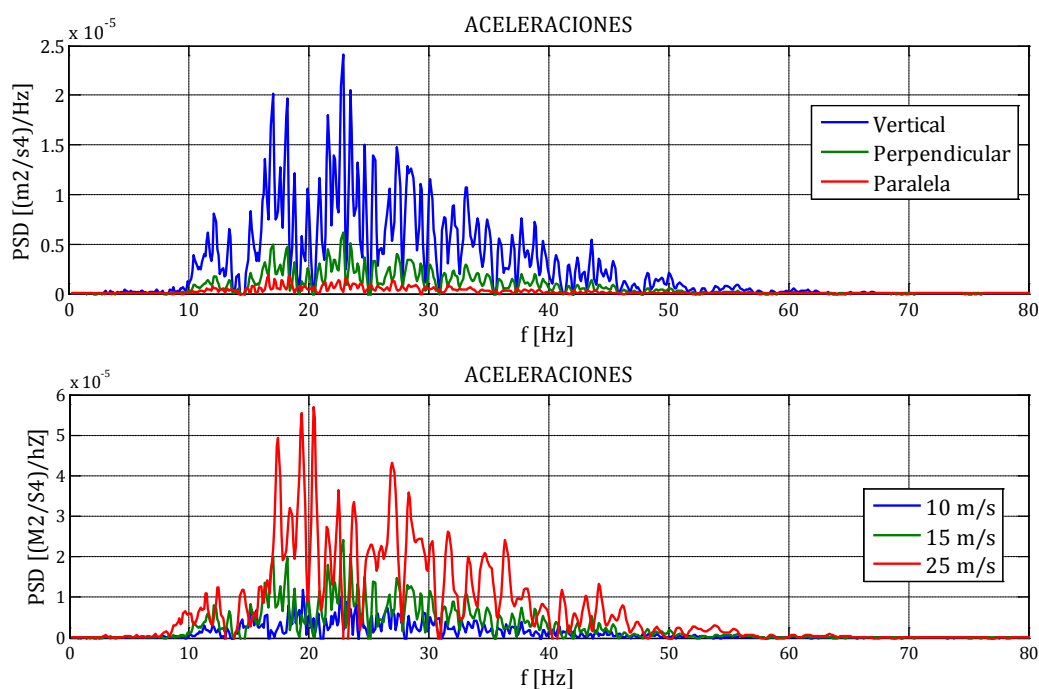


FIG. 4-19 - ESPECTRO DE VIBRACIONES POR LA COMPONENTE DINÁMICA DEL PASO DEL TREN

Se puede observar la irregularidad del espectro producto del efecto de filtrado de base. Se ve que la mayor parte de la energía se concentra entre los 15 y los 40 Hz. Las componentes de frecuencias altas estarán muy influenciadas por el grado de amortiguamiento del suelo.

4.6 MODELIZACIÓN DE LA ACCIÓN DE VEHÍCULOS SOBRE CARRETERAS

El estudio de la acción del tráfico vehicular en la generación de ondas que se propagan por el suelo ha cobrado importancia debido a la urbanización de gran densidad, y a las obras de infraestructura que se sitúan

cada vez más próximas a carreteras, principalmente en áreas urbanas. Si bien la magnitud de estas vibraciones es relativamente baja (es muy raro encontrar gente que se sienta incómoda debido a las vibraciones producidas por los autos, incluso a muy corta distancia de la carretera), pueden causar vibraciones en estructuras que luego son amplificadas por las mismas, afectar equipos de alta sensibilidad dentro de las construcciones, y/o ocasionar daños cosméticos en edificios históricos.

En algunos papers realizados por H. E. M. Hunt, se plantean los modelos para representar el espectro de vibraciones generado por el tráfico vehicular, considerado como un proceso estacionario y considerando sólo el aporte de las ondas de Rayleigh (Hunt, *Stochastic modelling of traffic-induced ground vibration*, 1991), (Hunt, *Modelling of road vehicles for calculation of traffic-induced ground vibration as a random process*, 1991). Este estudio se centra en la modelación del tráfico vehicular como un todo, y en modelizar los autos individualmente; este concepto es importante para entender los alcances del modelo. En (Hao & Ang, 1998) se puede encontrar un estudio similar de las vibraciones, y la comparación con mediciones experimentales. Más recientemente, (XU & Hong, 2007) plantea un modelo probabilístico para la simulación del tráfico y la generación de un espectro no estacionario de las vibraciones.

4.6.1 GENERALIDADES DEL MODELO

La acción de vehículos circulando por carreteras es un problema de naturaleza muy similar al de los trenes. Se trata de un conjunto de cargas puntuales que circulan a una determinada velocidad, por una trayectoria. De igual manera que los trenes, las cargas pueden ser descompuestas en una componente constante (componente cuasi-estática) y en otra componente dinámica de naturaleza aleatoria, producto de vibraciones en el sistema mecánico de cada vehículo. Análogamente a lo hecho para los trenes, sólo se considerará la componente dinámica de la acción.

Para un punto muy próximo a la carretera, el proceso será claramente no-estacionario porque el nivel de vibraciones crecerá y disminuirá con el paso de cada vehículo individualmente. No obstante, si el punto está suficientemente alejado (respecto del distanciamiento máximo entre vehículos), el proceso puede ser descrito como estacionario, puesto que no se distinguirá del paso individual de los vehículos (siempre que sea un flujo continuo de autos). Para el caso de calles (o avenidas) de gran tráfico, como lo son las de la ciudad, la definición de las vibraciones como proceso estacionario puede realizarse a distancias relativamente cercanas a la calle (Hunt, *Stochastic modelling of traffic-induced ground vibration*, 1991).

En la componente dinámica de la acción entra en juego el perfil por donde circulan los autos. Al no ser perfectamente lisa la superficie de rodadura, se transmitirá una excitación vertical al vehículo que excitará su sistema mecánico. Esto es completamente análogo a lo visto para trenes, aunque el concepto de la irregularidad del perfil es un poco más restringido que para dicho caso, y aquí se centra casi exclusivamente en la rugosidad de la carretera. En la siguiente figura se puede ver un esquema de la transmisión de los procesos que generan las vibraciones en el suelo, que es perfectamente aplicable al modelo de trenes también, aunque con algunas pequeñas diferencias.

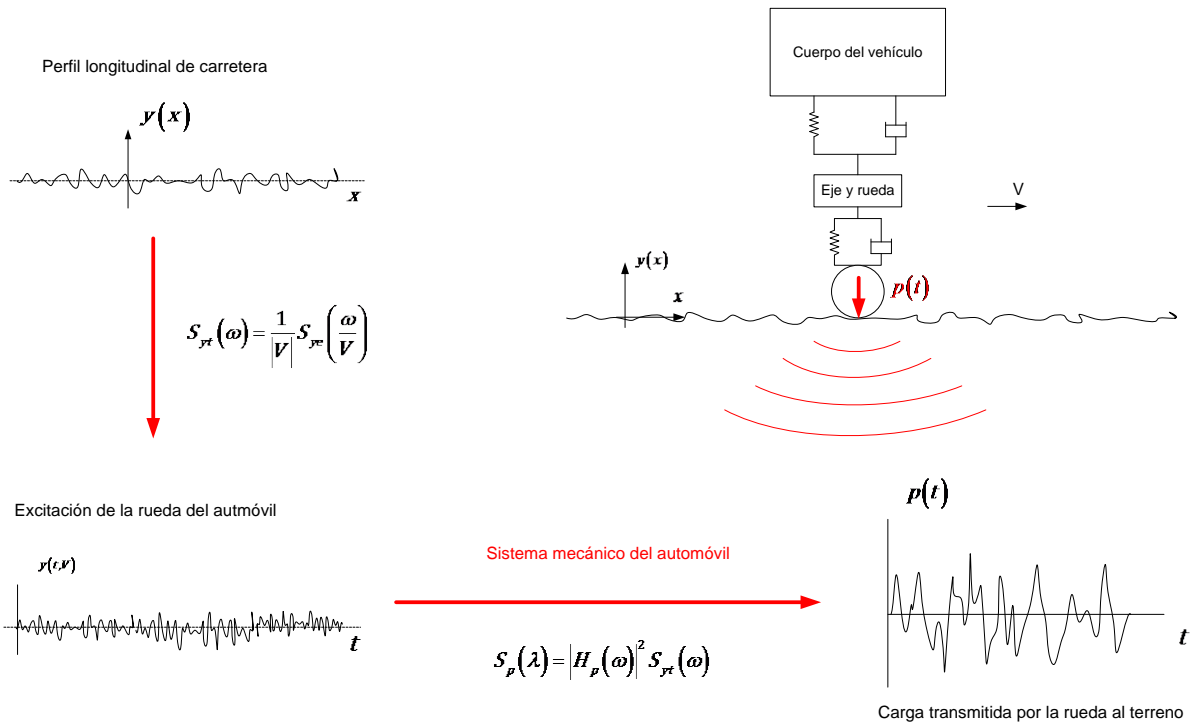


FIG. 4-20 - GENERACIÓN DE VIBRACIONES POR UN VEHÍCULO

4.6.2 PERFILES DE CARRETERAS

El perfil rugoso de las carreteras puede ser definido como un proceso aleatorio estacionario (igual que para los trenes). En este caso, hay definiciones un poco más unificadas para la estimación de los espectros de rugosidad de las carreteras. En (Tyan & Hong, 2007) puede verse un estudio acerca de la generación de perfiles rugosos a partir de espectros; la norma ISO 8606 propone una definición paramétrica de los espectros para distintos niveles de rugosidad. Estos se muestran a continuación.

Densidad de potencia espectral para el perfil longitudinal:

$$S_{ye}(\omega_e) = S_0 \left(\frac{\lambda_e}{\lambda_0} \right)^{-N}$$

Donde λ_e representa la frecuencia espacial, también conocida como número de onda. Esta función describe el perfil longitudinal de la carretera donde el parámetro determinístico es la progresiva de la misma.

Usando [4.34] queda,

$$S_{yr}(\omega) = \frac{S_0}{V} \left(\frac{\omega}{V\lambda_0} \right)^{-N} \quad [4.46]$$

TABLA 6 - PARÁMETROS DE RUGOSIDAD DE CARRETERAS SEGÚN ISO 8606

Clase de carretera		S_0 (10^{-6})	ω_0 [1/m]	N
A	Muy buena Autopista uniforme; calle recién pavimenta- da	2.5	1	2.1
B	Buena Autopista rugosa; carre- tera en buen estado	10	1	2.1
C	Promedio Carretera normal	40	1	2.1
D	Pobre Carretera con grava	160	1	2.1
E	Muy pobre Carreteras no pavimen- tadas	640	1	1.9

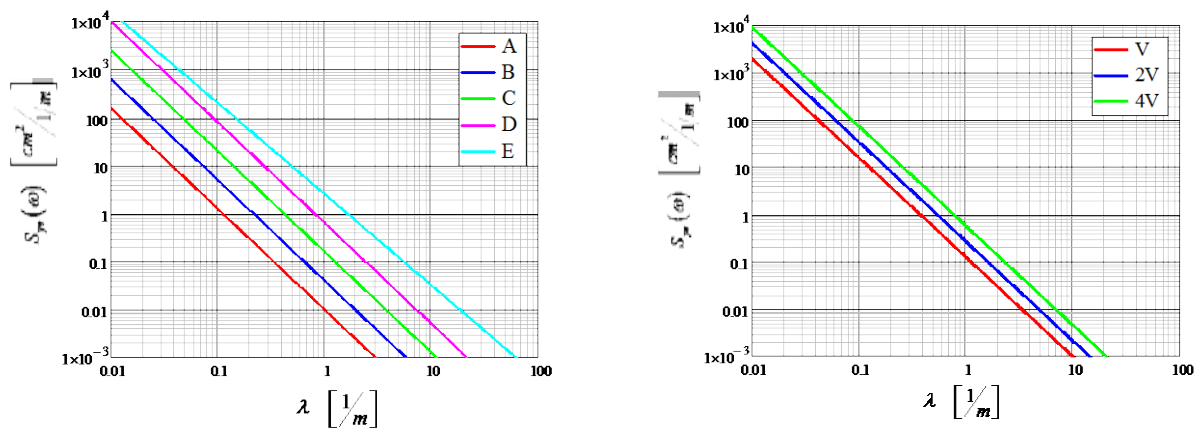


FIG. 4-21 - PSD DE LA RUGOSIDAD DEL PERFIL LONGITUDINAL DE LA CARRETERA

4.6.3 MODELO MECÁNICO DEL VEHÍCULO

Modelizamos al vehículo como un sistema uniaxial de 2 grados de libertad dinámicos¹. Al modelar cada vehículo como un solo eje, se están perdiendo algunas propiedades del sistema mecánico completo, producto de la interacción entre ejes de un mismo vehículo. Esto es lo que se vio al modelizar un vagón del tren, el efecto de filtro de base (Wheel-base filtering). De todas maneras, esto puede hacerse debido a la dispersión que existe entre las propiedades de los vehículos que circulan en una carretera, en cuanto a su distancia entre ejes y la velocidad de circulación. Es decir, es útil, en tanto el objetivo sea estimar el efecto de un conjunto de vehículos con propiedades mecánicas diferentes, y no el paso de uno aislado². Esto también está sustentado en el hecho de que el fenómeno de filtro de base tampoco es observado en las mediciones realizadas en campo.

Se plantean entonces, las ecuaciones de equilibrio dinámico del modelo del vehículo,

$$\begin{aligned}
 M_1 \ddot{x}_1 + c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 (x_1 - x_2) &= 0 \\
 M_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{y}) + c_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - y) + k_1 (x_2 - x_1) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.47}$$

¹ Para todos los detalles del análisis subsiguiente se puede ver un procedimiento análogo en (Hao & Ang, 1998) y (XU & Hong, 2007).

² Para ver un análisis detallado de los efectos del Wheelbase filtering, y las razones para no considerarlo, referirse a (Hunt, Modelling of road vehicles for calculation of traffic-induced ground vibration as a random process, 1991).

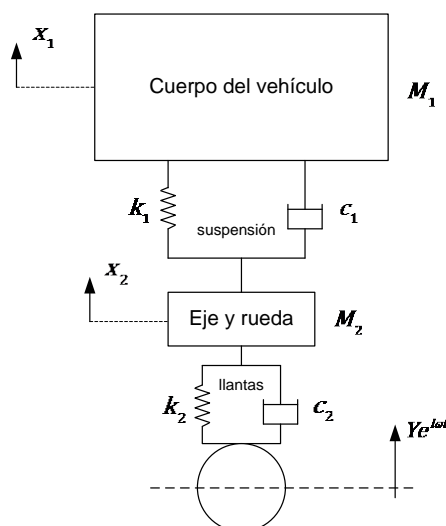


FIG. 4-22 - MODELIZACIÓN MECÁNICA DEL AUTOMÓVIL (2 GL)

Reescribiendo las ecuaciones de equilibrio [4.47],

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_1^2(x_1 - x_2) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\xi_2\omega_2(\dot{x}_2 - \dot{y}) + 2\mu\xi_1\omega_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_2^2(x_2 - y) + \mu\omega_1^2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad [4.48]$$

Donde, $\omega_i = \sqrt{k_i/M_i}$ son las frecuencias naturales del sistema de suspensión, y el de llantas, $\xi_i = c_i/2\sqrt{M_i k_i}$ son los respectivos coeficientes de amortiguamiento y $\mu = M_2/M_1$ es la relación de masas.

Se proponen soluciones en régimen permanente del tipo $x_1(t) = X_1 e^{i\omega t}$ y $x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}$

Y reemplazando estas soluciones en las ecuaciones [4.48], obtenemos un sistema de dos ecuaciones algebraicas, donde las incógnitas son las amplitudes X_1 y X_2 de la respuesta.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} Y$$

Donde,

$$A_{11} = -\omega^2 + 2\xi_1\omega_1 i\omega + \omega_1^2$$

$$A_{12} = -2\xi_1\omega_1 i\omega - \omega_1^2$$

$$A_{21} = -2\xi_2\omega_2 \mu i\omega - \mu\omega_1^2$$

$$A_{22} = -\omega^2 + 2\xi_2\omega_2 i\omega + 2\xi_1\omega_1 \mu i\omega + \omega_2^2 + \mu\omega_1^2$$

$$B_2 = 2\xi_2\omega_2 i\omega + \omega_2^2$$

De esta manera es sencillo despejar las amplitudes de la respuesta, y obtener, mediante las soluciones propuestas la respuesta a lo largo del tiempo (son armónicas). En este problema, lo que interesa es la carga que transmite el vehículo al terreno, y no solamente los desplazamientos de cada grado de libertad. La carga transmitida será la suma de las fuerzas de inercia de cada masa, y estará dada, entonces, por:

$$p(t) = M_1 \ddot{x}_1 + M_2 \ddot{x}_2 \quad [4.49]$$

Luego de resolver el sistema de ecuaciones, y reemplazar las soluciones en [4.49], la carga que se transmite al terreno tiene la siguiente expresión:

$$P(t) = M\omega^2 \frac{B_2 (A_{12} - \mu A_{11})}{\Delta (1 + \mu)} Y e^{i\omega t} = H_p(\omega) Y e^{i\omega t}$$

Donde $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ y $M = M_1 + M_2$ (masa total del vehículo) y $H_p(\omega)$ es la función de transferencia entre la excitación de la carretera sobre el vehículo, y la acción que éste transmite al terreno.

En cuanto a los parámetros mecánicos de los vehículos se puede encontrar, que la frecuencia natural del sistema de suspensión del vehículo (body-bounce system) varía entre los 7.5Hz y 19.6Hz, la frecuencia natural del sistema de llantas y eje (Wheel-hop system) entre 1.5Hz y 3.9Hz, y sus factores de amortiguamiento entre 0.10 y 0.47, y entre 0.027 y 0.051 respectivamente (Hao & Ang, 1998). En la siguiente tabla se resumen algunos valores típicos.

TABLA 7 - PROPIEDADES MECÁNICAS DE DISTINTOS VEHÍCULOS (XU, ET AL., 2007)

	M_1 ton	μ -	f_1 Hz	ξ_1 -	f_2 Hz	ξ_2 -
Auto	2	0.15	1.5	0.05	10	0.3
Camioneta	10	0.15	1.7	0.07	10	0.3
Colectivo	20	0.15	1.7	0.07	11	0.3
Camión	25	0.15	1.5	0.04	8	0.3
Camión pesado	32	0.15	2.0	0.04	17	0.3

4.6.4 ESPECTRO DE LA CARGA DE UN VEHÍCULO

Habiendo obtenido la función de transferencia para una excitación armónica en la rueda del vehículo, se puede obtener la PSD de la carga transmitida, según [4.22]. Por lo que la relación entre la PSD de la rugosidad de la carretera y la PSD de la fuerza que el automóvil transmite al terreno está dada por:

$$S_{pp}(\omega) = M^2 |H_p(\omega)|^2 S_{yy}(\omega) \quad [4.50]$$

$$\text{Donde } H_p(\omega) = \omega^2 \frac{B_2 (A_{12} - \mu A_{11})}{\Delta (1 + \mu)}$$

El espectro de las cargas dependerá, no solamente de la calidad de la carretera sino también, de las propiedades dinámicas del vehículo, que ya se vio, pueden ser caracterizadas por los parámetros M, μ, ω, ξ . Se ve en los siguientes gráficos, qué forma adopta la PSD de la carga para distintos vehículos, velocidades, y distintos tipos de carreteras:

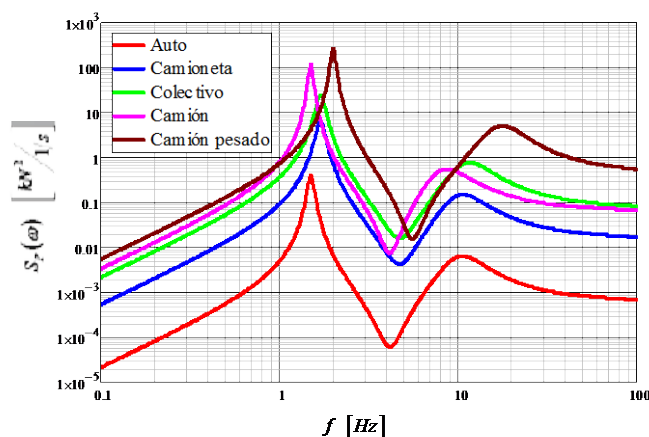


FIG. 4-23 - PSD PARA DISTINTOS TIPOS DE VEHÍCULOS

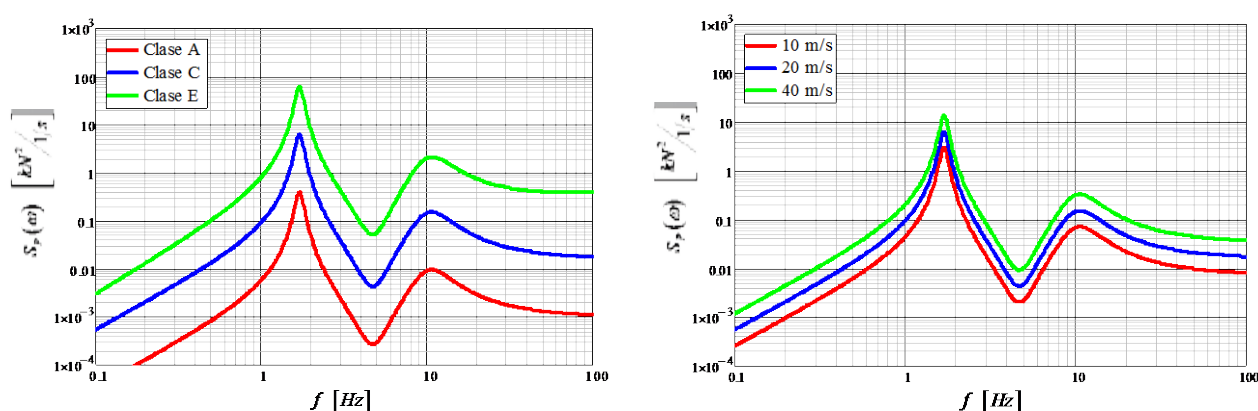


FIG. 4-24 - PSD PARA DISTINTOS TIPOS DE CARRETERA Y DISTINTAS VELOCIDADES

Se observa de los gráficos, que la mayor parte de la potencia, se concentra alrededor de las frecuencias naturales del sistema de dos grados de libertad¹. Esto es cada vez menos aproximado mientras mayores sean los coeficientes de amortiguamiento ξ del sistema. También hay que destacar, que la magnitud del espectro es mayor, a mayor velocidad del vehículo (Fig. 4-24), lo que ya se vio en la Fig. 4-21. Un dato no menor, es que las frecuencias fundamentales no difieren mucho de un tipo de vehículo a otro, a pesar de las grandes diferencias de masa. Esto permite una buena estimación de las propiedades del tráfico como conjunto. Sin embargo, el efecto de la velocidad no es tan determinante como el de la rugosidad del camino o el tipo de vehículo; la magnitud del espectro puede aumentar hasta cientos de veces al variar de una carretera “Clase A” a una “Clase E” (Fig. 4-24). Lo mismo sucede con el tipo de vehículos, donde los camiones o colectivos, tienen un espectro de más de 500 veces el de autos o camionetas.

4.6.5 MODELIZACIÓN DEL TRÁFICO VEHICULAR

El objetivo ahora, es describir el flujo vehicular que sucede en una avenida o carretera urbana. Éste flujo estará compuesto por distintos tipos de vehículos, con distintas características mecánicas, que circulan a diferentes velocidades, separados a una cierta distancia. Por ello, la modelización del tráfico no es para nada simple, y deben tenerse en cuenta, todos esos factores a la hora de modelizarlo. En (XU & Hong, 2007) se propone un método para simular el tráfico, donde los vehículos se distribuyen aleatoriamente a lo largo de la calle, según una distribución exponencial (inversa de la de Poisson), y el tipo de vehículo también es una varia-

¹ Es decir, se obtienen resolviendo el problema de autovalores del sistema, sin amortiguamiento: $[K - \omega^2 M]\{X\} = \bar{0}$

ble aleatoria; éste presenta un útil método para la simulación, pero no para obtener expresiones analíticas. Otro método propuesto por (Hunt, Stochastic modelling of traffic-induced ground vibration, 1991), define al tráfico como una carga continua y uniforme sobre el terreno, cuyo valor depende de una separación promedio y de un vehículo tipo, y cuyas propiedades mecánicas son un promedio de datos estadísticos del tráfico en cuestión. La modelización que se sigue aquí, se basa en esta última.

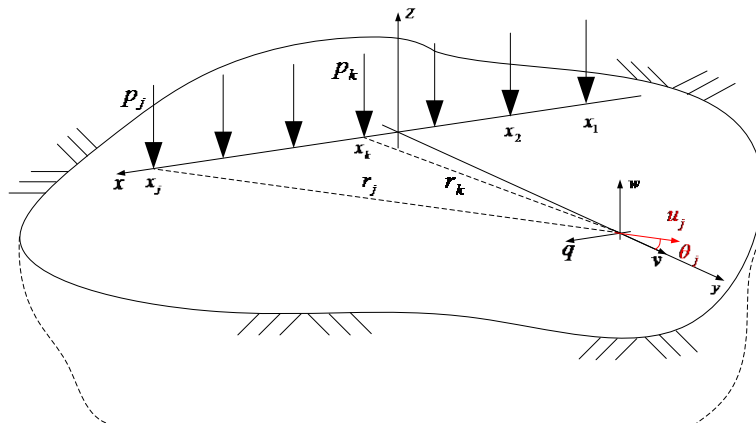


FIG. 4-25 - MODELIZACIÓN DEL FLUJO VEHICULAR

En la realidad, los vehículos se distribuyen de manera variada a lo largo del flujo, con velocidades y espaciamentos distintos entre sí, teniendo todos, masas y propiedades mecánicas distintas (frecuencias naturales principalmente). Esto es muy difícil de modelar en términos probabilísticos, y se recurre a simplificaciones para obtener expresiones analíticas manejables. Por esta razón, se modela al tráfico como una sucesión uniformemente espaciada, de vehículos idénticos y velocidad constante (recordar que en el modelo las cargas son fijas, y la velocidad solo influye en el espectro de la excitación del vehículo).

En la Fig. 4-25 se esquematiza el flujo vehicular según será modelado. Cada una de las cargas será idéntica a las otras, considerando un vehículo tipo, cuya masa y propiedades mecánicas tienen en cuenta la distribución de estos parámetros según datos estadísticos (Hunt, Modelling of road vehicles for calculation of traffic-induced ground vibration as a random process, 1991). Lo que variará de una carga a otra, es la distancia al punto de observación. Recordemos que se va a considerar que cada carga es inmóvil, aunque las vibraciones se deban justamente a la circulación de los vehículos. Esto puede hacerse, como se dijo antes, si consideramos un punto de observación lo suficientemente alejado de la carretera, o si el espaciamento entre vehículos es pequeño. Además, y no menos importante, es que la velocidad con que circulan los vehículos es bastante menor a la menor velocidad de propagación de las ondas en el suelo (ondas de Rayleigh), por lo que se pueden despreciar los efectos de interacción de frentes de ondas, producto del movimiento de la carga¹.

Hasta ahora se había trabajado con el espectro de la carga que genera un vehículo, pero al tener numerosos vehículos actuantes, es necesario contemplar la correlación entre las cargas, es decir, sus C-PSD, al igual que se hizo para los trenes. Si bien, el sistema mecánico de cada vehículo no tiene por qué tener relación alguna con el de los demás autos, sí lo tendrá, la excitación sobre la rueda del mismo, puesto que circulan sobre el mismo perfil rugoso, pero con un desfase en el tiempo. Puede intuirse, que las expresiones de las C-PSD dependerán fuertemente del espaciamento entre vehículos, y de su velocidad. Todo esto debe tenerse en cuenta cuando el espaciamento entre vehículos es reducido, como en el caso de carreteras urbanas.

¹ Esto es igual a lo mencionado para el caso de los trenes, donde para bajas velocidades el movimiento de la carga no tiene prácticamente influencia en la generación de ondas en el terreno.

Las funciones de correlación espectral de las excitaciones de las ruedas de cada vehículo, son deducidas en el 0. Ahora bien, se necesitan determinar las funciones de correlación espectral de las cargas transmitidas al terreno. Éstas estarán dadas por,

$$S_{p_j p_k}(\omega) = M_j H_{p_j}(\omega)^* M_k H_{p_k}(\omega) S_{y_t}(\omega) e^{-i\omega \tau_{jk}} \quad [4.51]$$

Quedando entonces definidos todos los espectros de las distintas cargas. Esta expresión es análoga a la [4.42] para trenes.

