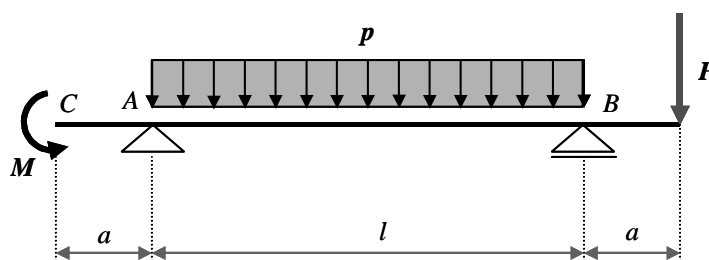


**Ejercicio N° 4- Enunciado**

Dada la estructura que se indica en la figura 4.1, la cual será construida en acero:

**Figura 4.1**

$a$	$l$	$M$	$p$	$P$	$\sigma_{adm}$	$\tau_{adm}$
$m$	$m$	$kN\ m$	$kN/m$	$kN$	$kN/cm^2$	$kN/cm^2$
0,5	3	30	35	20	16	8,5

**Tabla 4.1**

Se solicita

1. Trazar los diagramas de esfuerzos característicos
2. Dimensionar la sección más comprometida, adoptando las siguientes formas geométricas
  - 2.1. Perfil C
  - 2.2. Sección rectangular ( $h = 2\ b$ )
  - 2.3. Sección circular
3. Trazar los diagramas de tensiones tangenciales y normales para cada una de las formas geométricas proyectadas en el punto anterior. Indicar, además, el flujo de tensiones tangenciales.

## Ejercicio N° 4– Resolución

## 1. Trazado de los diagramas de esfuerzos característicos

## 1.1. Cálculo de las reacciones de vínculo

Se tiene el siguiente diagrama de cuerpo libre:

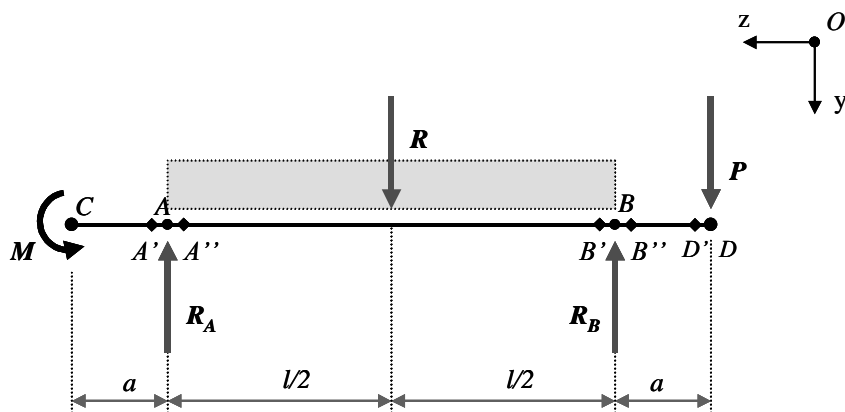


Figura 4.2

Siendo

$$R = P \cdot l = 35 \cdot 3 = 105 \cdot kN$$

Se tiene que:

$$\sum_i M_{ix}^B = 0$$

$$-M + R_A \cdot l - R \cdot \frac{l}{2} + P \cdot a = 0$$

$$R_A = \frac{M + R \cdot \frac{l}{2} - P \cdot a}{l} = \frac{30 + 105 \cdot 1,5 - 20 \cdot 0,5}{3}$$

$$R_A = 59,17 \cdot kN$$

$$\sum_i P_{iy} = 0$$

$$-R_A + R - V_B + P = 0$$

$$V_B = -R_A + R + P = -59,17 + 105 + 20$$

$$V_B = 65,83 \cdot kN$$

$$\sum_i P_{iz} = 0$$

$$H_B = 0 \cdot kN$$

## 1.2. Trazado de los diagramas de esfuerzos característicos

$$Q_{zy}(C) = 0 \cdot kN$$

$$Q_{zy}(A') = 0 \cdot kN$$

$$Q_{zy}(A'') = -R_A = -59,17 \cdot kN$$

$$Q_{zy}(B') = -R_A + R = -59,17 + 105 = 45,83 \cdot kN$$

$$Q_{zy}(B'') = Q_{zy}(B') - R_B = 45,83 - 65,83 = -20 \cdot kN$$

$$Q_{zy}(D') = Q_{zy}(B'') = -20 \cdot kN$$

$$Mf_{x(C)} = -M = -30 \cdot kN \cdot m$$

$$Mf_{x(A)} = Mf_{x(C)} = -30 \cdot kN \cdot m$$

$$Mf_{x(B)} = -M + R_A \cdot l - R \cdot \frac{l}{2} = -30 + 59,17 \cdot 3 - 105 \cdot \frac{3}{2} = -10 \cdot kN \cdot m$$

También:

$$Mf_{x(B)} = -P \cdot a = -20 \cdot 0,5 = -10 \cdot kN \cdot m$$

$$Esc\_L = 0,333 \cdot m/cm \quad Esc\_Q_{zy} = 25 \cdot kN/cm \quad Esc\_Mf_x = 20 \cdot kN \cdot m/cm$$

$$\overline{TH} = \frac{l}{2} = 1,5 \quad \overline{HV} = Q_{zy}(A'') \cdot \frac{l}{2} \quad \overline{HV} = 59,17 \cdot 1,5 = 88,76 \cdot kN \cdot m$$

