

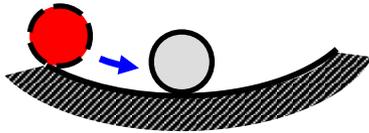


PANDEO

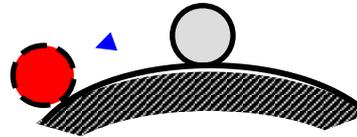
**(INESTABILIDAD DEL
EQUILIBRIO)**

1. INTRODUCCIÓN

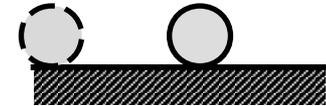
Tipos de equilibrio



Estable



Inestable



Indiferente



Configuración en no equilibrio



Configuración no perturbada



Configuración en equilibrio



Configuración perturbada

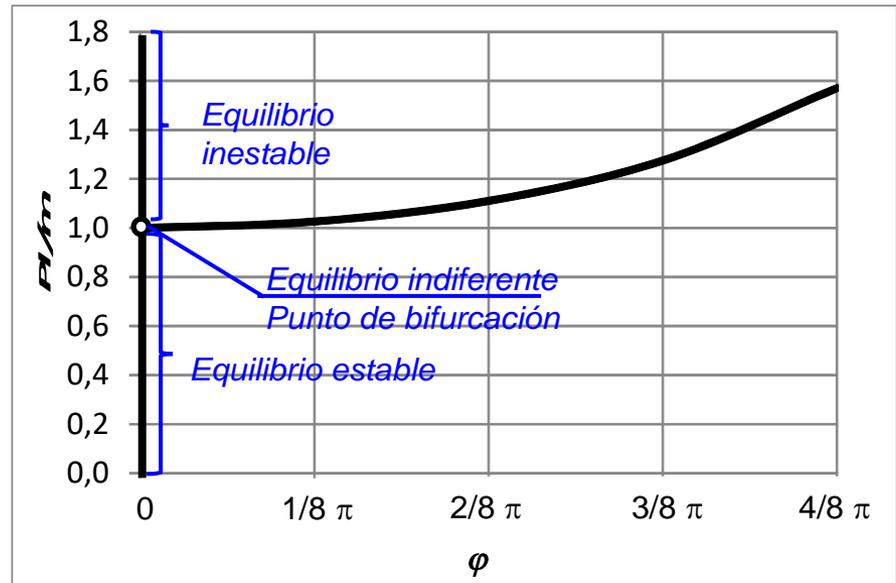
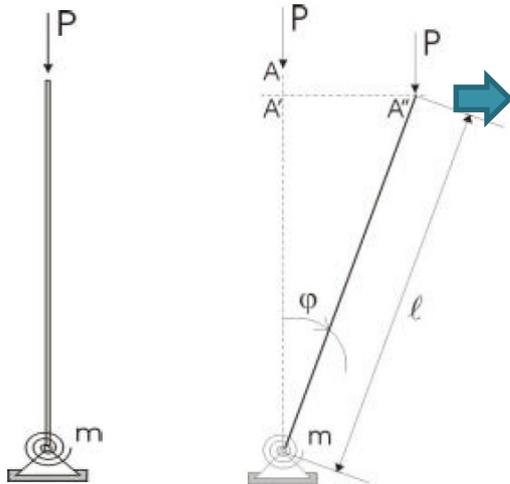
Un sistema se encuentra en equilibrio estable si al aplicarle cualquier perturbación éste deja de estar en equilibrio, y al desaparecer dicha perturbación, el sistema retorna a la misma configuración de equilibrio original

Un sistema se encuentra en equilibrio inestable si al aplicarle cualquier perturbación éste deja de estar en equilibrio, y por más que la perturbación sea suprimida el sistema no retorna a ninguna configuración de equilibrio, alejándose cada vez más de la original

Un sistema se encuentra en equilibrio indiferente si al aplicarle cualquier perturbación éste encuentra una nueva configuración de equilibrio, y por más que la perturbación sea suprimida, el sistema permanece en esta nueva configuración de equilibrio

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Noción de carga crítica.



Se considera inicialmente la barra en equilibrio, cargada axialmente con una carga P en posición vertical ($\varphi=0$). Al aplicar una perturbación horizontal que desplace el punto A a la posición A'' , para que ésta sea una nueva posición de equilibrio se tiene que cumplir:

$$P \cdot \overline{AA''} = P \cdot \sin \varphi \cdot l = m \cdot \varphi$$

De donde:

$$P = \frac{m}{l} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}$$

Se obtiene

$$P_k = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{m}{l} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi} = \frac{m}{l}$$

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Teoría de Euler

Se considera una barra axialmente cargada, bajo las siguientes hipótesis:

Hipótesis **geométricas**:

- Barra simétrica y perfectamente recta
- Barra perfectamente centrada
- La carga es perfectamente colineal con el eje de la barra

Hipótesis **mecánicas**:

- Material homogéneo e isótropo
- Validez de la ley de Hooke en forma indefinida; las tensiones son proporcionales a las deformaciones, siempre y cuando se esté dentro de la zona de proporcionalidad del diagrama tensiones-deformaciones.
- Validez de la hipótesis de Bernoulli (las secciones se mantienen planas después de las deformaciones, aún en el campo post-elástico)



1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Teoría de Euler

Una barra apoyada en sus extremos es cargada con una fuerza P , idealmente axial, y relativamente baja.

Se le aplica una perturbación, como la fuerza lateral F en el plano xy , y seguidamente se retira. En ese instante, tiene que:

$$N_x = -P \quad Mf_z = -P \cdot y$$

Pero por otro lado debe cumplirse:

$$Mf_z = \frac{E \cdot J_z}{\rho} = E \cdot J_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Si la posición perturbada es posición de equilibrio, $P = P_k$, y :

$$E \cdot J_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -P_k \cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P_k}{E \cdot J_z} \cdot y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \cdot y = 0 \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\frac{P_k}{E \cdot J_z}}$$

Cuya solución general es: $y = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x)$

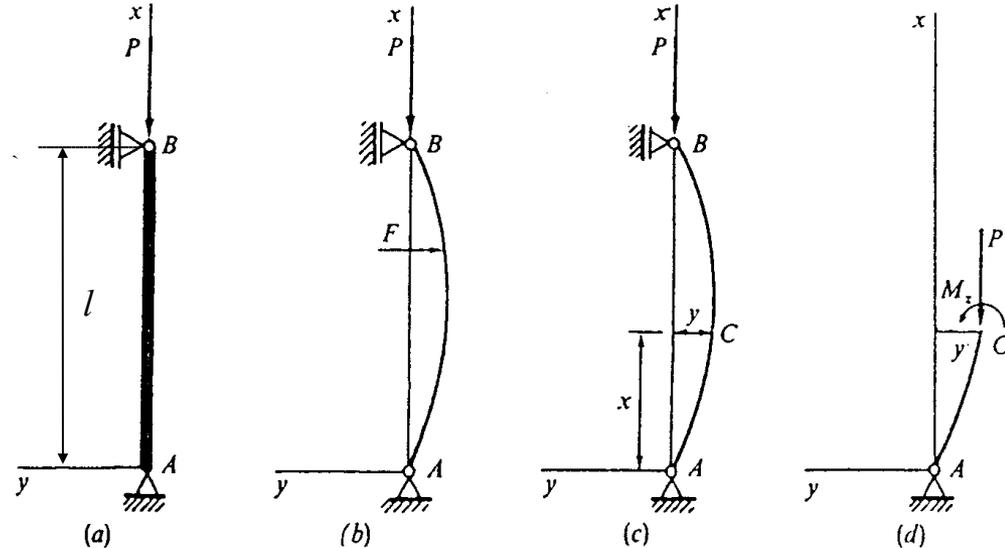
Las constantes de integración C_1 y C_2 se hallan planteando las condiciones de borde:

$$y(x=0) = 0$$

$$y(x=l) = 0$$

La primera condición de borde conduce a que $C_2 = 0$. Por lo que la línea elástica queda:

$$y = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{P_k}{E \cdot J_z}} \cdot x\right)$$



1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Teoría de Euler

Habiendo quedado la ecuación de la línea elástica:

$$y = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{P_k}{E \cdot J_z}} \cdot x\right)$$