4.6.6 TRANSMISIÓN DE VIBRACIONES AL TERRENO

Se divide a la vibración en un punto de observación, según un eje perpendicular a la dirección de circulación de los vehículos (v), uno paralelo (u) a una distancia a , y el restante vertical (w) (ver Fig. 4-25). Las funciones de transferencia de aceleraciones, para cada una de las componentes estarán dadas por:

$$\begin{aligned} H_{\ddot{q}}(r, \omega) &= -\left(\frac{x}{r}\right) H_{\ddot{u}}(r, \omega) \\ H_{\ddot{v}}(r, \omega) &= \left(\frac{a}{r}\right) H_{\ddot{u}}(r, \omega) \\ H_{\ddot{w}}(r, \omega) &= H_{\ddot{w}}(r, \omega) \end{aligned} \quad [4.52]$$

Entonces se puede obtener la PSD para cada una de las componentes de la aceleración del punto de observación según [4.28].

$$\begin{aligned} S_{uu}(a, \omega) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{-x_j}{r_j}\right) H_q^*(r_j, \omega) \left(\frac{-x_k}{r_k}\right) H_q(r_k, \omega) S_{p_j p_k}(\omega) \\ S_{vv}(a, \omega) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{a}{r_j}\right) H_q^*(r_j, \omega) \left(\frac{a}{r_k}\right) H_q(r_k, \omega) S_{p_j p_k}(\omega) \\ S_{ww}(a, \omega) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N H_w^*(r_j, \omega) H_w(r_k, \omega) S_{p_j p_k}(\omega) \end{aligned} \quad [4.53]$$

Donde $r_j = \sqrt{a^2 + x_j^2}$

Para obtener las distintas coordenadas de los autos x_j , supondremos una distribución simétrica de los mismos, respecto del punto de observación. Esto es lógico, si supusimos en un principio un flujo continuo de autos. En los cálculos bastará establecer N en un par de decenas, para obtener un resultado convergente.

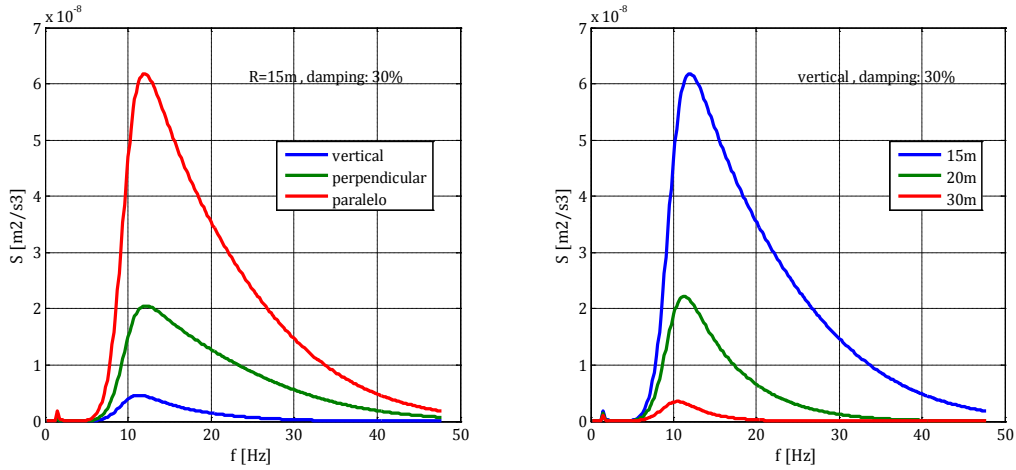


FIG. 4-26 - PSD DE LAS ACELERACIONES VERTICALES EN EL SUELO

Si se quisiera obtener el espectro para una carretera de varios carriles, es fácilmente extensible el conjunto de ecuaciones [4.53], si suponemos que no hay correlación entre las excitaciones de los autos de cada carril. Entonces podría extenderse el resultado ya obtenido, para considerar N carriles, cada uno con propiedades estadísticas del tráfico distintas según [4.29].

$$S(a, \omega) = \sum_{r=1}^{N_c} S_r(a_r, \omega) \quad [4.54]$$

Donde S_r es el espectro de respuesta correspondiente a cada carril, situado a una distancia a_r del punto de observación.

4.6.7 PARÁMETROS DEL VEHÍCULO TIPO

Es útil hacer algunas consideraciones sobre los valores de los parámetros a considerar para modelar el vehículo tipo del tráfico. Si observamos la expresión [4.50] de la PSD para la acción de cada vehículo, se ve que es una función cuadrática de la masa del vehículo en cuestión. Ahora bien, si se considera a la masa como una variable aleatoria, dicha expresión será una función de una variable aleatoria. Por lo que en general, tenemos una distribución de funciones PSD (cada una define un proceso aleatorio propio), y para modelizar el tráfico con un solo vehículo típico, se utiliza la esperanza de la distribución de funciones espectrales¹. Esto es,

$$E[S_{pp}(\omega)] = E[M^2 |H_p(\omega)|^2 S_{yr}(\omega)] = E[M^2] |H_p(\omega)|^2 S_{yr}(\omega) \quad [4.55]$$

Se ve que al considerar la función PSD media de todas las posibles, aparece un momento de segundo orden no centrado, de la variable aleatoria M . Por lo que no se necesitará conocer la densidad de probabilidad de dicha variable, sino sólo ese momento, que puede escribirse en término de la esperanza, y el desvío standard según, $E[X^2] = \mu_X^2 + \sigma_X^2$. Entonces, conocida la distribución de masas del tráfico, se utilizará como masa del vehículo tipo, a la definida según,

$$M = \sqrt{\overline{M^2} + \sigma_M^2} \quad [4.56]$$

¹ Esto es distinto a considerar la esperanza de la masa de la distribución de vehículos, y con ese valor obtener la correspondiente PSD. La diferencia radica, únicamente, en que la masa está elevada al cuadrado en la expresión.

Donde \bar{M} es el promedio de la masa de los vehículos que circulan, y σ_M es el desvío estándar¹.

Se observa claramente que el “espectro promedio” es mayor que el mismo espectro calculado con la masa promedio de los vehículos. La diferencia la aporta el desvío de la distribución de masas. Esto parece razonable al observar los gráficos de la Fig. 4-24 que muestran la diferencia de magnitud de los espectros para los vehículos más pesados respecto de los más livianos. Si se considerara solo la masa promedio, se estaría disminuyendo demasiado el espectro hacia los vehículos más livianos, porque no estaría viendo la influencia cuadrática en la expresión de la PSD.

De la misma manera se procedió al determinar las expresiones de las C-PSD en el Anexo 5. Estas dependen de los parámetros V (velocidad del vehículo) y s_v (espaciamiento entre vehículos), que son a su vez variables aleatorias. Por lo que, al igual que se hizo para la expresión de S_p , se considerará la esperanza de la distribución de funciones C-PSD (ahora asumiendo que la masa $M = \sqrt{\bar{M}^2 + \sigma_M^2}$ es un parámetro determinístico).

Siguiendo con el análisis de los parámetros del tráfico, hay que analizar cómo influye la variación de la velocidad y el espaciamiento de los vehículos. Estos parámetros aparecen en las expresiones de las funciones de correlación espectral de las cargas [4.51]. Como se consideró que el espaciamiento entre vehículos y la velocidad, son únicos, se tiene que,

$$\tau_{jk} = \frac{s_v}{V} |j - k|$$

$$S_{p_j p_k}(\omega) = M^2 |H_p(\omega)|^2 S_{y_t}(\omega) e^{-i\omega \tau_{jk}}$$

En este caso, se considera que la separación entre vehículos s_v es una variable aleatoria que sigue una distribución gaussiana con media \bar{s}_v y desvío σ_{s_v} , y de igual manera lo es la velocidad de cada vehículo, con media \bar{V} y desvío σ_V . Por lo tanto, el desfase temporal t_{jk} será una variable aleatoria que sigue una distribución de Cauchy $C(\bar{s}_v/\bar{V}, \sigma_{s_v}/\sigma_V)$. Al igual que se hizo con la masa, se utilizará la esperanza de la función PSD de la carga, es decir, con el valor promedio de dicha función para las distribuciones dadas².

$$E[S_{p_j p_k}(\omega)] = M^2 |H_p(\omega)|^2 S_{y_t}(\omega) E[e^{-i\omega \tau_{jk}}]$$

Entonces, obviando el operador esperanza, para simplificar notaciones³,

$$S_{p_j p_k}(\omega) = M^2 |H_p(\omega)|^2 S_{y_t}(\omega) e^{-i\omega |j-k| \frac{\bar{s}_v}{\bar{V}}} e^{-\frac{\sigma_{s_v}}{\sigma_V} \omega |j-k|} \quad [4.57]$$

Esto es como considerar parámetros del flujo vehicular complejos: $s_v = \bar{s}_v - i\sigma_{s_v}$ y $V = \bar{V} - i\sigma_V$

Se observa que al considerar que la separación entre vehículos es una variable aleatoria, aparece un factor exponencial, que depende de la frecuencia y de los desvíos de la separación y la velocidad de los vehículos.

1 Observar que se asumió que los demás parámetros que definen las propiedades dinámicas del vehículo son determinísticos. Esto no induce un gran error, porque puede verse de la Fig. 4-23 que las frecuencias naturales del sistema son similares para los distintos tipos de vehículo.

2 Un análisis similar se puede ver en (Hunt, Modelling of road vehicles for calculation of traffic-induced ground vibration as a random process, 1991) y en el inciso 4.6.7 del presente trabajo.

3 El cálculo de $E[e^{-i\omega t_{jk}}]$ se denomina “función característica” de la distribución de Cauchy, que puede encontrarse en textos avanzados de probabilidad.

Mientras más grande sea el cociente entre los desvíos, menor será la influencia de estos términos en la respuesta total. Por otro lado, la correlación entre dos vehículos tiende rápidamente a 0 al aumentar la distancia entre ellos. Es decir, solo es apreciable la influencia de la correlación entre los vehículos inmediatamente contiguos.

4.7 ACCIÓN DE MÁQUINAS VIBRATORIAS

En este punto, se busca modelizar la acción de motores y máquinas vibratorias, que transmiten vibraciones al suelo. Generalmente, dichas máquinas no actúan de manera directa en el suelo, sino que están fundadas en bloques de hormigón armado, por lo que para estimar la acción transmitida al suelo, debe considerarse la interacción suelo-fundación. En la práctica, la diversidad de máquinas que existen, así como de bases de fundación, hace que cada caso deba analizarse por separado; sin embargo, se presenta un enfoque simple y general que puede servir como base para el análisis de las vibraciones transmitidas por distintos tipos de máquinas.

El procedimiento usual para este tipo de modelos, consiste en suponer a la base y a la máquina, como un cuerpo rígido suspendido sobre un resorte y un amortiguador, que representan la sustentación del suelo, y la energía que se disipa por radiación en el mismo. Por los buenos resultados obtenidos, y la simplicidad analítica, se seguirá este método.

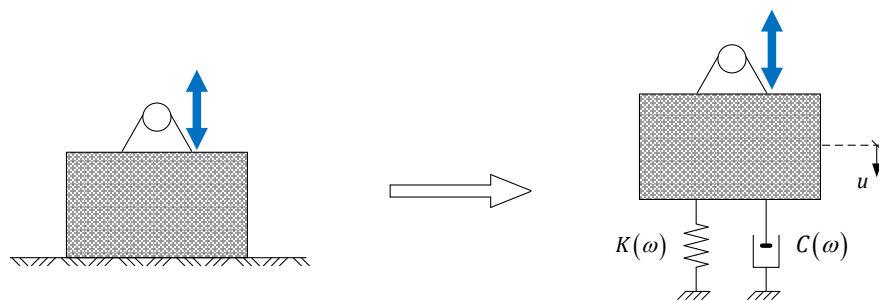


FIG. 4-27 - SISTEMA MÁQUINA-FUNDACIÓN-SUELO

La carga que actúa sobre la fundación estará prescrita por el fabricante de la máquina, y por lo general, se trata de acciones prácticamente armónicas, o periódicas de 2 armónicos. La solución del sistema de un grado de libertad es ya conocida, y puede verse en cualquier texto básico de vibraciones mecánicas, por lo que se presentará el resultado únicamente.

El desplazamiento vertical de la base u , ante una acción armónica de la máquina, está dada por,

$$u(t) = \frac{1}{K - m\omega^2 + i\omega C} P_0 e^{i\omega t}$$

Lo que interesa en este análisis, es la acción transmitida al terreno, que será resultado de la acción del resorte y del amortiguador.

$$P_r(t) = K.u(t) + C.\dot{u}(t) = \frac{K + i\omega C}{K - m\omega^2 + i\omega C} P_0 e^{i\omega t}$$

Esta expresión es la conocida función de transmisibilidad para sistemas mecánicos de un grado de libertad. Las características de dicha función y su dependencia de los parámetros que la componen, pueden encontrarse en cualquier texto básico de dinámica estructural. Lo más destacable, se centra en que la función encuentra un pico, en coincidencia con la frecuencia natural del sistema dada por $\omega_n = \sqrt{K/m}$.

Ahora bien, siguiendo el mismo tipo de análisis para las otras cargas, se puede obtener el espectro de la carga transmitida al terreno, a partir del espectro de la acción de la máquina sobre la fundación, y las propiedades mecánicas de ésta, así como las constantes K y C que modelizan el apoyo del suelo.

$$S_p(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{p_0}(\omega) \quad [4.58]$$

$$\text{Donde } H(\omega) = \frac{K+i\omega C}{K+i\omega C-m\omega^2}$$

En los casos más usuales, el espectro de la acción de la máquina, constará únicamente de uno o dos armónicos, que se conocen como carga primaria y carga secundaria. Por lo que la expresión [4.58] se reduce a determinar las amplitudes de dichos armónicos, que, en general, vendrán dados por el fabricante.

4.7.1 CONSTANTES DINÁMICAS DEL SISTEMA SUELO-FUNDACIÓN

Hasta ahora se escribieron las expresiones de la carga que se transmite al terreno según el modelo de la Fig. 4-27, pero no se dijo nada acerca de las expresiones para las constantes del resorte y el amortiguador del suelo. De hecho, son estas expresiones en donde radica la parte más importante y compleja del modelo. Este problema ha sido extensamente estudiado, y se puede encontrar un detallado análisis de los avances en el tema para la década del 80 en (Gazetas, 1983). En las décadas siguientes, el avance en el estudio de esta modelización para la interacción suelo-base no ha sufrido prácticamente modificaciones, más que la obtención de expresiones para cuantificar las constantes K y C en diversos problemas diferentes.

El problema de determinar las constantes del modelo mecánico equivalente no es para nada sencillo, y depende de numerosos factores que describen el comportamiento del complejo sistema suelo-fundación. Existen numerosos autores que han abarcado este tema, y no es el objetivo aquí, explayarse en los detalles. De manera abarcativa, puede decirse que el sistema suelo-fundación y sus propiedades mecánicas dependerán de:

- La forma de la fundación (circular, rectangular, arbitraria).
- El perfil del suelo (espesor y propiedades dinámicas de cada estrato).
- Nivel de fundación (esto es, si la base se encuentra parcialmente embebida en el suelo o sobre la superficie).
- La rigidez flexional de la fundación (bases rígidas o flexibles).
- La frecuencia de las cargas.

Todas estas consideraciones llevan a plantear distintas expresiones para los parámetros mecánicos, en función de los parámetros más relevantes del problema. Sin embargo, este capítulo se centrará en las expresiones más simples, que corresponden a fundaciones masivas (rígidas), circulares o rectangulares, que fundan al nivel de superficie, en un semi-espacio homogéneo. Este suele ser el caso de las fundaciones de grandes máquinas vibratorias (molinos y turbinas por ejemplo)

Una propiedad importante a destacar es la dependencia de la frecuencia que tienen estas constantes. En el caso más general, las constantes dinámicas serán dependientes de la frecuencia de excitación, tendiendo al problema estático cuando la frecuencia se anula. Es decir, la constante del amortiguador se hará 0, y la rigidez dinámica tenderá a la rigidez estática¹. En el trabajo mencionado anteriormente de G. Gazetas, aparecen gráficos que muestran una fuerte influencia de las constantes con la frecuencia. Sin embargo, para valores de frecuencia bajos y medios, puede suponerse, con razonable aproximación que las constantes son independientes de la frecuencia, simplificando analíticamente el problema.

¹ Rigidez que puede obtenerse del conocido "problema de Bussinessq".

La condición de independencia de la frecuencia puede postularse según,

$$a_0 = \frac{\omega r_0}{c_s} < 1 \quad [4.59]$$

Esta condición, se verá más adelante, suele cumplirse en un amplio rango de las aplicaciones prácticas.

Se presentan, a continuación, las expresiones para las constantes, independientes de la frecuencia. Las expresiones valen para bases circulares y rectangulares, y que se encuentran a nivel del suelo, es decir, que no poseen ningún tipo de confinamiento lateral.

$$K = \frac{G}{1-\nu} r_0 \beta_z$$

$$C = \frac{1.7}{1-\nu} r_0^2 \sqrt{\rho G \beta_z} \quad [4.60]$$

Donde G es el módulo de elasticidad transversal del suelo, ν su módulo de Poisson y ρ la densidad del suelo.

Las bases circulares y rectangulares se diferencian según,

$$r_0 = \begin{cases} r & \text{bases circulares} \\ \sqrt{\frac{BL}{\pi}} & \text{bases rectangulares} \end{cases}$$

$$\beta_z = \begin{cases} 4 & \text{bases circulares} \\ \sqrt{\pi} \left(2.1 - 0.078 \frac{L}{B} \right) & \text{bases rectangulares} \end{cases}$$

Estos valores de las constantes, como se dijo antes, son independientes de la frecuencia de excitación, y son razonables aproximaciones dentro de un rango acotado definido por [4.59], que depende de las propiedades del suelo y las dimensiones de la base. En la práctica, las frecuencias de funcionamiento de las máquinas rotativas usuales están dentro de este rango.

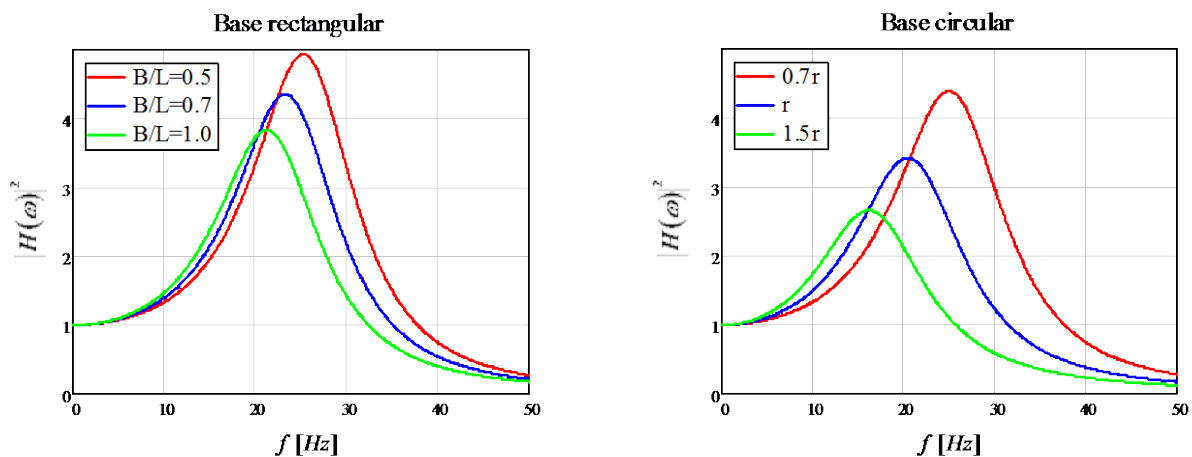


FIG. 4-28 - FUNCIÓN DE TRANSMISIBILIDAD PARA DISTINTOS TAMAÑOS DE FUNDACIÓN

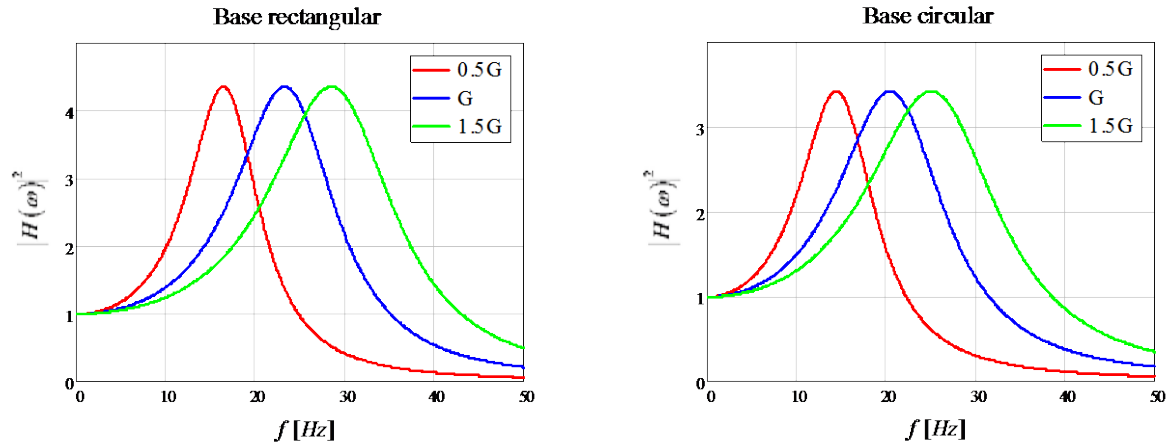


FIG. 4-29 - FUNCIÓN DE TRANSMISIBILIDAD PARA DISTINTAS RIGIDECES DEL SUELO DE FUNDACIÓN

De los gráficos de la Fig. 4-28 y Fig. 4-29 se puede ver la clásica forma de la función de transmisibilidad para un sistema de un grado de libertad, donde el pico se produce para la frecuencia natural del sistema. Como es de prever, la frecuencia natural puede estar dentro de un amplio rango de frecuencias, dependiendo del tamaño de la fundación y de las propiedades del suelo, aunque es razonable esperar que se encuentre entre los 10 y 30 Hz, en los casos usuales.

5 ENSAYOS EXPERIMENTALES

En el capítulo anterior fueron modelizadas distintos tipos de carga que actúan sobre el terreno producto de la actividad humana. Se utilizó un enfoque analítico para cuantificar, y analizar el efecto de dichas cargas en las vibraciones sobre el suelo, obteniéndose así, funciones matemáticas que definen la respuesta del mismo, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Ahora bien, es preciso saber si los modelos matemáticos pueden representar, con razonable grado de precisión, el fenómeno que se observa en la realidad. Para ello es que se realizan mediciones experimentales y se comparan, dentro de cierto marco teórico, los datos medidos con los obtenidos analíticamente.

En la actualidad, la adquisición de datos desde los equipos de medición (en este caso, acelerómetros) se realiza de manera digital, debido a la practicidad que representa el análisis de los datos mediante computadoras, y el almacenamiento de gran cantidad de datos en las mismas. Esto implica ciertos “detalles” a tener en cuenta a la hora de analizar una serie de datos discreta (señal digital) que representa una serie continua (fenómeno continuo). Esto se introduce brevemente en el siguiente inciso.

En este trabajo, lo que se busca medir son las vibraciones en un punto de la superficie del terreno. Estas vibraciones pueden ser medidas en términos de los desplazamientos, velocidades o aceleraciones en dicho punto, estando todas relacionadas entre sí (mediante derivación e integración). El equipo utilizado para medir las vibraciones es el acelerómetro, que, como su nombre dice, mide las aceleraciones en un punto. Básicamente funciona como un marco rígido que posee una masa dentro agarrada al marco mediante un sistema de resorte y amortiguador. Las vibraciones en el punto donde es colocado el marco rígido se pueden determinar, asociándolas con las aceleraciones que sufre la masa en su interior (para ver más detalles del funcionamiento conceptual se puede ver (Clough & Penzien, 2003)). La manera de registrar las aceleraciones de la masa es la principal diferencia entre los distintos tipos de acelerómetros. Los más utilizados actualmente son los acelerómetros piezoeléctricos que miden los desplazamientos de la masa en términos de la variación de la tensión que registra un elemento piezoeléctrico. Este tipo de equipos facilita la obtención de datos de manera digital, en contraposición con los acelerómetros mecánicos.

En las mediciones realizadas para el presente trabajo, se utilizó un acelerómetro piezoeléctrico triaxial “RION”, y los datos fueron relevados en una computadora portátil, mediante un adquisidor de datos para PC (LabJack)¹. De esta manera se obtuvieron los datos de las mediciones (archivo de datos numéricos) para su posterior procesamiento e interpretación de resultados.



FIG. 5-1 - ESQUEMA DE ADQUISICIÓN DE DIGITAL DE DATOS

¹ Todos los instrumentos fueron provistos por el Laboratorio de Dinámica de Estructuras de la Facultad.

5.1 INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

Se denomina “Procesamiento de señales” al conjunto de procedimientos que se aplican sobre las mediciones experimentales para obtener la información contenida en las lecturas. En general, el propósito del procesamiento de señales es la extracción de información de una señal, especialmente cuando es muy dificultoso obtenerla mediante observación directa¹. La metodología para extraer la información tiene 3 etapas bien diferenciadas: adquisición de datos; procesamiento de la señal; interpretación (Shin & Hammond, 2008). La primera de dichas etapas fue mencionada en el punto anterior, y en esta parte, se estudiarán la segunda y tercera de ellas.

Una vez realizadas las mediciones, se tiene un conjunto de series numéricas que representan los datos de salida del aparato de medición (en este caso un acelerómetro). Ese conjunto de series numéricas representan muestras de un determinado proceso aleatorio, que no se reduce solo a la variable que se quiere medir en sí, sino que además la señal contiene “ruido” propio del aparato de medición. Dependiendo de la magnitud del fenómeno a medir, y de la sensibilidad del aparato, este ruido puede ser despreciable, o puede tener una influencia considerable en lo que estamos midiendo, y debe ser tenido en cuenta a la hora de procesar los datos. Es por esto, que la elección del aparato de medición a utilizar va a depender del fenómeno a medir, y debe elegirse criteriosamente. En general, y en las mediciones realizadas para este trabajo, el ruido no tendrá una influencia apreciable en las mediciones.

Con el objetivo de comparar las mediciones realizadas en campo, con los resultados teóricos desarrollados en los capítulos anteriores, se usarán dos estimadores: la función de densidad de potencia espectral² (PSD) y el valor RMS (root mean square). El primero es una manera de describir como se distribuye la potencia de la señal en las distintas frecuencias; y el segundo es una medida estadística de la magnitud de una variable (esto ya fue visto en el capítulo anterior). De la teoría de vibraciones aleatorias, se deduce que el valor RMS es un estimador del desvío estándar del proceso aleatorio, que si lo consideramos estacionario, es independiente del segmento de señal analizado (Ver 4.1.1).

Numéricamente, una cuestión fundamental a la hora de realizar registros digitales discretos de fenómenos que son continuos en el tiempo, es la determinación de la frecuencia de muestreo. Si se registra una magnitud de un proceso continuo, a intervalos Δt , claramente se estará perdiendo información intermedia del proceso. En particular, se pierde información en lo que respecta a contenidos de la señal de alta frecuencia, cuya longitud de onda sea menor que el intervalo de muestreo. Es decir, distintas componentes de frecuencias altas se vuelven indistinguibles de otras, debido a que el muestreo no se hace lo suficientemente rápido (Fig. 5-2).

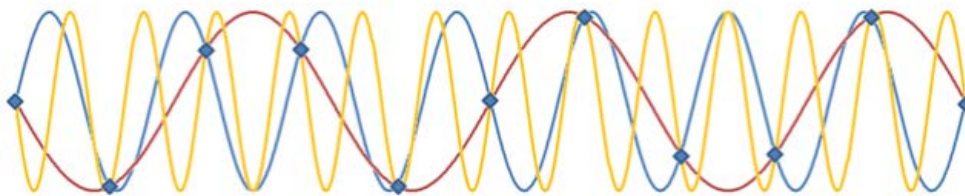


FIG. 5-2 - ALIASING EFFECT

1 El campo del procesamiento de señales es muy amplio y contiene todo tipo de aplicaciones en las distintas ramas de las ciencias y la ingeniería, y en este trabajo no se profundizará en la teoría. Para leer acerca de la teoría del análisis de señales se puede acudir a (Shin & Hammond, 2008), (Priestley, 1981), (Newland, 1993).

2 Como toda medición experimental, se trata de un proceso aleatorio y por lo tanto se lo puede definir probabilísticamente mediante su función PSD.

Ciertas frecuencias altas, se confunden con otras frecuencias más bajas, distorsionando el espectro de la señal medida. Toda componente de frecuencia fuera del rango $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$, tendrá su amplitud distorsionada por las componentes de frecuencias altas que son indistinguibles de ella (se denominan “alias” de la frecuencia). Esto se puede evitar eligiendo una frecuencia de muestreo ($f = 1/\Delta t$) lo suficientemente alta, de manera que la energía de la señal fuera de este rango, sea despreciable. Esto puede expresarse mediante la siguiente relación:

$$\frac{1}{2\Delta t} > f_0$$

Donde el término de la izquierda es la denominada frecuencia de Nyquist ($f_N = 1/2\Delta t$), y f_0 representa la mayor frecuencia significativa de la señal que se quiere medir (esto implica tener cierto conocimiento del fenómeno a medir, a priori).

