

Capacidad de carga



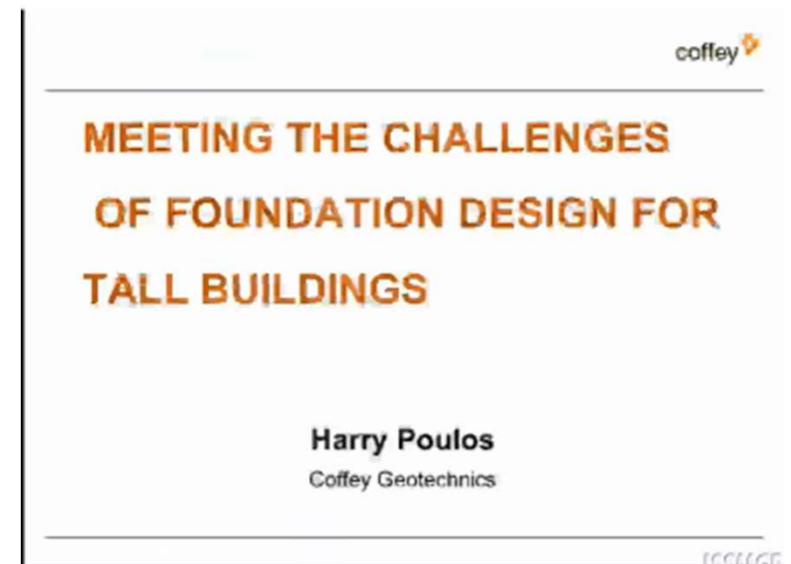
Mecánica de Suelos y Geología
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Índice



virtualuniversity.issmge.org

- Carga última de una fundación superficial
- Aplicación de estados límite
- Fórmula de Terzaghi
- Fórmula de Brinch-Hansen
- Fórmula de Vesic

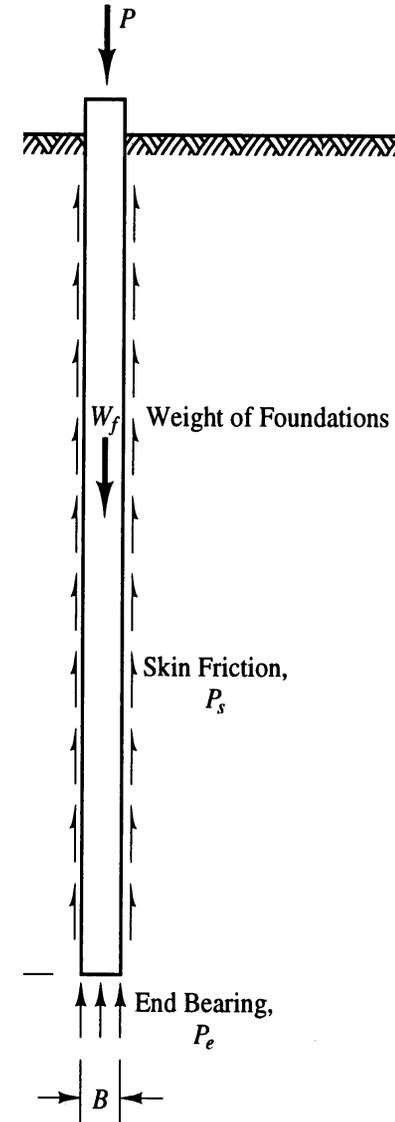
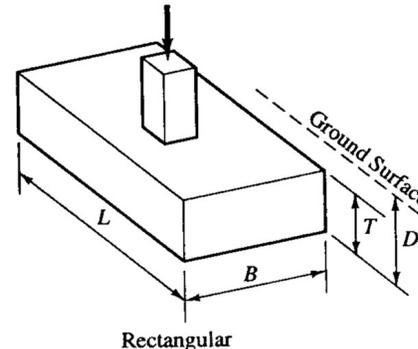
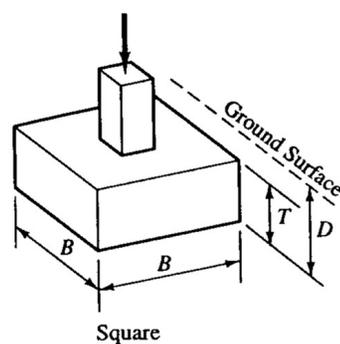


Carga última de una fundación



Carga que produce el **hundimiento permanente** de la fundación en el terreno

- El hundimiento debe estar asociado a una superficie en la que el terreno falla por corte
- Excluye los hundimientos por compresión elastoplástica del terreno (p.e. consolidación)
- La presión de falla depende del tamaño de la fundación: no existe una “presión última” sino una “carga última”



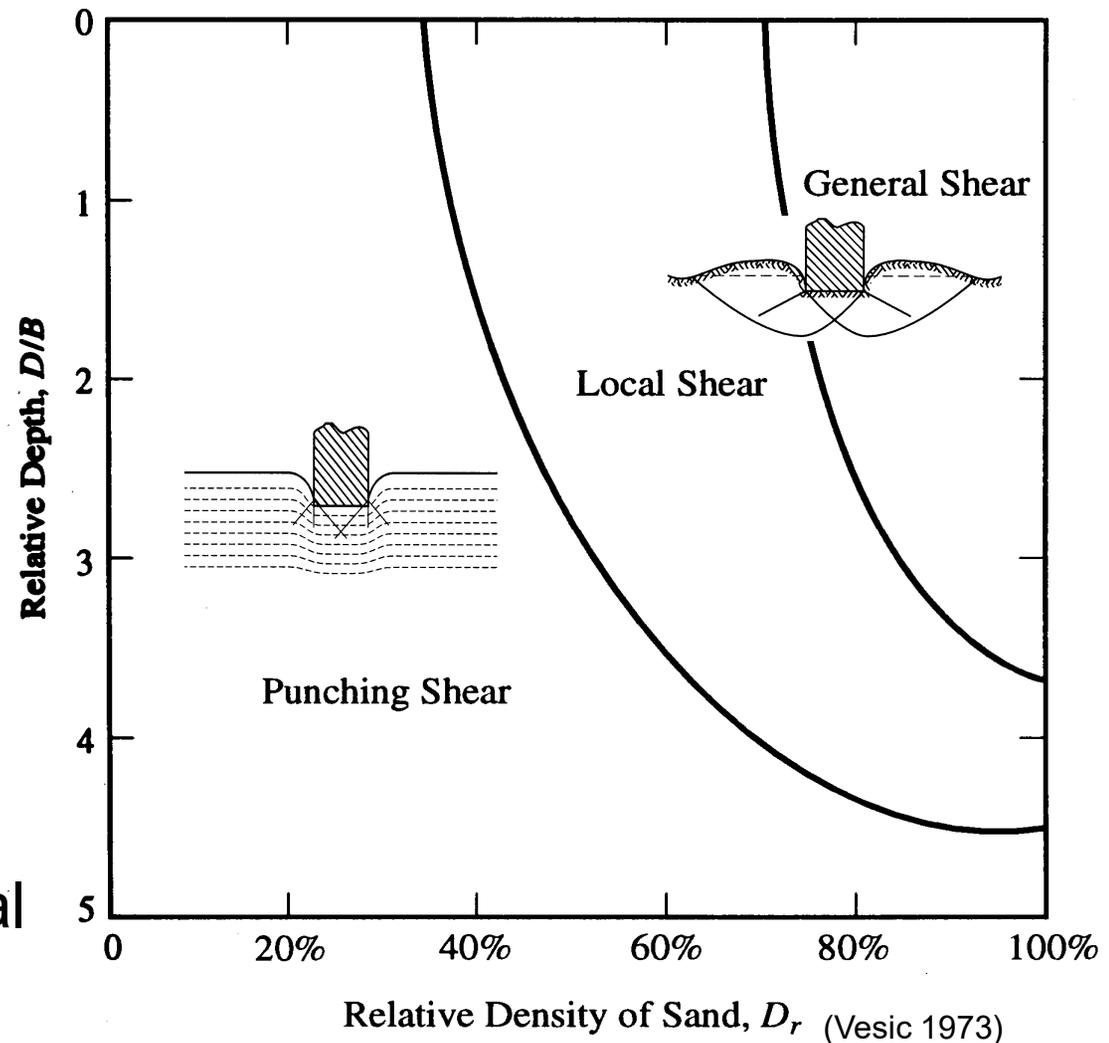
Mecanismos de falla



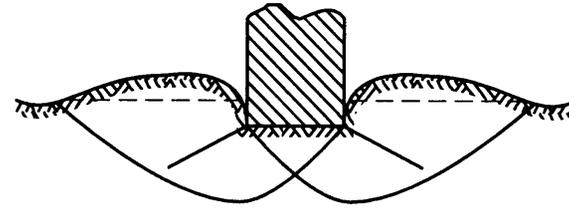
Suelo muy denso: falla por corte con dilatancia

Suelo medianamente denso: falla por corte combinada con compresión

Suelo suelto: la reducción de volumen producida por el corte impide el desarrollo de una superficie de falla general