La segunda condición de borde implica que:

$$y_{(x=l)} = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{P_k}{E \cdot J_z}} \cdot l\right)$$

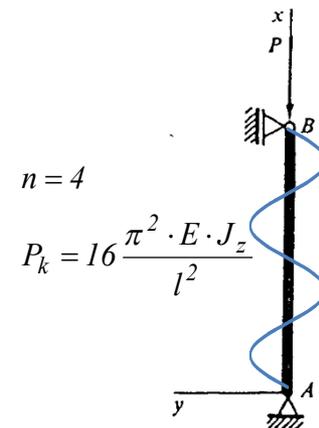
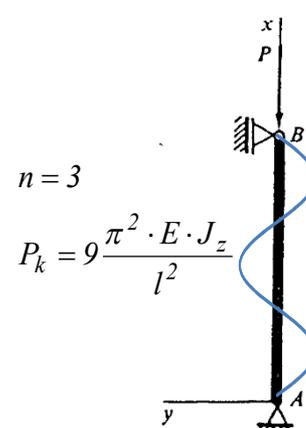
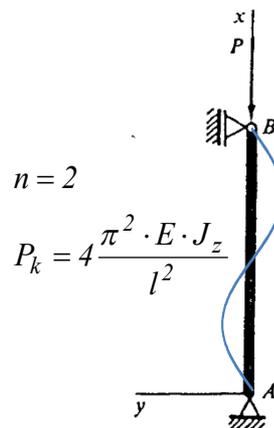
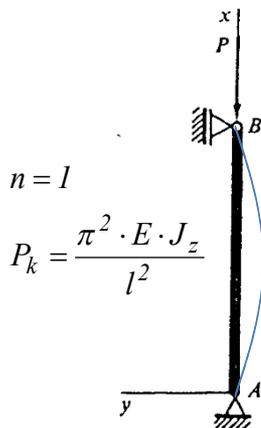
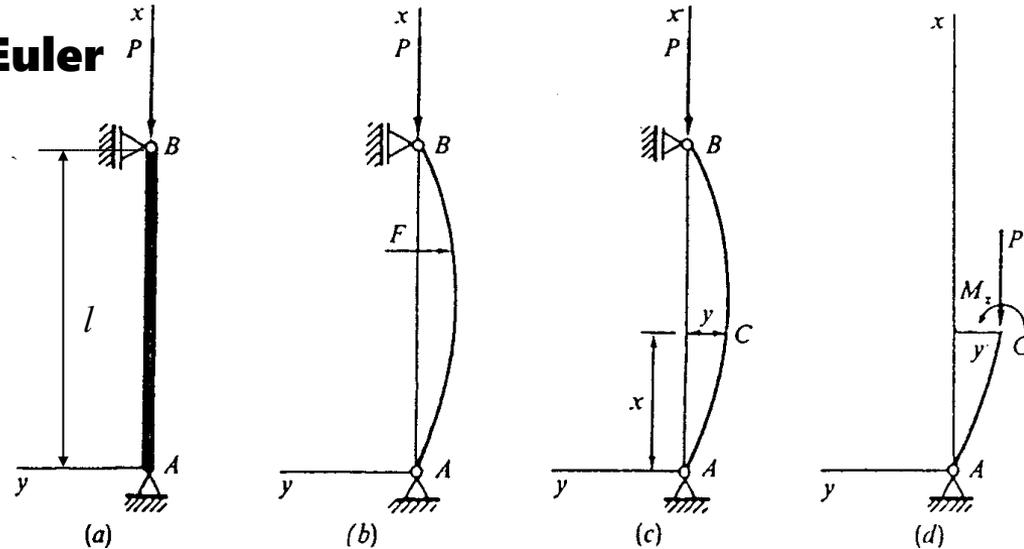
Por lo que puede ser que:

$$C_1 = 0 \Rightarrow y(x) = 0$$

La barra puede conservarse en equilibrio en posición recta (aunque este no sea inestable)

$$0 = \sin\left(\sqrt{\frac{P_k}{E \cdot J_z}} \cdot l\right) \Rightarrow P_k = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{l^2} \Rightarrow \text{para } n=1 \text{ el menor valor es } P_{cr} \Rightarrow P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{l^2}$$

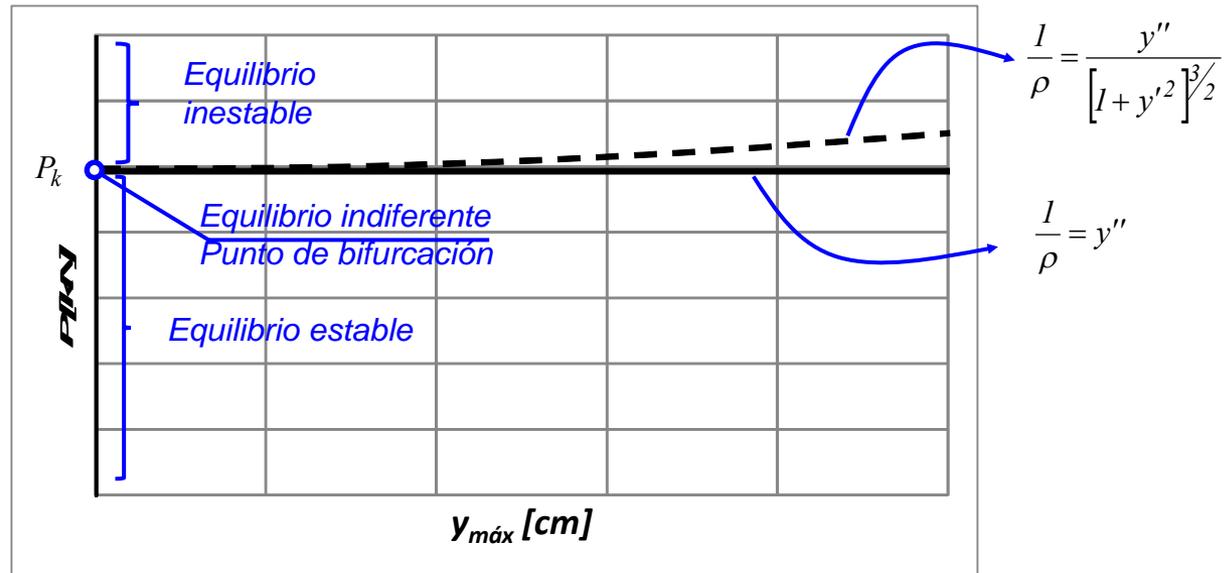
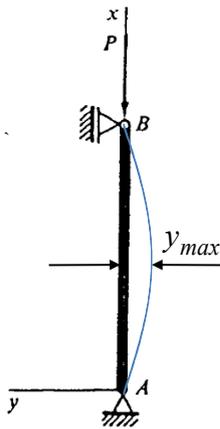
La barra puede conservarse en equilibrio en posición perturbada sólo para $P = P_k$