En los problemas del presente trabajo, las mediciones se realizaron con una frecuencia de muestreo de 250Hz, muy por encima de las frecuencias máximas significativas de los espectros medidos (80 Hz para el caso de los trenes).

5.1.1 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Como en cualquier estimador estadístico se requiere, entre otras propiedades, que sea insesgado y consistente. Esto es, que la esperanza del estimador coincida con el valor real del parámetro (insesgado), y además, que a medida que el tamaño de la muestra crece, el valor del estimador tienda a ser el valor del parámetro (consistente). En general, alcanza con pedir que la esperanza del estimador tienda al valor real, a medida que el tamaño de la muestra crece; se dice, entonces, que es un estimador “asintóticamente insesgado”. Estas dos propiedades principales de los estimadores, pueden resumirse matemáticamente según,

$$\left. \begin{array}{l} E[\bar{\theta}] \rightarrow \theta \\ \text{Var}[\bar{\theta}] \rightarrow 0 \end{array} \right\} n \rightarrow \infty$$

El estimador natural para el desvío estándar de una muestra, que puede encontrarse en la bibliografía básica de estadística, está dado por la siguiente expresión¹,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad [5.1]$$

Y se ve claramente, que coincide con la definición del valor cuadrático medio (mean square), cuando la media de la señal es nula. Por lo que se deduce que el valor RMS es un estimador del desvío estándar del proceso, si éste tiene media igual a 0.

En el caso de definir un estimador para la función de potencia espectral del proceso, la tarea es mucho más complicada. En primer lugar, no se trata de un estimador puntual, puesto que lo que se busca estimar ahora no es un único valor, sino una función, y lo que es más importante, la definición de dicha función es analíticamente más compleja que la del valor cuadrático medio. De todas maneras, la literatura al respecto no es escasa (Ver (Priestley, 1981), (Newland, 1993), (Press, Teukolsky, T., & P., 1988)), y se describen muy brevemente en los siguientes párrafos, los puntos principales para estimar dicha función.

¹ Se puede demostrar que este estimador es sesgado. Se obtiene un estimador insesgado, si se lo multiplica por $n/(n-1)$. De todas maneras, para valores grandes de n la diferencia es despreciable.

Existen diferentes formas de definir la función de potencia espectral, algo que fue mencionado brevemente en el capítulo previo. Puede estar definida para cualquier valor real de la frecuencia, solo para frecuencias positivas, y algunos casos más de menor relevancia. La condición a adoptar, debe ser que la suma a lo largo de todo el dominio de definición (integral en caso de funciones continuas) debe ser igual al desvío estándar (o valor cuadrático medio) del proceso. En este trabajo, se usará la segunda definición, donde se define la función solo para las frecuencias positivas. Bajo esta misma condición fueron definidas las funciones espectrales de los modelos analíticos.

El estimador de la potencia espectral más utilizado en la actualidad, es el “periodograma”, que se define según¹,

$$P(0) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \right|^2$$

$$P(f_k) = 2 \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i \frac{2\pi k}{N} j} \right|^2 \quad k = 1, 2, \dots, N/2$$
[5.2]

Donde N es la cantidad de puntos de la muestra, y $f_k = k/N\Delta t$ son las frecuencias en donde se evalúa el espectro. El espectro definido recién, es el espectro del semieje positivo (one-sided), y cuya sumatoria en todas las frecuencias, coincide con el valor cuadrático medio.

Hay que observar que el periodograma no es otra cosa que la transformada de Fourier (transformada discreta de Fourier por tratarse de series numéricas discretas) al cuadrado; el factor 2, aparece al querer considerar únicamente las frecuencias positivas, para seguir conservando el valor de la sumatoria total.

Se mencionó hasta ahora, que el estimador más “popular” para la densidad de potencia espectral es el periodograma (o el cuadrado de la transformada de Fourier). Sin embargo, interesa saber además, si cumple con los requisitos para ser un estimador “confiable”, esto es, como se dijo antes, que sea insesgado y consistente. Se puede demostrar que el “periodograma”, según fue definido recién es un estimador asintóticamente insesgado del espectro de densidad de potencia (en (Priestley, 1981) se puede ver una deducción detallada al respecto). Por otra parte, también puede demostrarse que es un estimador inconsistente, en tanto que no converge al valor real del espectro. El periodograma muestra tener un comportamiento errático y fluctuante alrededor del espectro real, incluso cuando el número de muestras crece (Fig. 5-3).

Entonces, el problema que encontramos al estimar el espectro de potencia mediante el periodograma es el de la inconsistencia, a pesar de ser éste un estimador natural del mismo. Este problema puede ser superado parcialmente, al considerar versiones “suavizadas” (smoothed) del periodograma, que logran disminuir claramente la varianza como estimador, mejorando la consistencia.

¹ Existen algunas definiciones distintas para el periodograma en la bibliografía. Aquí seguimos la de (Press, Teukolsky, T., & P., 1988), que comparte los criterios establecidos en el párrafo anterior.

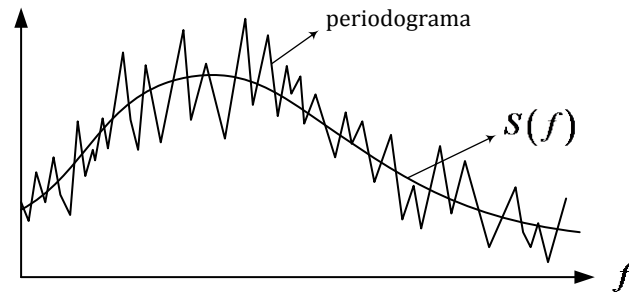


FIG. 5-3 - PERIODOGRAMA DE UN ESPECTRO CONTINUO

Muchos de estos conceptos son muy extensos y escapan largamente el alcance del trabajo, sin embargo, y para resumir, hay que destacar que se utilizará en el procesamiento, versiones suavizadas de los periodogramas, como estimadores de los espectros reales.

Las técnicas de suavizado utilizadas son, por un lado, el filtro del periodograma a través de “ventanas” que promedian de manera ponderada los valores en un cierto entorno de frecuencias. Mientras más ancho sea el entorno considerado (window bandwidth), mayor será el grado de suavización, sin embargo esto no es necesariamente favorable, puesto que al suavizar el espectro, si bien se disminuye la varianza del estimador, se aumenta su sesgo. Con lo cual, hay que encontrar un punto en el cual se haga óptima (en términos de semejanza) la relación entre el aumento de sesgo y de consistencia. Sin ir más a fondo, como criterio general, se utilizarán ventanas angostas en el caso de estimar espectros que se espera, tengan picos pronunciados en algunas frecuencias (salto coordinado de personas por ejemplo). Mientras que para espectros más aplanados, se permiten mayores anchos de ventana. En los análisis hechos, se utilizó una “ventana de Hanning”.

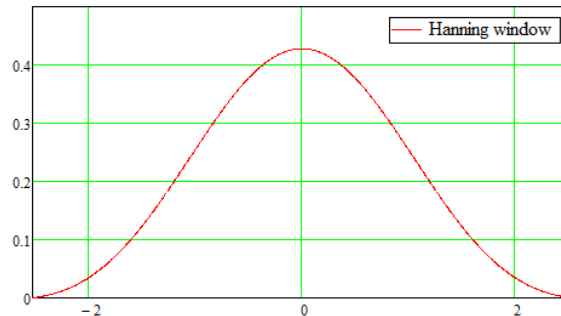


FIG. 5-4 - VENTANA DE HANNING PARA SUAVIZADO DE ESPECTRO

Otra manera de reducir la varianza de la estimación, aumentando su consistencia, es promediando distintos periodogramas del mismo fenómeno. Si bien este método no tiene la contra que tiene el de suavizar el estimador, no siempre se dispone de muchas muestras para realizar el promedio.

Por último, y para la comparación de la función de densidad de potencia espectral medida del proceso, con la obtenida mediante el modelo analítico, el estimador debe ser “escalado” para representar una función continua. Es decir, el estimador, es en sí una función discreta, pues es el resultado del análisis de un registro discreto (se utiliza la DFT), por lo que para hacer una comparación con el espectro teórico que es una función continua (en un caso general), debe obtenerse una función continua equivalente para el espectro medido. Esto se obtiene según:

$$S_{cont}(f_j) = \frac{1}{\Delta f} S_{discr}(f_j)$$

Donde Δf es el intervalo de frecuencias en donde está evaluada la transformada discreta de Fourier de la señal (depende del número de muestras en un registro). De esta manera, el valor cuadrático medio de la medición puede obtenerse, integrando numéricamente el espectro continuo¹.

5.1.2 PROCESAMIENTO DE REGISTROS

A continuación se esquematiza el proceso mediante el cual se analizan las mediciones hechas.

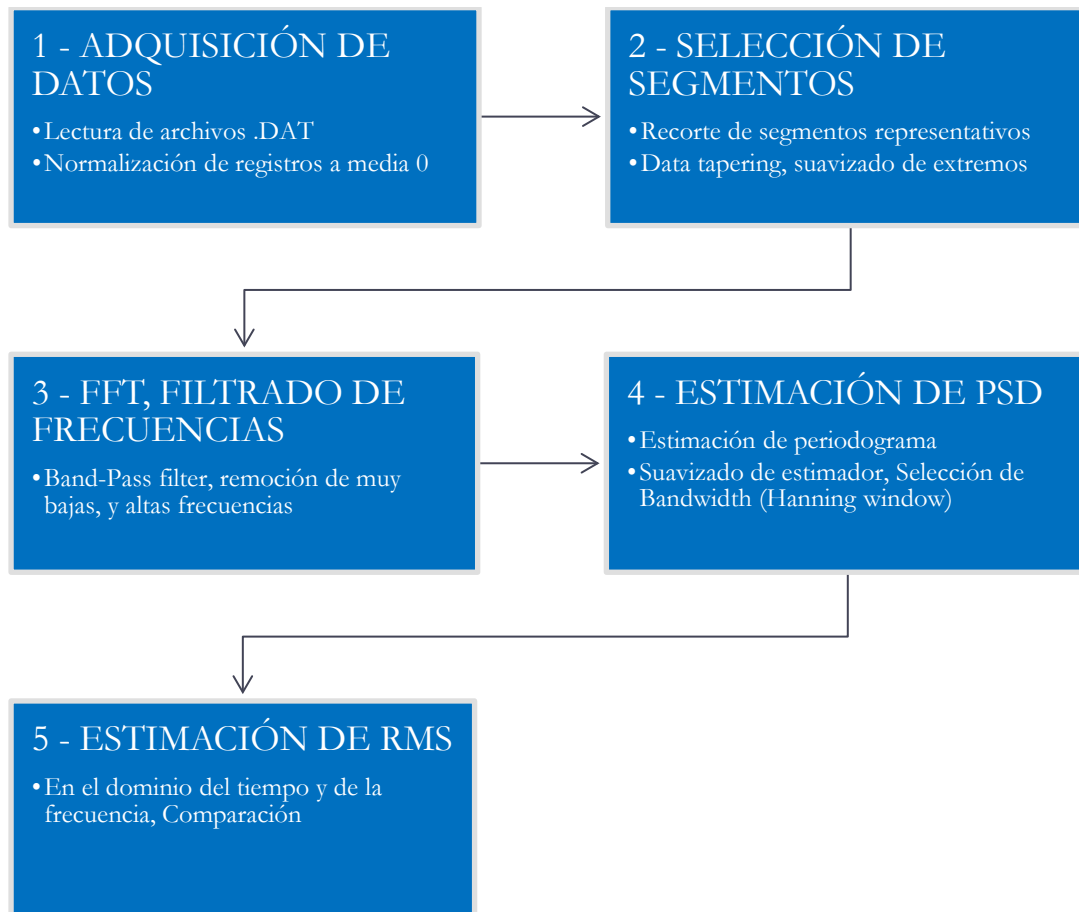


FIG. 5-5 - ESQUEMA DEL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

En un primer paso, se leen los archivos de los registros que entrega el acelerómetro RION a través del adquirente de datos digitales, y se normalizan las series numéricas para que tengan una media nula. Es decir, se normaliza cada uno de los registros, para eliminar una componente constante que pueda estar “escondida” en las mediciones, sea producto del fenómeno de vibraciones en sí, o, más probablemente, por un defecto de calibración de los equipos de medición.

El siguiente paso es realizar una selección y recorte de los segmentos representativos del fenómeno que se quiere medir. En general, el segmento que representa el fenómeno a analizar ocupa sólo un pequeño espacio del registro total, por lo que debemos aislar esos registros para poder analizarlos. Por ejemplo, en el caso de los recitales, la mayor parte de los registros son ruido ambiente, y se deben ubicar y aislar los segmentos en donde se registra el salto de los espectadores. Para ellos, se utiliza un “taper” con extremos suavizados para evitar un salto brusco de la señal aislada en sus extremos.

¹ En el trabajo se utilizó el método de los trapecios. Hay que tener presente que podría obtenerse el mismo resultado, realizando una simple sumatoria del espectro discreto.

Ahora bien, para estimar el espectro deben transformarse cada uno de los registros seleccionados al dominio de la frecuencia, mediante la Transformada Discreta de Fourier (DFI). Esto, cualquier programa de cálculo lo hace rápidamente mediante el algoritmo FFT (Fast Fourier Transform). Una vez calculada la Transformada de cada registro, se procede a filtrar determinadas frecuencias, para eliminar ruido del aparato de medición y el ambiente, que no tengan que ver con el fenómeno a medir. La determinación de las frecuencias de corte se debe hacer para conjunto de mediciones por separado, pero como regla general, se van a filtrar las frecuencias por debajo de 1 Hz, y las altas frecuencias, que estén muy por encima del rango esperable para el fenómeno. Esto se hace utilizando un taper con bordes suavizados, igual que para aislar los segmentos.

En cuarto lugar, se hace la estimación del espectro de potencia del registro, mediante el periodograma. Por las razones mencionadas en el inciso anterior, este estimador es suavizado utilizando una ventana de Hanning, cuyo ancho (Bandwidth) varía dependiendo del fenómeno a medir. El ancho de ventana está relacionado con el grado de suavizado requerido para el espectro. Por lo tanto, para espectros que se espera tengan picos muy concentrados en determinadas frecuencias, debe elegirse un ancho muy “angosto” de ventana para no perder resolución en dichos picos. De manera opuesta, para espectros que se espera sean de variación más suave, se elige un ancho de ventana mayor para disminuir lo más posible la varianza del estimador.

Por último, se estiman los valores cuadráticos medios de cada registro, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia (para su comparación y control). De esta manera, a partir de los registros obtenidos a través de los aparatos de medición, puedo obtener un set de espectros y valores RMS para cada uno de ellos.

Para el presente trabajo se codificó una rutina en MathCad® para realizar los pasos esquematizados en la Fig. 5-5.

5.2 MEDICIONES

A continuación se presentan los resultados obtenidos en las mediciones de las vibraciones de algunas de las acciones modelizadas en el capítulo anterior.

5.2.1 SALTO COORDINADO DE PERSONAS

Para obtener datos experimentales de vibraciones inducidas por el salto coordinado de personas, se midieron las vibraciones en las inmediaciones de un estadio donde se estaba llevando a cabo un recital. En el presente trabajo, se muestran las mediciones obtenidas en las adyacencias del estadio de River Plate, durante el recital de “Foo-Fighters” que tuvo lugar el 03/04/2012.

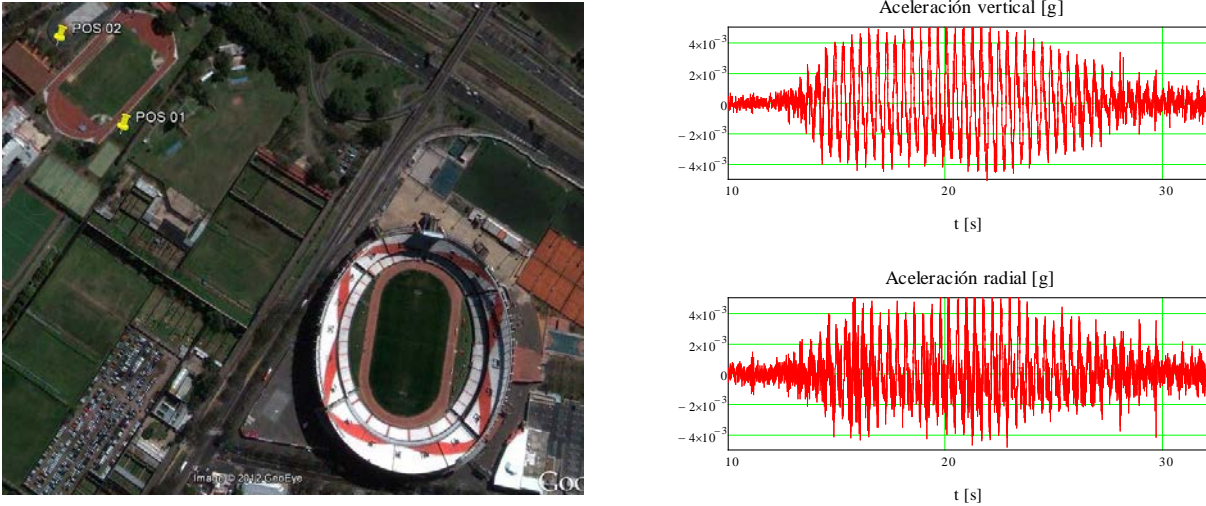
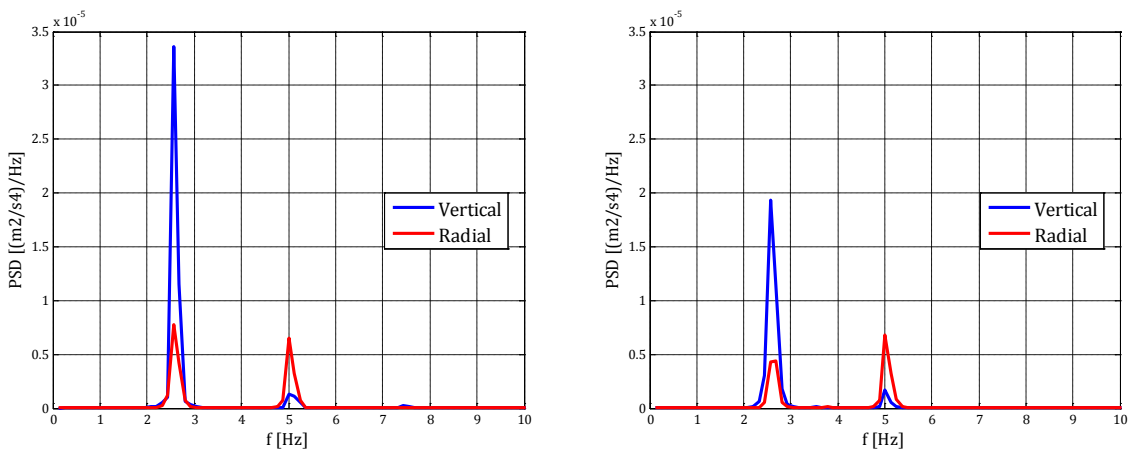


FIG. 5-6 - POSICIÓN DE LAS ESTACIONES DE MEDICIÓN RESPECTO DEL ESTADIO Y REGISTROS

Los registros fueron filtrados para frecuencias por debajo de 1 Hz y por encima de los 10 Hz, y se utilizó un ancho de ventana lo suficientemente angosto para no comprometer la resolución del espectro en las frecuencias pico. Se presentan las mediciones de registros simultáneos, para la comparación de los espectros y sus magnitudes.

03/04/12 - FooFighters - C.E.N.A.R.D.				
Núm. De registro	Aceleraciones RMS [$10^{-4}g$]			
	Estación 1 (390m)		Estación 2 (510 m)	
	Vertical	Radial.	Vertical	Radial
1	2.45	1.91	2.26	1.65
2	2.70	2.18	2.27	1.91
3	2.30	1.73	1.95	1.53
Promedio	2.48	1.94	2.16	1.70



PSD promedio de la estación E1 PSD promedio de la estación E2

FIG. 5-7 - ESTIMADORES DE ACELERACIONES EN EL TERRENO, RECITAL FOO-FIGHTERS

Los gráficos muestran una marcada periodicidad de las vibraciones, de armónico fundamental cercano a los 2.5 Hz. Esto está en coincidencia con lo esperado por el modelo analítico. Los espectros promedio tienen una distribución apenas más dispersa alrededor de los picos, debido a pequeñas variaciones en la frecuencia de salto de los espectadores en cada momento. Esto también está muy sujeto a la propia naturaleza del recital y de la canción que estén pasando. Es por eso, que a lo largo de un recital los espectadores pueden saltar a distintas

frecuencias, llevados por el beat de la música. En el análisis, se promediaron espectros del salto de espectadores durante una misma canción, para que no se vieran estas variaciones poco representativas.

Hay que destacar que para el segundo armónico de la respuesta, la componente radial es mayor a la vertical. Esto no se ve en el modelo teórico, y las razones de ello no están claras, aunque podría deberse a un mayor amortiguamiento de las vibraciones horizontales para las bajas frecuencias.

La componente tangencial no fue volcada en el análisis dado que su magnitud es sustancialmente inferior a las otras dos componentes. El modelo teórico predice una componente tangencial nula, aunque en las mediciones no se da, producto de que la carga no es puntual, de errores en la disposición del acelerómetro, ruido ambiente, etc.

5.2.1.1 ATENUACIÓN DE LAS ONDAS

Se midió simultáneamente con dos acelerómetros colocados a distinta distancia de la misma, para poder comparar los resultados, y obtener la atenuación en la amplitud de las ondas, medida según $\Delta RMS = RMS_{E2}/RMS_{E1}$.

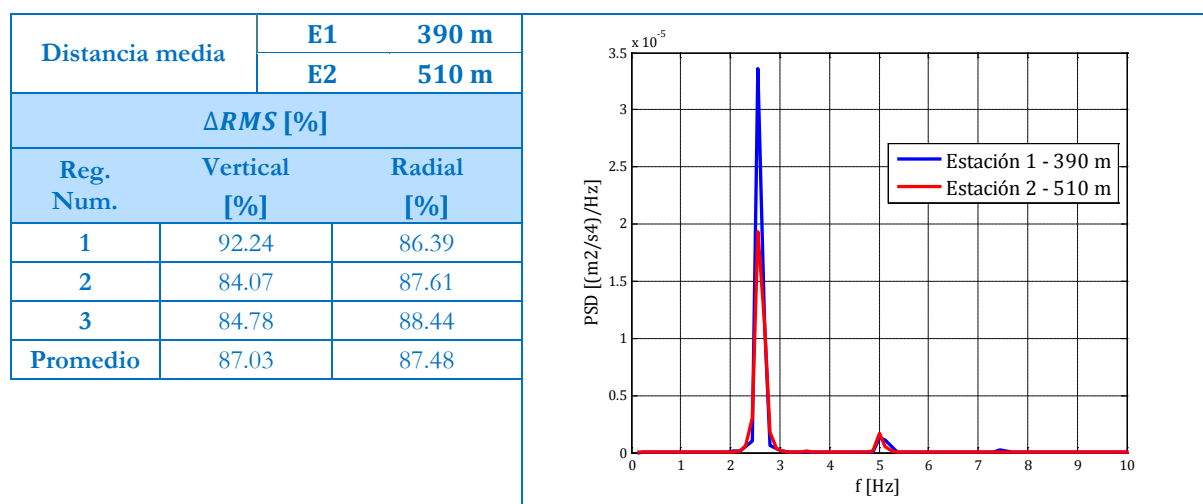


FIG. 5-8 - ESTIMACIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO DE LAS ONDAS

En el gráfico se puede ver la coincidencia perfecta en las frecuencias importantes, pero la diferencia de magnitud del espectro, producto de la diferencia de distancias respecto de la fuente de excitación. Comparamos los valores RMS de las mediciones en los distintos puntos, ante la misma excitación. Con los valores promedio obtenidos para el amortiguamiento de las ondas, se puede estimar un valor para el factor de amortiguamiento de las ondas de Rayleigh, mediante la expresión [A7.1].

Considerando un coeficiente de amortiguamiento $\mu = 0.001$ y una frecuencia predominante de $f = 2.6\text{Hz}$:

$$\Delta_{teorico} = 87.05\%$$

Se adoptará este coeficiente para utilizar en el modelo teórico¹.

¹ Hay que observar, que en este caso, se podría despreciar el efecto de amortiguamiento propio del suelo, y considerar un suelo elástico. Esto se condice con la teoría, puesto que el amortiguamiento viscoso es menor para las frecuencias más bajas.

5.2.1.2 COMPARACIÓN CON EL MODELO TEÓRICO

Cualitativamente, el modelo analítico planteado en el capítulo anterior se ajusta perfectamente al fenómeno medido. Sin embargo, resta comparar la magnitud de las vibraciones medidas (definida por su valor RMS), con las predichas por el modelo. En la siguiente tabla se resumen los parámetros utilizados en el modelo analítico:

TABLA 8 - PARÁMETROS DEL MODELO ANALÍTICO, SALTO COORDINADO DE PERSONAS

Parámetros de la fuente	
Peso promedio de espectador	65 kg
Cantidad de personas saltando	10000
Frecuencia fundamental	160 bpm
Parámetros del suelo ¹	
Densidad del suelo	1900 kg/m ³
Módulo transversal G	200 MPa
Módulo de Poisson	0.35
Modelo mecánico	Voigt hysteretic
Coef. de amortiguamiento	0.001

Usando los parámetros de la tabla anterior, se obtuvieron los valores RMS de la respuesta del suelo para los distintos recitales. Los resultados se muestran a continuación.

TABLA 9 - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, SALTO COORDINADO DE PERSONAS

Foo Fighters – 03/04/12		RMS medido [10 ⁻⁴ g]		RMS teórico [g]		Variación promedio
	Distancia [m]	Vertical	Radial	Vertical	Radial	[%]
Estación 1	390	2.48	1.94	2.42	1.53	11.8
Estación 2	510	2.16	1.70	2.11	1.33	12.1

Se observa una razonable diferencia entre los valores teóricos y los medidos. Hay que tener en cuenta, que los valores propuestos para la cantidad de personas y el peso promedio, son simplemente valores lógicos en este tipo de eventos, pero que pueden estar sujetos a grandes variaciones durante cada recital. Sin ir más lejos, aumentando un poco la cantidad de espectadores, o bien el peso promedio, los valores teóricos se acercaran aún más a los medidos. Sin embargo, lo importante del modelo, es su capacidad de describir el espectro de las vibraciones, donde se ve claramente la periodicidad en la frecuencia de salto de los espectadores, y sus primeros armónicos superiores. Sí se observa que el modelo teórico predice una relación entre la componente radial y vertical un poco menor a la observada en las mediciones. Esto puede deberse, en línea con lo mencionado en un inciso anterior, a un amortiguamiento mayor de las vibraciones horizontales, no previsto en el modelo teórico.

5.2.2 ACCIÓN DE VEHÍCULOS SOBRE RIELES

Se midió la acción del paso de trenes en la generación de vibraciones, en una línea urbana típica del área metropolitana de Buenos Aires. Las mediciones fueron hechas a distintas distancias de la vía, con dos acelerómetros simultáneamente, para medir la atenuación de la amplitud de las ondas. Las estaciones fueron colocadas con una distancia de 6.8 m entre ellas. Los espectros medidos fueron filtrados para eliminar las frecuencias por debajo de 1 Hz y por encima de los 80 Hz.

¹ Ver el capítulo 3 y 0.