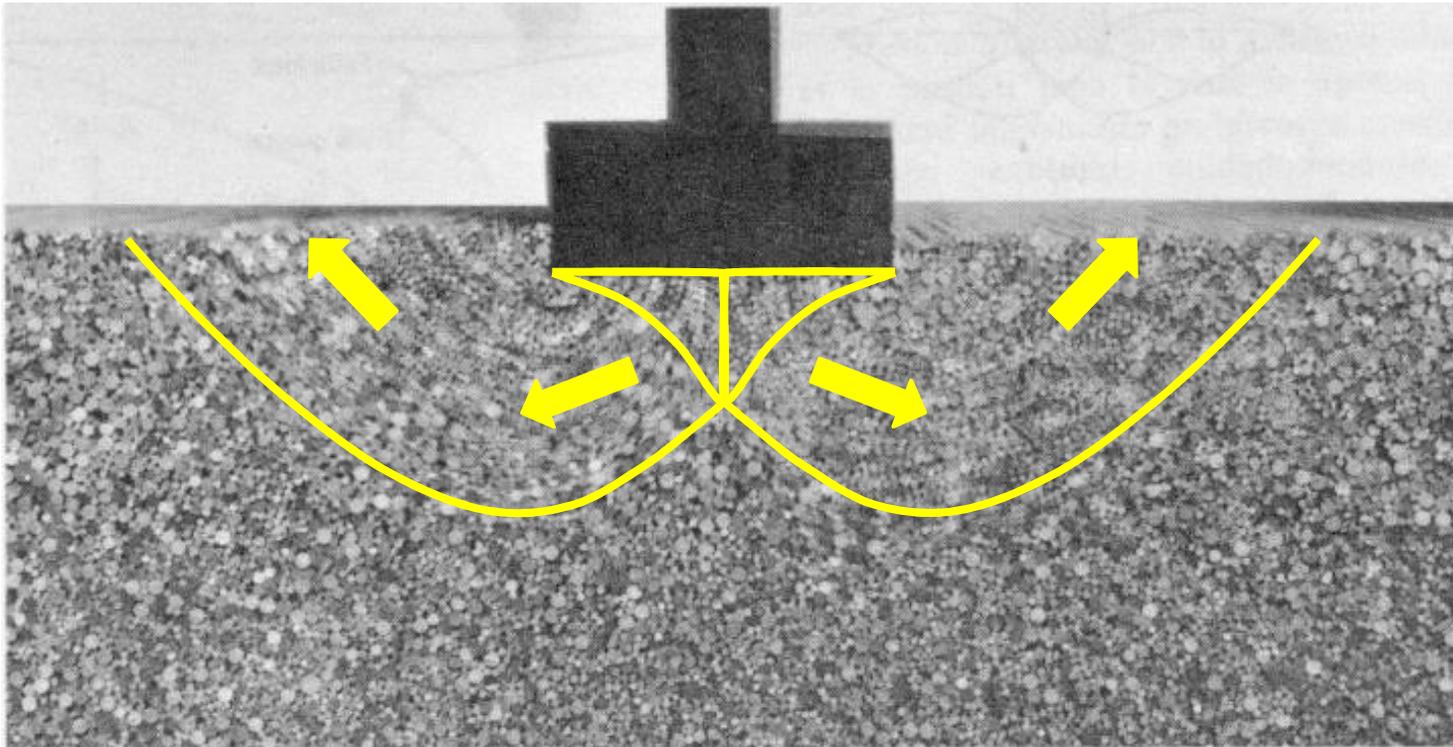


Mecanismo de falla de suelo muy denso

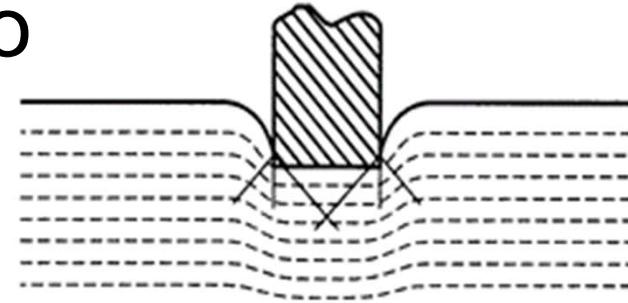


Masa de suelo dilata durante la deformación

- Fórmula de Brinch-Hansen



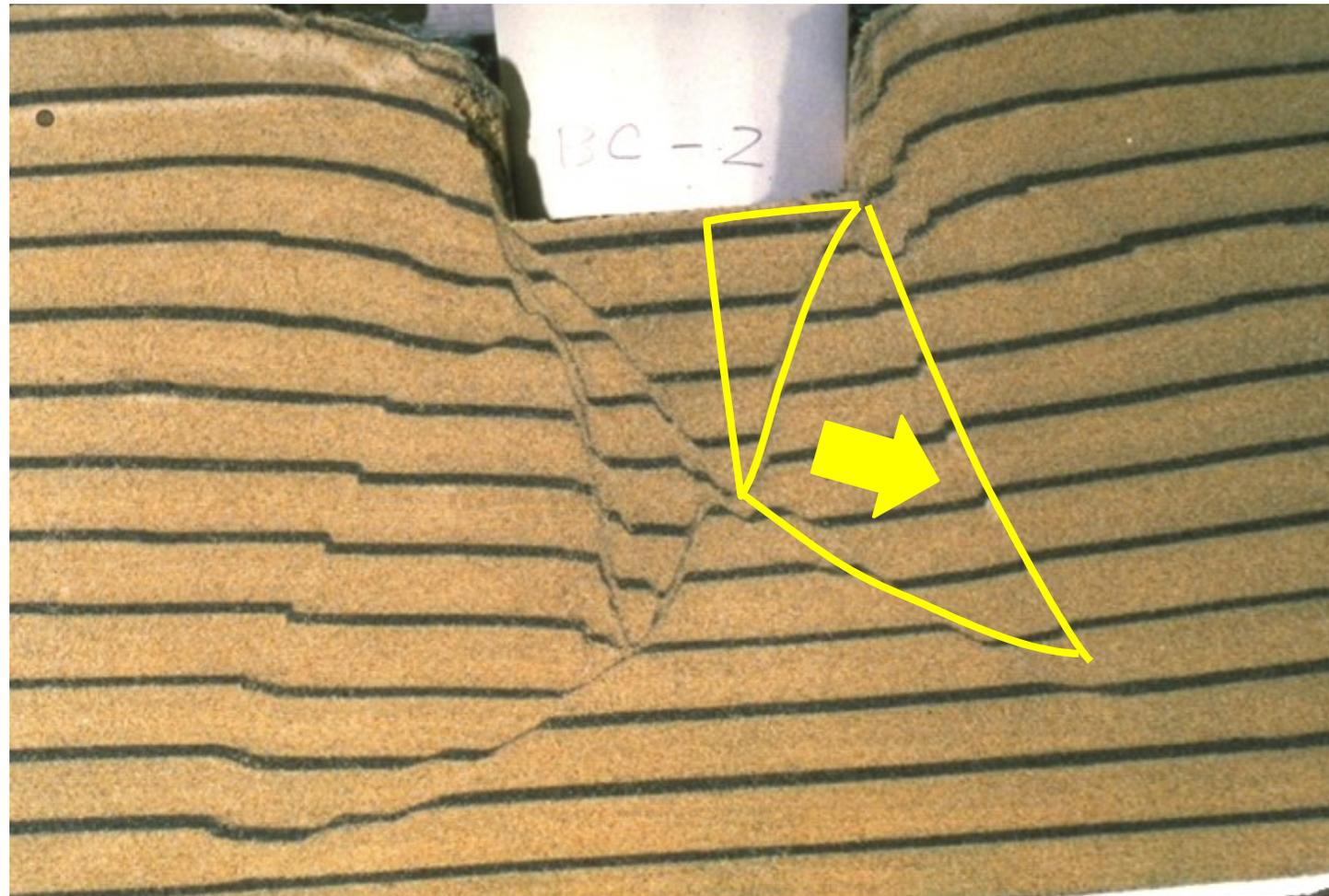
Mecanismo de falla de suelo suelto o fundación profunda



La reducción de volumen del suelo impide que se desarrolle un mecanismo plástico perfecto

- Fórmula de Vesic

(Tatsuoka 2003)