1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Teoría de Euler

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{l^2}$$

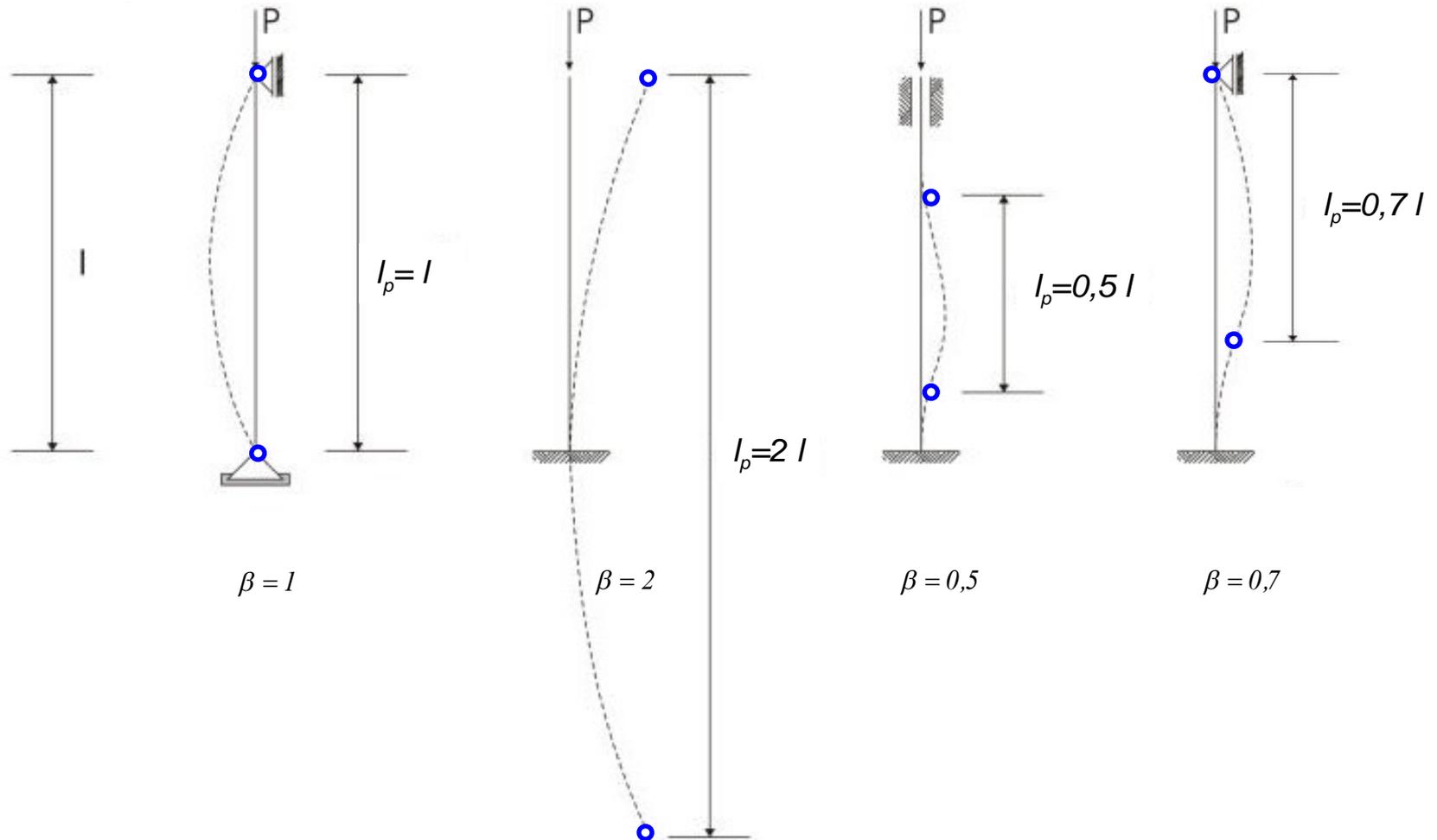


La barra puede conservarse en equilibrio en posición perturbada sólo para $P=P_k$
MÁS ALLÁ DE LA CARGA CRÍTICA HABRÁ UNA **PERDIDA DE LA ELÁSTICA** DE LA DEFORMACIÓN

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Influencia de las condiciones de sustentación. Luz de pandeo

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{(l_p)^2} \quad \text{con} \quad l_p = \beta \cdot l$$

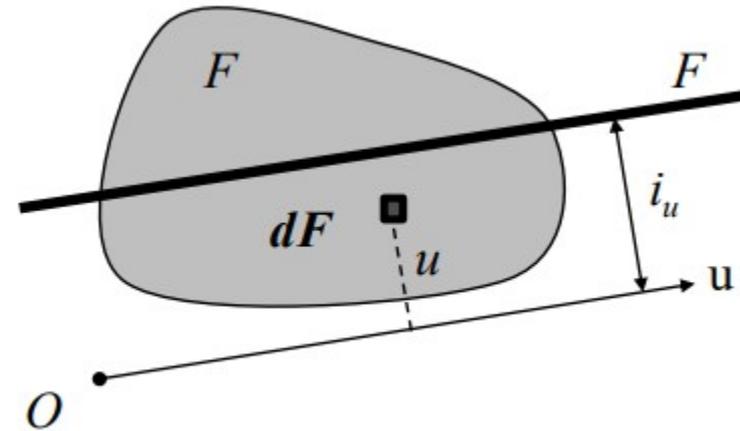


CONCEPTO DE RADIO DE GIRO

Consideramos una figura de área

- ° F y un cierto eje u . Se define con radio de giro axial i_u de la figura con respecto al eje u a la siguiente expresión:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} \quad \text{Con} \quad J_u = \iint_F u^2 dF$$



Obsérvese que un fleje de la misma área F paralelo al eje u , a una distancia i_u , posee el mismo momento de inercia axial:

$$J_u = \iint_F i_u^2 dF = i_u^2 \iint_F dF = i_u^2 F \quad \text{Por lo que} \rightarrow \quad i_u^2 = \frac{J_u}{F}$$

En definitiva, el radio de giro axial de una figura con respecto a un eje, se interpreta geoméricamente como la distancia (a dicho eje) a la cual habría que concentrar toda su área, sin que cambie el momento de inercia axial con respecto al mismo eje.

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

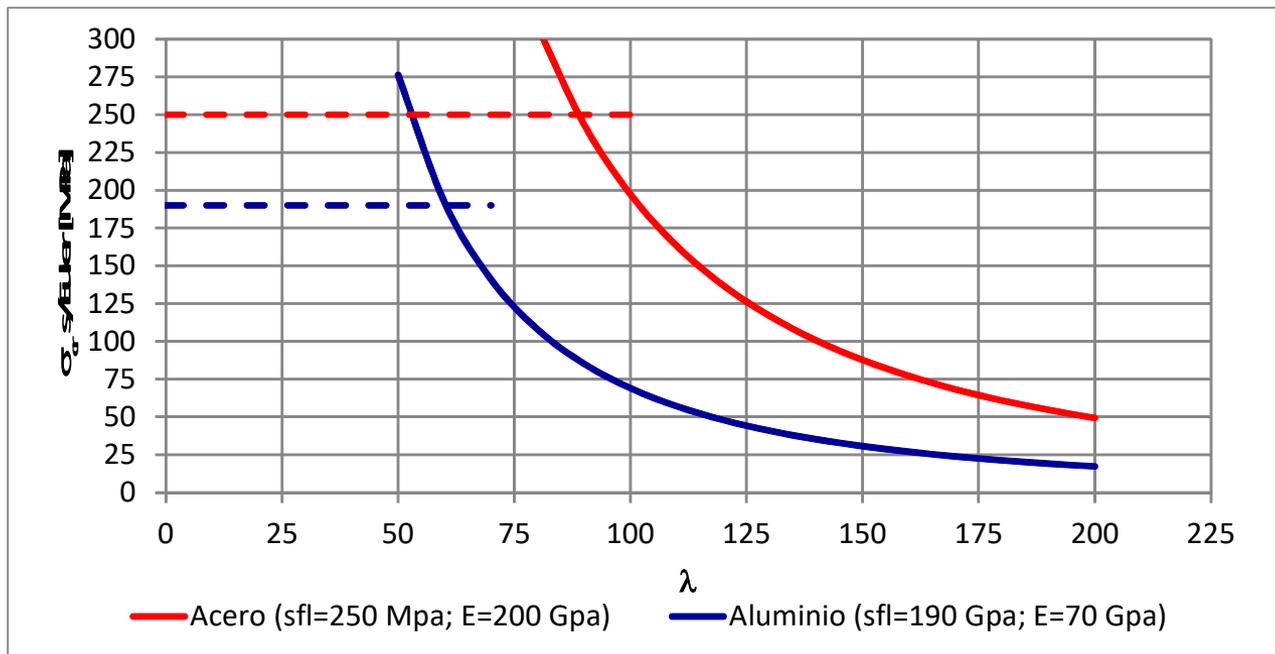
Pandeo elástico. Hipérbola de Euler

Siendo la carga crítica de Euler $P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{l^2}$

Dado que la perturbación puede aplicarse en cualquier dirección, lo más desfavorable es que sea tal que produzca flexión en torno al eje de menor momento de inercia. En tal caso, el valor de P_{cr} sería el mínimo, por lo que su expresión debe re-escribirse como

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{l^2}$$

La tensión crítica es: $\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{F \cdot l^2} \Rightarrow \sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{min}^2}{l^2} \Rightarrow \sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$ con $\lambda = \frac{l}{i_{min}}$ (esbeltez)