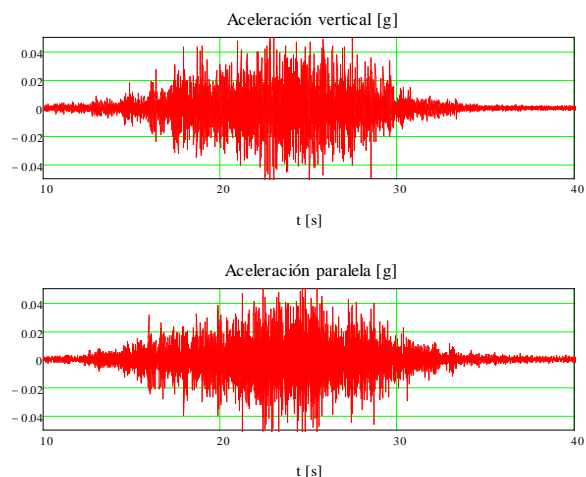
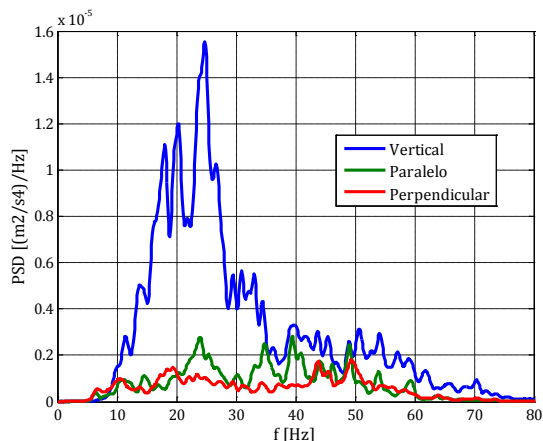


FIG. 5-9 - EQUIPOS DE MEDICIÓN IN SITU, ESTACIÓN DE GERLI, LÍNEA ROCA

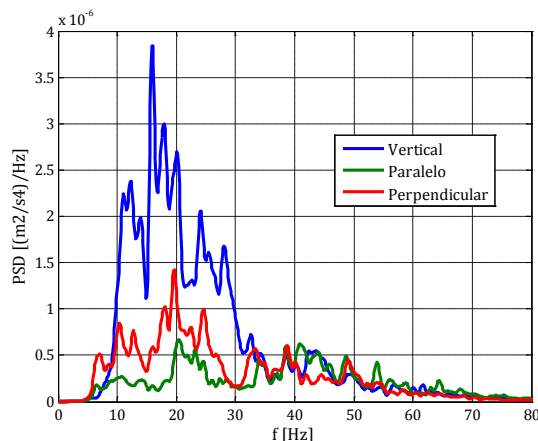
En la jornada de medición, se tomaron registros desde 3 estaciones diferentes, y los trenes circulaban por dos vías paralelas separadas 4.5 m (una de ida y otra de vuelta). Por lo que cada una de las 3 estaciones tomaron registros de los trenes de la vía A y la vía B (Fig. 5-9). Las estaciones 1 y 2 midieron simultáneamente, y luego se midió de manera individual la estación 3. En resumen, la Estación 1 se ubicaba a 19 m de la vía A, y sus registros se dividen en Estación 1A a 19 m de las vías, y estación 1B a 24.5 m de las vías; la Estación 2 se divide en Estación 2A a 25.8 m de las vías y Estación 2B a 31.3 m; por último la Estación 3, se divide en Estación 3A a 30.3 m de las vías, y Estación 3B a 35.8 m de las vías.

A continuación se presentan distintos registros tomados en ambas jornadas:

03/11/12 - Estación Gerli, Línea Roca - E1A Y E2A						
Núm. de registro	Aceleraciones RMS [$10^{-4}g$]					
	Estación 1A (19.0 m)			Estación 2A (25.8 m)		
	Vertical	Paral.	Perp.	Vertical	Paral.	Perp.
1	15.00	8.49	7.10	7.13	4.50	4.98
2	16.98	7.88	6.71	7.32	4.03	5.16
3	15.40	7.48	6.75	7.18	4.32	4.85
Promedio	15.79	7.95	6.85	7.21	4.28	5.00



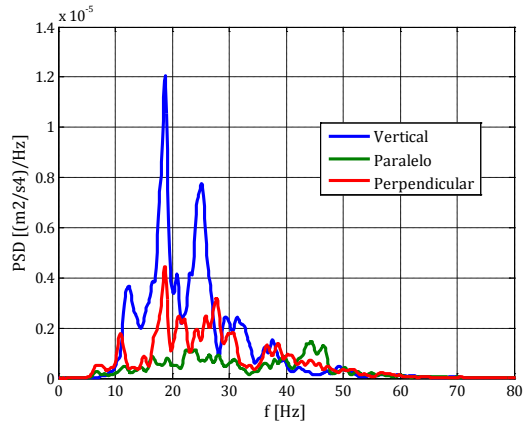
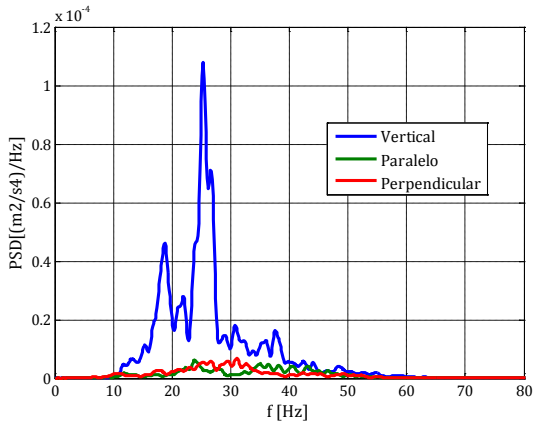
PSD promedio estación E1A



PSD promedio de la estación E2A

FIG. 5-10 - ESTIMADORES DE ACELERACIONES EN EL TERRENO, ESTACIÓN GERLI - E1A Y E2A

03/11/12 - Estación Gerli, Línea Roca - E1B Y E2B						
Aceleraciones RMS [$10^{-4} g$]						
Núm. De registro	ESTACIÓN 1B (24.5 m)			ESTACIÓN 2B (31.3 m)		
	Vertical	Paral.	Perp.	Vertical	Paral.	Perp.
1	25.85	10.04	10.14	10.05	5.38	7.38
2	27.40	10.06	10.53	10.08	5.50	7.45
Promedio	26.63	10.05	10.34	10.07	5.44	7.42

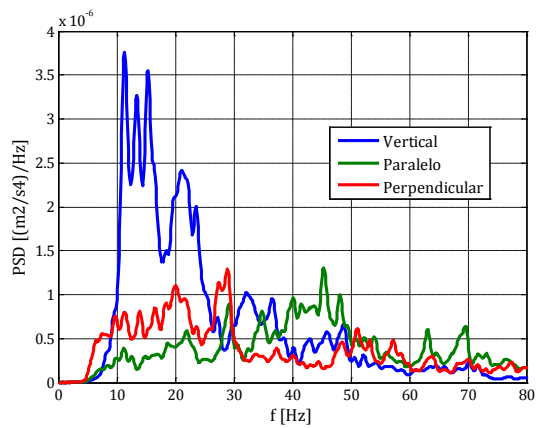
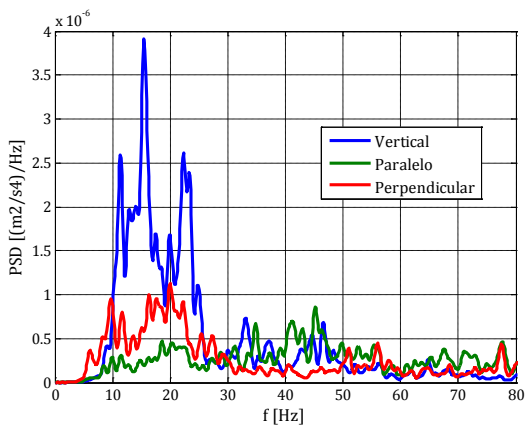


PSD promedio estación E1B

PSD promedio de la estación E2B

FIG. 5-11 - ESTIMADORES DE ACELERACIONES EN EL TERRENO, ESTACIÓN GERLI - E1B Y E2B

03/11/12 - Estación Gerli, Línea Roca - E3A			
Aceleraciones RMS [$10^{-4} g$]			
Núm. De registro	Estación 3A (30.3 m)		
	Vertical	Paral.	Perp.
1	8.28	6.59	6.37
2	8.04	6.36	6.25
3	6.37	4.63	4.67
4	7.00	4.82	4.9
Promedio	7.42	5.60	5.55

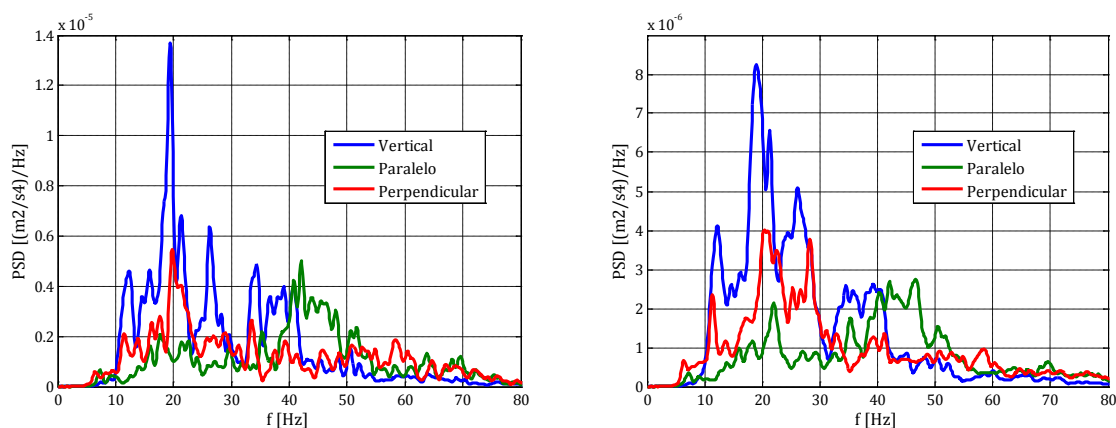


PSD del registro 3 de la estación E3A

PSD promedio de la estación E3A

FIG. 5-12 - ESTIMADORES DE ACELERACIONES EN EL TERRENO, ESTACIÓN GERLI - E3A

03/11/12 – Estación Gerli, Línea Roca – E3B			
Aceleraciones RMS [$10^{-4} g$]			
Núm. De registro	Estación 3B (35.8 m)		
	Vertical	Paral.	Perp.
1	11.65	9.42	9.69
2	11.45	8.48	9.07
3	9.59	6.88	7.91
4	10.58	7.08	8.77
Promedio	10.85	7.97	8.86



PSD del registro 1 de la estación E3B

PSD promedio de la estación E3B

FIG. 5-13 - ESTIMADORES DE ACELERACIONES EN EL TERRENO, ESTACIÓN GERLI - E3B

Puede llamar la atención el hecho de que las estaciones B de cada Estación, registran magnitudes mayores que sus correspondientes estaciones A, siendo que éstas últimas están más cercanas a las vías. Esto se debe posiblemente a las condiciones de circulación que presenta la vía B, que deben ser peores que para la otra. La velocidad de los trenes que circulan por cada vía no difiere demasiado, y tampoco es esperable que difiera el peso de los vagones (aunque esto tampoco sería determinante). Por lo que es lógico suponer, que el espectro de “rugosidad” de dicha vía es sensiblemente mayor a la de la otra (así se asumió al estimar los espectros teóricos).

La predominancia de las vibraciones verticales es clara en los registros, y está en concordancia con lo esperado a priori. Se ve que la mayor parte de la energía se concentra entre los 10 y 30 Hz, para la componente vertical, y el espectro está un poco más “desparramado” para las componentes horizontales. Por un lado, la componente perpendicular exhibe un comportamiento similar a la vertical, aunque con un contenido de frecuencias mayores menos amortiguado, y por otro, la componente paralela presenta un comportamiento con claras diferencias, teniendo un espectro muy distribuido con algunos picos cerca de los 40 Hz.

5.2.2.1 ATENUACIÓN DE LAS ONDAS

Al igual que se hizo para el caso anterior, interesa obtener alguna medida del amortiguamiento de las ondas en su propagación en el terreno. Para eso, se comparan los valores RMS obtenidos a distintas distancias de la fuente, en mediciones simultáneas. En la siguiente tabla se presentan los valores obtenidos en los registros:

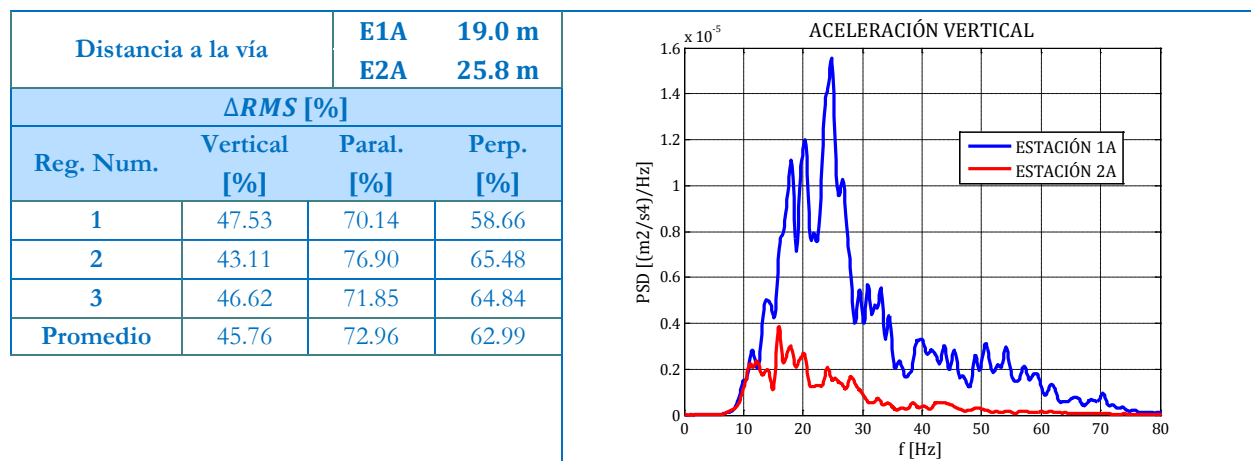


FIG. 5-14 - ESTIMACIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO DE LAS ONDAS, TRENES E1A Y E2A

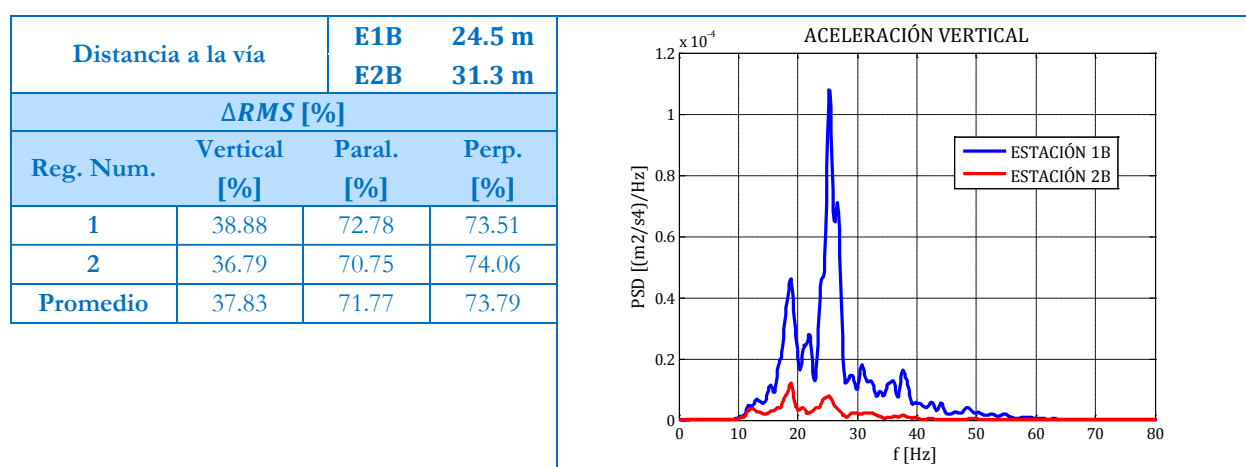


FIG. 5-15 - ESTIMACIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO DE LAS ONDAS, TRENES E1B Y E2B

Se observa una atenuación claramente menor para el caso de las componentes paralela y perpendicular de las vibraciones. Esto contrasta claramente con los modelos analíticos propuestos, ya que la atenuación de las componentes vertical y horizontal es similar. Una falencia de los modelos mecánicos vistos para representar el suelo, es una razón posible para tal incongruencia, aunque también puede haber factores influyentes debido a la anisotropía y heterogeneidad del suelo. Como se menciona en el Anexo 7, esto puede traducirse, en el modelo simple utilizado, en un coeficiente de amortiguamiento distinto para la componente horizontal.

Como se dijo en un párrafo anterior, se está ante una situación sustancialmente diferente a la observada en el caso del salto de personas. No solo porque las mediciones se encuentran en puntos relativamente cercanos a la fuente, sino que además, la excitación está compuesta por un gran número de cargas actuando simultáneamente, y el espectro de la carga no se centra en una frecuencia aislada. Esto hace que la aplicación de la ecuación [A7.1] para calibrar un coeficiente de amortiguamiento, no sea apropiada, y esto deba hacerse en base a otras consideraciones (ver Anexo 7). De todas maneras, se puede observar a priori, que el amortiguamiento es mucho mayor que en las vibraciones producidas por el salto de personas, lo que es razonable al tratarse de frecuencias bastante mayores, y estratos de suelo más blandos.

5.2.2.2 COMPARACIÓN CON EL MODELO TEÓRICO

En la siguiente tabla se resumen los parámetros adoptados para el modelo teórico. Los datos fueron seleccionados a partir de datos obtenidos de la empresa concesionaria del servicio de trenes, observaciones en el lugar de medición y estudios de suelos de la zona.

TABLA 10 - PARÁMETROS DEL MODELO ANALÍTICO, TRENES

Parámetros mecánicos de un vagón ¹	
<i>Longitud entre ejes de boggies</i>	18.6 m
<i>Longitud entre ruedas (de un mismo boggie)</i>	2.6 m
<i>Longitud total del vagón</i>	24.8 m
<i>Altura del vagón</i>	2.1 m
<i>Masa del vagón</i>	36000 kg
<i>Masa del boggie</i>	3000 kg
<i>Masa del sistema de rueda</i>	500 kg
<i>Rigidez vertical vagón/boggie</i>	3.08 MN/m
<i>Coef. de amortiguamiento vagón/boggie</i>	0.065
<i>Rigidez vertical boggie/rueda</i>	7.21 MN/m
<i>Coef. de amortiguamiento boggie/rueda</i>	0.03
Parámetros mecánicos de la vía	
<i>Perfil de rugosidad</i>	Nivel 1 (Hussein)
<i>Módulo de elasticidad longitudinal del riel</i>	210 GPa
<i>Momento de inercia del riel</i>	1500 cm ⁴
<i>Área de la sección del riel</i>	140 cm ²
<i>Densidad del material del riel</i>	7850 kg/m ³
<i>Coefficiente de balasto vertical</i>	10.8 MN/m ²
<i>Coef. de amortiguamiento del balasto</i>	0.2
Parámetros del tren	
<i>Número de vagones</i>	7
<i>Separación entre vagones</i>	0.7 m
<i>Velocidad</i>	15 m/s
Parámetros del suelo ²	
<i>Densidad del suelo</i>	1900 kg/m ³
<i>Módulo transversal G</i>	50 MPa
<i>Módulo de Poisson</i>	0.45
<i>Modelo mecánico</i>	Voigt hysteretic
<i>Coefficiente de amortiguamiento</i>	Variable

Las consideraciones para la determinación de los parámetros del suelo pueden verse en el tercer capítulo y en el Anexo 7. A distancias mayores de la fuente, se tiene un coeficiente amortiguamiento menor, lo que es verificado al comparar el modelo analítico con las mediciones hechas. Se adopta un coeficiente de amortiguamiento de 0.30 para las estaciones a menos de 20 m de la vía (Estación 1A), 0.30 para las estaciones entre 20 y 35 m (Estaciones 1B, 2A, 2B y 3A), y 0.22 para la Estación 3B. Se usa el mismo coeficiente para las 3 componentes de las vibraciones.

A continuación se compara el modelo analítico de las vibraciones debidas al paso de trenes (la componente dinámica), con las mediciones realizadas en las distintas estaciones, para algunos de los registros.

1 Los parámetros geométricos y de rigideces de los sistemas de suspensión fueron provistos por la concesionaria de los trenes U.G.O.F.E. Línea Roca.