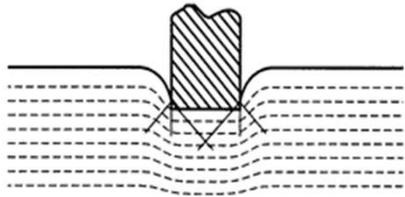


Mecanismo de falla de suelo medianamente denso



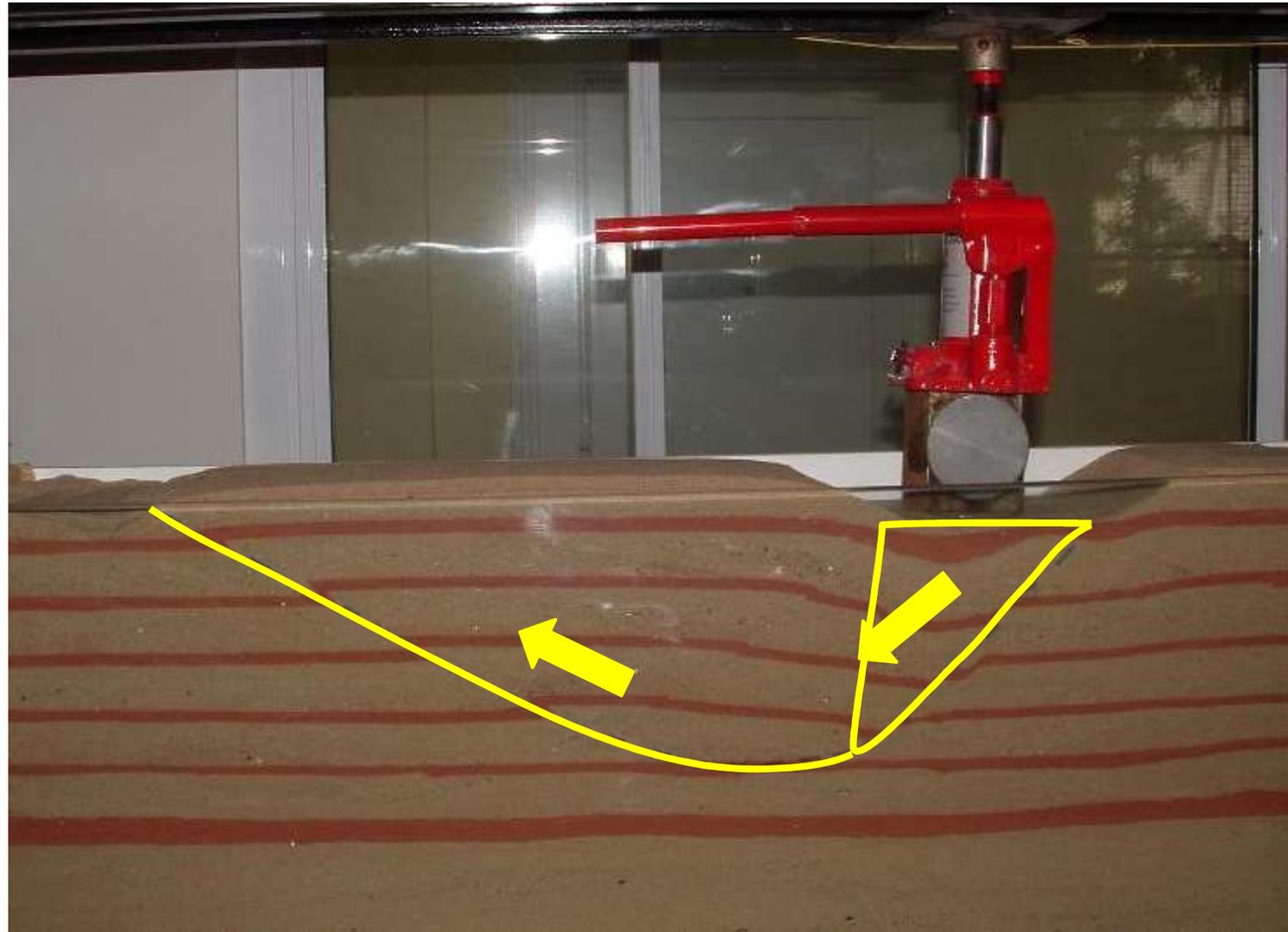
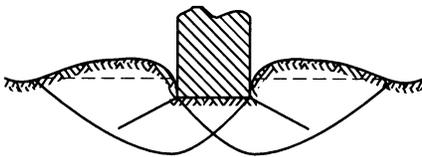
(Leoni 2010)

Primero:



Luego alcanza el estado crítico

Por último:



Índice



- Carga última de una fundación superficial
- **Aplicación de estados límite**
- Fórmula de Terzaghi
- Fórmula de Brinch-Hansen
- Fórmula de Vesic

Capacidad de carga de una zapata en arcilla



Ecuaciones de trabajo (despl. unitario)

(* (a)-(c) *)

```
work1 := Integrate[su[y], {x, y} ∈ Line[18], Assumptions → B > 0];
```

(* (c)-(d), círculo *)

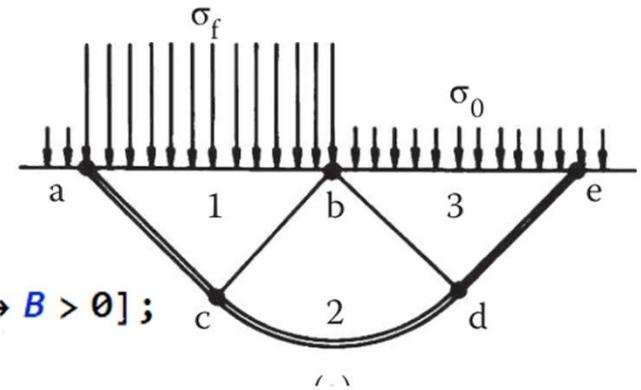
```
work2 := Integrate[su[y], {x, y} ∈ arc, Assumptions → B > 0];
```

(* (c)-(b)-(c+dc) radios en el abanico, integral de linea *)

```
work3 := Integrate[su[ξ y], {ξ, 0, 1}, {x, y} ∈ arc, Assumptions → B > 0];
```

(* (d)-(e) *)

```
work4 := Integrate[su[y], {x, y} ∈ Line[15], Assumptions → B > 0];
```



Balance de trabajo

- Cuando la base baja δ las líneas se desplazan

$$(\sigma_f - \sigma_0) \cdot \delta \cdot B = (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \frac{\delta}{\cos[45^\circ]}$$

Capacidad de carga de una zapata en arcilla



Resistencia al corte constante s_u

```
su[y_] := su
```

```
Print[{work1, work2, work3, work4}]
```

```
Solve[σf * B == (work1 + work2 + work3 + work4) / Cos[π / 4], σf] // FullSimplify
```

```
{ $\frac{B su}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{B \pi su}{2 \sqrt{2}}$ ,  $\frac{B \pi su}{2 \sqrt{2}}$ ,  $\frac{B su}{\sqrt{2}}$ }
```

```
{{σf → (2 + π) su}}
```

$$\sigma_f = N_c s_u = (2 + \pi) s_u + \sigma_0$$

Resistencia al corte $s_u = \alpha + \beta \cdot |y|$

```
su[y_] := α - β * y
```

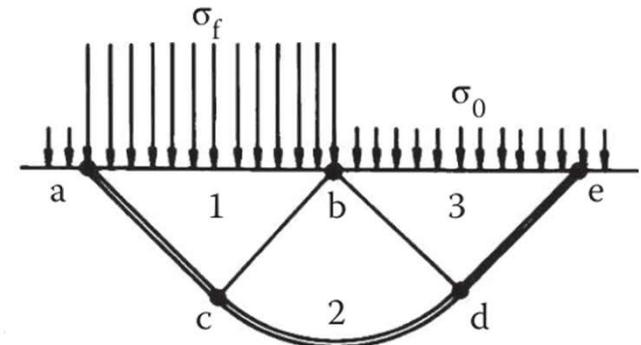
```
Print[{work1, work2, work3, work4}]
```

```
Solve[σf * B == (work1 + work2 + work3 + work4) / Cos[π / 4], σf] // FullSimplify
```

```
{ $\frac{4 B \alpha + B^2 \beta}{4 \sqrt{2}}$ ,  $\frac{B (\pi \alpha + 2 B \beta)}{2 \sqrt{2}}$ ,  $\frac{B \pi \alpha}{2 \sqrt{2}} + \frac{B^2 \beta}{2 \sqrt{2}}$ ,  $\frac{4 B \alpha + B^2 \beta}{4 \sqrt{2}}$ }
```

```
{{σf → (2 + π) α + 2 B β}}
```

$$s_u = \alpha + b \cdot y \rightarrow \sigma_f = (2 + \pi) \alpha + 2 \cdot B \cdot \beta + \sigma_0$$



¿Para qué saber cómo se calculan estos términos?: el “*know-why*” vs el “*know-how*”



Costra de espesor $B/2$ con resistencia s_c y resistencia $s_u = \alpha + \beta \cdot |y|$ más abajo

```
su[y_] := Piecewise[{{sc, y > -B/2}, {alpha - beta * y, y <= -B/2}}
```

```
Print[{work1, work2, work3, work4}]
```

```
Solve[sigma_f * B == (work1 + work2 + work3 + work4) / Cos[pi/4], sigma_f] // FullSimplify
```

$$\left\{ \frac{B s_c}{\sqrt{2}}, \frac{B (\pi \alpha + 2 B \beta)}{2 \sqrt{2}}, \frac{1}{8} (2 \sqrt{2} B \pi \alpha + 2 \sqrt{2} B^2 \beta + 2 B \alpha \text{Log}[17 - 12 \sqrt{2}] - 4 B s_c \text{Log}[3 - 2 \sqrt{2}] + B^2 \beta \text{Log}[3 - 2 \sqrt{2}]), \frac{B s_c}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \sigma_f \rightarrow \frac{1}{8} (8 \pi \alpha + 2 \sqrt{2} \alpha \text{Log}[17 - 12 \sqrt{2}] - 4 s_c (-4 + \sqrt{2} \text{Log}[3 - 2 \sqrt{2}]) + B \beta (12 + \sqrt{2} \text{Log}[3 - 2 \sqrt{2}])) \right\} \right\}$$