1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Compresión excéntrica de barras esbeltas

Se considera una barra cargada con una fuerza excéntrica. Para pequeños valores de P , dado que la deformación es pequeña, el momento en cualquier sección es sólo $Mf_z = Pe$. Sin embargo, a medida que la carga va aumentando, ya no es posible despreciar la deformación, por lo que el momento se torna $Mf_z = P(e+f-y)$, quedando la ecuación:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = Mf_z = P \cdot (f + e - y)$$

Haciendo $k = \sqrt{\frac{P_k}{E \cdot J_z}}$ queda: $\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \cdot y = k^2(f + e)$

Cuya solución general es: $y = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x) + f + e$

Luego deben determinarse las constantes C_1 , C_2 y la flecha f , también incógnita, bajo las condiciones:

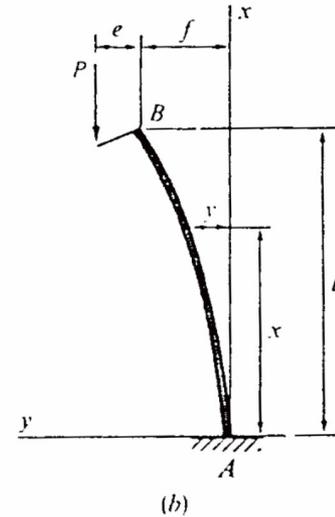
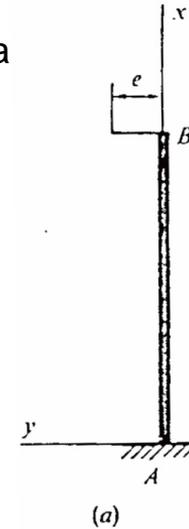
$y_{(x=0)} = 0 \Rightarrow C_2 + f + e = 0$

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x=0)} = 0 \Rightarrow C_1 \cdot k = 0$

$y_{(x=l)} = f \Rightarrow f = C_1 \cdot \sin(k \cdot l) + C_2 \cdot \cos(k \cdot l) + f + e$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{e}{\cos(k \cdot l)} \cdot (1 - \cos(k \cdot l)) \\ f &= \frac{e}{\cos(k \cdot l)} \cdot (1 - \cos(k \cdot l)) \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo, la línea elástica queda: $y = \frac{e}{\cos(k \cdot l)} \cdot (1 - \cos(k \cdot x))$



1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Compresión excéntrica de barras esbeltas

Siendo la línea elástica: $y = \frac{e}{\cos(k \cdot l)} \cdot (1 - \cos(k \cdot x))$

Y la flecha: $f = \frac{e}{\cos(k \cdot l)} \cdot (1 - \cos(k \cdot l))$

El momento máximo, en el empotramiento, es:

$$Mf_{z \max} = P \cdot (f + e) = \frac{P \cdot e}{\cos(k \cdot l)} = \frac{P \cdot e}{\cos\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot J_z}} \cdot l\right)}$$

$$Mf_{z \max} = P \cdot e \cdot \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot J_z}} \cdot l\right)} = Mf_{z \max}^I \cdot A$$

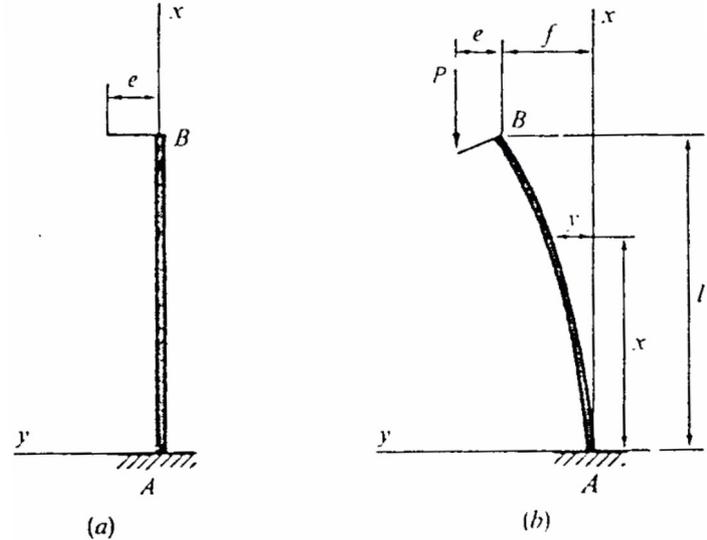
Siendo: $\begin{cases} Mf_{z \max}^I = P \cdot e & \text{el momento calculado por teoría del primer orden} \\ A = \frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{P}{E \cdot J_z}} \cdot l\right)} & \text{el factor de amplificación por teoría de segundo orden} \end{cases}$

Si la carga aumenta, la flecha crece más rápidamente.

La carga que hace tender a infinito a la flecha es la crítica:

$$f \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \cos(k \cdot l) = 0 \quad \Rightarrow \quad k \cdot l = \sqrt{\frac{P_k}{E \cdot J_z}} \cdot l = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{4 \cdot l^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{(2 \cdot l)^2}$$

Notar que este valor es independiente de la excentricidad e

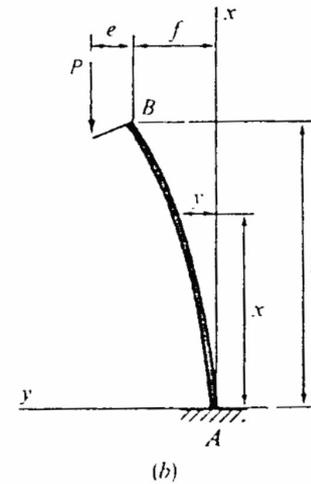
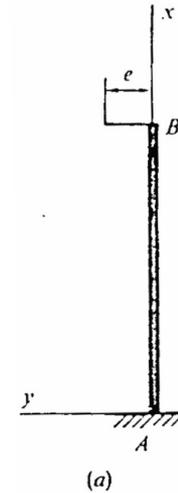
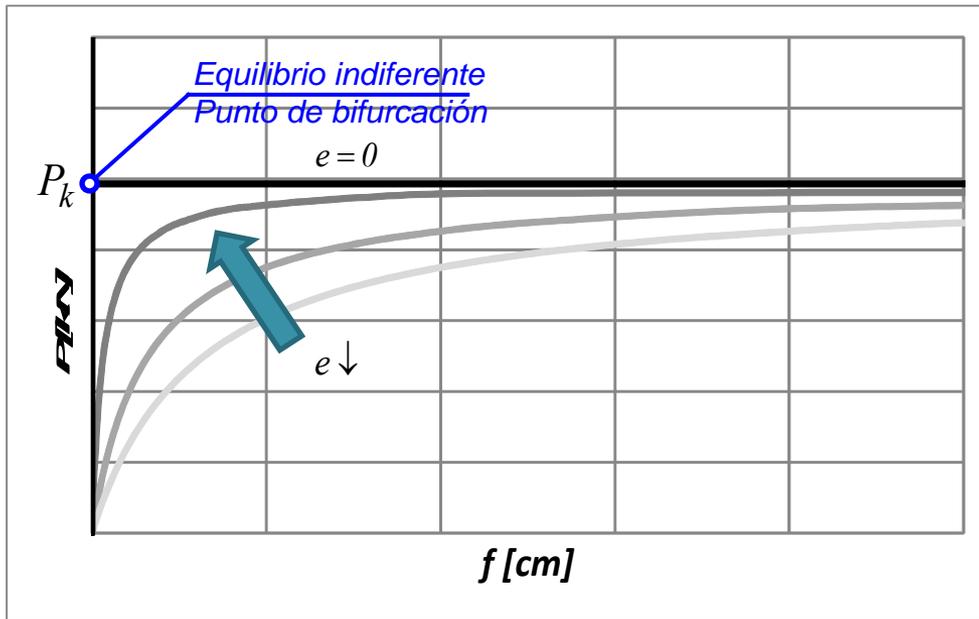


1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Compresión excéntrica de barras esbeltas