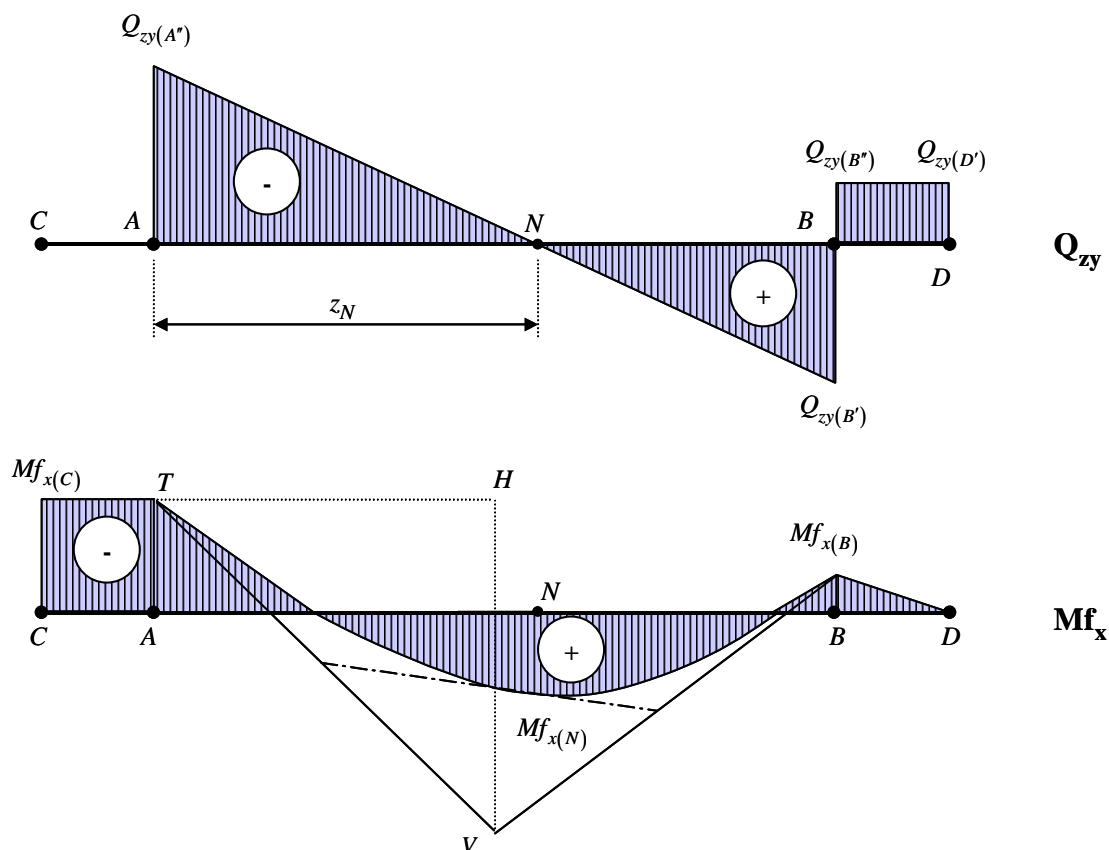


Figura 4.3

Para calcular  $Mf_{x(N)}$ , el máximo valor de  $Mf_x$  en el tramo  $AB$ , debe tenerse en cuenta que esto ocurre para la sección ubicada a una distancia  $z_N$  del punto  $A$ , donde  $Q_{zy}$  sea nula. Es decir,

$$Q_{zy(N)} = -R_A + p \cdot z_N = 0$$

$$z_N = \frac{R_A}{p} = \frac{59,17}{35} = 1,69 \cdot m$$

Dicho valor de  $Mf_{x(N)}$  será:

$$Mf_{x(N)} = -M + R_A \cdot z_N - \frac{p \cdot z_N^2}{2}$$

$$Mf_{x(N)} = -30 + 59,17 \cdot 1,69 - \frac{35 \cdot 1,69^2}{2}$$

$$Mf_{x(N)} = -30 + 100 - 50$$

$$Mf_{x(N)} = 20 \cdot kN \cdot m$$

En definitiva, la sección más comprometida es la  $A$ , donde se tiene que:

$$Q_{zy(A^*)} = -59,17 \cdot kN$$

$$Mf_{x(A)} = Mf_{x(C)} = -30 \cdot kN \cdot m = -3000 \cdot kN \cdot cm$$

## 2. Dimensionamiento de la sección más comprometida

El criterio que se adopta es el siguiente:

1) Se dimensiona por flexión simple

$$\sigma_{zmáx} \leq \sigma_{adm}$$

2) Se verifica al corte

$$\tau_{zymáx} \leq \tau_{adm}$$

En cuanto al dimensionamiento por flexión, se tiene

$$\sigma_{zmáx} = \frac{Mf_{xmáx}}{W_x}$$

Para la sección más comprometida ( $A$ ) se debe cumplir que en valor absoluto:

$$\frac{Mf_{x(A)}}{W_x} \leq \sigma_{adm}$$

ó

$$W_x \geq \frac{Mf_{x(A)}}{\sigma_{adm}}$$

reemplazando por los valores

$$W_x \geq \frac{3000}{16}$$

$$W_x \geq 187,5 \cdot \text{cm}^3$$

### 2.1. Perfil C

Teniendo en cuenta la flexión simple debe cumplirse que:

$$W_x \geq 187,5 \cdot \text{cm}^3$$

De la tabla de perfiles, se adopta un perfil C N°20, donde

$$W_x = 191 \cdot \text{cm}^3$$

$$J_x = 1910 \cdot \text{cm}^4$$

$$S_{xmáx}^* = 114 \cdot \text{cm}^3$$

$$h = 20 \cdot \text{cm}$$

$$b = 7,5 \cdot \text{cm}$$

$$h_1 = 17,7 \cdot \text{cm}$$

$$e = 0,85 \cdot \text{cm}$$

$$t = 1,15 \cdot \text{cm}$$

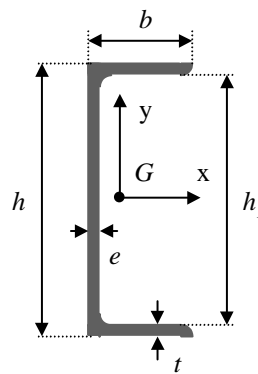


Figura 4.4

La tensión máxima para la sección (A) será:

$$\sigma_{zmáx} = \frac{M f_{x(A)}}{W_x} = \frac{3000}{191}$$

$$\sigma_{zmáx} = 15,71 \cdot \text{kN/cm}^2$$

Para la verificación al corte de la sección (A''):

$$\tau_{zymáx} = \frac{Q_{zymáx} \cdot S_{xmáx}^*}{J_x \cdot e} = \frac{59,17 \cdot 114}{1910 \cdot 0,85}$$

$$\tau_{zymáx} = 4,15 \cdot \text{kN/cm}^2$$

se verifica que

$$\tau_{zymáx} \leq \tau_{adm}$$

pues

$$4,15 \cdot \text{kN/cm}^2 < 8,5 \cdot \text{kN/cm}^2$$

## 2.2. Sección rectangular

Teniendo en cuenta la flexión simple debe cumplirse que:

$$W_x \geq 187,5 \cdot \text{cm}^3$$

Por otro lado, para una sección rectangular:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Siendo para el presente caso  $h = 2 b$  (hipótesis primitiva)

$$W_x = \frac{1}{6} \left( \frac{h}{2} \cdot h^2 \right) = \frac{h^3}{12}$$

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot W_x} = \sqrt[3]{12 \cdot 187,5} = 13,1 \cdot \text{cm}$$

$$b = \frac{h}{2} = \frac{13,1}{2} = 6,55 \cdot \text{cm}$$

De acuerdo con la tabla de aceros planos laminados en caliente, según norma DIN 1017, se adopta:

$$h = 14 \cdot \text{cm}$$

$$b = 6 \cdot \text{cm}$$

Donde resulta:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{6 \cdot 14^2}{6} = 196 \cdot \text{cm}^3$$

Además, para dicha sección (A):

$$\sigma_{zmáx} = \frac{M f_{x(A)}}{W_x} = \frac{3000}{196}$$

$$\sigma_{zmáx} = 15,31 \cdot \text{kN} / \text{cm}^2$$

Para la verificación al corte de la sección (A''):

$$\tau_{zymáx} = 1,5 \cdot \frac{Q_{zy(A'')}}{F} = 1,5 \cdot \frac{59,17}{14 \cdot 6}$$

$$\tau_{zymáx} = 1,057 \cdot \text{kN} / \text{cm}^2$$

se verifica que

$$\tau_{zymáx} \leq \tau_{adm}$$

pues

$$1,057 \cdot \text{kN} / \text{cm}^2 < 8,5 \cdot \text{kN} / \text{cm}^2$$

### 2.3. Sección circular

Teniendo en cuenta la flexión simple debe cumplirse que:

$$W_x \geq 187,5 \cdot \text{cm}^3$$

Por otro lado, para una sección circular:

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}}$$

reemplazando por los valores:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 187,5}{3,14}} = 12,4 \cdot \text{cm}$$

Se adopta

$$\mathbf{D = 13 \cdot cm}$$

Donde resulta:

$$F = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 13^2}{4} = 132,67 \cdot \text{cm}^2$$

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 13^3}{32} = 215,58 \cdot \text{cm}^3$$