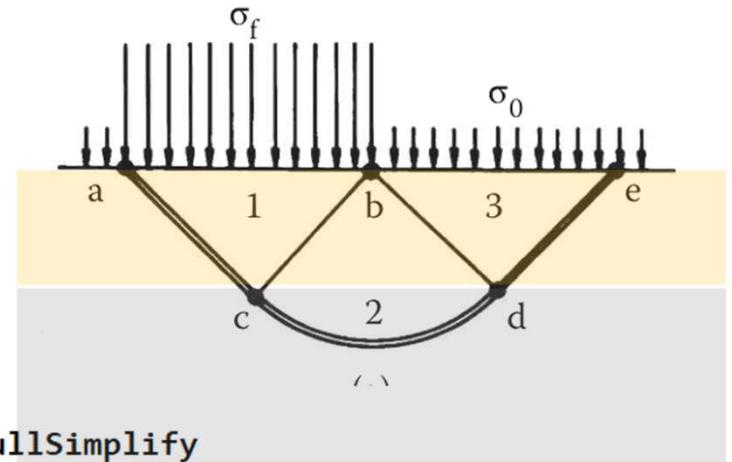
Con números reales...

```
su[y_] := Piecewise[{{sc, y > -B/2.}, {alpha - beta * y, y <= -B/2.}}
```

```
Print[{work1, work2, work3, work4}]
```

```
Solve[sigma_f * B == (work1 + work2 + work3 + work4) / Cos[pi/4], sigma_f] // FullSimplify
```

```
{{sigma_f -> 3.24645 sc + 1.89514 alpha + 1.18839 B beta}}|
```



Efecto del ángulo de fricción interna: el término N_q

$$\sigma_f = N_q \cdot \sigma'_0 + \dots$$

Se aumenta el número de saltos hasta que se converge a un resultado

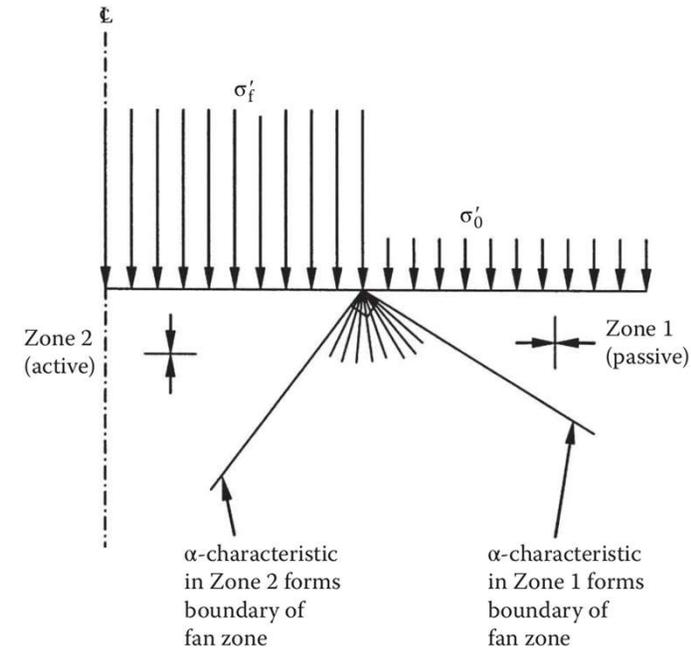


Table 10.1 Improvement in calculated bearing capacity factor N_q with increasing number of stress discontinuities; effective stress analysis for a soil with $\phi' = 30^\circ$, Example 10.1

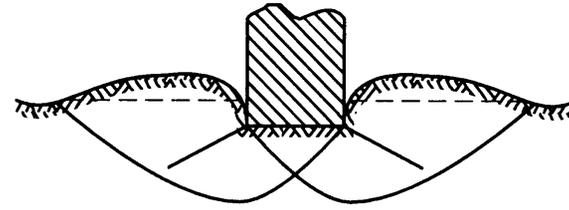
Number of discontinuities (n)	Rotation in direction of major principal stress θ across each discontinuity (degrees)	$\Delta = (90^\circ - \theta)$ (degrees)	Strength of discontinuity $\delta = \sin^{-1}(\sin \Delta \cdot \sin \phi')$ (degrees)	$R = \frac{\cos(\delta - \theta)}{\cos(\delta + \theta)}$	$N_q = K_p \cdot R^n$
1	90	0	0	(3) ^a	9
2	45	45	20.7	2.215	14.72
3	30	60	25.7	1.769	16.62
6	15	75	28.9	1.347	17.93
9	10	80	210.5	1.222	18.23
18	5	85	210.9	1.106	18.38
45	2	88	210.98	1.041	18.39
90	1	89	210.99	1.020	18.39

Índice



- Carga última de una fundación superficial
- Aplicación de estados límite
- **Fórmula de Terzaghi**
- Fórmula de Brinch-Hansen
- Fórmula de Vesic

Fórmula de Terzaghi

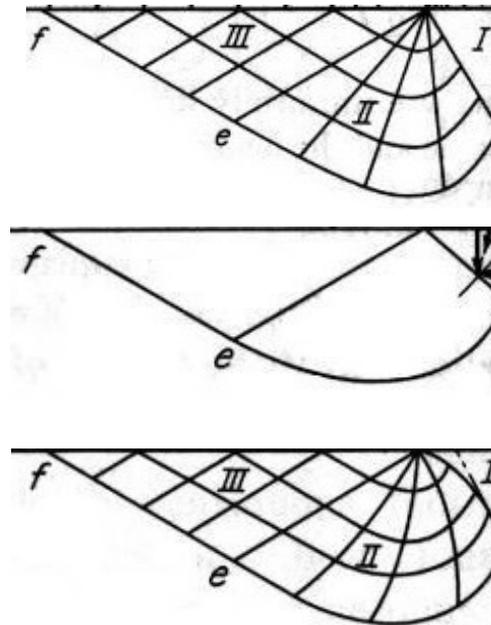
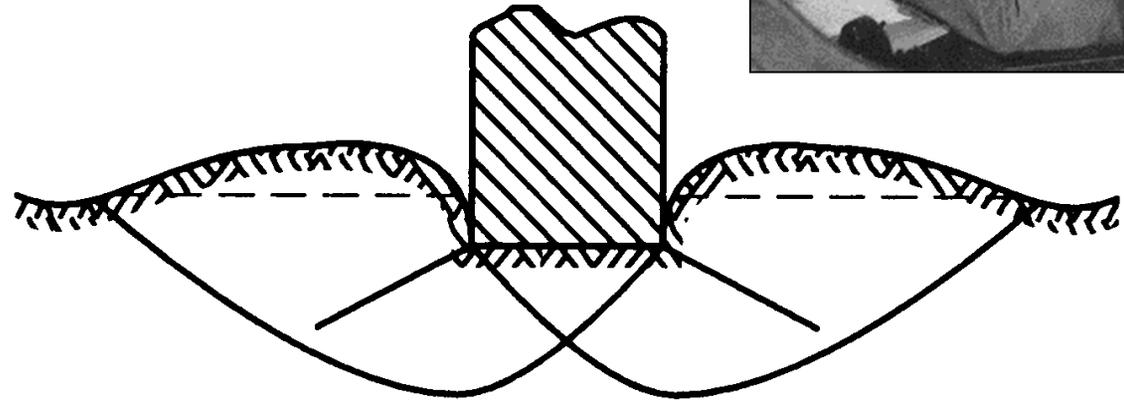


- Prandtl desarrolló una fórmula para el ensayo de dureza de aceros, basada en plasticidad clásica
- Terzaghi la aplicó de manera directa a arcillas no drenadas ($\phi = 0$ como el acero)
- Comprendió que no podría extender esa solución a materiales friccionales (no hay integral exacta)
- Postuló entonces que **La carga última es la suma de la contribución de tres mecanismos de falla diferentes (¡e incompatibles entre sí!)**

Fórmula de Terzaghi



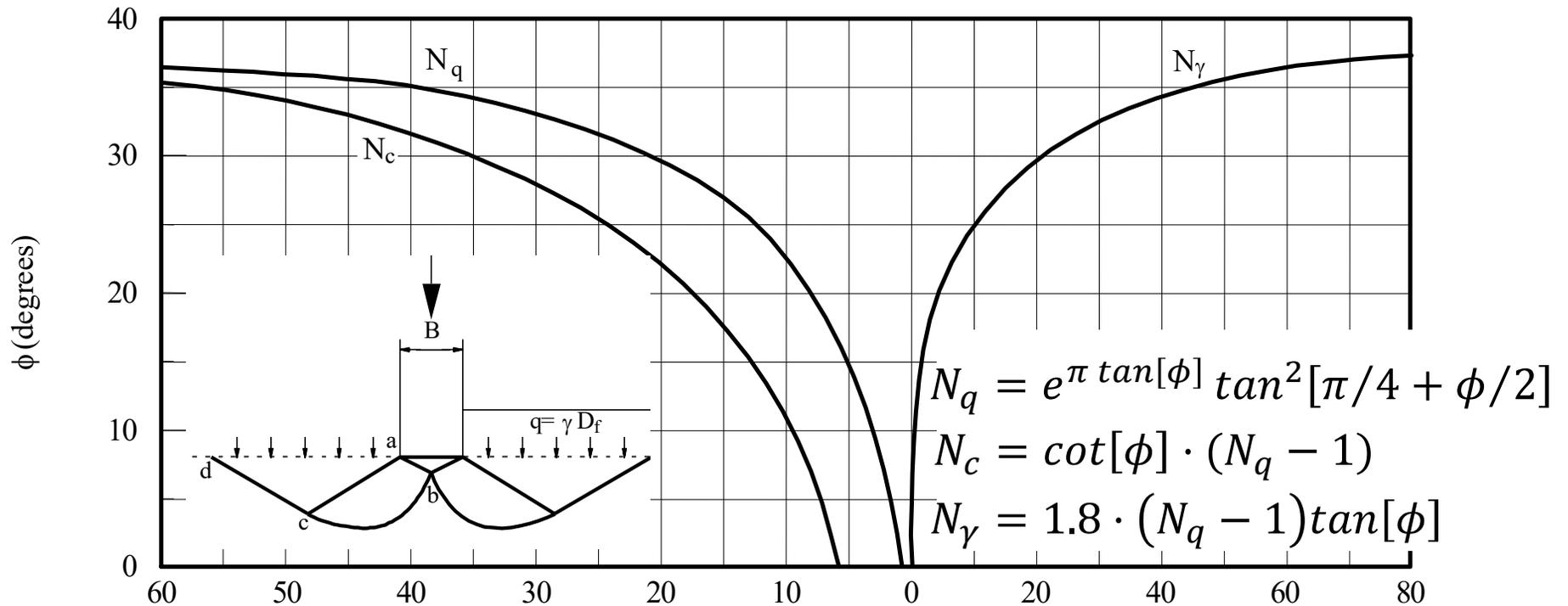
- Elementos:
 - Cohesión c
 - Fricción ϕ
 - Sobrecarga q
 - Peso propio γ
- Mecanismos
 - c y ϕ (únicamente)
 - q y ϕ (únicamente)
 - γ y ϕ (únicamente)