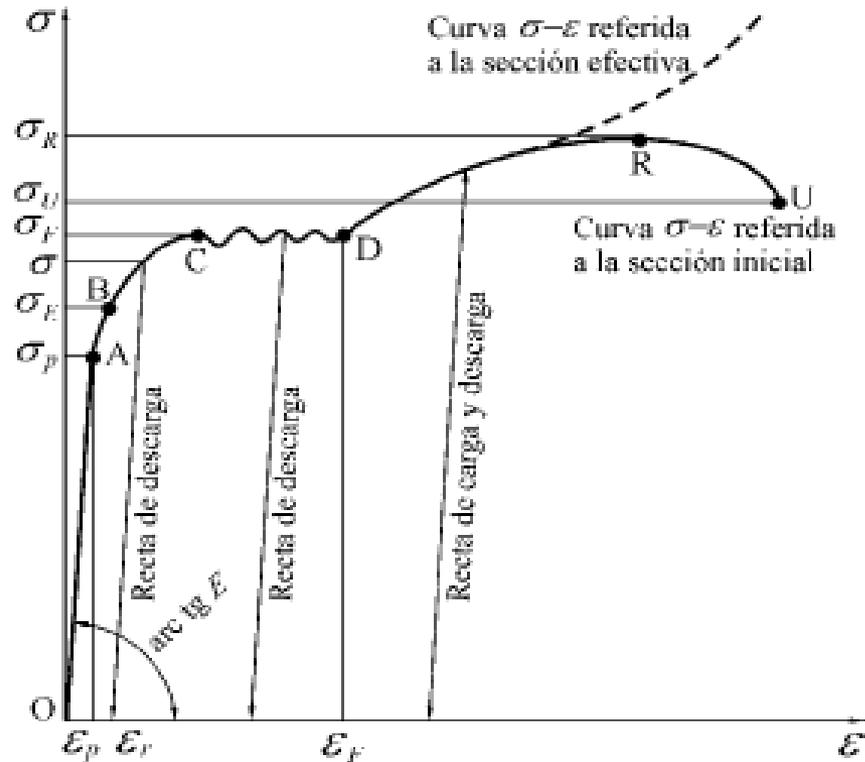
Siendo:

$$f = \frac{e}{\cos(k \cdot l)} \cdot (1 - \cos(k \cdot l)) \quad k = \sqrt{\frac{P_k}{E \cdot J_z}} \quad P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{4 \cdot l^2}$$



1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo anelástico. Límite de aplicación de la fórmula de Euler



Donde:

σ = tensión de tracción.

P = carga de tracción.

F = área de la sección normal a la barra.

ϵ = deformación específica producida por P .

Δl = alargamiento producida por P .

l = longitud de la barra cuando $P = 0$.

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

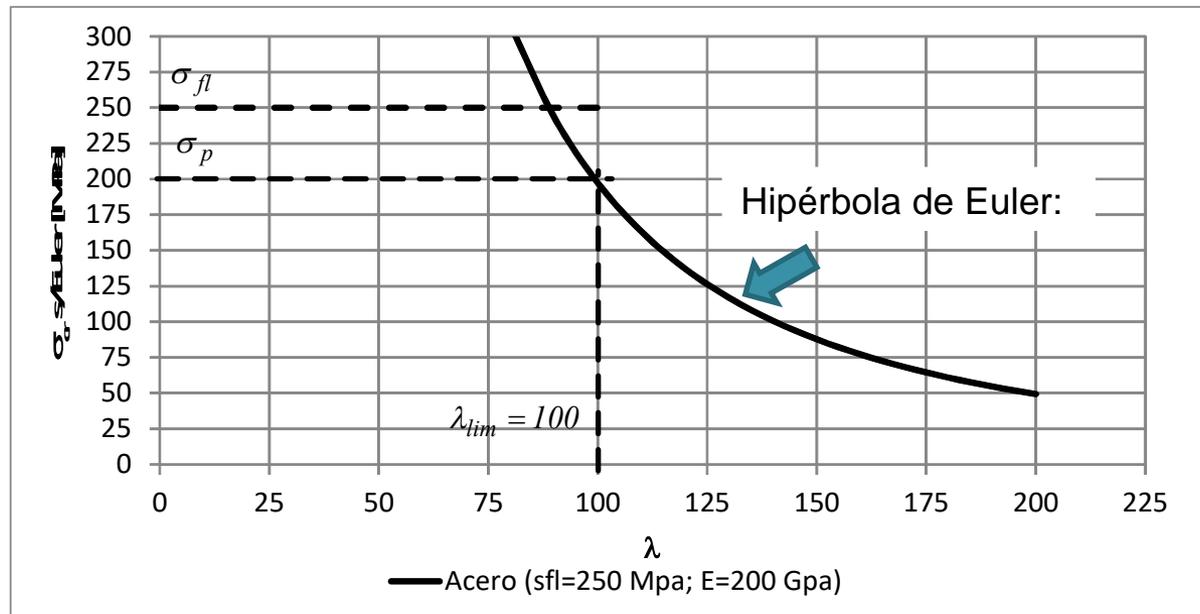
Pandeo anelástico. Límite de aplicación de la fórmula de Euler

La expresión de Euler sólo es válida mientras que la tensión se mantenga por debajo del límite de proporcionalidad del material σ_p , lo que corresponde en general a columnas largas. Las columnas intermedias fallan por pandeo en el rango anelástico y las columnas cortas, no se vuelven inestables, sino que simplemente fallan por fluencia.

El límite de la aplicación de la expresión de Euler puede establecerse como:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_{lim}^2} = \sigma_p \quad \Rightarrow \quad \lambda_{lim} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}}$$

Para acero, por ejemplo: $\sigma_p = 200 \cdot MPa$ $E = 200000 \cdot MPa$ $\Rightarrow \quad \lambda_{lim} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 200000}{200}} \cong 100$



1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo anelástico. Teorías de Navier y Tetmajer

Navier fue el primero que hizo notar que por encima de la tensión de proporcionalidad σ_p la hipérbola de Euler no se cumplía, por lo que dio la siguiente expresión:

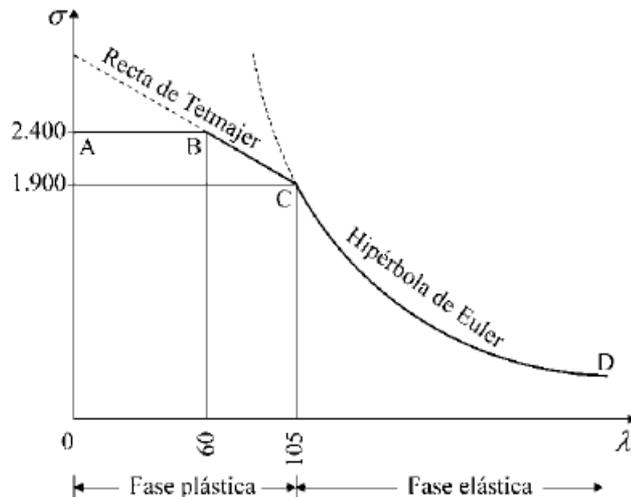
$$\sigma_k = 300 - 1,2 \cdot \lambda \quad [\sigma] = \text{MPa}$$

Tetmajer, luego de cuidadosos ensayos, propuso una ecuación casi semejante:

$$\sigma_k = 300 - 1,29 \cdot \lambda \quad [\sigma] = \text{MPa}$$

En la antigua norma DIN 1935 se tomaron las siguientes ecuaciones para el diagrama $\sigma_k - \lambda$

En la fase elástica	Hipérbola de Euler	Para $\lambda \geq 105$	$\sigma_k = \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{E}{E}$
En la fase plástica	Recta de Tetmajer	Para $60 < \lambda < 105$	$\sigma_k = 3100 - 11,40 \lambda$
	Recta horizontal constante	Para $0 < \lambda < 60$ Limitación Reglamentaria	$\sigma_k = 2400 \text{ Kg/cm}^2$



Este método de operar tenía el mérito de su simplicidad, aparte de que las normas se mantenían por debajo de los valores obtenidos experimentalmente. Sin embargo con el transcurso del tiempo, se observaron algunas fallas más bien conceptuales, como las siguientes:

- ✓ En B no había una continuidad entre las rectas AB y BC.
- ✓ En C no se produce una tangencia entre la recta de Tetmajer BC y la hipérbola de Euler CD.