Además, para dicha sección (A):

$$\sigma_{zmáx} = \frac{Mf_{x(A)}}{W_x} = \frac{3000}{215,58}$$

$$\mathbf{\sigma_{zmáx} = 13,92 \cdot kN/cm^2}$$

Para la verificación al corte de la sección (A''):

$$\tau_{zymáx} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{zy(A'')}}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{59,17}{132,67}$$

$$\mathbf{\tau_{zymáx} = 0,595 \cdot kN/cm^2}$$

se verifica que

$$\tau_{zymáx} \leq \tau_{adm}$$

pues

$$0,595 \cdot kN/cm^2 < 8,5 \cdot kN/cm^2$$

### 3. Trazado de los diagramas de tensiones tangenciales y normales

#### 3.1. Perfil C

##### A) Tensiones tangenciales

Se calculan primeramente las tensiones en el alma y luego en las alas

##### A.1) Tensiones tangenciales en el alma ( $\tau_{zy}$ )

Siendo, de acuerdo con lo estudiado en las clases teóricas:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_{zy}}{J_x \cdot e} \cdot \left[ \frac{b}{8} \cdot (h^2 - h_1^2) + \frac{e}{2} \cdot \left( \frac{h_1^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

Para trazar el respectivo diagrama pueden tomarse los puntos  $K$ ,  $T$  y  $V$  que corresponden a los niveles que se indican:

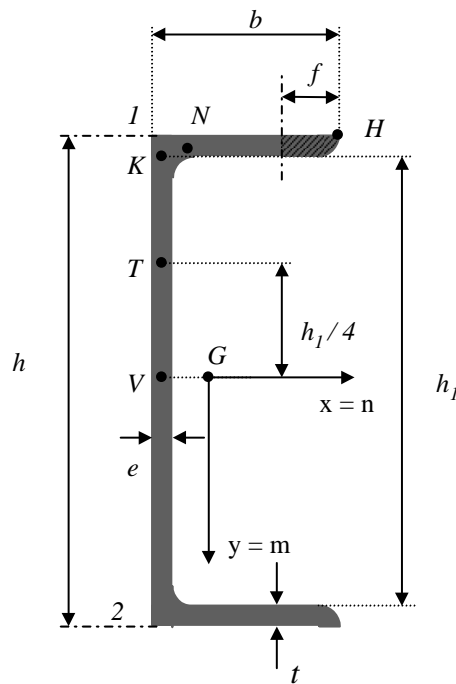


Figura 4.5

Para el punto  $K$  ( $y = \frac{h_1}{2}$ ):

$$\tau_{zy(K)} = \frac{Q_{zy(A'')}}{J_x \cdot e} \cdot \left[ \frac{b}{8} \cdot (h^2 - h_1^2) + 0 \right]$$

$$\tau_{zy(K)} = \frac{59,17}{1910 \cdot 0,85} \cdot \left[ \frac{7,5}{8} \cdot (20^2 - 17,7^2) \right]$$

$$\tau_{zy(K)} = 2,96 \cdot \frac{kN}{cm^2}$$



Cátedra: Ing. José Luis Tavorro	TP 5	4/9
---------------------------------	------	-----

Para el punto T ( $y = \frac{h_1}{4}$ ):

$$\tau_{zy(T)} = \frac{Q_{zy(A'')}}{J_x \cdot e} \cdot \left[ \frac{b}{8} \cdot (h^2 - h_1^2) + \frac{e}{2} \cdot \left( \frac{h_1^2}{4} - \frac{h_1^2}{16} \right) \right]$$

$$\tau_{zy(T)} = \frac{Q_{zy(A'')}}{8 \cdot J_x \cdot e} \cdot \left[ b \cdot (h^2 - h_1^2) + \frac{3}{4} \cdot e \cdot h_1^2 \right]$$

$$\tau_{zy(T)} = \frac{59,17}{8 \cdot 1910 \cdot 0,85} \cdot \left[ 7,5 \cdot (20^2 - 17,7^2) + \frac{3}{4} \cdot 0,85 \cdot 17,7^2 \right]$$

$$\tau_{zy(T)} = 3,87 \cdot \text{kN/cm}^2$$

Para el punto V ( $y = 0$ ):

$$\tau_{zy(V)} = \tau_{zymax} = \frac{Q_{zy(A'')}}{8 \cdot J_x \cdot e} \cdot \left[ b \cdot (h^2 - h_1^2) + e \cdot h_1^2 \right]$$

$$\tau_{zy(V)} = \tau_{zymax} = \frac{59,17}{8 \cdot 1910 \cdot 0,85} \cdot \left[ 7,5 \cdot (20^2 - 17,7^2) + 0,85 \cdot 17,7^2 \right]$$

$$\tau_{zy(V)} = 4,18 \cdot \text{kN/cm}^2$$

Valor que prácticamente coincide con el calculando aplicando  $S_{xmax}^*$  que brinda la tabla de perfiles.

## A.2) Tensiones tangenciales en las alas ( $\tau_{zx}$ )

Siendo, de acuerdo con lo estudiado en las clases teóricas:

$$\tau_{zx} = \frac{Q_{zy}}{4 \cdot J_x} \cdot (h + h_1) \cdot f$$

Debe tenerse en cuenta que el diagrama de  $\tau_{zx}$  es lineal y en el punto extremo H su valor resulta nulo. En consecuencia, con calcular su valor máximo que corresponde al punto N, se puede trazar dicho diagrama.