Fórmula de Terzaghi

$$N_c = \cot[\phi] \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right)^2$$

$$q_f = c N_c[\phi] + \sigma'_0 N_q[\phi] + \frac{1}{2} B \gamma N_\gamma[\phi]$$





Ejercicio: Carga última con la fórmula de Terzaghi

Zapata infinita:

$$d = 1m$$

$$B = 2m$$

- $\gamma = 20kN/m^3$

$$\phi = 35^\circ$$

$$c = 0kN/m^2$$

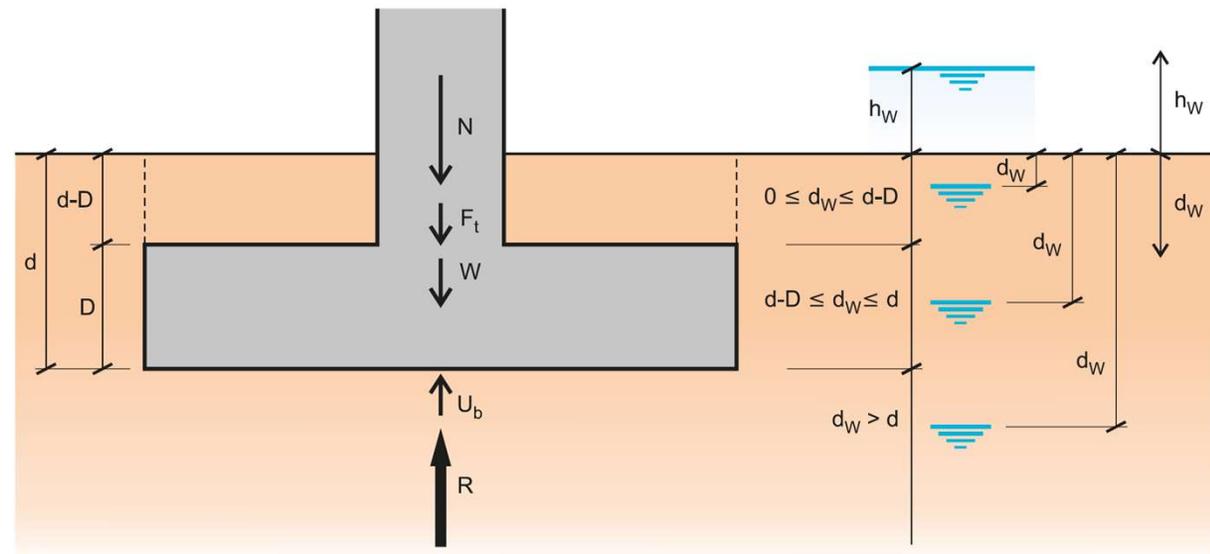
- $\gamma = 20kN/m^3$

$$\phi = 0^\circ$$

$$c = 50kN/m^2$$

Napa fretática

- No hay
- A 1m de profundidad
- En la superficie



(Epaña – Guía EC7)

Soluciones aproximadas



Base circular: $q_{ult} = 1.2 \cdot c \cdot N_c + \sigma'_0 \cdot N_q + 0.6 \cdot r \cdot \gamma \cdot N_\gamma$

Base cuadrada: $q_{ult} = 1.2 \cdot c \cdot N_c + \sigma'_0 \cdot N_q + 0.4 \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma$

Base rectangular:
arcilla no drenada $q_{ult} = 5.14 \left(1 + 0.2 \frac{B}{L}\right) \left(1 + 0.2 \frac{d}{B}\right) \cdot s_u + \sigma'_0$

Índice



- Carga última de una fundación superficial
- Aplicación de estados límite
- Fórmula de Terzaghi
- **Fórmula de Brinch-Hansen**
- Fórmula de Vesic

Fórmula de Brinch-Hansen extendida



Incorpora factores de forma (s : shape), de profundidad (d : depth), de inclinación de la carga (i : inclination), de inclinación de la base (b : base) y de inclinación del terreno (g : ground)

$$q_f = \min[q_{fL}, q_{fB}]$$

- $q_{fB} = \frac{1}{2} \gamma B' N_\gamma s_{\gamma B} d_{\gamma B} i_{\gamma B} b_{\gamma B} g_{\gamma B} + \sigma'_0 N_q s_{qB} d_{qB} i_{qB} b_{qB} g_{qB} + c N_c s_{cB} d_{cB} i_{cB} b_{cB} g_{cB}$
- $q_{fL} = \frac{1}{2} \gamma L' N_\gamma s_{\gamma L} d_{\gamma L} i_{\gamma L} b_{\gamma L} g_{\gamma L} + \sigma'_0 N_q s_{qL} d_{qL} i_{qL} b_{qL} g_{qL} + c N_c s_{cL} d_{cL} i_{cL} b_{cL} g_{cL}$

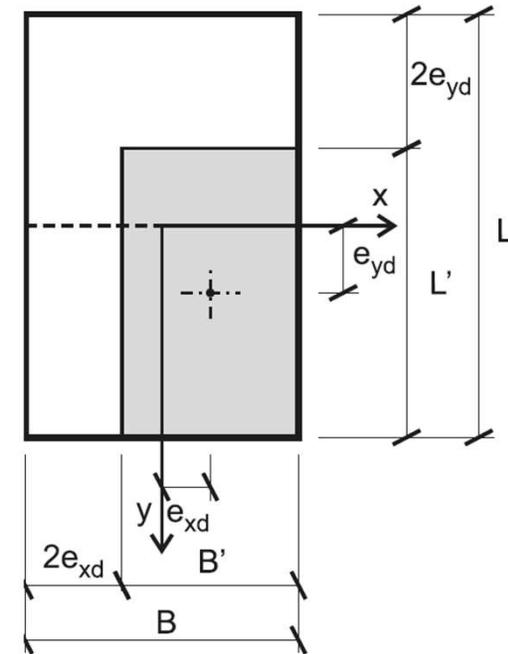
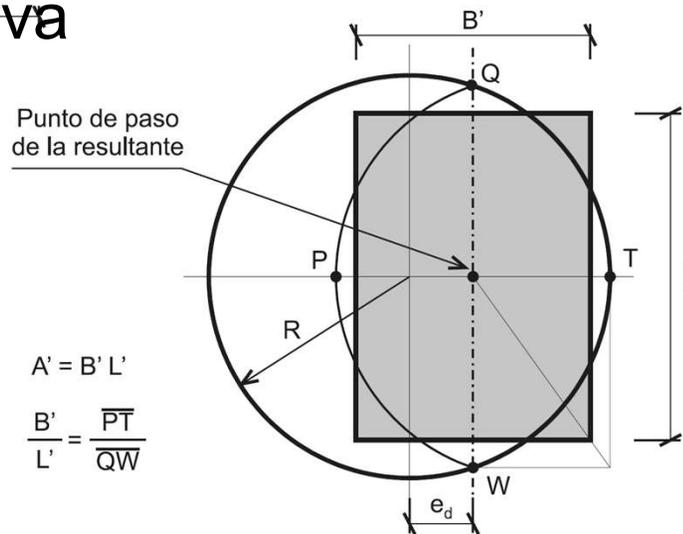
Cambia el término N_γ

- $N_c = \cot[\phi] \cdot (N_q - 1) \mid N_q = e^{\pi \tan[\phi]} \tan^2[\pi/4 + \phi/2]$
- $N_\gamma = 1.5 \cdot (N_q - 1) \tan[\phi]$

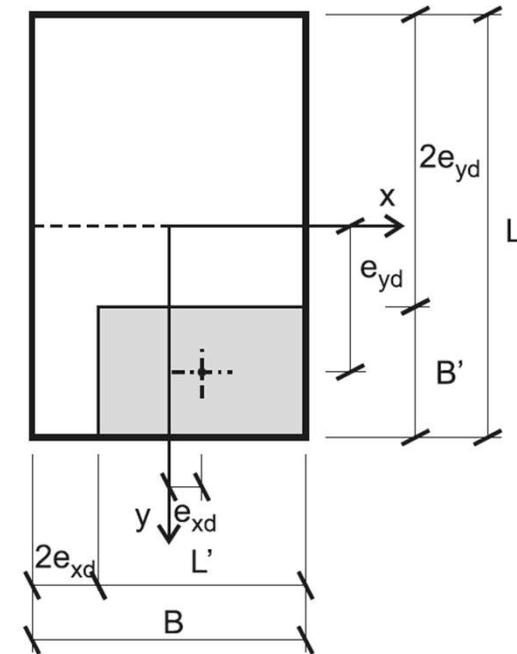
Geometría: ancho y longitud efectiva y equivalente