2 Ver el capítulo 3 y 0

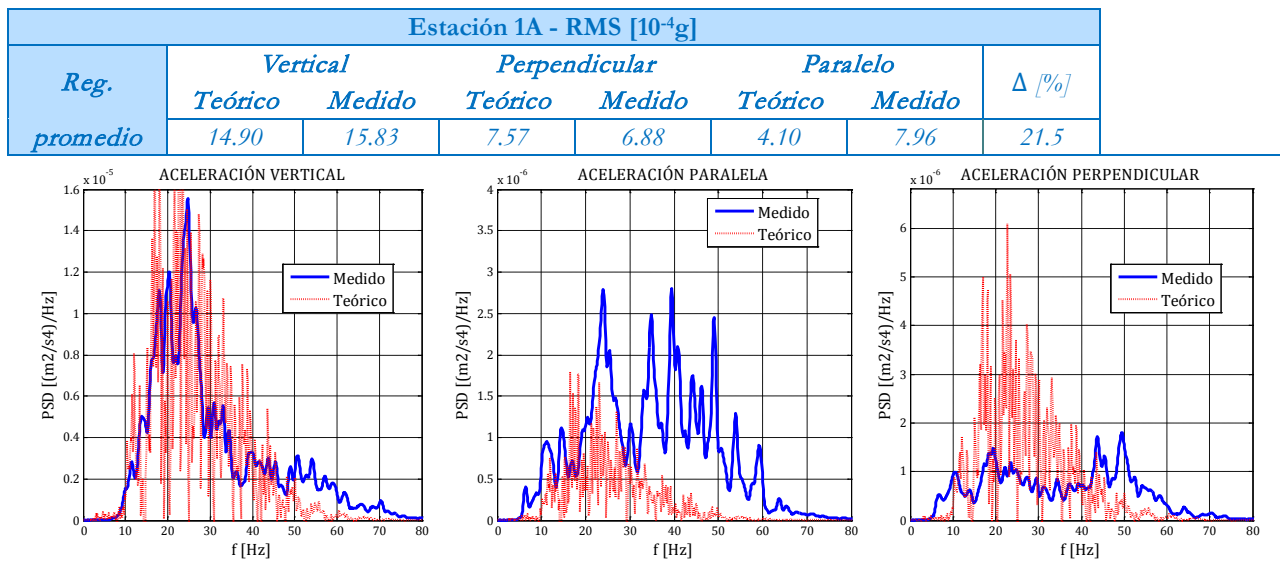


FIG. 5-16 - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, TRENES E1A

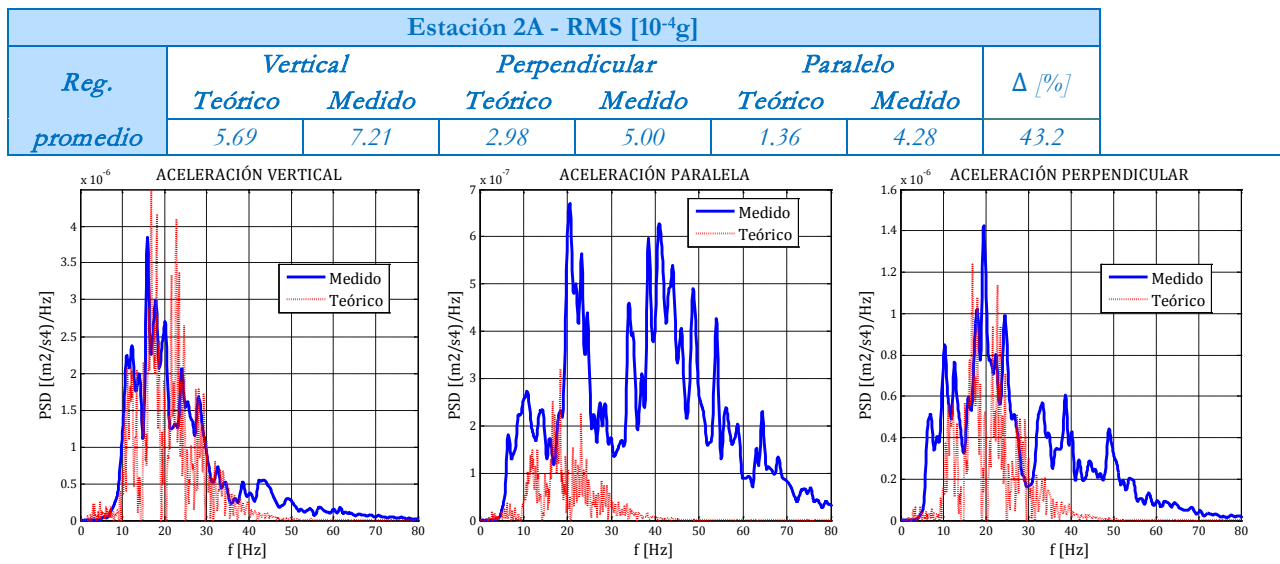


FIG. 5-17 - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, TRENES E2A

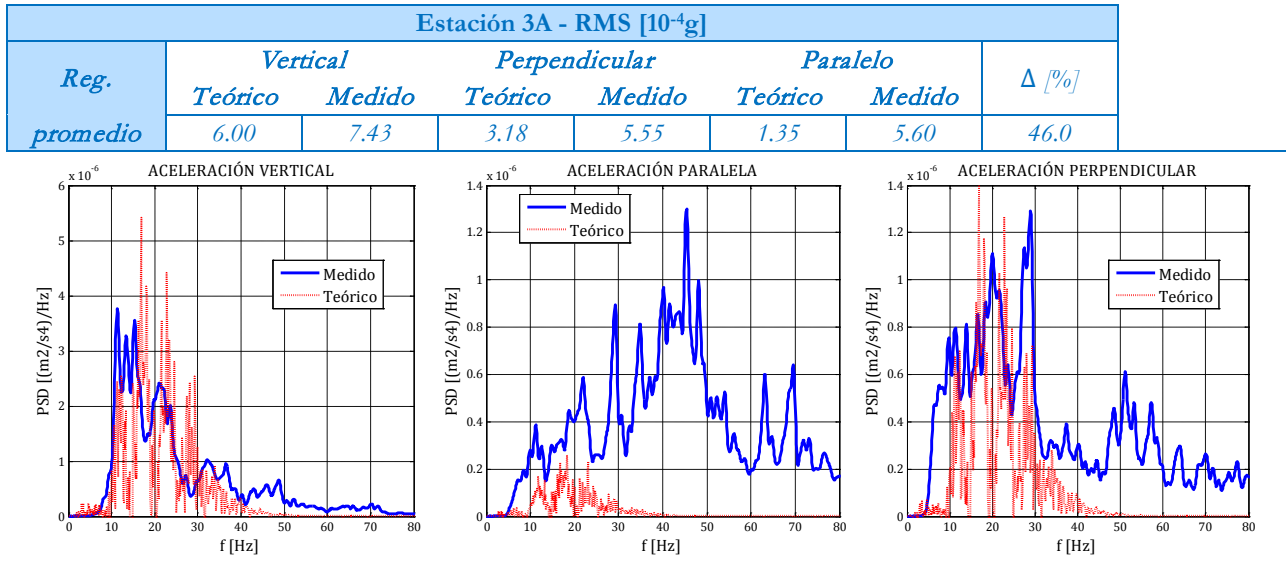


FIG. 5-18 - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, TRENES E3A

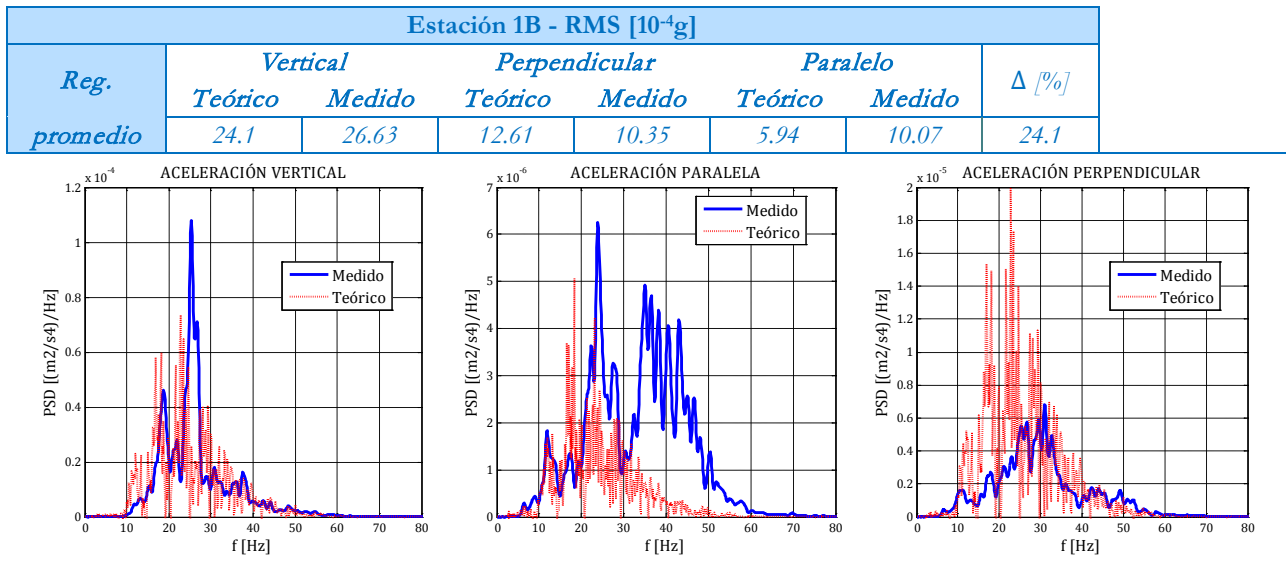


FIG. 5-19 - - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, TRENES E1B

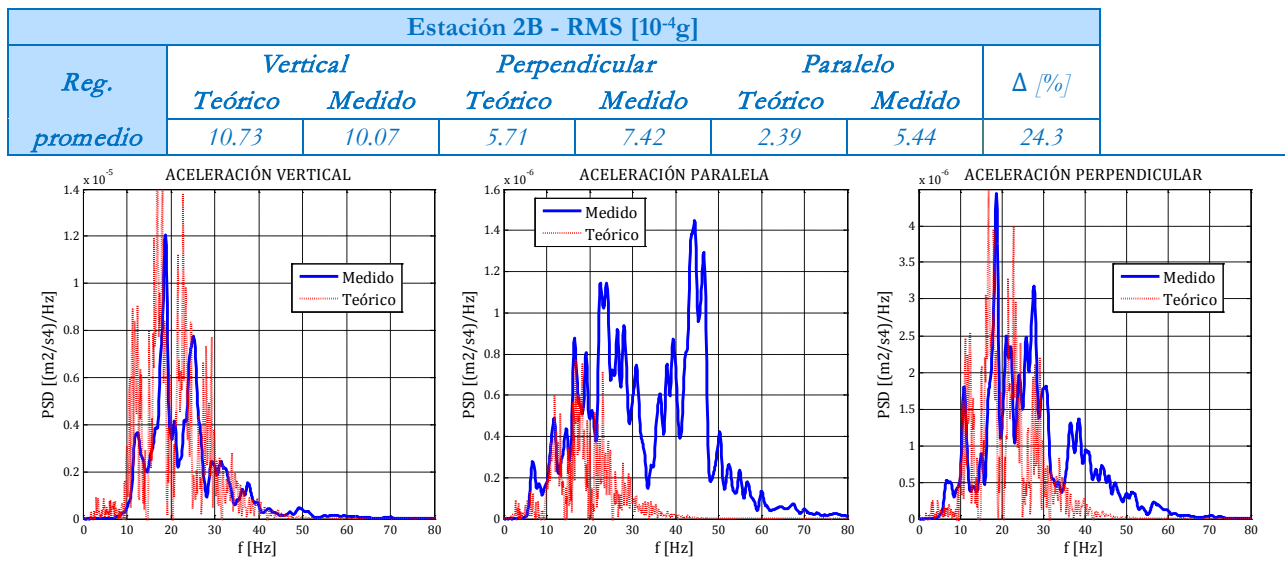


FIG. 5-20 - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, TRENES E2B

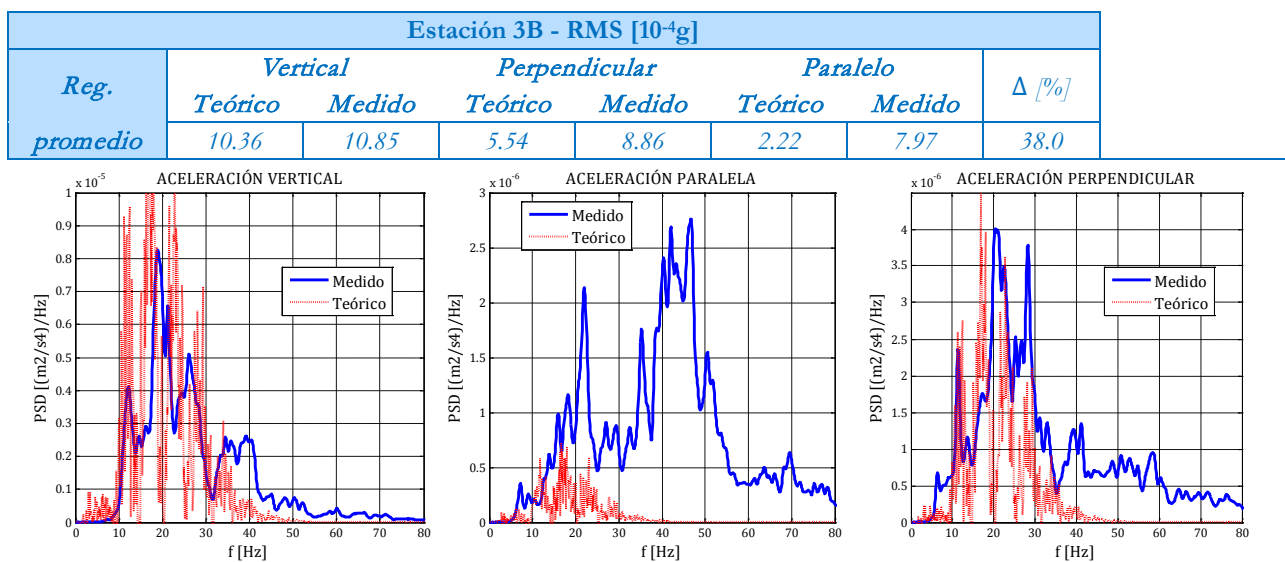


FIG. 5-21 - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, TRENES E3B

En las comparaciones hechas con el modelo teórico, se observa un razonable ajuste del modelo con la componente vertical de las vibraciones. Éstas se concentran mayormente entre los 10 y 30 Hz. Sin embargo, éste comportamiento no es observado en los registros de las componentes horizontales, y se ven claras diferencias entre el espectro teórico y el medido. Estas diferencias no son sólo de magnitud, lo que puede responder al uso de un mismo factor de amortiguamiento que para la componente vertical, sino también de forma del espectro; en los registros medidos se observan componentes en frecuencias mayores que el rango esperable por el modelo analítico. Esto se da principalmente en la componente paralela a las vías, mientras que la componente perpendicular presenta un comportamiento similar a la vertical, con más congruencia con el modelo teórico.

Para las componentes horizontales, el espectro teórico se ajusta mejor en el rango de frecuencias medias (10 a 20 Hz), pero no puede ajustarse al comportamiento observado para frecuencias mayores. Las razones pueden deberse a que los efectos de la no estacionalidad de las cargas (es decir, de que las cargas se están moviendo de hecho) tienen más influencia en dicha componente. También podría considerarse que la acción que el tren transmite al terreno no es completamente vertical, existen fuerzas en el plano del terreno que no pueden ser despreciadas. En particular, es importante el hecho de que el tren se encontraba frenando o acelerando, lo

que origina fuerzas longitudinales a la vía. Además hay que considerar posibles efectos de falta de alineación de los rieles también, lo que puede originar esfuerzos horizontales.

5.2.3 ACCIÓN DE VEHÍCULOS SOBRE CARRETERAS

Se midió la acción del tráfico en la generación de vibraciones, en una típica avenida urbana. Las mediciones fueron hechas a distancias cercanas a la calle, con dos acelerómetros simultáneamente, para medir la atenuación de la amplitud de las ondas. En primer lugar se midieron las vibraciones en las adyacencias de la Avenida Figueroa Alcorta, a la altura de los bosques de Palermo, donde se pudo observar un tráfico fluido, compuesto mayoritariamente por autos y camionetas pequeñas. Los niveles de vibraciones observados eran de baja magnitud, con lo que las mediciones se hicieron lo más cerca posible de la calle. Esto contrasta con el modelo propuesto de ondas de Rayleigh, que son más predominantes a mayores distancias de la fuente de vibración. Sin embargo, se verá que ciertas características del modelo siguen siendo válidas.

En una segunda jornada, se tomaron mediciones en Av. Madero, donde hay una gran cantidad de tránsito pesado. Esto permitió alejarse a mayores distancias desde el paso de los vehículos para tomar los registros. Se tomaron registros simultáneos en puntos separados 4.8 m y 9 m. Los espectros medidos fueron filtrados para eliminar las frecuencias por debajo de 1 Hz y por encima de los 45 Hz.

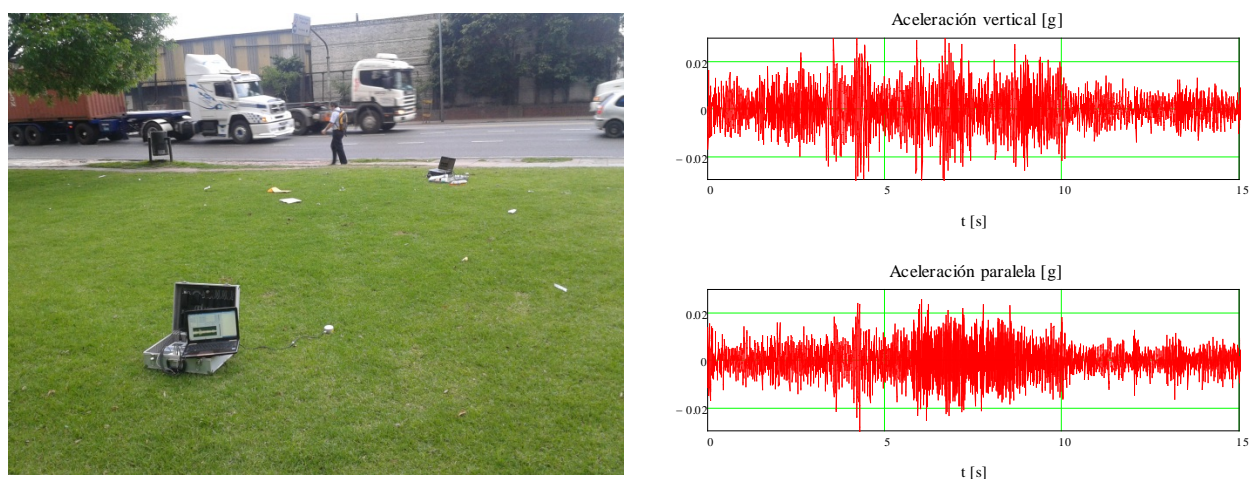


FIG. 5-22 - EQUIPOS DE MEDICIÓN IN SITU, AV. MADERO

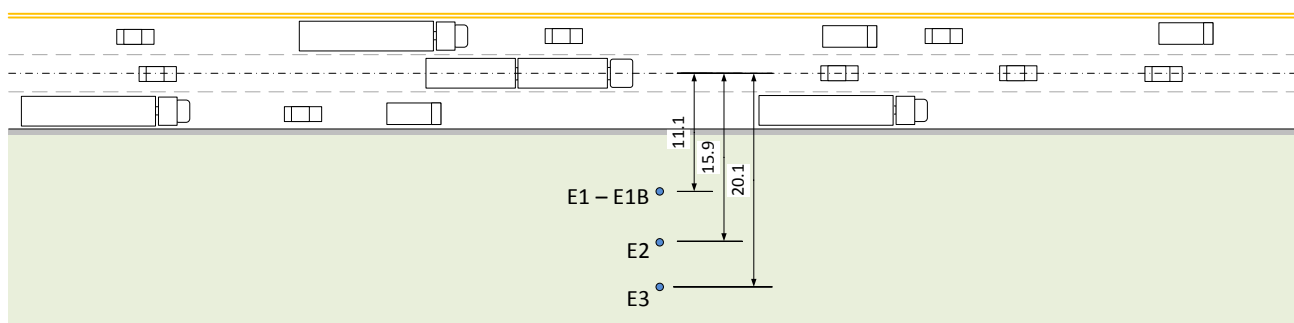
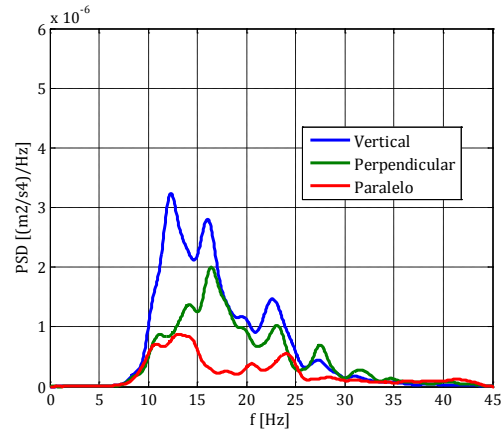
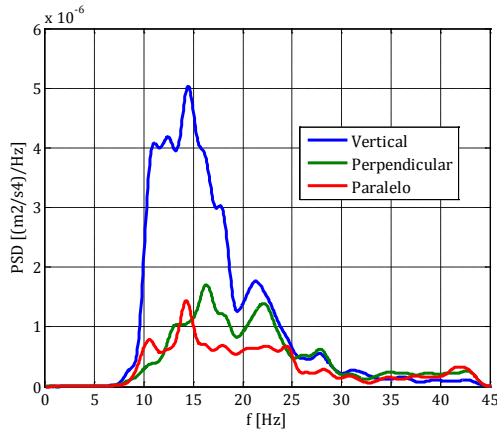


FIG. 5-23 - ESQUEMA DE POSICIONAMIENTO DE ESTACIONES DE MEDICIÓN

A continuación se presentan distintos registros tomados en ambas jornadas:

26/10/12 - Av. Madero - E1 Y E2						
Aceleraciones RMS [$10^{-4}g$]						
Núm. De registro	Estación 1 (11.1 m)			Estación 2 (15.9 m)		
	Vertical	Paral.	Perp.	Vertical	Paral.	Perp.
1	9.17	5.21	6.07	6.72	4.29	6.17
2	7.01	3.95	4.64	5.55	3.19	4.53
3	9.49	5.87	7.00	7.33	4.44	6.43
4	7.41	4.08	4.48	5.92	3.18	4.56
5	6.34	3.11	4.03	4.78	2.75	4.01
6	8.84	4.57	5.89	6.19	3.47	5.31

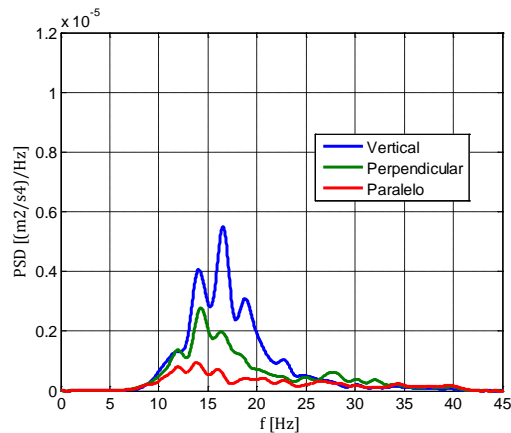
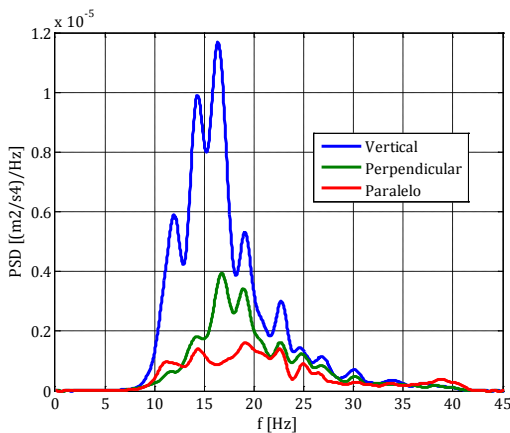


PSD de registro 2 de la estación E1

PSD de registro 2 de la estación E2

FIG. 5-24 - ESTIMADORES DE ACELERACIONES EN EL TERRENO, TRÁFICO VEHICULAR E1 Y E2

26/10/12 - Av. Madero - E1 y E3						
Aceleraciones RMS [$10^{-4}g$]						
Núm. De registro	Estación 1 (11.1 m)			Estación 3 (20.1 m)		
	Vertical	Paral.	Perp.	Vertical	Paral.	Perp.
1	9.33	5.35	6.32	5.91	3.55	5.17
2	8.13	4.23	5.13	5.19	2.85	4.43
3	7.81	3.90	4.75	5.14	2.80	4.24
4	8.25	4.42	5.35	5.35	3.29	4.42
5	9.24	4.70	5.79	6.04	3.31	4.79



PSD del registro 5 de la estación E1

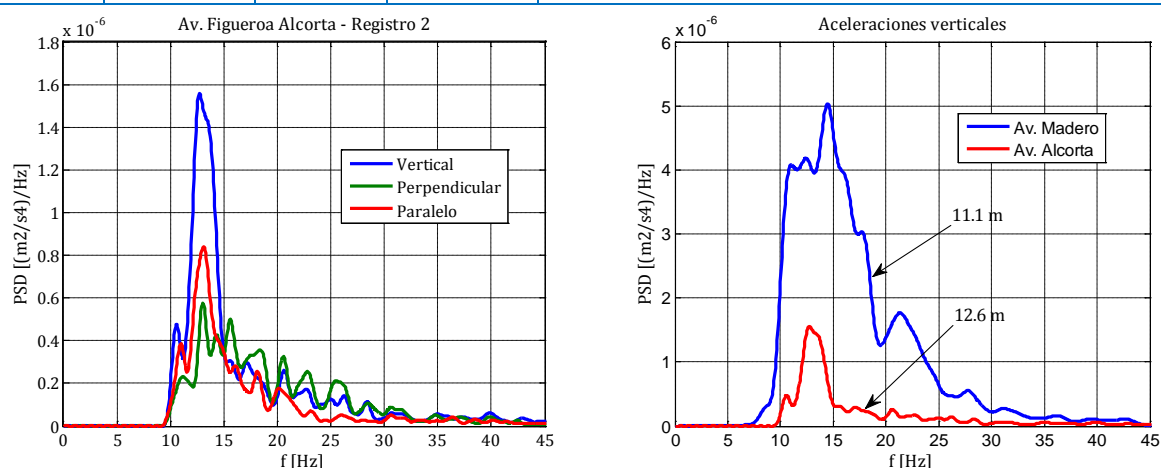
PSD del registro 5 de la estación E3

FIG. 5-25 - ESTIMADORES DE ACELERACIONES EN EL TERRENO, TRÁFICO VEHICULAR E1 Y E3

En este caso no se obtuvieron los espectros promedio, debido a que cada registro era producto de la excitación de diferentes vehículos con propiedades sensiblemente diferentes, por lo que promedio el espectro estaría, de alguna manera, sesgando los resultados. Parece más representativo presentar los registros individualmente.

En las mediciones realizadas en la Av. Figueroa Alcorta de un tránsito compuesto de autos y camionetas livianas, se observan bajos niveles de vibraciones, en el orden de magnitud del ruido de fondo, y para distancias muy próximas a la calle. No obstante, es ilustrativo comparar los valores obtenidos, con el de las mediciones en Av. Madero, para evidenciar la diferencia de magnitud. Si bien, no se trata de la misma calle, el estado de ambas es similar.

14/09/12 - Av. Figueroa Alcorta			
Aceleraciones RMS [$10^{-4}g$]			
Núm. De registro	Estación 1 (12.6 m)		
	Vertical	Paral.	Perp.
1	2.83	2.22	2.40
2	1.78	1.37	1.67



Comparación de registro de automóviles (Av. Figueroa Alcorta) y registro de camiones (Av. Madero)

FIG. 5-26 - ESTIMADORES DE ACELERACIONES EN EL TERRENO, TRÁFICO VEHICULAR, AV. ALCORTA

En los gráficos se ve el contenido de frecuencia de los espectros medidos, que se concentra en el rango $10\sim 20\text{Hz}$, y es coincidente con la frecuencia natural del sistema de ejes y rueda del vehículo (Wheel-hop system). Esto se corresponde cualitativamente con el espectro obtenido analíticamente en el capítulo anterior, y se verifica la poca incidencia de la frecuencia natural de la suspensión del cuerpo del vehículo (body-bounce system) en las vibraciones transmitidas al terreno. Los distintos picos que se ven en los espectros, se deben a la diferencia en los sistemas mecánicos de los distintos vehículos, y su incidencia relativa en el espectro total. Es decir, no todos los vehículos tienen sistemas mecánicos idénticos, y por lo tanto, no tienen mismas frecuencias naturales. De hecho, puede verse que el espectro obtenido de las mediciones en Av. Alcorta presenta un solo pico, producto de una distribución de vehículos mucho más homogénea (sólo vehículos familiares y camioneta pequeñas). Además se observa la predominancia de las vibraciones verticales, por sobre las componentes horizontales, siendo la componente paralela a la dirección de circulación de los vehículos la menor de las 3, como predice el modelo analítico propuesto.

Por último, haciendo mención del efecto de filtro de base que se observó en los registros de trenes, se ve aquí que el espectro es más “suave”, hecho que va de la mano con la hipótesis del modelo de considerar vehículos con un solo eje y despreciar el efecto de filtro mencionado.

5.2.3.1 ATENUACIÓN DE LAS ONDAS

Al igual que se hizo para los casos anteriores, interesa obtener alguna medida del amortiguamiento de las ondas en su propagación en el terreno. Para eso, se comparan los valores RMS obtenidos a distintas distancias de la fuente, en mediciones simultáneas. Este fenómeno, tiene muchas similitudes con el tren, por lo que las consideraciones respecto de los coeficientes de amortiguamiento, y su calibración, son análogas.

En la siguiente tabla se presentan los valores obtenidos en los registros:

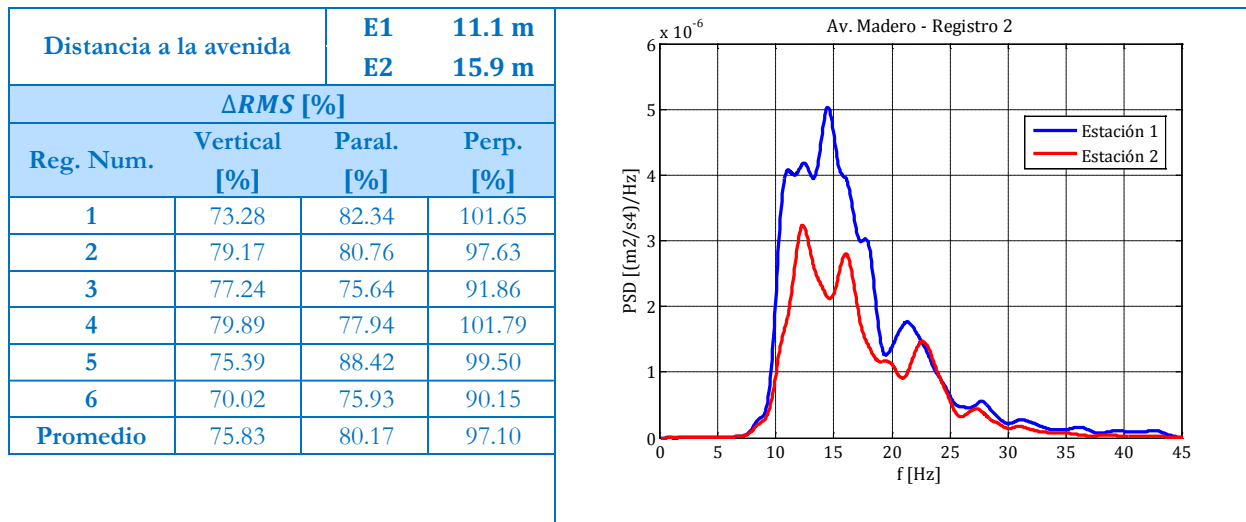


FIG. 5-27 - ESTIMACIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO DE LAS ONDAS, TRÁFICO VEHICULAR E1 Y E2

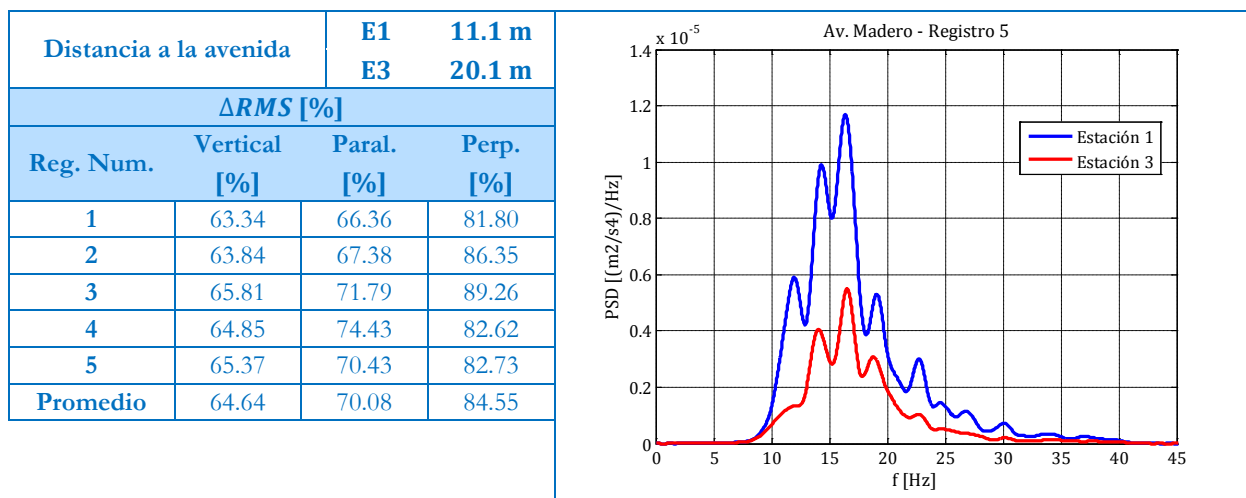


FIG. 5-28 - ESTIMACIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO DE LAS ONDAS, TRÁFICO VEHICULAR E1 Y E3

Se observan atenuaciones similares para las componentes vertical y paralela, y un decaimiento sustancialmente menor para la componente perpendicular. Esto está en línea con lo obtenido para los trenes. En este caso, se ve una diferencia un poco mayor incluso para la componente paralela.

5.2.3.2 COMPARACIÓN CON EL MODELO TEÓRICO

En la siguiente tabla se resumen los parámetros adoptados para el modelo teórico. Los datos fueron seleccionados a partir de las observaciones hechas en los lugares de medición (en este caso Av. Madero) y estudios de suelos de la zona. En el modelo, el tráfico será modelado en un solo carril, aunque la Avenida donde se

realizaron las mediciones constara de 3 carriles¹. Debido a esto, el espaciamiento que consideraremos será reducido, incluso por debajo de un espaciamiento físicamente posible para un solo carril.

TABLA 11 - PARÁMETROS DEL MODELO ANALÍTICO, VEHÍCULOS SOBRE CARRETERAS

Parámetros del vehículo tipo	
<i>Masa</i>	Variable
<i>Relación de masas</i>	0.15
<i>Frecuencia natural sistema body-bounce</i>	1.6Hz
<i>Coefficiente de amort. sistema body-bounce</i>	0.06
<i>Frecuencia natural sistema Wheel-hop</i>	10~13 Hz
<i>Coefficiente de amort. sistema Wheel-hop</i>	0.3
Parámetros del tráfico	
<i>Nivel de rugosidad de carretera (ISO 8606)</i>	3 (NORMAL)
<i>Desvío estándar del espaciamiento</i>	4 m
<i>Velocidad</i>	11 m/s
<i>Desvío estándar de la velocidad</i>	3 m/s
Parámetros del suelo ²	
<i>Densidad del suelo</i>	1900 kg/m ³
<i>Módulo transversal G</i>	40 MPa
<i>Módulo de Poisson</i>	0.45
<i>Modelo mecánico</i>	Voigt hysteretic
<i>Coefficiente de amortiguamiento</i>	Variable

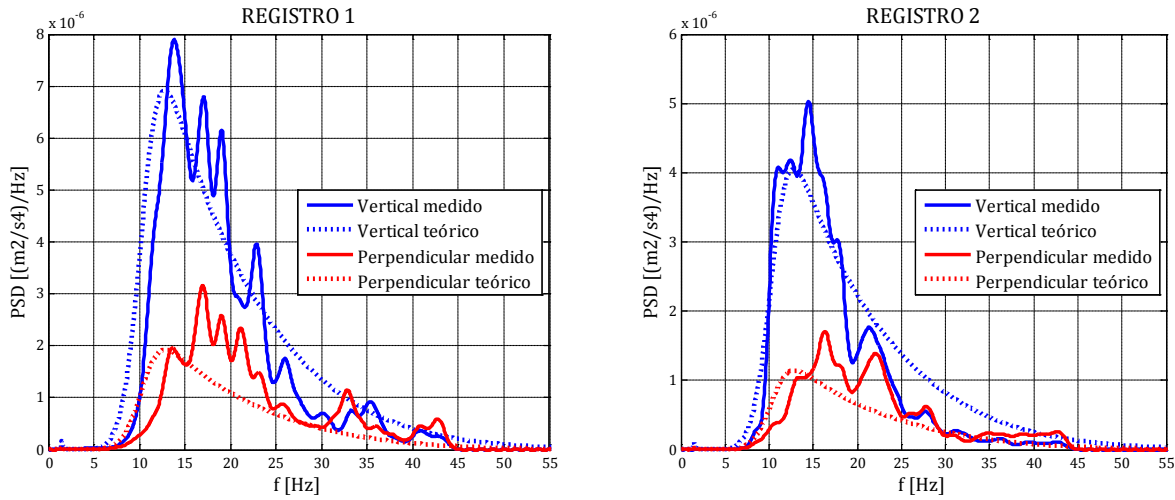
La masa del vehículo equivalente variará con cada medición tomada aunque en general se asume un tráfico de unos 12 vehículos en cada registro, de los cuales, entre 3 y 5 correspondían a colectivos y camiones, mientras que los demás vehículos eran autos y camionetas (basado en las observaciones en el lugar de medición). De la misma manera, se tomaron propiedades mecánicas para el vehículo tipo que estuvieran cerca de la media para colectivos y camiones, aunque se consideró una frecuencia del sistema Wheel-hop variable (se ve más adelante, que ésta es la frecuencia predominante en el espectro), dependiendo del registro analizado. En cuanto a las condiciones de rugosidad de la carretera, se asumió un nivel de rugosidad normal, de acuerdo a la clasificación de la ISO 8606. Se adopta un coeficiente de amortiguamiento de 0.6 para la Estación 1, 0.4 para la Estación 2 y 0.35 para la Estación 3.