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo anelástico. Primera teoría de Engesser – Módulo Tangente (1889)

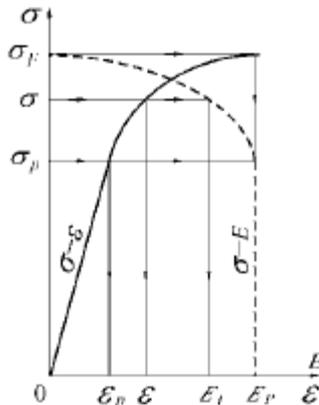
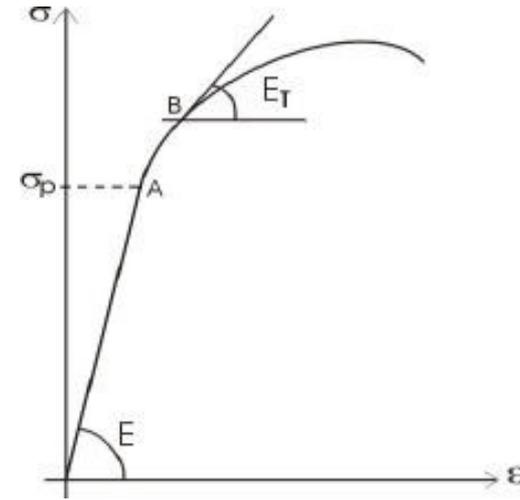
Se considera que por encima del límite de proporcionalidad el módulo de elasticidad E disminuye a E_T y es variable mientras que la tensión varía entre σ_p y σ_{fl} :

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

Si para un cierto valor de carga el estado tensional se representa con un punto como el B en el diagrama de tensión-deformación, y a través de un incremento ΔP la carga llega a su valor crítico, la rigidez del material en ese momento está dada instantáneamente por la tangente a la gráfica, E_T . En función de ello propuso la expresión siguiente:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E_T}{\lambda^2}$$

Como las tensiones correspondientes a los módulos referidos a la tangente se pueden obtener a partir del diagrama $\sigma-\varepsilon$, la relación $\lambda = l_p / i_{\min}$ a la cual la columna alcanzará el equilibrio indiferente, se puede calcular a partir de la ecuación mostrada.



Para $\sigma = \sigma_p \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_p \Rightarrow E_t = E_p = 210 \text{ GPa}$

Para $\sigma = \sigma_F \Rightarrow \varepsilon \cong \infty \Rightarrow E_t = 0$

Para $\sigma_p < \sigma < \sigma_F \Rightarrow \varepsilon, \text{ se calcula} \Rightarrow E_t, \text{ se calcula}$

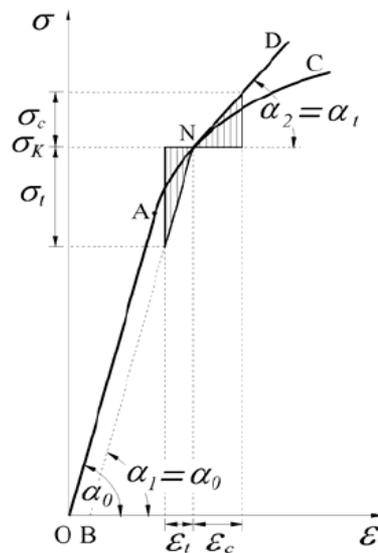
1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo anelástico. Segunda teoría de Engesser – Doble Módulo (1895)

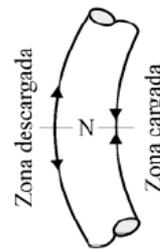
Se considera una barra de eje recto cargada axialmente con una fuerza P que produce una tensión por encima de σ_p indicada con el punto N .

Al producir una perturbación por flexión, las fibras cóncavas aumentarán su tensión, siguiendo la recta ND , mientras que las convexas aliviarán su tensión siguiendo la recta NB .

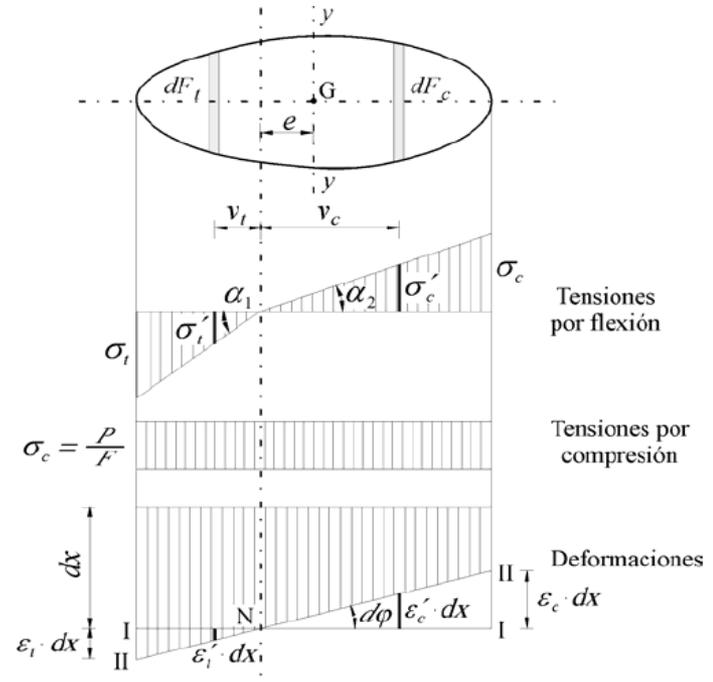
Esta teoría acepta la hipótesis de Bernoulli, es decir que las secciones se mantienen planas, aún en el campo anelástico. Ensayos demuestran que esta validez es también aceptable para materiales no homogéneos como el hormigón.



(a)



(b)



(c)

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo anelástico. Segunda teoría de Engesser – Doble Módulo (1895)

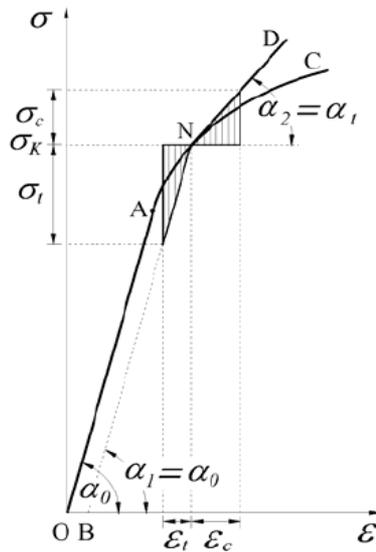
Planteando el equilibrio de tensiones de flexión:

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad - \int_{F_t} dY_t + \int_{F_c} dY_c = 0$$

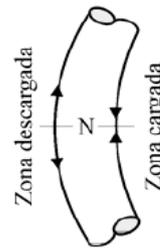
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} = P \cdot w(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{F_t} v_t \cdot \sigma'_t \cdot dF_t + \int_{F_c} v_c \cdot \sigma'_c \cdot dF_c + P \cdot w = 0$$

Se llega que: $a\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot T}{\lambda^2}$ con $T = \frac{E \cdot I_t + E_t \cdot I_c}{I}$ $I_t = \int_{F_t} v_t^2 \cdot dF_t$ $I_c = \int_{F_c} v_c^2 \cdot dF_c$

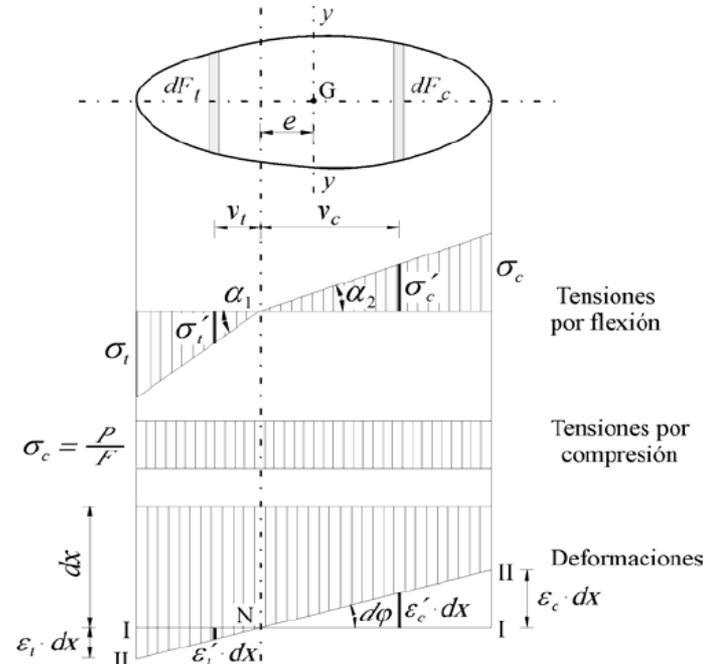
T : módulo de Engesser- Von Karman



(a)