Para el punto N

Se tiene que:

$$f = b - e$$

Luego,

$$\tau_{zx(N)} = \tau_{zxmax} = \frac{Q_{zy(A'')}}{4 \cdot J_x} \cdot (h + h_1) \cdot (b - e)$$

$$\tau_{zx(N)} = \tau_{zxmax} = \frac{59,17}{4 \cdot 1910} \cdot (20 + 17,7) \cdot (7,5 - 0,85)$$

$$\tau_{zx(N)} = \tau_{zxmax} = 1,94 \cdot \text{kN/cm}^2$$

**B) Tensiones normales ( $\sigma_z$ )**

Para la fibra 1-1 se tiene que:

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_{zmáx}^{(+)} = \frac{M f_{x(A)}}{W_x} = \frac{3000}{191}$$

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_{zmáx}^{(+)} = 15,71 \cdot kN/cm^2$$

Para la fibra 2-2 se tiene que:

$$\sigma_z^{(2)} = \sigma_{zmáx}^{(-)} = -\frac{M f_{x(A)}}{W_x} = -\frac{3000}{191}$$

$$\sigma_z^{(2)} = \sigma_{zmáx}^{(-)} = -15,71 \cdot kN/cm^2$$

**Diagramas para el perfil C**

$$Esc\_L = 2 \cdot cm/cm \quad Esc\_ \tau = 2 \cdot kN \cdot cm^{-2}/cm \quad Esc\_ \sigma = 7,5 \cdot kN \cdot cm^{-2}/cm$$