Área efectiva: área rectangular donde la carga excéntrica queda centrada

- $A' = B' \cdot L'$
- B' : ancho efectivo
- $L' \geq B'$: longitud efectiva
- $B' = B$ y $L' = L$ si la base es rectangular con carga centrada



(España – Guía EC7)

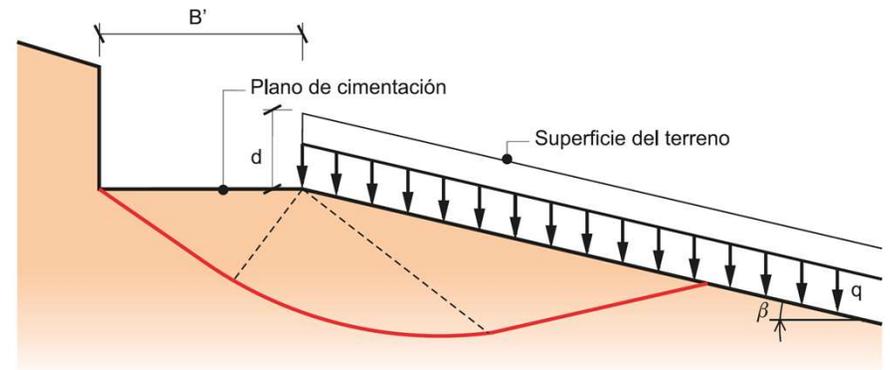
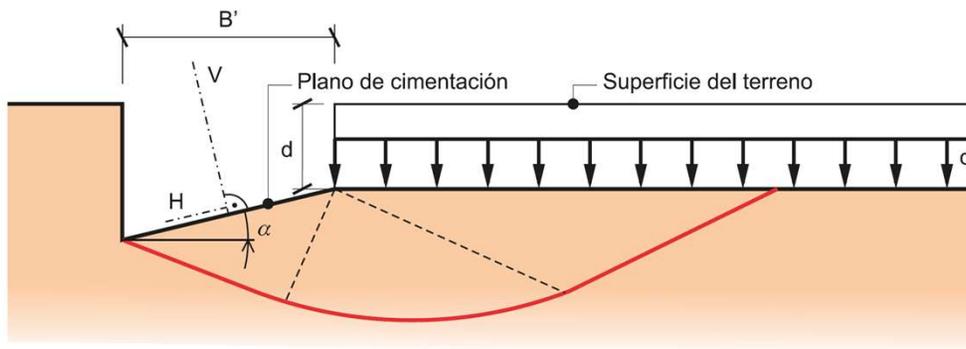


Fórmula de Brinch-Hansen extendida



Notación

- d : profundidad de fundación mínima en el perímetro de la base
- H_B, H_L : carga paralela al plano de fundación, dirs B' y L'
- V : carga normal al plano de fundación
- α_B, α_L : inclinación de la base resp. horizontal, dirs B' y L'
- β_B, β_L : inclinación del terreno resp. horizontal, dirs B' y L'



Factores de la fórmula de Brinch-Hansen



$$i_c = i_q - \frac{1-i_q}{N_q-1} \quad | \quad i_\gamma = \left(1 - \frac{(0.7-\alpha/450^\circ)H}{V+A' c \cot[\phi]}\right)^5 \quad | \quad i_q = \left(1 - \frac{0.5H}{V+A' c \cot[\phi]}\right)^5$$

$$s_c = 1 + \frac{N_q B'}{N_c L'} i_c \quad | \quad s_\gamma = 1 - 0.4 \frac{B'}{L'} \frac{i_{\gamma B}}{i_{\gamma L}} \geq 0.6 \quad | \quad s_q = 1 + \frac{B'}{L'} i_q \sin[\phi]$$

$$d_c = 1 + 0.4 \tan^{-1} \left[\frac{d}{B'} \right] \quad | \quad d_q = 1 + 2 \tan[\phi] (1 - \sin[\phi])^2 \tan^{-1} \left[\frac{d}{B'} \right]$$

$$d_\gamma = 1.0 \quad | \quad b_c = 1 - \frac{\alpha}{147^\circ} \quad | \quad b_\gamma = e^{-2.7 \alpha \tan[\phi]} \quad | \quad b_q = e^{-2 \alpha \tan[\phi]}$$

$$g_c = 1 - \frac{\beta}{147^\circ} \quad | \quad g_q = g_\gamma = (1 - 0.5 \tan[\beta])^5$$

Deben determinarse para cada dirección B' , L' , por ejemplo

$$i_{\gamma L} = \left(1 - \frac{(0.7-\alpha_L/450^\circ)H_L}{V+A' c \cot[\phi]}\right)^5 \quad | \quad d_{cL} = 1 + 0.4 \tan^{-1} \left[\frac{d}{L'} \right]$$

Fórmula de Brinch-Hansen para condición no drenada



$$q_{fu} = \min[q_{fu,B}, q_{fu,L}]$$

- $q_{fu,B} = (2 + \pi) s_u (1 + s_{cB}^0 + d_{cB}^0 - i_{cB}^0 - b_{cB}^0 - g_{cB}^0) + \sigma'_0$
- $q_{fu,L} = (2 + \pi) s_u (1 + s_{cL}^0 + d_{cL}^0 - i_{cL}^0 - b_{cL}^0 - g_{cL}^0) + \sigma'_0$
- $s_{cB}^0 = 0.2 B' / L' \mid s_{cL}^0 = 0.2 L' / B'$
- $d_{cB}^0 = 0.4 \tan^{-1}[d / B'] \mid d_{cL}^0 = 0.4 \tan^{-1}[d / L']$
- $i_{cB}^0 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - H_B / (A' c)} \right) \mid i_{cL}^0 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - H_L / (A' c)} \right)$
- $b_{cB}^0 = \alpha_B / 147^\circ \mid b_{cL}^0 = \alpha_L / 147^\circ$
- $g_{cB}^0 = \beta_B / 147^\circ \mid g_{cL}^0 = \beta_L / 147^\circ$

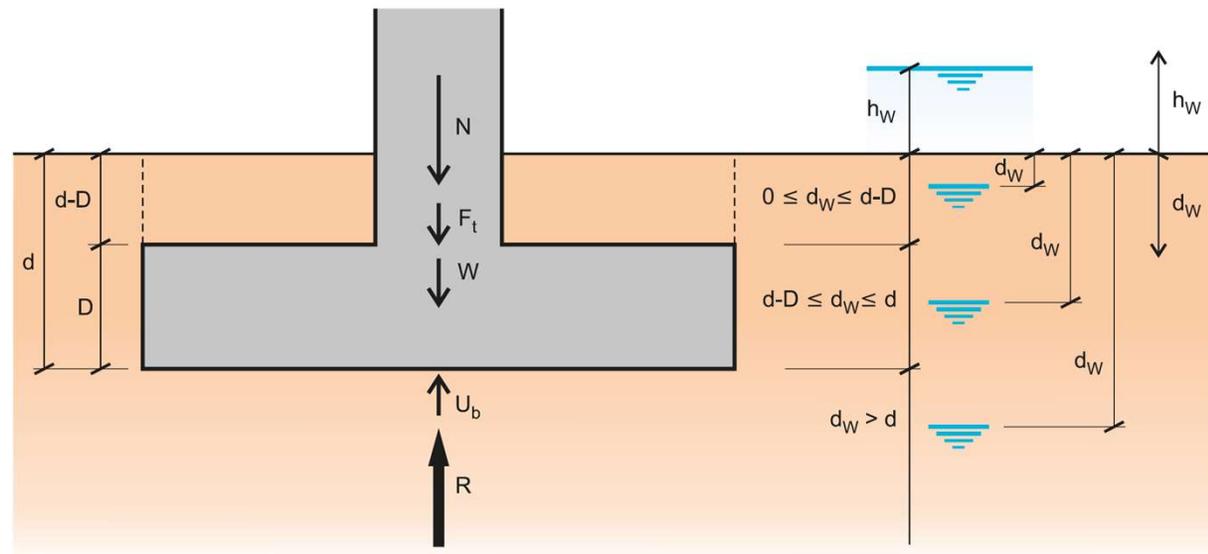


Ejercicio: Carga última con la fórmula de Brinch-Hansen

- Zapata infinita:
- | | | |
|---------------------|-------------------|----------------|
| $d = 1m$ | $d = 2m$ | |
| $\gamma = 20kN/m^3$ | $\phi = 35^\circ$ | $c = 0kN/m^2$ |
| $\gamma = 20kN/m^3$ | $\phi = 0^\circ$ | $c = 50kN/m^2$ |

Cargas

- Centrada
- Excentricidad 0.3m
- Inclinación 10°



(Epaña – Guía EC7)