(b)

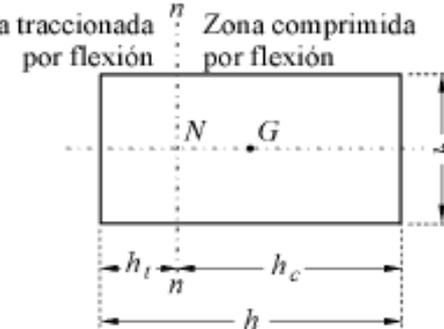


(c)

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo anelástico. Segunda teoría de Engesser – Módulo Secante (1895)

Ejemplo de cálculo del módulo T para una sección rectangular: Zona traccionada por flexión \bar{n} Zona comprimida por flexión



$$S_{F_t} = b \cdot h_t \cdot \frac{h_t}{2} = \frac{b \cdot h_t^2}{2} \quad \text{y} \quad S_{F_c} = b \cdot h_c \cdot \frac{h_c}{2} = \frac{b \cdot h_c^2}{2}$$

$$-E \cdot S_{F_t} + E_t \cdot S_{F_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad -E \cdot \frac{b \cdot h_t^2}{2} + E_t \cdot \frac{b \cdot h_c^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E \cdot h_t^2 = E_t \cdot h_c^2$$

Cálculo de h_t

$$E \cdot h_t^2 = E_t \cdot (h - h_t)^2$$

$$\sqrt{E} \cdot h_t = \sqrt{E_t} \cdot (h - h_t)$$

$$\sqrt{E} \cdot h_t = \sqrt{E_t} \cdot h - \sqrt{E_t} \cdot h_t$$

$$h_t (\sqrt{E} + \sqrt{E_t}) = \sqrt{E_t} \cdot h$$

$$h_t = h \cdot \frac{\sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_c = \frac{b \cdot h_c^3}{3}$$

$$I_t = \frac{b \cdot h_t^3}{3}$$

Cálculo de h_c

$$E \cdot (h - h_c)^2 = E_t \cdot h_c^2$$

$$\sqrt{E} \cdot (h - h_c) = \sqrt{E_t} \cdot h_c$$

$$\sqrt{E} \cdot h - \sqrt{E} \cdot h_c = \sqrt{E_t} \cdot h_c$$

$$\sqrt{E} \cdot h = (\sqrt{E} + \sqrt{E_t}) \cdot h_c$$

$$h_c = h \cdot \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$$

$$T = \frac{E \cdot I_t + E_t \cdot I_c}{I} = \frac{E \cdot \frac{b \cdot h_t^3}{3} + E_t \cdot \frac{b \cdot h_c^3}{3}}{\frac{b \cdot h^3}{12}} = 4 \cdot \frac{E \cdot h_t^3 + E_t \cdot h_c^3}{h^3} =$$

$$= 4 \cdot \left[E \cdot \left(\frac{\sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \right)^3 + E_t \cdot \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \right)^3 \right] =$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{E \cdot E_t \cdot \sqrt{E_t}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}) \cdot (\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} + \frac{E \cdot E_t \cdot \sqrt{E}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}) \cdot (\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \right] =$$

$$= 4 \cdot \frac{E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \cdot \frac{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$$

$$T = \frac{4 \cdot E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}$$

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Teoría de Engesser-Karman según norma DIN 4114.

Se establece una relación tensión-deformación para el período anelástico de la forma:

$$\frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} = \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \quad \sigma_P \leq \sigma \leq \sigma_F.$$

Considerando que $\sigma_P = 0,80 \sigma_F$, se despeja el valor de σ :

$$\sigma = \sigma_F \cdot \left(0,80 + 0,20 \cdot \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon \cdot E - 0,80 \cdot \sigma_F}{0,20 \cdot \sigma_F} \right)$$

Recordando:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E}{\cosh^2 \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P}} \Rightarrow E_t = E \cdot \left(1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right) = E \cdot \left[1 - \left(\frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2 \right]$$

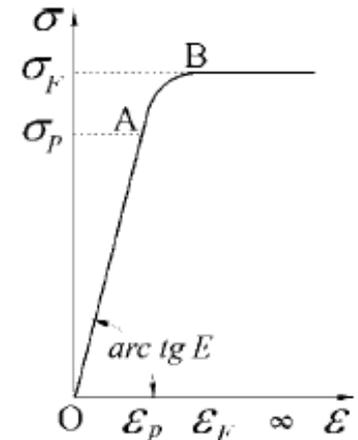
Introduciendo la ecuación de Engesser-Karman para sección rectangular:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot T}{\lambda^2} \quad T = \frac{E \cdot I_t + E_t \cdot I_e}{I}$$

Queda

:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_k}{E}} \cdot \left[0,5 + \frac{0,1 \cdot \sigma_{fl}}{\sqrt{(0,2 \cdot \sigma_{fl})^2 - (\sigma_k - 0,8 \cdot \sigma_{fl})^2}} \right]$$



1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Teoría de Engesser-Karman según norma DIN 4114.

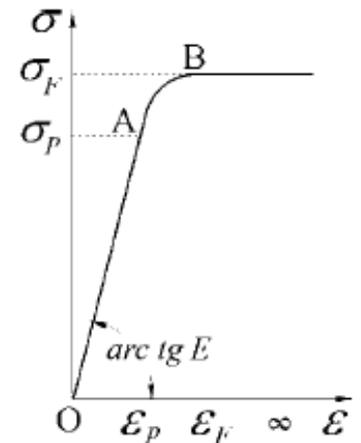
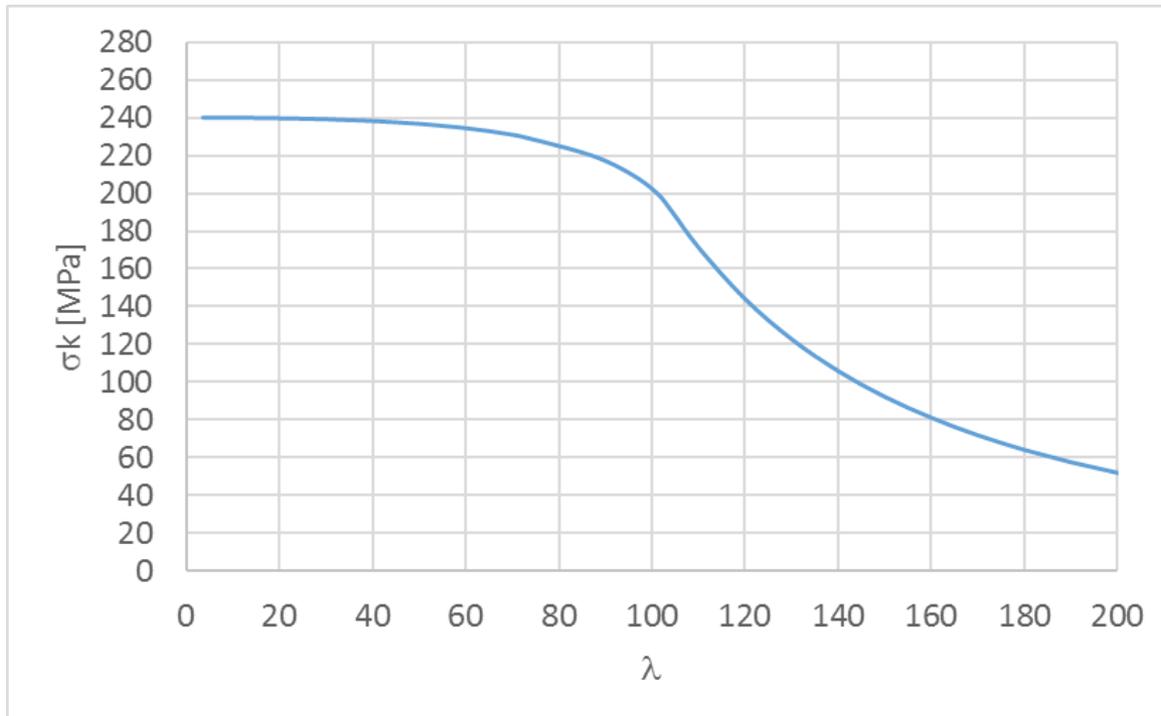
$$\frac{I}{\lambda} = \frac{I}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_k}{E}} \cdot \left[0,5 + \frac{0,1 \cdot \sigma_{fl}}{\sqrt{(0,2 \cdot \sigma_{fl})^2 - (\sigma_K - 0,8 \cdot \sigma_{fl})^2}} \right] \quad \lambda \leq \lambda_{lim}$$