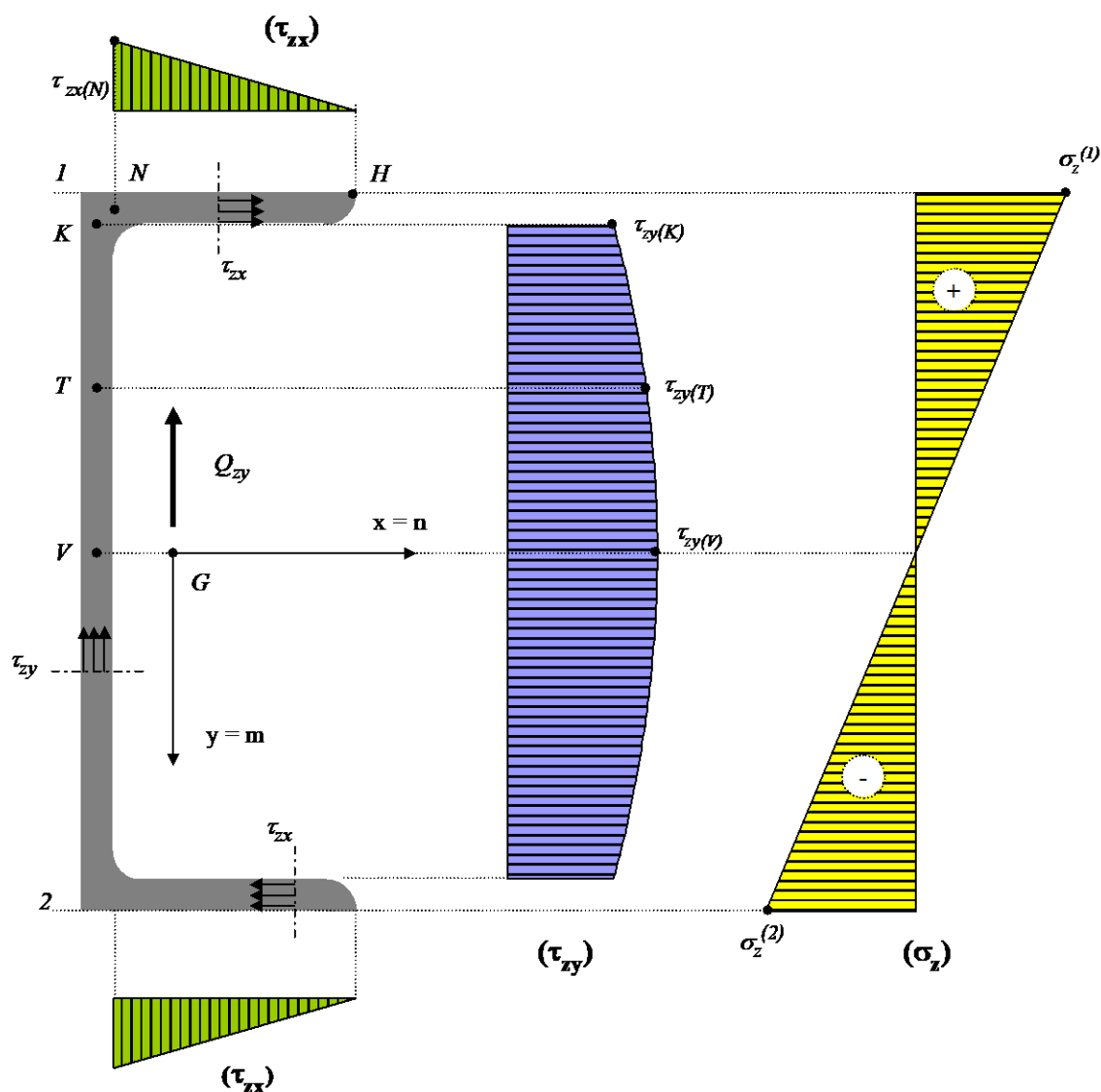


Figura 4.6

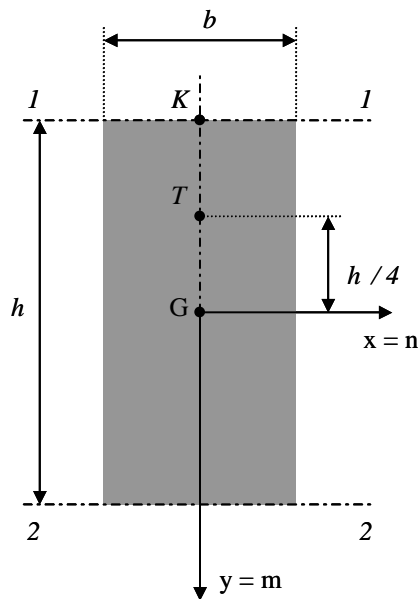
### 3.2. Sección rectangular

#### A) Tensiones tangenciales

De acuerdo con lo estudiado en la parte teórica, las tensiones tangenciales ( $\tau_{zy}$ ) están dadas por la siguiente expresión:

$$\tau_{zy} = 6 \cdot \frac{Q_{zy}}{b \cdot h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Para trazar el respectivo diagrama de  $\tau_{zy}$  se pueden tomar los puntos  $K$ ,  $T$  y  $G$  que corresponden a los niveles de  $y$  que se indican:



**Figura 4.7**

Para el punto  $K$  ( $y = \frac{h}{2}$ ):

$$\tau_{zy(K)} = 0$$

Para el punto  $T$  ( $y = \frac{h}{4}$ ):

$$\tau_{zy(T)} = 6 \cdot \frac{Q_{zy(A'')}}{b \cdot h^3} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{16} \right)$$

$$\tau_{zy(T)} = 6 \cdot \frac{59,17}{6 \cdot 14^3} \left( \frac{14^2}{4} - \frac{14^2}{16} \right)$$

$$\tau_{zy(T)} = 0,792 \cdot \frac{kN}{cm^2}$$

Para el punto  $G$  ( $y = 0$ ):

$$\tau_{zy}(G) = \tau_{zymáx} = 6 \cdot \frac{Q_{zy}(A'')}{b \cdot h^3} \cdot \frac{h^2}{4}$$

$$\tau_{zy}(G) = \tau_{zymáx} = 1,5 \cdot \frac{Q_{zy}(A'')}{F}$$

$$\tau_{zy}(G) = \tau_{zymáx} = 1,5 \cdot \frac{59,17}{6 \cdot 14}$$

$$\tau_{zy}(G) = \tau_{zymáx} = 1,057 \cdot \text{kN/cm}^2$$

### B) Tensiones normales ( $\sigma_z$ )

Para la fibra 1-1 se tiene que:

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_{zmáx}^{(+)} = \frac{M f_{x(A)}}{W_x} = \frac{3000}{196}$$

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_{zmáx}^{(+)} = 15,31 \cdot \text{kN/cm}^2$$

Para la fibra 2-2 se tiene que:

$$\sigma_z^{(2)} = \sigma_{zmáx}^{(-)} = -\frac{M f_{x(A)}}{W_x} = -\frac{3000}{196}$$