Ejercicio: Verificación de la fundación de un tanque elevado



Geometría

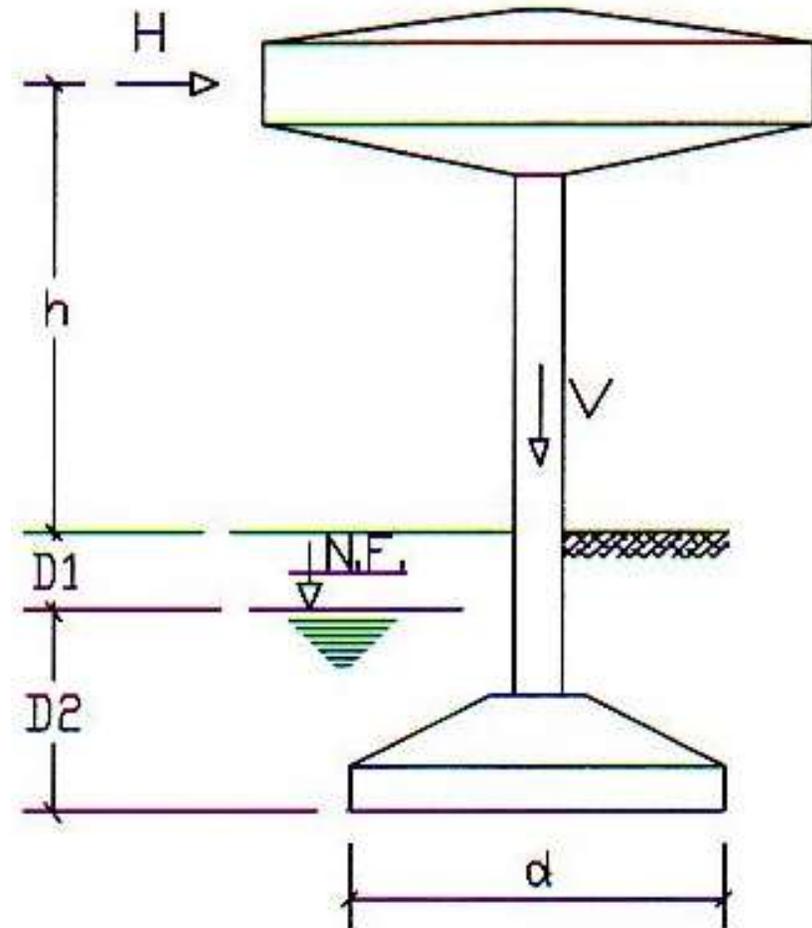
- $h = 20m$
- $D_1 = 1.5m; D_2 = 3.0m$
- $a = 6.5m$

Suelo

- $\gamma = 20kN/m^3$
- $c = 15kPa$
- $\phi = 35^\circ$

Cargas

- $H = 200kN$
- $V = 4000kN$



Resolución



Paso 1: Presión efectiva en el plano de fundación

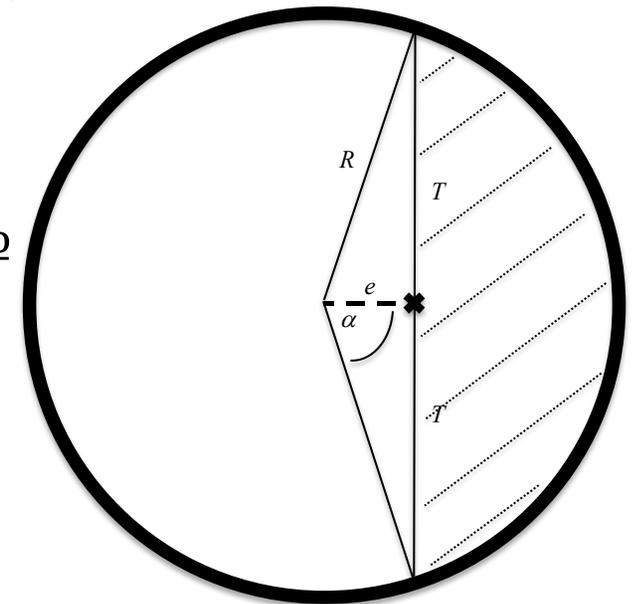
$$\sigma'_0 = \gamma D_1 + \gamma' D_2 = 20 \text{ kN/m}^3 \cdot 1.5 \text{ m} + 10 \text{ kN/m}^3 \cdot 3.0 \text{ m} = 60 \text{ kPa}$$

Paso 2: Solicitaciones en la base

- $M = H(h + D_1 + D_2) = 4900 \text{ kNm}$
- $V_f = V + \pi \cdot r^2 \cdot \sigma'_0 = 4000 \text{ kN} + \pi \cdot (3.25 \text{ m})^2 \cdot 60 \text{ kPa} = 5990 \text{ kN}$
- $e = M/V = 0.82 \text{ m}$

Paso 3: Área efectiva

- $\cos[\alpha] = e/r = 0.25 \rightarrow \alpha = 1.32 \text{ rad} = 75^\circ$
- $A' = 2r(\alpha \cdot r - \sin[\alpha] \cdot e) = 22.1 \text{ m}^2$
- $\rightarrow B' \cdot L' \approx 3.6 \text{ m} \cdot 6.0 \text{ m}$



Resolución



Paso 4: Factores de capacidad de carga (B. Hansen)

- $N_q = e^{\pi \tan[\phi]} \tan^2[\pi/4 + \phi/2] = 33$
- $N_c = \cot[\phi] \cdot (N_q - 1) = 46$
- $N_\gamma = 1.5 \cdot (N_q - 1) \tan[\phi] = 37$
- $i_q = \left(1 - \frac{0.5H}{V + A' c \cot[\phi]}\right)^5 \cong 0.95 \mid i_c \cong 0.94 \mid i_\gamma = 0.96$
- $s_q = 1 + \frac{B'}{L'} i_q \sin[\phi] = 1.32 \mid s_c = 1 + \frac{N_q B'}{N_c L'} i_c = 1.40 \mid s_\gamma = 0.78$
- $d_q = 1 + 2 \tan[\phi] (1 - \sin[\phi])^2 \tan^{-1} \left[\frac{d}{B'}\right] = 1.99 \mid d_\gamma = 1.0$
- $d_c = 1 + 0.4 \tan^{-1} \left[\frac{d}{B'}\right] = 1.36$

Resolución



Paso 5: Carga última

$$Q_f = A' \left(cN_c s_c d_c i_c + \sigma'_0 N_q s_q d_q i_q + \frac{1}{2} B \gamma N_\gamma s_\gamma d_\gamma i_\gamma \right) \cong 97 MN$$

Paso 6: Factor de seguridad

$$FoS = \frac{Q_f}{V} = \frac{97 MN}{5.99 MN} = 16$$

Las normas piden $FoS \cong 3.0$, por lo que el tanque (lleno) es muy seguro

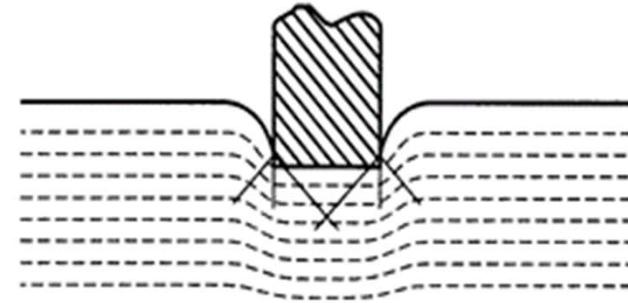
- Repita el ejercicio con el tanque vacío ($V = 800 kN$) y comprueben porqué conviene enterrar la fundación

Índice



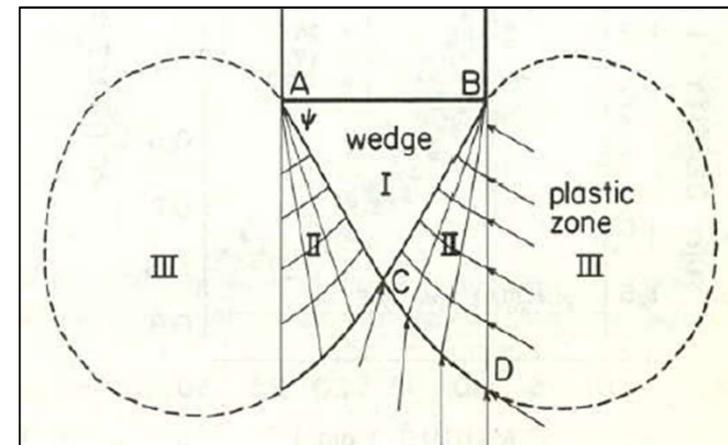
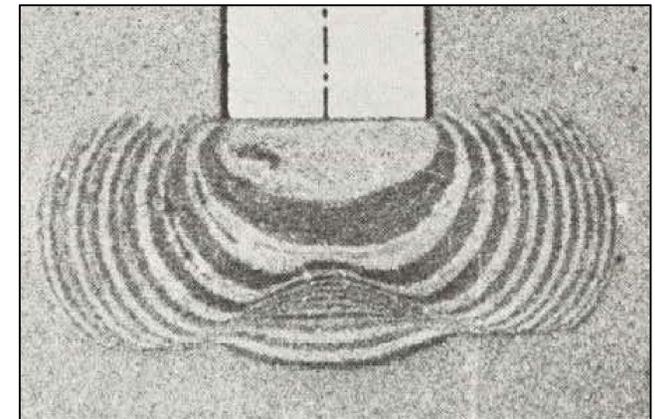
- Carga última de una fundación superficial
- Aplicación de estados límite
- Fórmula de Terzaghi
- Fórmula de Brinch-Hansen
- **Fórmula de Vesic**