A continuación se compara el modelo analítico del tráfico vehicular, con las mediciones realizadas en las distintas estaciones, para algunos de los registros.

1 Esto podría hacer suponer que el hecho de considerar una correlación estadística en las excitaciones de los vehículos puede no ser adecuada en este caso. Sin embargo, su efecto no es de relevancia.

2 Ver el capítulo 3 y Anexo 7.

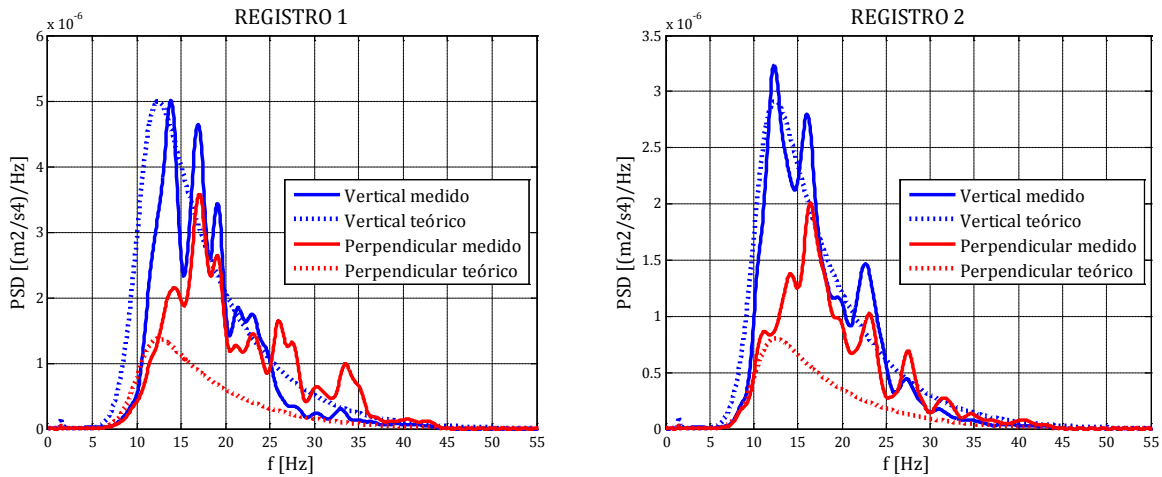
Estación 1							
Reg.	Masa eq. [kg]	Espaciamiento promedio [m]	RMS vert. [$10^{-4}g$]		RMS perp. [$10^{-4}g$]		Δ [%]
			Teórico	Medido	Teórico	Medido	
1	17000	6	9.72	9.17	5.21	6.07	10.1
2	15000	8	7.49	7.01	4.06	4.64	9.7



Comparación de los registros 1 y 2 entre los valores medidos y el espectro teórico, para las componentes vertical y perpendicular de las vibraciones.

FIG. 5-29 - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, TRÁFICO VEHICULAR E1

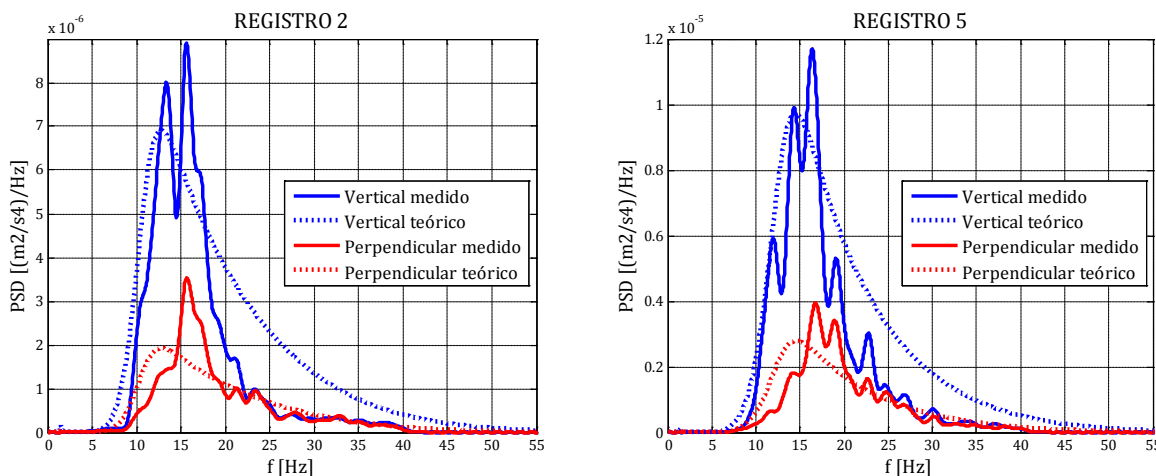
Estación 2							
Reg.	Masa eq. [kg]	Espaciamiento promedio [m]	RMS vert. [$10^{-4}g$]		RMS perp. [$10^{-4}g$]		Δ [%]
			Teórico	Medido	Teórico	Medido	
1	17000	6	7.44	6.72	3.96	6.17	23.3
2	15000	8	5.69	5.55	3.03	4.53	17.8



Comparación de los registros 1 y 2 entre los valores medidos y el espectro teórico, para las componentes vertical y perpendicular de las vibraciones.

FIG. 5-30 - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, TRÁFICO VEHICULAR E2

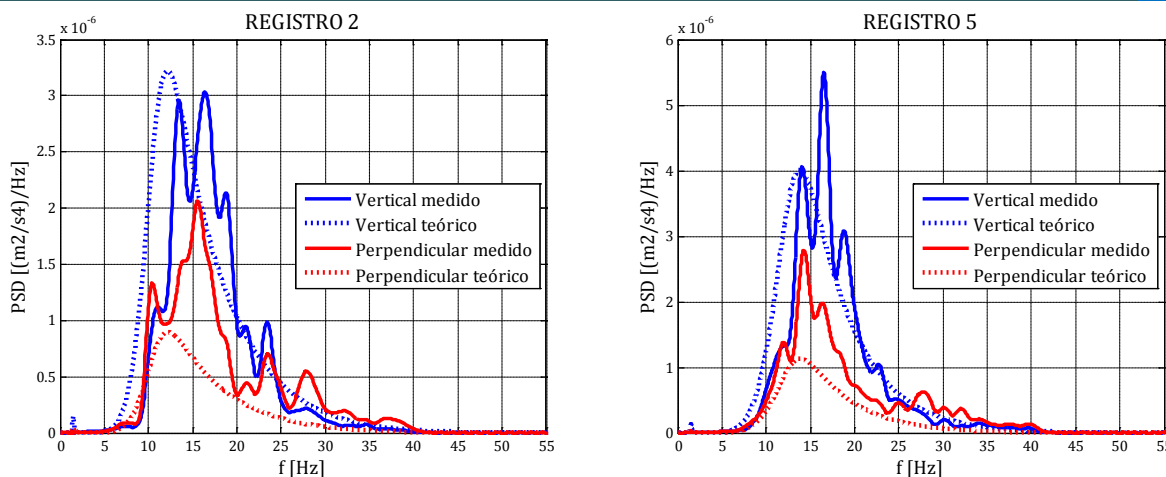
Estación 1B							
Reg.	Masa eq. [kg]	Espaciamiento promedio [m]	RMS vert. [10^4g]		RMS perp. [10^4g]		Δ [%]
			Teórico	Medido	Teórico	Medido	
2	17000	6	9.72	8.13	5.22	5.13	10.7
5	17000	8	11.16	9.24	6.06	5.79	12.7



Comparación de los registros 2 y 5 entre los valores medidos y el espectro teórico, para las componentes vertical y perpendicular de las vibraciones.

FIG. 5-31 - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, TRÁFICO VEHICULAR E1B

Estación 3							
Reg.	Masa eq. [kg]	Espaciamiento promedio [m]	RMS vert. [10^4g]		RMS perp. [10^4g]		Δ [%]
			Teórico	Medido	Teórico	Medido	
2	17000	6	5.57	5.19	2.95	4.43	20.4
5	17000	8	6.18	6.04	3.30	4.79	16.7



Comparación de los registros 2 y 5 entre los valores medidos y el espectro teórico, para las componentes vertical y perpendicular de las vibraciones.

FIG. 5-32 - COMPARACIÓN MODELO ANALÍTICO Y MEDICIONES, TRÁFICO VEHICULAR E3

La componente paralela no fue graficada en las figuras anteriores. Se trata de la componente de menor magnitud (tanto en las mediciones como en el modelo), aunque el modelo analítico ofrece un espectro mucho menor que los medidos para dicha componente (con errores mucho mayores que para las otras). Este problema también se vio para el caso de los trenes, y bien puede responder a un defecto del modelo en no poder representar acciones en la dirección del movimiento de los vehículos, que sí tienen lugar en la práctica.

En primer lugar, en todos los registros medidos pueden observarse distintos picos, correspondientes a distintos sistemas mecánicos de los vehículos que circulan. Esto no se puede ver en el modelo analítico, puesto que se propone un flujo de vehículos idénticos. Sin embargo, se ve una buena estimación del espectro teórico en términos de frecuencias predominantes del mismo (ya vimos que dicha frecuencia no varía demasiado con los tipos de vehículos). Por otro lado, existe la dificultad para estimar los parámetros del flujo vehicular, ya que éstos solo fueron propuestos en base a tablas genéricas de modelos mecánicos, y en base a la observación in situ del flujo vehicular. Más allá de estas incertidumbres, y las propias de los parámetros del suelo, se ve que pueden ajustarse razonablemente los espectros medidos con las curvas teóricas.

Como se dijo anteriormente, el amortiguamiento fue ajustado en función de los registros observados, y fue puesto en evidencia la disminución del mismo con el alejamiento respecto de la fuente. Si se hubiese utilizado un coeficiente de amortiguamiento uniforme, se habría sobrestimado mucho los valores medidos en las fuentes más cercanas, o simétricamente, se hubiese subestimado los de fuentes más alejadas.

En términos generales, el modelo teórico predice una relación entre vibraciones verticales y horizontales mayor a la que se observa en las mediciones, y que se acentúa más en las estaciones 2 y 3 que se encuentran más alejadas de la fuente de excitación. Esto se deduce de los gráficos de los espectros en Fig. 5-30 y Fig. 5-32, donde hay una buena aproximación de la magnitud del espectro de vibraciones verticales, y el espectro de vibraciones perpendiculares se encuentra bastante por debajo del medido¹. Esto va de la mano también, de una subestimación del espectro de vibraciones paralelas al eje de la carretera. Para corregir esto, podría eventualmente, utilizarse distintos factores de amortiguamiento para cada componente, cosa que se deduce del inciso anterior (y que fue señalado en los casos de estudio previos).

¹ Esto está en línea con las mediciones del decaimiento de las ondas, donde se observó una menor atenuación para la componente perpendicular.

6 RESUMEN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 RESUMEN

Como se dijo en la introducción, el estudio de la propagación de ondas en el terreno implica el análisis riguroso, tanto del medio en el que se propagan las ondas, como de la acción que las genera. Ninguna de las dos componentes debe estar por encima de la otra, y son, en todo caso, partes complementarias del problema.

El problema de Lamb, originalmente resuelto en 1904, fue revisado de manera exhaustiva utilizando el método de las transformadas integrales y la teoría de funciones complejas, llegando de una manera directa y elegante a las expresiones para las ondas de Rayleigh y las ondas P y S (aunque no en formas explícitas estas últimas). La solución para una carga vertical y armónica consta de un tren de ondas periódicas (compuesto por el aporte conjunto de las ondas de Rayleigh, P y S) que se propaga alejándose de la fuente y disminuyendo en amplitud, producto del “amortiguamiento por radiación”. Solo se consideró la contribución de las ondas superficiales de Rayleigh, ya que son las que se llevan la mayor parte de la energía y se amortiguan mucho más lento que las otras. La velocidad de propagación es, en este caso, una propiedad intrínseca del suelo (es función de los parámetros elásticos del suelo). La amplitud de las ondas es creciente con la frecuencia de excitación aunque el amortiguamiento sea algo mayor para el caso de frecuencias más altas.

Se introdujo a continuación, un modelo constitutivo viscoelástico lineal. Las ecuaciones que gobiernan el problema en régimen permanente no cambiaron sustancialmente del problema elástico, y la única diferencia radicó en que los parámetros mecánicos del suelo eran entonces, números complejos y, en un caso general, dependientes de la frecuencia. Si bien la forma de la solución es análoga al problema original de Lamb, las constantes complejas introducen en la solución, una atenuación de la amplitud de las ondas por el efecto de disipación de energía del material. Se observó un comportamiento muy similar para los dos modelos simples de Voigt y Maxwell en régimen permanente, y algunas diferencias cuando se consideró un amortiguamiento histerético, principalmente en la relación entre el amortiguamiento y frecuencia de la onda. Otra de las consecuencias debidas al modelo viscoelástico es la dependencia de la velocidad de propagación de las ondas con la frecuencia de excitación. Es decir, ya no es una propiedad intrínseca del material, sino que depende de la frecuencia de las cargas, lo que introduce al fenómeno de dispersión de las ondas. En cualquiera de estos modelos simples se necesitan dos constantes para definir el comportamiento viscoso (una para cada constante elástica), que por simplicidad se tomaron de idéntico valor.

El suelo, como material, dista mucho de ser homogéneo, isótropo y viscoelástico lineal. De manera amplia, el suelo puede definirse como un material particulado, compuesto por un esqueleto de partículas sólidas, con una fase fluido-gaseosa entre medio. Por ello, en el tercer capítulo del trabajo, se realizó una breve descripción de algunos conceptos generales del comportamiento dinámico del suelo, y como este puede ser modelizado a través de las hipótesis simplificadoras mencionadas. En general, estas hipótesis simplificadoras introducen ciertos aspectos a considerar a la hora de determinar los parámetros elásticos y viscosos para el modelo elegido. En cuanto a los primeros, deben tener en cuenta la distribución de distintos estratos con aptitudes mecánicas diferentes, por lo que se promedian las constantes elásticas hasta una determinada profundidad, teniendo en cuenta la profundidad de influencia de las ondas superficiales. En cuanto al modelo viscoso, se determinó utilizar un modelo de Voigt histerético por razones de simplicidad analítica, aunque quedó en claro que no hay uno de estos modelos simples que se pueda adaptar a distintos tipos de suelos (arenas secas y arcillas por ejemplo), y cada caso debe analizarse por separado. De todas maneras, en régimen permanente la utilización de uno u otro de los modelos simples no implica grandes diferencias en los resultados.

Una vez definido y analizado el modelo analítico para evaluar el comportamiento dinámico del suelo ante excitaciones armónicas, tuve que definirse los modelos a utilizar para representar las cargas que solicitan al terreno. En el cuarto capítulo se dieron las pautas generales para modelizar las distintas acciones dentro del marco de la teoría espectral de los procesos aleatorios y determinísticos. Se plantearon modelos analíticos para representar la acción del salto coordinado de personas, vehículos sobre rieles, vehículos sobre carreteras y máquinas vibratorias. Se hizo énfasis en la obtención de los espectros de energía o potencia de las cargas actuantes, así como también los espectros de la respuesta del suelo en un punto cualquiera de su superficie. Es de destacar la gran cantidad de parámetros que gobiernan los modelos, especialmente en los de tráfico vehicular y trenes. Muchas veces es imposible determinar con precisión muchos de estos parámetros, y deben ser estimados en base a otros modelos, o bien de manera subjetiva. Es por eso importante poder determinar cuáles son los factores que más influyen en la respuesta para poder centrar el estudio en ellos.

El salto coordinado de personas fue modelado como un proceso determinístico, pero que tiene en cuenta la aleatoriedad de la carga transmitida al terreno. Esta acción fue modelada como una carga puntual y periódica, caracterizada por las amplitudes de los armónicos fundamentales que se encuentran en el rango entre los 2 y 3 Hz. Los modelos de vehículos sobre rieles y sobre carreteras tuvieron muchos puntos en común, y fueron conceptualmente análogos. En ambos se despreció el efecto dinámico sobre el suelo, debido al desplazamiento de la carga, aunque la carga transmitida fuera producto justamente de irregularidades en la traslación de las mismas. De esta manera, fue despreciada la componente cuasi-estática de la carga, y se tomó consideración únicamente de la componente dinámica. En el caso de los trenes, se modeló la interacción entre vagón y sistema de vías, a través de un modelo de cuerpo rígido de 10 GL para el vagón, y una viga sobre solera viscoelástica para el sistema de vías. El tráfico carretero en cambio, fue modelado como una sucesión uniformemente espaciada de cargas moviéndose a velocidad constante. Se definió un modelo mecánico uniaxial de 2 GL para el vehículo, cuyas propiedades mecánicas y velocidad de circulación fueron determinadas según métodos probabilísticos para contemplar los distintos tipos de vehículos que se suceden en el tráfico, y se despreció la influencia de la carpeta de rodamiento. La última acción modelizada fue la de las máquinas vibratorias. Se analizó un modelo simple de un cuerpo rígido sustentado por un sistema resorte-amortiguador que simula la interacción entre el suelo y la base de fundación. El núcleo del problema se centra en la determinación de las constantes para el sistema resorte-amortiguador, que depende entre otros factores, de la forma en planta de la base y de la frecuencia de excitación.

Por último, se realizaron mediciones experimentales de los fenómenos. Las mismas fueron llevadas a cabo utilizando acelerómetros provistos por el Laboratorio de Dinámica de Estructuras. Se estudió la importancia que tiene un correcto procesamiento de las mediciones realizadas para poder obtener resultados relevantes y analizables analíticamente. Se centró el análisis de los resultados en los espectros de potencia de las aceleraciones medidas y en la estimación de la atenuación de las ondas mediante mediciones simultáneas, para su posterior comparación con los modelos teóricos. Se obtuve de cada registro representativo obtenido, el espectro de potencia (PSD) y se lo comparó con los espectros obtenidos en el cuarto capítulo. Lo mismo se hizo para la atenuación, donde se tomó como parámetro representativo de la misma, la relación entre los valores RMS de las aceleraciones en dos puntos situados a distintas distancias de la fuente de excitación.

6.2 CONCLUSIONES

A partir de lo estudiado en el presente trabajo a lo largo de los anteriores cinco capítulos, pueden destacarse ciertas conclusiones en lo que hace al análisis de la propagación de ondas periódicas en un medio viscoelástico lineal. El análisis se centra en los modelos analíticos utilizados, y en las hipótesis que los mismos suponen, para poder comprender cuáles son las limitaciones y alcances de dichos modelos simples. A continuación se detallan las principales conclusiones del presente trabajo:

- Dentro de los modelos mecánicos básicos de la viscoelasticidad lineal (modelo de Voigt, Maxwell, con o sin hysteretic damping), la utilización de cualquiera de ellos no tendrá una influencia sustancial en las soluciones obtenidas en régimen permanente, y para los relativamente bajos niveles de amortiguamiento presentes en el suelo. Esto es válido en los estudios aquí realizados que se centran en la obtención de los espectros de respuesta, y no tanto en otros aspectos como la dispersión de las ondas, tiempo de llegada y forma del pulso, que serían mucho más sensibles a la elección de uno u otro modelo. **Es por eso que no es determinante la elección de uno u otro de estos modelos, sobre todo cuando la información acerca del suelo y/o estudios previos similares a las condiciones reales, son escasos.** Otro tema distinto, sería la consideración de modelos viscoelásticos más complejos y que involucran un mayor número de constantes a determinar, con la mayor complicación que esto implica.

- Es interesante obtener conclusiones acerca de los alcances de los modelos teóricos planteados para representar la propagación de ondas en el terreno en base a las mediciones hechas. Principalmente, se tienen 3 hipótesis para el modelo analítico empleado en este trabajo: sólido semi-infinito homogéneo e isótropo, consideración únicamente de las ondas de Rayleigh, y un modelo constitutivo viscoelástico lineal simple. Cada una de ellas implica simplificaciones respecto del comportamiento real del suelo, y por ello, la utilización de dichas hipótesis simplificativas requiere de ciertas consideraciones para adaptar el modelo simplificado a las observaciones reales.
La primera de ellas (el suelo es en realidad anisótropo) requiere la **consideración de un coeficiente de amortiguamiento mayor al esperado por solo efectos de disipación propios del material, y la ponderación de las propiedades mecánicas de los distintos estratos de suelo.** Esto implica que no puede obtenerse un valor para el coeficiente a partir de ensayos en laboratorio, de muestras individuales del suelo.
Puede llamar la atención, sin embargo, la utilización de coeficientes de amortiguamiento distintos para modelar el mismo fenómeno, en el mismo suelo, y bajo las mismas condiciones de excitación, como se hizo en el caso del tráfico vehicular y los trenes. Aquí se ven claramente las limitaciones de la segunda y tercera hipótesis: **un solo parámetro viscoso no alcanza para representar adecuadamente la atenuación de las ondas que se miden en la práctica, por lo menos, a cortas distancias de la fuente de excitación.** En efecto, se sabe claramente que las ondas de Rayleigh adquieren mayor predominancia para distancias alejadas de la fuente, por lo que es esperable encontrar efectos que escapen a la segunda hipótesis en puntos cercanos a la excitación. Por otro lado, con los modelos viscoelásticos simples se obtienen curvas de atenuación que no se ajustan a los valores medidos en terreno, incluso contemplando el aumento del coeficiente de atenuación mencionado en el anterior párrafo. Ciertamente, podrían utilizarse modelos constitutivos más complejos (viscoelástico tipo Standard linear, hiperbólico, Soil hardening, etc), y considerarse la contribución de las ondas P y S al problema, pero esto hace imposible el manejo de soluciones analíticas explícitas.
Por último, se evidenció además la necesidad de incorporar **coeficientes de amortiguamiento distintos para las vibraciones verticales y horizontales**, señalando otra de las limitaciones del modelo utilizado, y que se debe probablemente a una combinación de la limitación de las tres hipótesis mencionadas (es difícil asociar este fenómeno a la limitación de una sola de las hipótesis).

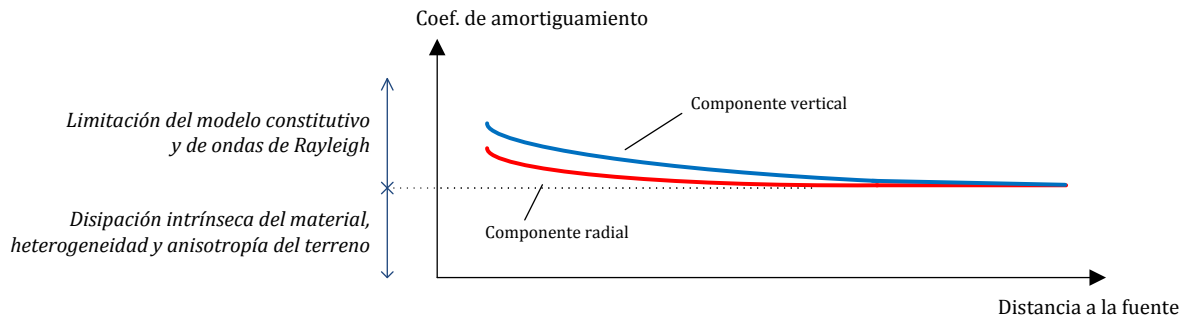


FIG. 6-1 - EL COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO Y LA DISTANCIA A LA FUENTE

En la Fig. 6-1 se muestra un gráfico cualitativo de cómo varía el coeficiente de amortiguamiento del modelo de Voigt, calibrado con las mediciones hechas. Es decir, se encontró que para poder ajustar el modelo analítico a las mediciones, debía considerarse un coeficiente de amortiguamiento variable con la distancia a la fuente (aun cuando la fuente y el suelo fuera el mismo). Si bien no se recopiló información suficiente como para obtener conclusiones determinantes, se observó que los efectos que tienen la limitación del modelo constitutivo elegido, y el modelo de ondas de Rayleigh, se van atenuando a medida que aumenta la distancia a la fuente. En otras palabras, es esperable que un modelo básico con un coeficiente de amortiguamiento único, se ajuste mejor cuando la distancia a la fuente de excitación es grande. Sin embargo, es intuitivo esperar que dicha consideración dependa también del contenido de frecuencias de las acciones sobre el suelo.

Como se dijo recién, hay que mencionar que la frecuencia de excitación es también un factor a tener en cuenta al analizar las limitaciones del modelo, y podría pensarse que las curvas de la Fig. 6-1 varíen según el rango de frecuencias de excitación. Aunque no son concluyentes los resultados obtenidos, **es razonable pensar que las limitaciones del modelo se acentúen más, o menos, para diferentes rangos de frecuencias de excitación.** En general, para mayores frecuencias de excitación, y por ende menores longitudes de onda, las irregularidades del camino de propagación son más influyentes en la propagación de las ondas, pudiendo afectar su magnitud y espectro.

Lo dicho en estos párrafos deja a la vista la desventaja de no conocer a priori el coeficiente de amortiguamiento a utilizar, y lo más importante aún, que éste no puede ser determinado a partir de estudios específicos del suelo. En este sentido, es importante poder determinar cuantitativamente cómo es afectado el coeficiente de amortiguamiento en estos modelos simples, por los factores antes mencionados: heterogeneidad del suelo, anisotropía, cercanía a la fuente, contenido de frecuencias, etc. Esto puede ser objeto de estudio en un futuro.

- En el salto de espectadores hay buena concordancia entre el modelo teórico planteado y las mediciones, y se destacó que la frecuencia de las vibraciones coincide con la del salto de los espectadores. Estas son de baja frecuencia (entre 2 y 3 Hz) y por eso se propagan apreciablemente a grandes distancias. Se observó un buen ajuste del modelo teórico utilizando un único coeficiente de amortiguamiento, en concordancia con lo mencionado en el punto anterior, al ser muy grande la distancia a la fuente de excitación.
- En el caso de los trenes se verifica la predominancia de la componente dinámica de la excitación, compuesta de frecuencias de rango medio y alto (entre 15 y 30 Hz), validando la hipótesis de despreciar la componente cuasi-estática de la excitación para bajas velocidades de circulación. Se observa, sin embargo que las componentes horizontales de las vibraciones no se ajustan bien a la acción modelada, especialmente la componente longitudinal a las vías, y esto es producto de considerar a las cargas como estacionarias (que no se desplazan) y de no considerar componentes de la acción en el plano del suelo (longitudinales particularmente).

La magnitud de las vibraciones es muy sensible a la magnitud de las irregularidades en la traslación del tren, y no tanto a la velocidad de este (siempre dentro del rango de bajas velocidades). Numerosos factores influyen en la magnitud de estas irregularidades, aunque no se relevó información suficiente del sistema como para poder individualizar cada una de estos factores en las vibraciones medidas. Lo mismo sucede al intentar analizar la influencia de la flexibilidad del sistema de vías en las vibraciones producidas por el paso del tren.

Por la cercanía a la fuente de excitación y el rango de frecuencias excitado, es preciso el ajuste del coeficiente de amortiguamiento según la distancia al paso del tren. Además las vibraciones horizontales parecen ajustarse mejor a coeficientes menores que los de las verticales.

- Las vibraciones debidas al tráfico vehicular muestran una marcada concentración de energía entre los 10 y 20 Hz coincidente con la frecuencia fundamental del sistema de ejes y ruedas de los vehículos (Wheel-hop system), en concordancia con el modelo teórico propuesto. El movimiento de las cargas no parece incidir significativamente en el espectro medido (de las vibraciones verticales por lo menos), y se valida la hipótesis de despreciar la componente cuasi-estática de las cargas.

Es fundamental la influencia de la masa de los vehículos y del estado de la carretera, por encima de la velocidad de los mismos. Es despreciable el efecto de autos y vehículos livianos en la generación de vibraciones, en comparación con la producida por camiones y ómnibus. No obstante, el rango de frecuencias excitadas es prácticamente el mismo.

No se relevó información suficiente para poder estudiar la influencia de la carpeta de rodamiento en la generación de vibraciones, aunque los resultados muestran que puede ajustarse adecuadamente el modelo teórico sin considerar de manera explícita dicha carpeta (puede incluirse de manera implícita al calibrar un coeficiente de amortiguamiento).

Por la cercanía a la fuente de excitación y el rango de frecuencias excitado, es preciso el ajuste del coeficiente de amortiguamiento según la distancia al paso de los vehículos. Además las vibraciones horizontales parecen ajustarse mejor a coeficientes menores que los de las verticales.