$$\sigma_z^{(2)} = \sigma_{zmáx}^{(-)} = -15,31 \cdot \text{kN/cm}^2$$

### Diagrama para la sección rectangular

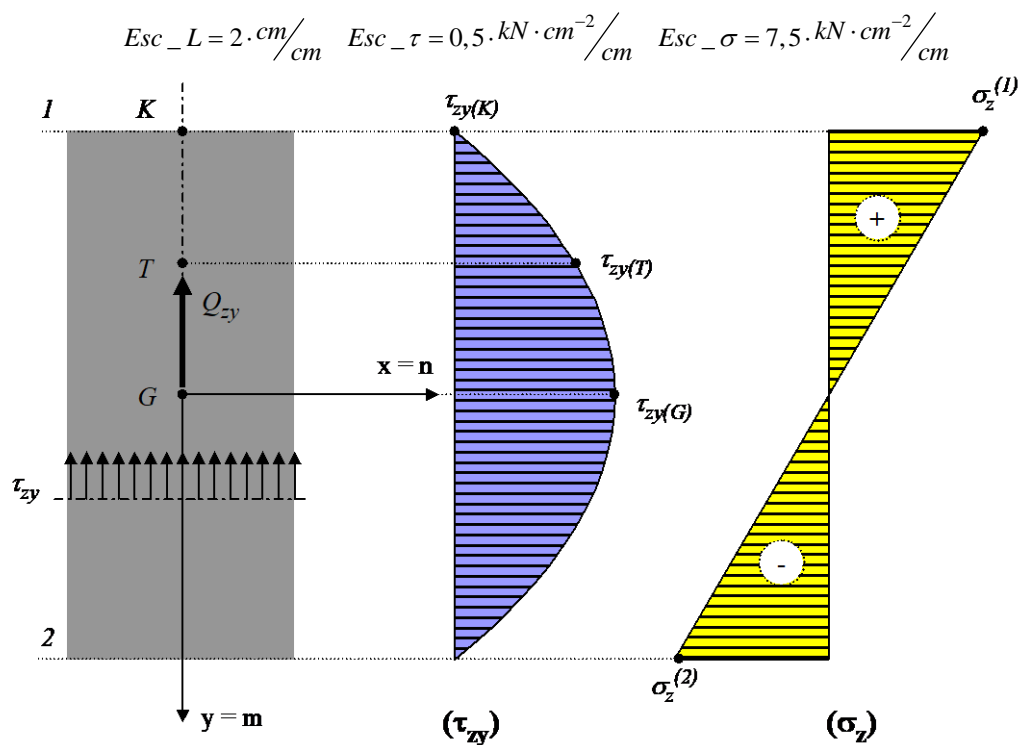


Figura 4.8

### 3.3. Sección circular

#### A) Tensiones tangenciales

De acuerdo con lo estudiado en la parte teórica, las tensiones tangenciales están dadas por las siguientes expresiones:

$$\tau_{zt} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{zy}}{F} \cdot \frac{b_i}{2 \cdot R} \quad \text{o bien} \quad \tau_{zt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Q_{zy}}{F} \cdot \frac{b_i}{R}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{zt} \cdot \cos(\varphi)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{zt} \cdot \sin(\varphi)$$

Siendo

$$b_i = 2 \cdot R \cdot \cos(\varphi)$$

Para trazar los respectivos diagramas se pueden tomar los puntos  $K$ ,  $T$  y  $V$  que corresponden a los puntos extremos de las cuerdas de cada nivel  $y$ :

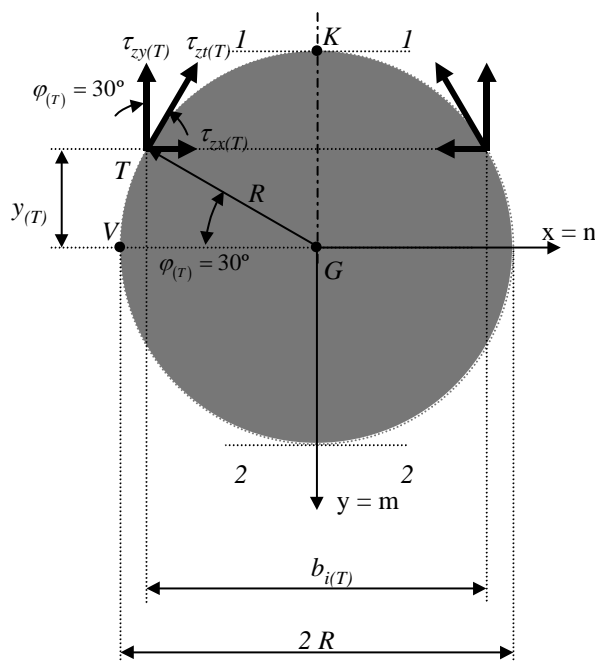


Figura 4.9

Siendo:

$$R = 6,5 \cdot \text{cm}$$

$$F = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 6,5^2 = 132,73 \cdot \text{cm}^2$$

$$y_{(K)} = R = 6,5 \cdot \text{cm}$$

$$y_{(T)} = \frac{R}{2} = 3,25 \cdot \text{cm}$$

$$y_{(V)} = 0$$

$$b_{i(K)} = 0$$

$$b_{i(T)} = 2 \cdot R \cdot \cos(\varphi_T) = 2 \cdot 6,5 \cdot \cos(30) = 11,26 \cdot \text{cm}$$

$$b_{i(V)} = 2 \cdot R = 13 \cdot \text{cm}$$

Para el punto  $K$  ( $b_{i(K)} = 0$  ;  $y_{(K)} = 6,50 \cdot cm$ ):

$$\tau_{zt(K)} = 0$$

Para el punto  $T$  ( $b_{i(T)} = 11,26 \cdot cm$  ;  $y_{(T)} = 3,25 \cdot cm$ ):

$$\tau_{zt(T)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Q_{zy}(A'')}{\pi \cdot R^3} \cdot b_{i(T)}$$

$$\tau_{zt(T)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{59,17}{\pi \cdot 6,5^3} \cdot 11,26$$

$$\tau_{zt(T)} = 0,515 \cdot kN/cm^2$$

$$\tau_{zy(T)} = \tau_{zt(T)} \cdot \cos(\varphi_{(T)})$$

$$\tau_{zy(T)} = 0,515 \cdot \cos(30) = 0,515 \cdot 0,866$$

$$\tau_{zy(T)} = 0,446 \cdot kN/cm^2$$

$$\tau_{zx(T)} = \tau_{zt(T)} \cdot \sin(\varphi_{(T)})$$

$$\tau_{zx(T)} = 0,515 \cdot \sin(30) = 0,515 \cdot 0,50$$

$$\tau_{zx(T)} = 0,258 \cdot kN/cm^2$$

Para el punto  $V$  ( $b_{i(V)} = 13,0 \cdot cm$  ;  $y_{(V)} = 0$ ):

$$\tau_{zt(V)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Q_{zy}(A'')}{\pi \cdot R^3} \cdot b_{i(V)}$$

$$\tau_{zt(V)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{59,17}{\pi \cdot 6,5^3} \cdot 13$$

$$\tau_{zt(V)} = 0,595 \cdot kN/cm^2$$

$$\tau_{zy(V)} = \tau_{zt(V)} \cdot \cos(\varphi_{(V)})$$

$$\tau_{zy(V)} = 0,595 \cdot \cos(0)$$

$$\tau_{zy(V)} = 0,595 \cdot kN/cm^2$$

$$\tau_{zx(V)} = \tau_{zt(V)} \cdot \sin(\varphi_{(V)})$$

$$\tau_{zx(V)} = 0,595 \cdot \sin(0)$$

$$\tau_{zx(V)} = 0$$

**B) Tensiones normales ( $\sigma_z$ )**

Para la fibra 1-1 se tiene que:

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_{zmáx}^{(+)} = \frac{M f_{x(A)}}{W_x} = \frac{3000}{215,58}$$

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_{zmáx}^{(+)} = 13,92 \cdot kN/cm^2$$

Para la fibra 2-2 se tiene que:

$$\sigma_z^{(2)} = \sigma_{zmáx}^{(-)} = -\frac{M f_{x(A)}}{W_x} = -\frac{3000}{215,58}$$

$$\sigma_z^{(2)} = \sigma_{zmáx}^{(-)} = -13,92 \cdot kN/cm^2$$

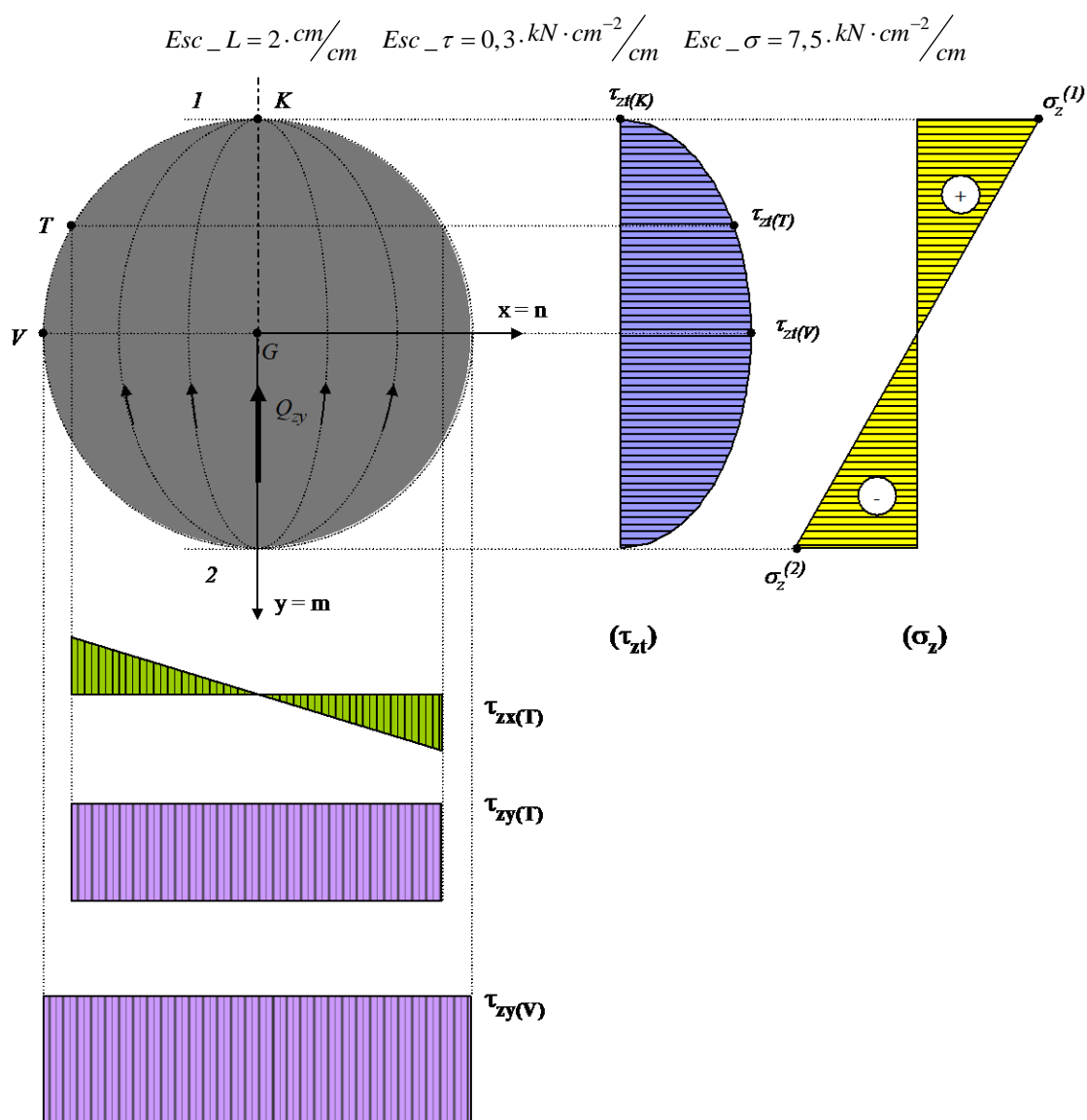
**Diagrama de tensiones para la sección circular**

Figura 4.10