Fórmula de Vesic



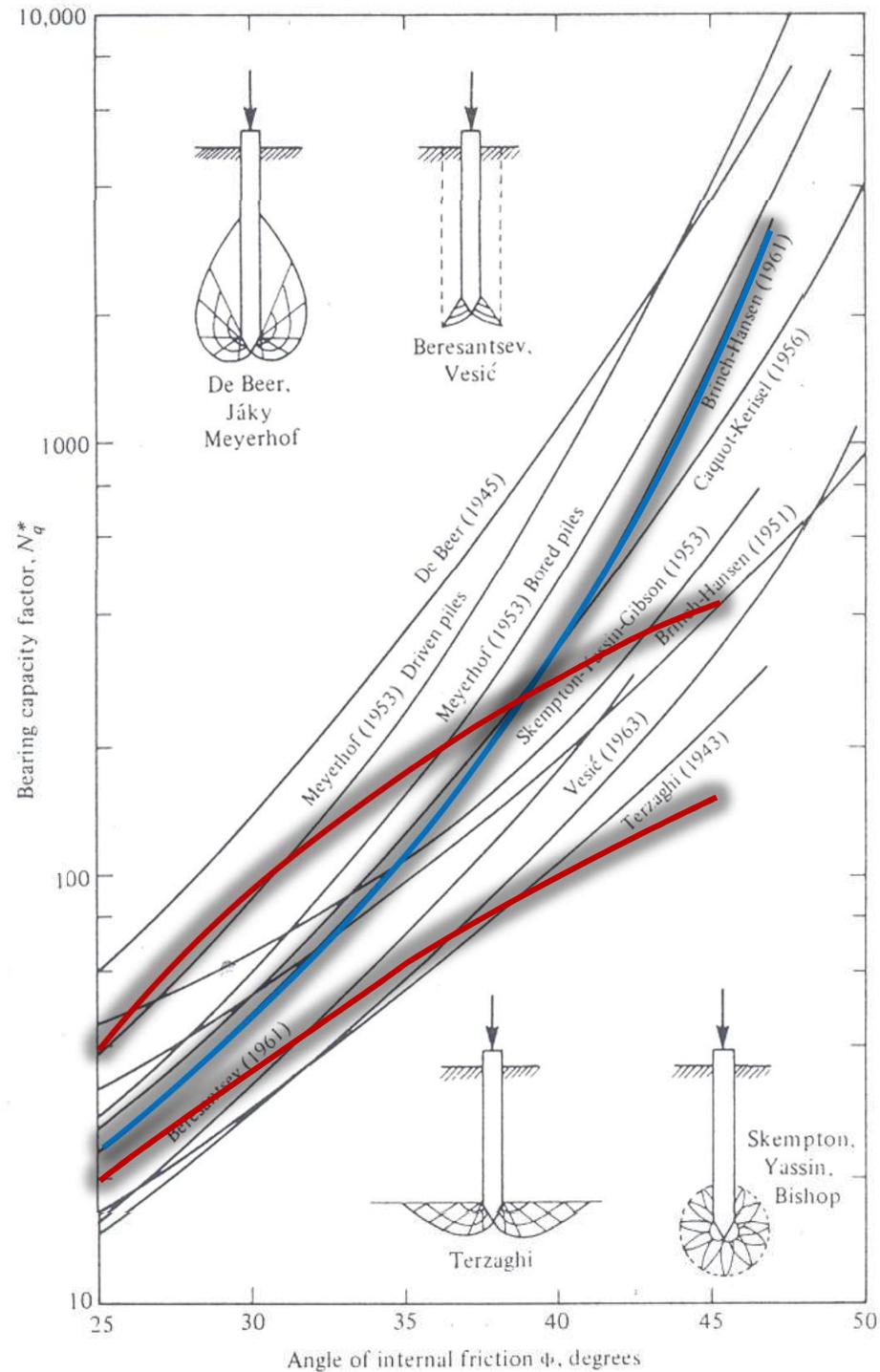
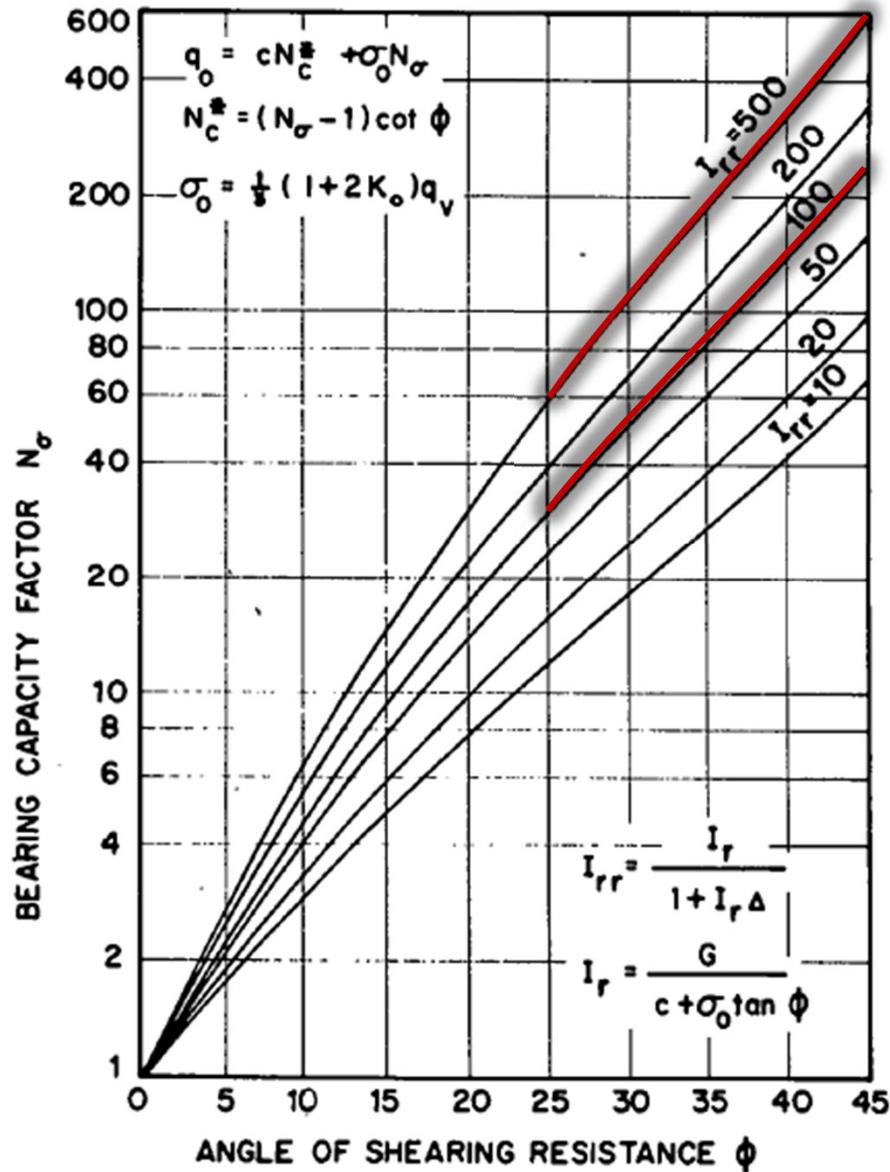
Mecanismo de falla basado en expansión de cavidad esférica

- $q_{ult} = cN_c[\phi] + pN_\sigma[\phi]$
- $N_\sigma = c_1 \tan^2 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right] I_{rr}^{c_3}$
- $c_1 = \frac{3}{3 - \sin[\phi]} e^{\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \tan[\phi]} \quad | \quad c_3 = \frac{4}{3} \frac{\sin[\phi]}{1 + \sin[\phi]}$
- $N_c = \cot[\phi] \cdot \left(\frac{1 + 2K_0}{3} N_\sigma - 1 \right)$
- $p = \frac{1 + 2K_0}{3} \sigma'_0$
- $I_{rr} = \frac{G}{c + p \tan[\phi] + \epsilon_v G}$

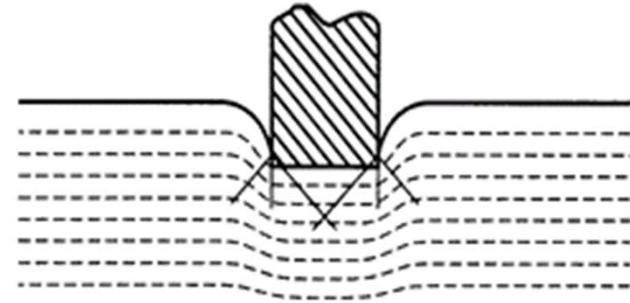


(Vesic 1977)

Vesic vs Brinch-Hansen



Fórmula de Vesic para fundaciones superficiales



- Cambian algunos términos de la fórmula de Brinch-Hansen

- $N_\gamma = 2 \cdot (N_q + 1) \tan[\phi]$

- $s_c = 1 + \frac{N_q B'}{N_c L'} \quad | \quad s_\gamma = 1 - 0.4 \frac{B'}{L'} \quad | \quad s_q = 1 + \frac{B'}{L'} \tan[\phi]$

- $i_\gamma = \left(1 - \frac{H}{V + A' c \cot[\phi]}\right)^{n+1} \quad | \quad i_q = \left(1 - \frac{H}{V + A' c \cot[\phi]}\right)^n$

$$- n = \left(\frac{2+L'/B'}{1+L'/B'}\right) \cos^2[\theta] + \left(\frac{2+B'/L'}{1+B'/L'}\right) \sin^2[\theta]$$