6.3 RECOMENDACIONES

Numerosos temas pueden ser objeto de futuros estudios, dentro de los que pueden destacarse:

- Obtención de soluciones aproximadas para la consideración de ondas P y S en el problema de Lamb. En el primer capítulo del trabajo se obtuvieron expresiones de la propagación de estas ondas, en forma de integrales indefinidas, que podrían ser resueltas numéricamente, o de manera simplificada, mediante método analíticos.
- Consideración de modelos viscoelásticos más complejos que involucren mayor cantidad de variables a calibrar, como puede ser el modelo Standard linear; y/o consideración de un comportamiento viscoso distinto en compresión y en corte. Hay que recordar que en el trabajo se consideró un solo coeficiente para representar el comportamiento viscoso del suelo, aunque rigurosamente podrían definirse independientemente dos.
- Obtención de expresiones cuantitativas para el coeficiente de amortiguamiento en los modelos viscoelásticos simples (Voigt o Maxwell) para la consideración del efecto de heterogeneidad del suelo, anisotropía, cercanía a la fuente, contenido de frecuencias, etc. Relación entre coeficientes para vibraciones verticales y horizontales. Para ellos se requiere la recopilación de un gran número de registros para idénticas cargas de excitación, y diferentes distancias de la fuente. Sería interesante obtener curvas del

coeficiente de amortiguamiento en función de la distancia (análogas a las de la Fig. 6-1), y de la frecuencia de excitación.

- Estudio riguroso de los factores que influyen en la excitación vertical dinámica sobre el sistema de vagones de un tren. En particular, es interesante poder individualizar cada uno de los factores y poder asociarlo a un rango de frecuencias y una amplitud transmitidas al tren. Se pueden proponer modelos analíticos de excitación individualizados para cada factor de influencia (por ejemplo, considerar espectros de excitación individuales para cada factor)
- Estudio de la influencia del sistema de vías en la generación de vibraciones producto del paso de trenes. En general, esto implicará la medición de vibraciones para distintos tipos de vías, con distintos balastos y materiales de relleno.
- Estudio de la influencia de la capa rígida asfáltica en la propagación de ondas debido al tráfico vehicular; influencia cuantitativa en el coeficiente de amortiguamiento. Obtención de espectros de rugosidad medidos en las carreteras de la Ciudad de Buenos Aires.

ANEXOS

ANEXO 1: SOBRE LOS CORTES DE RAMIFICACIÓN

El principal problema que surge en la evaluación de las integrales, es que los integrandos son funciones multiformes, es decir, existe más de un valor imagen para cada z del dominio de la función. Esto se debe principalmente a las funciones raíz que aparecen dentro de estas funciones (funciones α y β). En el plano complejo, estas funciones pueden tomar más de un valor posible, y es preciso restringir del dominio de definición de la función a ciertas familias de curvas sobre las que la función no es continua en todo su recorrido. El objetivo es separar la función multiforme en varias funciones uniformes y continuas definidas en cierto dominio del plano complejo; a cada una de estas funciones uniformes se la denomina “rama” o “determinación” de la función multiforme¹. Para encarar el problema, se analizan primero casos más sencillos de las funciones raíz compleja:

FUNCIÓN \sqrt{z}

Se considera la función $f(z) = \sqrt{z}$ y expresamos el argumento en su forma exponencial $z = e^{i\theta}$; entonces la función asume el siguiente valor para cada z del plano complejo:

$$f(z) = \sqrt{|z|} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ donde } |z| > 0 \text{ y } \rho \leq \theta < \rho + 2\pi$$

Ahora se hace variar el valor del ángulo θ de manera continua (como si se fuera trazando una circunferencia alrededor del origen), entonces la función $f(z)$ también variará de manera continua. Pero al volver al punto z original, el ángulo será ahora de $\theta + 2\pi$, y la función tomará el valor de,

$$f(z) = \sqrt{|z|} e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}} = -\sqrt{|z|} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ siendo } |z| \in \mathbb{R} > 0$$

Si se sigue incrementando el valor del ángulo, volverán a repetirse todos los valores de la primera vuelta, pero con signo negativo. Por lo tanto, la función no puede ser definida de manera unívoca si se permiten variaciones de θ mayores a 2π . Ahora bien, el valor que tome la función dentro de un rango de variación de θ menor a 2π , dependerá del valor que se determine, de manera arbitraria, en un punto z , de todos los valores que puede adoptar la función en dicho punto z .

Si se recorriera otra vuelta más, el ángulo sería de $\theta + 4\pi$, y la función volvería a tomar los valores originales por esa vuelta ($e^{i2\pi} = 1$). Es fácil ver que para una cantidad impar de vueltas alrededor del origen, la función tomará el valor negativo, y para una cantidad par, el positivo. Es decir, se tienen dos valores posibles de $f(z)$, para cada z del plano complejo (si permitiéramos variar el ángulo θ de manera arbitraria),

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sqrt{|z|} e^{i\frac{\theta}{2}} \\ f_2(z) &= -\sqrt{|z|} e^{i\frac{\theta}{2}} = -f_1(z) \end{aligned}$$

Se puede definir una función uniforme y continua, si no se deja que el ángulo, al ir variando z a lo largo de una curva cerrada, varíe en 2π o más. A esta función uniforme y continua dentro de una cierta región del plano complejo, se la denomina “rama”. La función $f(z)$ tiene, en este caso, dos ramas distintas (de signo

¹ Para una revisión más detallada de los conceptos que aparecen a continuación ver (Markushevich, 1970, págs. 175 - 187).

opuesto) que pueden ser elegidas de manera arbitraria, seleccionando uno de los dos valores de la función en un punto cualquiera del plano. Está claro que para el rayo $\theta = 2\pi$ la función presentará una discontinuidad, puesto que de seguir variando de manera continua el ángulo, se estaría pasando a la otra rama de la función. Por lo tanto, el dominio de definición para una rama continua y uniforme en el plano complejo de la función \sqrt{z} , será el recinto que contiene a todas las curvas cerradas que no contengan al origen.

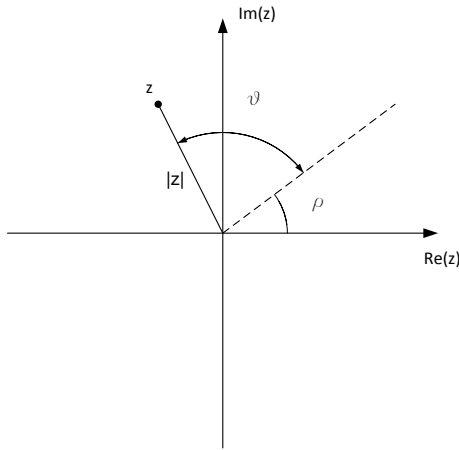


FIG. A0-1 - NOTACIÓN FUNCIÓN RAÍZ COMPLEJA

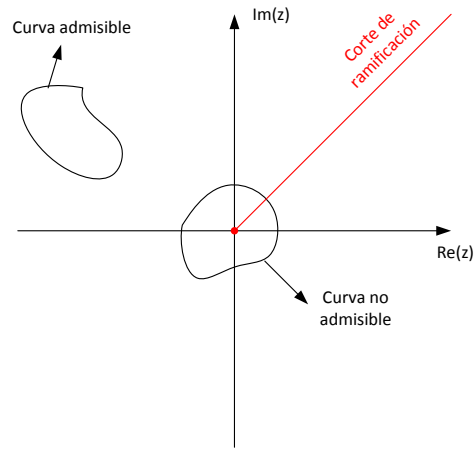


FIG. A0-2 - CONTORNOS ADMISIBLES EN EL PLANO COMPLEJO

Un punto z_0 se denomina “punto de ramificación” si cuando z se mueve continuamente y uniformemente en un entorno arbitrariamente pequeño alrededor de z_0 el valor de $f(z)$ no vuelve a su valor original, al realizar una vuelta completa.

Un “corte de ramificación” es una curva en el plano complejo, en la cual la rama de la función multivaluada $f(z)$ presenta una discontinuidad. Es una manera de definir el límite del dominio en el cual las ramas de la función, son univaluadas.

El procedimiento a seguir, será elegir los cortes de ramificación apropiados que permitan definir en el plano, una rama continua y uniforme de la función. Luego, definiendo para un valor z_0 del dominio, el valor de su imagen (es decir, de $f(z)$), se puede definir el valor que toma cualquier punto z del recinto, uniendo éste con z_0 mediante una curva continua perteneciente al mismo recinto.

FUNCIÓN $\sqrt{z - z_0}$

Expresando el argumento en notación exponencial, la función es: $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$

Las consideraciones son análogas al caso anterior, con la única diferencia de que en este caso, tenemos que considerar como ángulo, el que va desde un punto z cualquiera del plano complejo al punto z_0 .

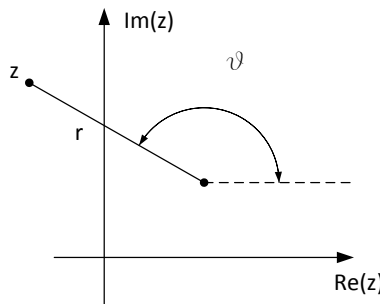


FIG. A0-3 - NOTACIÓN FUNCIÓN RAÍZ COMPLEJA

En este caso, el punto de ramificación es z_0 , pues cualquier variación del argumento de $z-z_0$ (ángulo θ en la figura) en 2π o más, se obtendría un valor distinto para la función,

$$f(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}} = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

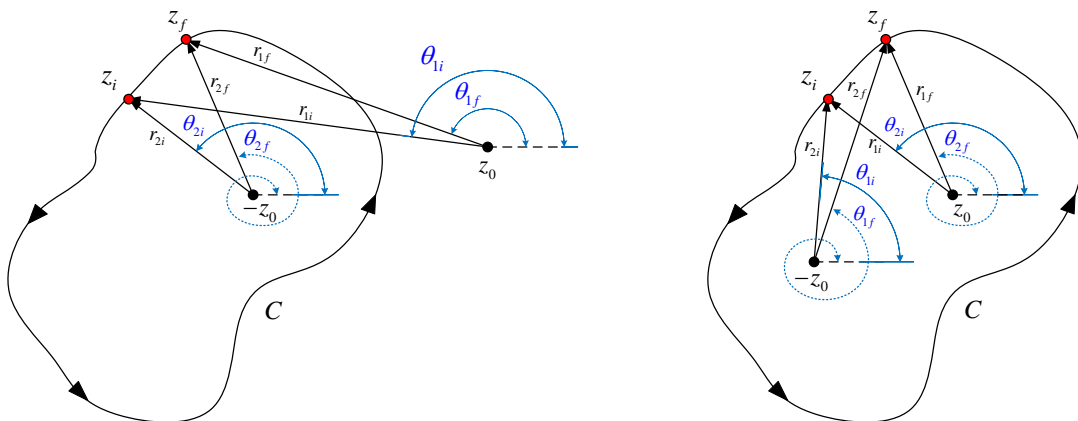
Hay que destacar el hecho de que ahora, una curva alrededor del origen que no contenga a z_0 no implicará una discontinuidad de la rama pues θ nunca variará en 2π . El dominio de definición de una rama continua y uniforme será, el que contenga a todas las curvas cerradas que no contengan a z_0 . Y la rama estará definida, según se defina un valor para la función en algún punto del dominio (por ejemplo $f(0) = i\sqrt{|z_0|}$).

FUNCIÓN $\sqrt{z^2 - z_0^2} = \sqrt{z - z_0} \sqrt{z + z_0}$

Este caso es el producto de dos funciones del tipo anterior, y coincidente con las funciones α y β definidas en [1.26] extendidas al plano complejo.

$$f(z) = \sqrt{r_1} \sqrt{r_2} e^{i\frac{\theta_1}{2}} e^{i\frac{\theta_2}{2}}$$

Donde r_1 y r_2 son las distancias desde un punto z arbitrario del plano, a los puntos z_0 y $-z_0$ respectivamente (sus raíces son números reales positivos).



Contorno cerrado que rodea a uno sólo de los puntos de ramificación. La función $f(z)$ no es continua en dicho contorno, pues el ángulo θ_2 se incrementa en 2π .

Contorno cerrado que rodea a ambos puntos de ramificación. La función $f(z)$ es continua en dicho contorno, pues los dos ángulos se incrementan en 2π .

FIG. A0-4 - DISTINTOS CONTORNO CERRADOS ALREDEDOR DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN

Si se recorriera un entorno de $-z_0$, se obtendría, al dar una vuelta completa alrededor de éste, que el ángulo θ_2 se incrementa a $\theta_2 + 2\pi$, mientras que el ángulo θ_1 vuelve a su valor inicial (ver Fig. A0-4). Por lo tanto la función adquiere el siguiente valor,

$$f(z) = \sqrt{r_1} \sqrt{r_2} e^{i\frac{\theta_1}{2}} e^{i\frac{\theta_2+2\pi}{2}} = -\sqrt{r_1} \sqrt{r_2} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

Está claro que se obtuvo el valor de la otra rama, por lo que se deduce inmediatamente que $-z_0$ es un punto de ramificación de la función. Haciendo un análisis análogo, pero para el punto z_0 se deduce también, que dicho punto es de ramificación. Ahora bien, veamos que si se recorriera un entorno que contenga a ambos

puntos z_0 y $-z_0$, el valor de ambos ángulos se vería incrementado en 2π y la función adquiriría el siguiente valor,

$$f(z) = \sqrt{r_1} \sqrt{r_2} e^{i \frac{\theta_1 + 2\pi}{2}} e^{i \frac{\theta_2 + 2\pi}{2}} = \sqrt{r_1} \sqrt{r_2} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$$

Se ve claramente que cualquier circuito que contenga a ambos puntos de ramificación no presentará una discontinuidad en los valores de la función. Por lo tanto, el corte de ramificación necesario para definir una rama de la función deberá unir ambos puntos de ramificación¹, excluyendo de esta manera todas las curvas cerradas que contengan a uno sólo de ellos. Como se vio recién, las ramas de esta función son dos, definidas como:

$$f_1(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{i \frac{\Theta}{2}}$$

$$f_2(z) = -\sqrt{r_1 r_2} e^{i \frac{\Theta}{2}} = -f_1(z)$$

Siendo $\Theta = \theta_1 + \theta_2$

Ahora bien, es interesante analizar el caso en $z_0 = \Omega \in R$. Es decir, ambos puntos de ramificación ($z_0, -z_0$) se ubican sobre el eje real. En particular, interesará conocer los valores de la función para los puntos ubicados también sobre el eje real. En este caso, el ángulo $\Theta = \theta_1 + \theta_2$ está restringido a tomar los valores solo ciertos valores múltiplos de $\pi/2$, de acuerdo al segmento del eje real donde se encuentre la variable, y de acuerdo a si la aproximación se realiza por sobre el eje real, o por debajo de este (ver Fig. A0-6).

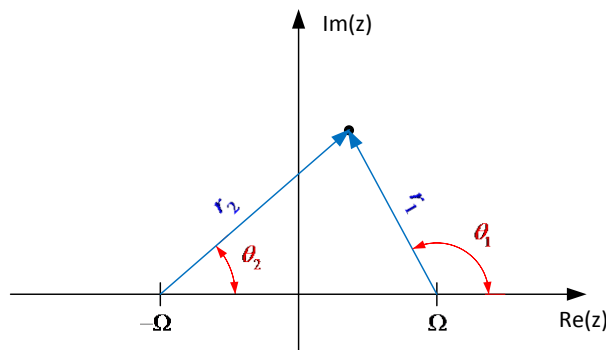


FIG. A0-5 - NOTACIÓN FUNCIONES α Y β

Para definir una rama, se asume que para números reales mayores que Ω la función vale $f(z) = \sqrt{r_1} \sqrt{r_2}$; es decir se elige la rama $f_1(z)$. Sin embargo, lo más importante en este punto, es comparar la función compleja sobre el eje real, y la misma función pero de variable real $f(k)$. Si bien uno esperaría que las funciones coincidan, dependiendo del corte de ramificación elegido para la función de variable compleja, éstas podrían no coincidir.

Como se vio en [1.26], la función de variable real adquiere los siguientes valores²,

1 Esto implica que el corte de ramificación, en principio, puede ser cualquier curva que una ambos puntos, incluso a través del punto impropio.

2 Se la denomina con la letra α por analogía con las funciones reales definidas en [1.15] y [1.26]

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \Omega^2}, & k > \Omega \\ i\sqrt{\Omega^2 - k^2}, & k < \Omega \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{(k - \Omega)(k + \Omega)}, & k > \Omega \\ i\sqrt{(\Omega - k)(\Omega + k)}, & k < \Omega \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{r_1 r_2}, & k > \Omega \\ i\sqrt{r_1 r_2}, & k < \Omega \end{cases}$$

Por su parte, se puede ver qué valores toma la función $f(z)$ en el eje real, haciendo variar a z de manera continua a lo largo del eje¹, y utilizando como rango de definición para los ángulos $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi$. En la siguiente figura se observan los valores que toma la función compleja $f(z)$ sobre el eje real, cuando la aproximación se realiza por encima o por debajo de este.

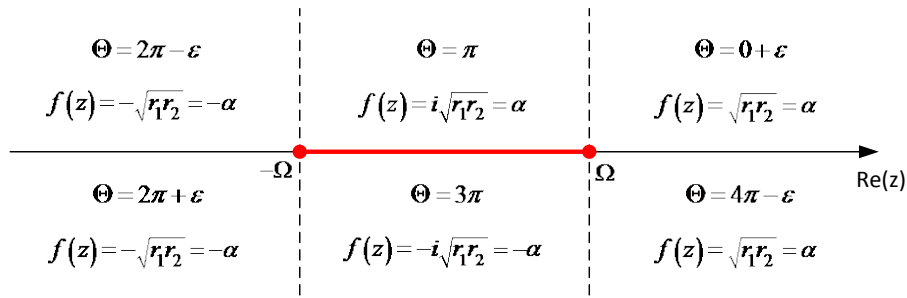


FIG. A0-6 - CORTES DE RAMIFICACIÓN FUNCIONES α Y β

De la figura, se observa que el corte de ramificación es el segmento de eje real que une los dos puntos de ramificación; allí se presenta la discontinuidad de la rama de la función. Fuera de ese salto, la función es continua y uniforme en el resto del plano complejo. También se observa que en el segmento del eje real negativo $(-\infty, -\Omega)$, la rama de la función adquiere valor negativo, contrario a la función de variable real. De lo dicho en los párrafos anteriores, el corte de ramificación obtenido aparece como una obviedad ya que se sabe que dicho corte debe unir ambos puntos, sin embargo existen infinitas curvas que unen ambos puntos y son factibles de ser cortes de ramificación.

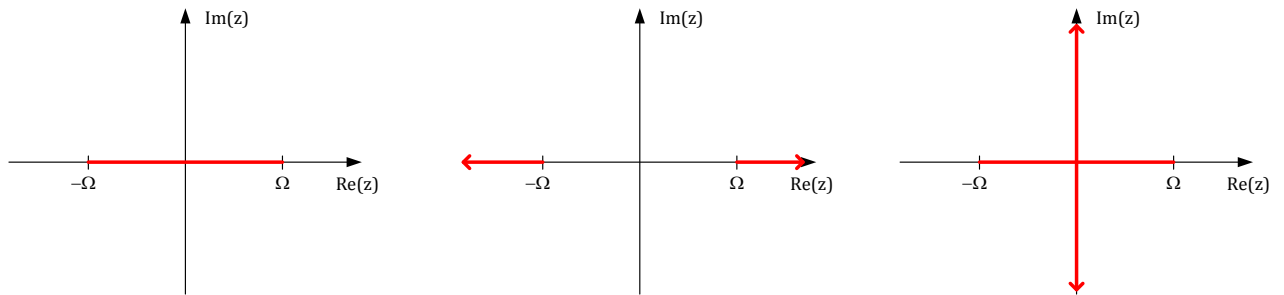


FIG. A0-7 - OTROS CORTES DE RAMIFICACIÓN FUNCIONES α Y β

En la figura anterior pueden verse distintos cortes de ramificación para la misma función compleja analizada en la Fig. A0-6. Como puede verse, los cortes de ramificación tiene un gran margen de arbitrariedad, y los valores de la función compleja sobre el eje real son distintos para uno u otro corte, incluso pudiendo coincidir con la función de variable real para cualquier valor. Este es el caso del tercer corte mostrado en la figura, que para el cálculo de la integral en cuestión, es más engorroso. El análisis del mismo problema de Lamb considerando cortes del tercer tipo puede verse en (Graff, 1975, pp. 332 - 333 ; 347 - 348) y (Ewing, Jardetzky, & Press, 1957, pp. 45 - 52). En estos casos, el eje imaginario es un corte de ramificación. Está claro que el valor de la integral no depende de los cortes elegidos, mientras la rama de la función esté bien definida.

¹ Este mismo análisis puede verse en (Ablowitz. & Fokas, 2003, pp. 250 - 252)

FUNCIÓN $\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{z^2 - b^2} = \sqrt{z - a}\sqrt{z + a}\sqrt{z - b}\sqrt{z + b}$

El procedimiento es análogo a los anteriores. Se trata de una función con 4 puntos de ramificación $\pm a$ y $\pm b$, coincidente con la función $\alpha\beta$ extendida al plano complejo. Con lo visto en el punto anterior, es fácil ver ahora, que el recorrido a lo largo de cualquier curva cerrada que contenga en su interior a sólo 2 de dichos puntos, no altera los valores de la función. De igual manera, se trata de una función con dos ramas, definidas según,

$$f_1(z) = \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} e^{i\frac{\Theta}{2}}$$

$$f_2(z) = -\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} e^{i\frac{\Theta}{2}} = -f_1(z)$$

Se asume que en el origen la función toma el valor: $\sqrt{-a^2}\sqrt{-b^2} = -|a||b|$ y vamos variando de manera continua el valor de Θ , para obtener una rama continua en el plano.

Siendo $f(z) = \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} e^{i\frac{\Theta}{2}}$ donde ahora $\Theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ (basta interpretar análogamente a la Fig. A0-5)

Nuevamente se hace la comparación con la función real $\alpha\beta$, que según lo definido en [1.26] toma los siguientes valores:

$$\alpha\beta = \begin{cases} \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} & k > \Omega_s \\ i\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} & \Omega_p < k < \Omega_s \\ -\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} & -\Omega_p < k < \Omega_p \\ i\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} & -\Omega_s < k < -\Omega_p \\ \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} & k < -\Omega_s \end{cases}$$

Análogamente al punto anterior, se puede ver qué valores toma la función compleja en la recta real, suponiendo: $0 \leq \theta_i \leq 2\pi$

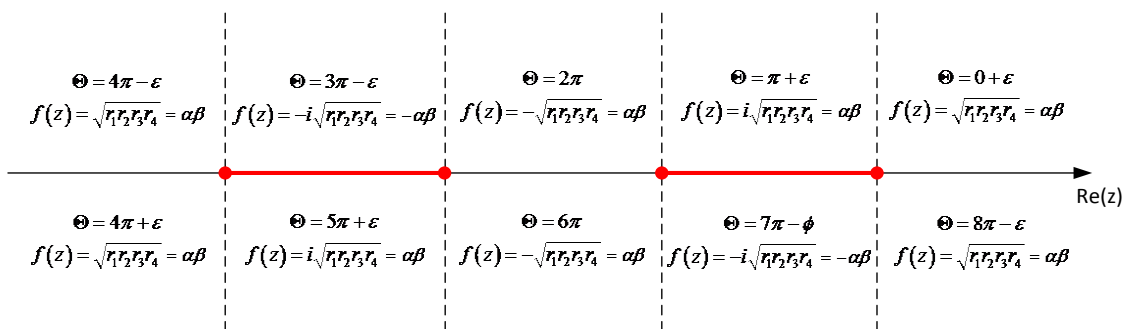


FIG. A0-8 - CORTES DE RAMIFICACIÓN FUNCIONES α Y β

De nuevo se ven claramente los cortes de ramificación que unen pares de puntos de ramificación. Y, al igual que en el ejemplo anterior, se ve que la rama de la función compleja no coincide en todos los segmentos con la función de variable real $\alpha\beta$ definida según [1.26].

FUNCIÓN CON POLOS COMPLEJOS

En el caso de propagación de ondas en un medio viscoelástico (segundo capítulo del presente trabajo), aparecen funciones del tipo de las vistas en los últimos puntos, pero ahora con $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Hay que recordar que los cortes de ramificación de dichas funciones se encontraban en los ceros de las funciones dentro de las raíces¹.

$$f(z) = \sqrt{z^2 - z_0^2} = \sqrt{(z - z_0)(z + z_0)}$$

$$g(z) = \sqrt{z^2 - z_0^2} \sqrt{z^2 - z_1^2}$$

Donde z_0 y z_1 son números complejos cuyas partes reales son positivas, y las partes imaginarias son negativas.

En el caso de $f(z)$, el corte de ramificación deberá unir ambos puntos, de manera que no sea admisible ningún circuito cerrado que contenga en su interior a uno solo de los puntos de ramificación. Por su parte, los cortes de $g(z)$ deberán unir de a pares los puntos, de manera que no sea admisible ningún circuito cerrado que contenga en su interior a un solo punto de ramificación, pero sí que contenga a dos de ellos (ver Fig. A0-9).

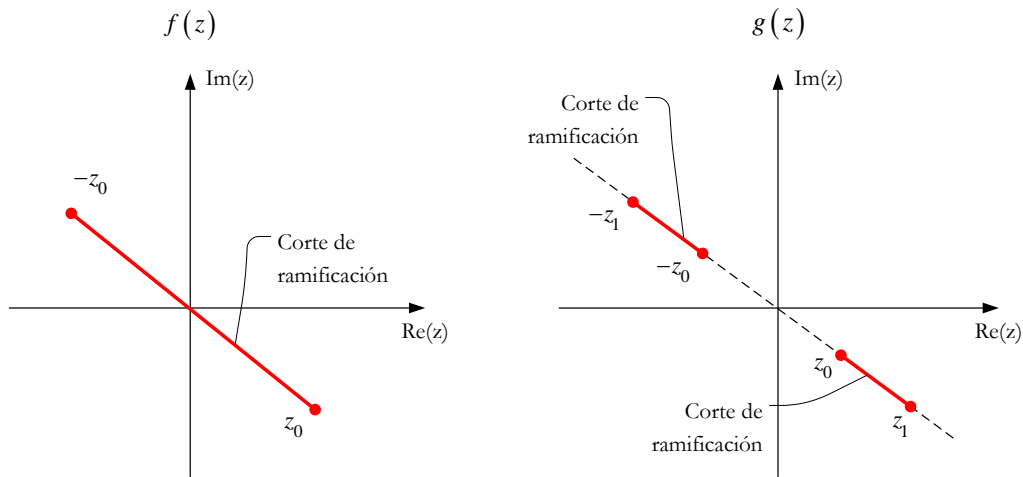


FIG. A0-9 - CORTES DE RAMIFICACIÓN FUNCIONES DE POLOS COMPLEJOS²

El valor de las funciones $f(z)$ y $g(z)$ para todos los puntos del dominio de definición se obtiene adoptando un valor para cada función en un punto, y luego haciendo variar de manera continua el ángulo y el radio que definen al punto complejo (lo mismo realizado en los puntos anteriores de este anexo). En este caso, sin embargo, es mucho más complicado que para los casos anteriores donde los polos y los cortes estaban sobre el eje real. Se omitirá este análisis en virtud de que sólo se consideran las ondas de Rayleigh en la propagación, y que se vio en el primero capítulo del trabajo, que estas son aportadas únicamente por los polos. Todo lo demás, será contribución de las ondas P y S.

1 Ver (Markushevich, 1970, págs. 175 - 187)

2 El análisis es válido aunque los puntos de ramificación no se encuentren en una recta que pasa por el origen. La figura presenta una disposición genérica que se adapta al ejemplo del presente trabajo.

ANEXO 2: SOBRE LAS RAÍCES DE LA FUNCIÓN DE RAYLEIGH

En este Anexo se muestra una solución analítica para determinar los polos de la Función de Rayleigh, que en un caso general, tiene coeficientes complejos (caso viscoelástico). La obtención de los polos para el caso con coeficientes reales (caso elástico) es simplemente un caso particular del mismo.

Sea la función de Rayleigh,

$$F(k) = (2k^2 - \Omega_s^2)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - \Omega_p^2} \sqrt{k^2 - \Omega_s^2}$$

Se tiene entonces, la ecuación de Rayleigh, $F(k) = 0$

$$(2k^2 - \Omega_s^2)^2 = 4k^2 \sqrt{k^2 - \Omega_p^2} \sqrt{k^2 - \Omega_s^2}$$

Que expresada en término de $c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$

$$\left(2 - \frac{c^2}{\Omega_s^2}\right)^2 = 4 \sqrt{1 - \frac{c^2}{\Omega_p^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\Omega_s^2}} \quad [A2.1]$$

Elevando al cuadrado ambos términos queda,

$$\left(\frac{c^2}{\Omega_s^2}\right)^3 - 8\left(\frac{c^2}{\Omega_s^2}\right)^2 + \left(24 - 16\frac{\Omega_s^2}{\Omega_p^2}\right)\left(\frac{c^2}{\Omega_s^2}\right) - 16\left(1 - \frac{\Omega_s^2}{\Omega_p^2}\right) = 0 \quad [A2.2]$$

Donde Ω_p y Ω_s fueron definidas en el inciso 2.3 para el modelo viscoelástico, y en [1.10] para el modelo elástico

Se trata de una ecuación cúbica con coeficientes complejos (o reales, como caso particular), en términos de c^2/β^2 , por lo que dicha ecuación tendrá 3 raíces. No todas ellas son solución de la ecuación original [A2.1]; esto se debe a que aparecen raíces “externas” (extraneous roots) al elevar al cuadrado ambos términos.

Las raíces de [A2.2] están dadas por¹:

$$c_j = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{1/3} u^{j-1} - \frac{p}{3} \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{-1/3} u^{-(j-1)} + \frac{8}{3} \quad \text{para } j = 1, 2, 3$$

Donde,

$$p = \frac{8}{3} - 16 \frac{\Omega_s^2}{\Omega_p^2}$$

$$q = \frac{272}{27} - \frac{80}{3} \frac{\Omega_s^2}{\Omega_p^2}$$

$$u = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

¹ Ver (Borcherdt, 2009, p. Apéndice 4)

Ahora bien, puede demostrarse¹, que si c_j es raíz de [A2.2], y además $|c_j| < 1$, entonces es también raíz de [A2.1]. De esta manera, se puede obtener el valor de las raíces de la ecuación de Rayleigh compleja, volviendo atrás en los cambios de variable realizados.

$$\Omega_R = \pm \frac{\omega}{\sqrt{y_R} \beta} = \pm \eta(\omega) \mp i \zeta(\omega)$$

Se puede comprobar que la raíz positiva, tiene parte real positiva y parte imaginaria negativa. En el modelo elástico, la parte imaginaria es nula.

Ahora bien, es interesante resaltar algunas características de la solución obtenida, por lo menos para el modelo elástico. En general, estas propiedades van a ser muy similares para los modelos viscoelásticos, sobre todo para valores pequeños de los coeficientes de amortiguamiento. En este caso, las raíces de la ecuación [A2.1] son números reales c_R , que representan la velocidad de las ondas de Rayleigh, de valor absoluto algo menor a la velocidad de propagación de las ondas S. En el caso de las raíces complejas, la velocidad está asociada a la parte real de la raíz de [A2.2].

Volviendo a la expresión [A2.1], y rescribiéndola según, $\lambda = \left(\frac{c_R}{c_T}\right)^2$

$$(2 - \lambda)^2 = 4\sqrt{1 - \lambda} \sqrt{1 - \lambda \left(\frac{c_S}{c_P}\right)^2}$$

Se ve que la relación $(c_S/c_P)^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$ sólo depende del módulo de Poisson del material, y por lo tanto, la relación entre velocidad de ondas de corte y de Rayleigh sólo dependerá del módulo de Poisson. De igual manera, sucederá con la relación con las ondas P. Estas relaciones pueden adoptarse en general para los suelos, puesto que suelen tener bajos amortiguamientos y los efectos viscoelásticos no tienen una gran influencia en las velocidades de onda, para un amplio rango de frecuencias.

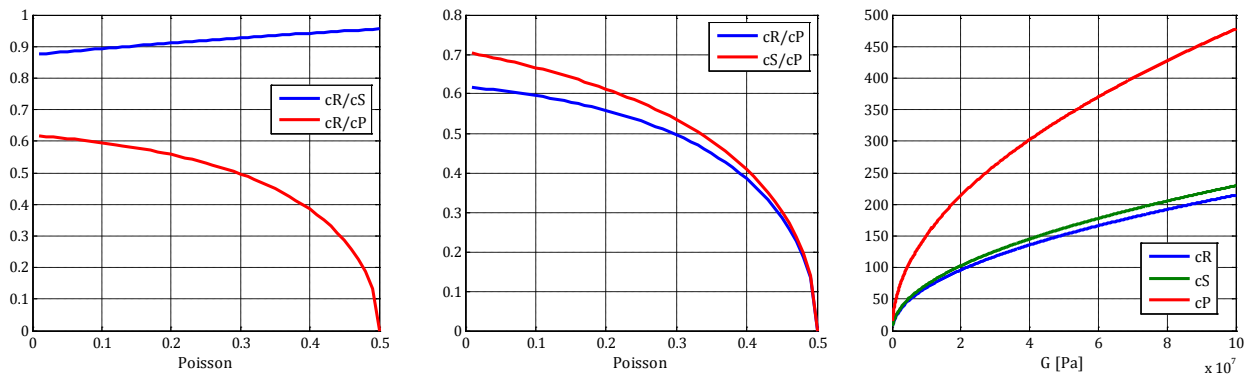


FIG. A0-10 - RELACIONES ENTRE VELOCIDADES DE ONDA Y PARÁMETROS ELÁSTICOS DEL SUELO

1 Ver (Borcherdt, 2009, p. Apéndice 5)

ANEXO 3: SOBRE LOS RESIDUOS EN LOS POLOS DE RAYLEIGH

La determinación de los residuos de las funciones $\Psi(z)$ y $\Omega(z)$ en los polos de Rayleigh $\pm\gamma_R$, se realiza mediante la siguiente afirmación (Churchill. & Brown, 1992, págs. 203 - 204):

Si dos funciones p y q son analíticas en un punto z_0 y

$$p(z_0) \neq 0 ; q(z_0) = 0 \text{ y } q'(z_0) \neq 0$$

Entonces z_0 es un polo simple del cociente $p(z)/q(z)$, y el residuo allí es: $b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

Entonces se puede determinar la expresión para los residuos de las siguientes funciones:

- **Residuos de la función [1.25]**

$$\Theta(z) = \frac{k^2 \left(2k^2 - \Omega_S^2 - 2\sqrt{k^2 - \Omega_S^2} \sqrt{k^2 - \Omega_P^2} \right)}{F(z)} e^{ikx} = \frac{p(z)}{F(z)}$$

$$Res(\Psi(z), -\Omega_R) = \frac{p(\Omega_R)}{F'(\Omega_R)} = \frac{\Omega_R^2 (2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\alpha^* \beta^*)}{F'(-\Omega_R)} e^{-i\Omega_R x}$$

$$Res(\Psi(z), \Omega_R) = \frac{p(\Omega_R)}{F'(\Omega_R)} = \frac{\Omega_R^2 (2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\alpha^* \beta^*)}{F'(\Omega_R)} e^{i\Omega_R x}$$

Donde,

$$\alpha^* = \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2} ; \beta^* = \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_S^2}$$

$$F'(\Omega_R) = 8\Omega_R (2\Omega_R^2 - \Omega_S^2) - 8\Omega_R \alpha^* \beta^* - 4\Omega_R^3 \frac{\alpha^*}{\beta^*} - 4\Omega_R^3 \frac{\beta^*}{\alpha^*}$$

$$\text{Como } F'(\Omega_R) = -F'(-\Omega_R)$$

Entonces la siguiente expresión se puede escribir como,

$$\pi i \sum Res(\Theta(z)) = \frac{\pi i \Omega_R^2 (2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\alpha^* \beta^*)}{F'(\Omega_R)} [e^{i\Omega_R x} - e^{-i\Omega_R x}]$$

$$\pi i \sum Res(\Theta(z)) = -\frac{2\pi \Omega_R^2 (2\Omega_R^2 - \Omega_S^2 - 2\alpha^* \beta^*)}{F'(\Omega_R)} \text{sen}(\Omega_R x)$$

- **Residuos de la función [1.31]**

$$-\Upsilon(z) = \frac{-k\Omega_S^2 \sqrt{k^2 - \Omega_P^2}}{(2k^2 - \Omega_S^2)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - \Omega_S^2} \sqrt{k^2 - \Omega_P^2}} e^{ikx} = \frac{p(z)}{F(z)}$$

$$Res(-Y(z), -\Omega_R) = \frac{p(\Omega_R)}{F'(\Omega_R)} = \frac{\Omega_R \Omega_S^2 \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2}}{F'(-\Omega_R)} e^{-i\Omega_R x}$$

$$Res(Y(z), \Omega_R) = \frac{p(\Omega_R)}{F'(\Omega_R)} = \frac{\Omega_R \Omega_S^2 \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2}}{F'(\Omega_R)} e^{i\Omega_R x}$$

Como $F'(\Omega_R) = -F'(-\Omega_R)$

Entonces la siguiente expresión se puede escribir como,

$$\pi i [Res(-Y(z), -\Omega_R) + Res(Y(z), \Omega_R)] = \frac{\pi i \Omega_R \Omega_S^2 \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2}}{F'(\Omega_R)} [e^{i\Omega_R x} - e^{-i\Omega_R x}]$$

$$\pi i [Res(-Y(z), -\Omega_R) + Res(Y(z), \Omega_R)] = -\frac{2\pi \Omega_R \Omega_S^2 \sqrt{\Omega_R^2 - \Omega_P^2}}{F'(\Omega_R)} \operatorname{sen}(\Omega_R x)$$

ANEXO 4: SOBRE LAS FUNCIONES DE BESSEL¹

Expresiones integrales para las funciones de Bessel de orden 0:

$$J_0(kr) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(kr \cosh s) ds = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{ikr \cosh s} - e^{-ikr \cosh s}) ds$$

$$Y_0(kr) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kr \cosh s) ds = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{ikr \cosh s} + e^{-ikr \cosh s}) ds$$

$$H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr) = \frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} e^{ikr \cosh s} ds$$

$$H_0^{(2)}(kr) = J_0(kr) - iY_0(kr) = -\frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} e^{-ikr \cosh s} ds$$

Expresiones integrales para las funciones de Bessel de orden 1:

$$J_1(kr) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kr \cosh s) \cosh s ds = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{ikr \cosh s} + e^{-ikr \cosh s}) \cosh s ds$$

$$Y_1(kr) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(kr \cosh s) \cosh s ds = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{ikr \cosh s} - e^{-ikr \cosh s}) \cosh s ds$$

$$H_1^{(1)}(kr) = J_1(kr) + iY_1(kr) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{ikr \cosh s} \cosh s ds$$

$$H_1^{(2)}(kr) = J_1(kr) - iY_1(kr) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ikr \cosh s} \cosh s ds$$

Relaciones entre las funciones de Bessel y las de Hankel:

$$J_0(kr) = \frac{H_0^{(1)}}{2} + \frac{H_0^{(2)}}{2}$$

$$J_1(kr) = \frac{H_1^{(1)}}{2} + \frac{H_1^{(2)}}{2}$$

$$Y_0(kr) = -\frac{H_0^{(1)}}{2}i + \frac{H_0^{(2)}}{2}i$$

$$Y_1(kr) = -\frac{H_1^{(1)}}{2}i + \frac{H_1^{(2)}}{2}i$$

¹ Ver (Watson, 1922, pp. 175 - 180)

ANEXO 5: SOBRE LAS FUNCIONES DE CORRELACIÓN ESPECTRAL

En este anexo se analizará el caso de la correlación espectral entre dos procesos que son idénticos, pero desfasados en el tiempo. Este es el caso de las excitaciones sobre las ruedas de los vehículos, puesto que el perfil rugoso sobre el que circulan es el mismo, pero una detrás de otra, separadas un cierto tiempo Δt_{jk} .

$$\Delta t_{jk} = \frac{|x_j - x_k|}{V}$$

Esto significa que al analizar la excitación del suelo sobre cada rueda, se puede hablar de dos procesos aleatorios $X_j(t)$ y $X_k(t) = X_j(t - \Delta t_{jk})$, cuya función de correlación estará dada por:

$$R_{X_j X_k}(\tau) = E[X_j(t) X_k(t + \tau)] = E[X_j(t) X_j(t + (\tau - \Delta t_{jk}))]$$

Se ve que la función de correlación entre ambos procesos, es igual a la función de Autocorrelación [4.2] para una sola excitación, pero desfasada en el tiempo Δt_{jk} :

$$R_{X_j X_k}(\tau) = R_{X_j X_j}(\tau - \Delta t_{jk})$$

De esta igualdad se puede aplicar la transformada de Fourier a ambos miembros, para obtener las funciones de correlación de potencia espectral:

$$S_{X_j X_k}(\omega) = S_{X_j}(\omega) e^{-i\omega \Delta t_{jk}}$$

$$S_{X_j X_k}(\omega) = S_{X_k X_j}(\omega)^*$$

ANEXO 6: SOBRE LA VIGA INFINITA SOBRE SOLERA VISCOELÁSTICA

En este Anexo se deduce la solución de las deformaciones dinámicas de una viga infinita apoyada sobre una solera viscoelástica (del tipo Voigt), ante la acción de una carga armónica puntual. Se considera la teoría flexional de vigas bajo las hipótesis de Bernoulli-Navier. La ecuación de desplazamientos transversales tiene la siguiente forma:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k_v w + c_v \frac{\partial w}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \delta(x) e^{i\omega t} \quad [A6.1]$$

Donde A es la sección transversal de la viga, ρ es la densidad de masa de la viga, EJ es la rigidez flexional de la viga, k_v es la rigidez de la solera elástica y c_v es el coeficiente de amortiguamiento de la solera.

Considerando la solución en régimen permanente, se propone una solución del tipo $w(x, t) = W(x) e^{i\omega t}$. Reemplazando dicha solución en [A6.1] se obtiene:

$$W^{(IV)}(x) + \left(-a^2 \omega^2 + \frac{c_v}{EJ} i\omega + \frac{k_v}{EJ} \right) W(x) = \frac{P}{EJ} \delta(x) \quad [A6.2]$$

Se aplica la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación:

$$\left(\xi^4 + \frac{k_v}{EJ} + \frac{c_v}{EJ} i\omega - a^2 \omega^2 \right) \bar{W}(\xi) = \frac{P}{EJ}$$

Donde $a = \sqrt{\rho A / EJ}$. Entonces, se despeja que la Transformada de la solución está dada por:

$$\bar{W}(\xi) = \frac{P}{EJ} \frac{1}{\left(\xi^4 + \frac{k_v}{EJ} - a^2 \omega^2 + \frac{c_v}{EJ} i\omega \right)} \quad [A6.3]$$

Para valores razonables de los parámetros involucrados en las expresiones, se verifica que la parte real y la parte compleja de la constante del denominador, son positivas. Para obtener la solución en el dominio original de las x , se debe encontrar la Antitransformada de Fourier de una función del tipo,

$$\bar{W}(\xi) = \frac{P}{EJ} \frac{1}{\xi^4 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \beta \right)^4}$$

$$W(x) = \frac{P}{2\pi EJ} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\xi^4 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \beta \right)^4} d\xi$$

Donde $\beta = \sqrt[4]{\frac{k_v + i c_v \omega}{4EJ} - \frac{\rho A}{EJ} \omega^2}$ se definió de esta manera, por simplicidad en la solución final.

Para resolver dicha integral se extiende la función del integrando al dominio de las funciones complejas, y se elige un contorno adecuado que facilite la resolución de la expresión (Lo mismo que se hizo en el primer capítulo). En este caso la función compleja tiene 4 polos (z_1, z_2, z_3, z_4) que están dados por:

$$z_1 = (1+i)\beta \quad z_2 = (-1+i)\beta \quad z_3 = (-1-i)\beta \quad z_4 = (1-i)\beta$$

Donde β es un número complejo, definido en el párrafo anterior. En la figura siguiente se esquematiza la posición de los polos de la función y del contorno de integración.

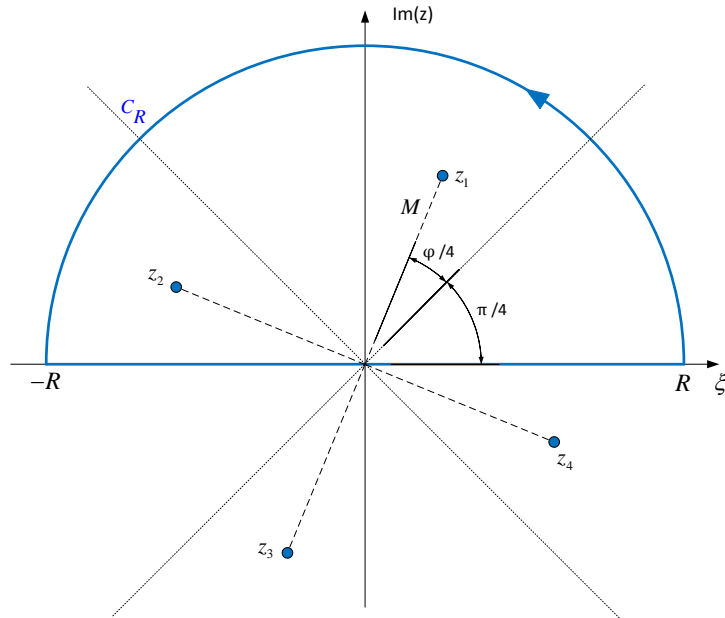


FIG. A0-11 - POLOS Y CONTORNO DE INTEGRACIÓN VIGA SOBRE SOLERA VISCOELÁSTICA

Integrando a lo largo del contorno de la Fig. A0-11, se puede obtener un valor para la integral utilizando el Teorema de los Residuos. La integral a lo largo del segmento semicircular del contorno se hará nula cuando el radio tiende a infinito. Por lo que el único aporte a la integral será por parte de los polos de la función, coincidentes con las raíces. Entonces, cuando $R \rightarrow \infty$, queda,

$$\oint_{C_R} \bar{W}(z) e^{izx} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = 2\pi i \left(\text{Res}_{z=z_1} \bar{W}(z) e^{izx} + \text{Res}_{z=z_2} \bar{W}(z) e^{izx} \right)$$

Los residuos en las raíces z_1 y z_2 están dados por (ver 0):

$$\text{Res}_{z=z_1} \bar{W}(z) e^{izx} = \frac{e^{iz_1 x}}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{P}{EJ} \frac{e^{i\beta x} e^{-\beta x}}{8\beta^3 (-1+i)}$$

$$\text{Res}_{z=z_2} \bar{W}(z) e^{izx} = \frac{e^{iz_2 x}}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} = \frac{P}{EJ} \frac{e^{-i\beta x} e^{-\beta x}}{8\beta^3 (1+i)}$$

Entonces, la Antitransformada de la solución, está dada por,

$$W(x) = i \left(\text{Res}_{z=z_1} \bar{W}(z) e^{izx} + \text{Res}_{z=z_2} \bar{W}(z) e^{izx} \right)$$

Reemplazando por las expresiones obtenidas para los residuos, se puede escribir que,

$$W(x, \omega) = \frac{P e^{-\beta|x|}}{8EJ\beta^3} [\cos(\beta|x|) + \sin(\beta|x|)]$$

Entonces la expresión final para la ecuación [A6.1] es,

$$w(x,t) = \frac{e^{-\beta|x|}}{8EJ\beta^3} [\cos(\beta|x|) + \sin(\beta|x|)] P e^{i\omega t} \quad [A6.4]$$

ANEXO 7: SOBRE LA ATENUACIÓN DE LAS ONDAS

En este anexo se analizan algunos criterios que se tienen en cuenta al momento de determinar un coeficiente de amortiguamiento para el modelo teórico de las vibraciones. Este es el coeficiente asociado al modelo viscoelástico propuesto en los capítulos anteriores.

En todos los casos, se propuso para el suelo, un modelo del tipo Voigt con amortiguamiento histerético. Si bien es razonable pensar que hay energía disipada en forma de calor en los ciclos de carga y descarga del suelo, es un error asumir que el coeficiente de amortiguamiento responde únicamente a estas propiedades intrínsecas del material. Es decir, en nuestro modelo, el coeficiente sirve para representar numerosos factores que inciden en la propagación de ondas superficiales en el terreno, y que no se deben solo a efectos disipativos propios del material. Estos efectos dependen mucho del fenómeno a medir, pero tienen características similares en todos los casos. Algunos de estos factores fueron mencionados en el inciso 3.2, como la falta de homogeneidad del suelo, o la anisotropía del mismo. La estratificación del suelo, por ejemplo, puede generar un amortiguamiento adicional en las ondas superficiales, al de un material completamente homogéneo. Lo mismo resulta para irregularidades en el trayecto de propagación, como ser zanjas, terraplenes, objetos, siempre que las dimensiones de estos sean bastante menores que las longitudes de onda de las vibraciones. Aplicado al caso del tráfico vehicular, se puede ver en (Hao & Ang, 1998) que el modelo de disipación de energía debe tomar en cuenta diversos factores además del propio comportamiento disipativo del suelo, como ser, la pérdida de energía debida a la capa de asfalto sobre la que se desplazan los vehículos, y la sobrestimación de vibraciones debido a la consideración de la “estacionalidad” de las cargas.

Esto lleva a pensar en la utilización de distintos coeficientes de amortiguamiento para distintos fenómenos, incluso tratándose del mismo suelo. En principio, esto no traería problemas en la implementación de los modelos mecánicos (sea de Voigt o Maxwell), ya que solo implicaría una calibración de dicho coeficiente en términos de las magnitudes medidas. Los coeficientes de amortiguamiento utilizados en los modelos teóricos del inciso 5.2, fueron calibrados a partir de las mediciones hechas, para ajustar el modelo teórico al experimental, y de donde se dedujeron los conceptos de los párrafos anteriores. De todas maneras, se utilizaron los mismos coeficientes para la componente horizontal y vertical de las vibraciones.

El caso del salto coordinado de personas ajusta mucho mejor a las hipótesis del modelo teórico (lejanía de la acción, fuente puntual y estacionaria, periódica), por lo que se utiliza un coeficiente de amortiguamiento único, mucho menor que para las otras acciones. Es decir, un comportamiento prácticamente elástico. En este caso, el coeficiente puede ser calibrado dentro de la teoría propuesta en los primeros dos capítulos del trabajo, que predice una atenuación de las ondas aproximada según,

$$\Delta = \frac{RMS_2}{RMS_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta r}{r_1}}} e^{-\xi(\omega, \mu)\Delta r} \quad [A7.1]$$

Donde A es la amplitud de la onda, ξ es el factor de amortiguamiento de las ondas de Rayleigh, y μ el coeficiente de amortiguamiento a calibrar.

BIBLIOGRAFÍA

- Ablowitz, J. M., & Fokas, S. A. (2003). *Complex variables, Introduction and applications*. New York: Cambridge University Press.
- Achenbach, J. D. (1973). *Wave propagation in elastic solids*. New York: Elsevier.
- Auersch, L. (2008). Theoretical and experimental excitation force spectra for railway induced ground vibration: vehicle-track-soil interaction, irregularities and soil measurements. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 48(2), 925-936.
- Bertero, R. D. (2010). Modelo teórico de las vibraciones inducidas por el público en el campo de un recital de rock en el estadio de River. *Facultad de Ingeniería, UBA (en prensa)*.
- Borcherdt, R. D. (2009). *Viscoelastic waves in layered media*. New York: Cambridge University Press.
- Cai, Y., Cao, Z., Sun, H., & Xu, C. (2010). Effects of the dynamic wheel-rail interaction on the ground vibration generated by a moving train. *International Journal of Solids and Structures*, 47, 2246-2259.
- Christensen, R. M. (1982). *Theory of viscoelasticity*. New York: Cambridge University Press.
- Churchill, R. V., & Brown, J. W. (1992). *Variable compleja y aplicaciones*. Madrid: McGraw-Hill.
- Clough, R. W., & Penzien, J. (2003). *Dynamics of Structures*. Berkeley: Computers & Structures, Inc.
- Cornejo Córdova, C. (2002). *Elastodynamics with hysteretic damping*. Delft: DUP Science.
- Ewing, M. W., Jardetzky, S. W., & Press, F. (1957). *Elastic waves in layered media*. New York: McGraw-Hill.
- Fung, Y. C. (1965). *Foundations of solid mechanics*. London: Prentice Hall.
- Gazetas, G. (1983). Analysis of machine foundation vibrations: state of the art. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2(1).
- Graff, K. F. (1975). *Wave motion in elastic solids*. London: Oxford University Press.
- Hao, H., & Ang, T. C. (1998). Analytical modeling of traffic-induced ground vibrations. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(8), 921-928.
- Hudson, J. A. (1980). *The excitation and propagation of elastic waves*. New York: Cambridge University Press.
- Hunt, H. E. (1991). Modelling of road vehicles for calculation of traffic-induced ground vibration as a random process. *Journal of Sound and Vibration*, 144, 41-51.
- Hunt, H. E. (1991). Stochastic modelling of traffic-induced ground vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 144(1), 53-70.
- Hussein, M. F. (2010). Modelling vibration from surface and underground railways as an evolutionary random process. *Proceedings of the International Conference on Computing in Civil and Building Engineering*. Nottingham: Nottingham University Press.
- Inaudi, J. A., & Kelly, J. M. (1995). Linear hysteretic damping and the Hilbert transform. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(5), 626-632.

- Ju, S. H., Liao, J. R., & L., Y. Y. (2009). Behaviour of ground vibrations induced by trains moving on embankments with rail roughness. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 30, 1237-1249.
- Krylov, V. (1994). Generation of ground vibrations by superfast trains. *Applied Acoustics*, 44, 149-164.
- Krylov, V., & Ferguson, C. (1993). Calculation of Low-Frequency ground vibrations from railway trains. *Applied Acoustics*, 42, 199-213.
- Lamb, H. (1904). On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 203, 1-42.
- Lombaert, G., & Degrande, G. (2007). Ground borne vibration due to static and dynamic axle loads of Inter-city and high-speed trains. *Journal of Sound and Vibration*, 319, 1036-1066.
- Luque, P., Alvarez, D., & Vera, C. (2008). *Ingeniería del automóvil: Sistemas y comportamiento dinámico*. Madrid: Thomson.
- Lutes, L. D., & Sarkani, S. (2004). *Random vibrations: Analysis of structural and mechanical systems*. Oxford: Elsevier.
- Markushevich, A. (1970). *Teoría de las funciones analíticas*. Moscú: MIR.
- Miller, G. F., & Pursey, H. (1954). The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid. *Proc. R. Soc.*, A223(1155), 521-541.
- Miller, G. F., & Pursey, H. (1955). On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid. *Proc. R. Soc.*, A223, 55-69.
- Newland, D. E. (1993). *An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis*. Harlow: Longman Scientific & Technical.
- Parkhouse, J. G., & Ewins, D. J. (2006). Crowd-induced rhythmic loading. *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 159((SB5)), 247-259.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., T., V. W., & P., F. B. (1988). *Numerical Recipes - The art of scientific computing*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Priestley, M. B. (1981). *Spectral analysis and time series* (Vol. I). London: Academic Press.
- Salvador, P., Real, J., Zamorano, C., & Villanueva, A. (2010). A procedure for the evaluation of vibrations induced by the passing of a train and its application to real railway traffic. *Mathematical and Computer Modelling*, 53, 42-54.
- Santamarina, J. C. (2001). *Soils and Waves*. Chichester: Wiley.
- Shanmugan, K. S., & Breipohl, A. M. (1988). *Random signals: Detection, estimation and data analysis*. John Wiley & Sons.
- Sheng, X., Jones, C. J., & Petyt, M. (1999). Ground vibration generated by a load moving along a railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 228(1), 129-156.
- Sheng, X., Jones, C., & Thompson, D. (2003). A theoretical model for ground vibration from trains generated by vertical track irregularities. *Journal of Sound and Vibration*, 272, 937-965.
- Shin, H., & Hammond, J. K. (2008). *Fundamentals of signal processing*. Chichester: John Wiley & Sons.

- Sim, J., Blakeborough, A., Williams, M. S., & Parkhouse, G. (2008). Statistical model of Corwd jumping loads. *Journal of structural engineering, ASCE*, 134(12), 1852-1861.
- Solnes, J. (1997). *Stochastic processes and random vibrations*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Sommerfeld, A. (1949). *Partial differential equations in physics*. New York: Academic Press.
- Tyan, F., & Hong, Y.-F. (2007). Generation of Random Road Profiles. *CSME*, 1373-1378.
- Verruijt, A. (2009). *Soil dynamics*. Delft: Delft University of Technology.
- Watson, G. N. (1922). *A treatise on the theory of Bessel functions*. New York: Cambridge University Press.
- Xia, H., Cao, Y. M., & De Roeck, G. (2009). Theoretical modelling and characteristic analysis of moving-train induced ground vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 329, 819-832.
- XU, Y. L., & Hong, X. J. (2007). Stochastic modelling of traffic-induced building vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 313, 149-170.
- Yang Fang, H. (2002). *Foundation engineering handbook*. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.
- Yokota, K., & Masashi, K. (1980). Dynamic Poisson's ratio of soil. *World conference on earthquake engineering*, 3, pp. 475-478.