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad \lambda \geq \lambda_{lim}$$

$$\sigma_f = 240 \text{ MPa}$$

$$\sigma_p = 190 \text{ MPa}$$

$$\lambda_{lim} = 100 \text{ MPa}$$



1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Teoría de Engesser-Karman según norma DIN 4114. Generalidades

En las barras rectas comprimidas axialmente y en las piezas prismáticas, solicitadas únicamente por fuerzas axiales y que sólo experimenten un pandeo por flexión, hay que distinguir (según las hipótesis establecidas para el cálculo) tres valores teóricos diferentes de la compresión crítica:

- a) P_{ki} como la **carga de pandeo ideal de Euler**, deducida bajo la hipótesis de una validez ilimitada de la ley de Hooke, en conjunto con otras suposiciones igualmente ideales (barra perfectamente recta, compresión exactamente centrada, isotropía perfecta de material).
- b) P_K como la **carga crítica usual de Engesser**, para cuya obtención se prescinde de la validez ilimitada de la ley de Hooke, manteniendo sin embargo, las otras hipótesis ideales (barra perfectamente recta, compresión exactamente centrada, isotropía perfecta de material).
- c) P_{Kr} como la **carga crítica real**, para cuya determinación se prescinde también de las otras hipótesis ideales del tipo geométrico (barra perfectamente recta y compresión exactamente centrada).

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Teoría de Engesser-Karman según norma DIN 4114. Generalidades

Si se parte de la carga crítica real P_{Kr} –para el dimensionado de una barra recta comprimida axialmente o de una pieza prismática no solicitada a flexión– se debe verificar que $P \leq \frac{P_{Kr}}{\nu_{Kr}}$, en donde P es la mayor carga que actúa sobre la pieza y ν_{Kr} el coeficiente de seguridad real. Asimismo, partiendo de la carga de pandeo usual (de Engesser) P_K o de la carga de pandeo ideal (de Euler) P_{Ki} , ha de comprobarse que $P \leq \frac{P_K}{\nu_K}$ o $P \leq \frac{P_{Ki}}{\nu_{Ki}}$, en donde ν_K es el coeficiente de pandeo usual (de Engesser) y ν_{Ki} el coeficiente de seguridad de pandeo ideal (de Euler).

Los coeficientes de seguridad ν_{Kr} , ν_K y ν_{Ki} han de estar comprendidos dentro de los límites que –por motivos de seguridad y de economía así como por los de experiencia y conocimientos teóricos– se establecen. Por tanto, han de fijarse tanto mayores cuanto más puedan apartarse de la realidad las hipótesis fundamentales, ideales y simplificadoras, admitidas para el cálculo.

El coeficiente de seguridad real ν_{Kr} se tomará en general siempre y cuando, para la determinación de la carga crítica real, se haya tenido en cuenta la máxima excentricidad posible en la aplicación de la fuerza, “prácticamente inevitable” y según los siguientes valores:

$\nu_{Kr} = 1,71$ Para la hipótesis de carga 1 (solicitaciones principales)

$\nu_{Ki} = 2,50$ Para la hipótesis de carga 1 (solicitaciones principales)

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Teoría de Engesser-Karman según norma DIN 4114.

Coefficiente de pandeo ω

Algunos problemas de pandeo se pueden simplificar al determinarse la carga de pandeo en una barra comprimida y articulada en sus extremos, de sección constante F e igual esfuerzo de compresión P mediante la introducción de una luz de pandeo l_p . Se aplica simplemente

$$\frac{P}{F} \leq \sigma_{c,adm}$$

Donde $\sigma_{c,adm}$ es la tensión crítica admisible a compresión de la barra. Se lleva a la forma:

$$\omega \cdot \frac{P}{F} \leq \sigma_{adm}$$

Donde σ_{adm} es la tensión admisible del material.

Luego, el coeficiente de pandeo ω queda definido como:

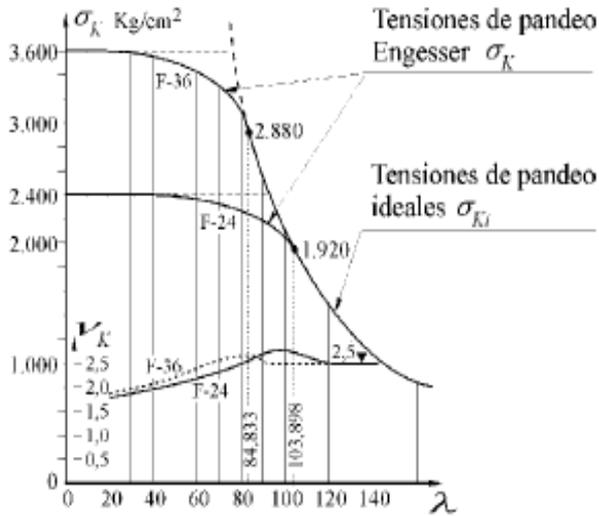
$$\omega = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{c,adm}} \quad \omega \geq 1$$

Los coeficientes de pandeo dependen del tipo de material y de la esbeltez de la barra.

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Coeficiente ω (DIN 4114)

$$\omega = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{c,adm}}$$



λ	σ_{Ki}	σ_K	$\sigma_{c, adm}$	V_K
20	51.815	2.397	1.349	1,77
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
103,898	1.920	1.920	707	2,72

Tabla 1: Coeficientes de pandeo ω para el acero St 33¹⁾ y St 37

λ	$\lambda +$										λ
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
20	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	20
30	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	30
40	1,14	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	1,18	1,19	1,19	1,20	40
50	1,21	1,22	1,23	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	50
60	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40	60
70	1,41	1,42	1,44	1,45	1,46	1,48	1,49	1,50	1,52	1,53	70
80	1,55	1,56	1,58	1,59	1,61	1,62	1,64	1,66	1,68	1,69	80
90	1,71	1,73	1,74	1,76	1,78	1,80	1,82	1,84	1,86	1,88	90
100	1,90	1,92	1,94	1,96	1,98	2,00	2,02	2,05	2,07	2,09	100
110	2,11	2,14	2,16	2,18	2,21	2,23	2,27	2,31	2,35	2,39	110
120	2,43	2,47	2,51	2,55	2,60	2,64	2,68	2,72	2,77	2,81	120
130	2,85	2,90	2,94	2,99	3,03	3,08	3,12	3,17	3,22	3,26	130
140	3,31	3,36	3,41	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	3,75	140
150	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,06	4,11	4,16	4,22	4,27	150
160	4,32	4,38	4,43	4,49	4,54	4,60	4,65	4,71	4,77	4,82	160
170	4,88	4,94	5,00	5,05	5,11	5,17	5,23	5,29	5,35	5,41	170
180	5,47	5,53	5,59	5,66	5,72	5,78	5,84	5,91	5,97	6,03	180
190	6,10	6,16	6,23	6,29	6,36	6,42	6,49	6,55	6,62	6,69	190
200	6,75	6,82	6,89	6,96	7,03	7,10	7,17	7,24	7,31	7,38	200
210	7,45	7,52	7,59	7,66	7,73	7,81	7,88	7,95	8,03	8,10	210
220	8,17	8,25	8,32	8,40	8,47	8,55	8,63	8,70	8,78	8,86	220
230	8,93	9,01	9,09	9,17	9,25	9,33	9,41	9,49	9,57	9,65	230
240	9,73	9,81	9,89	9,97	10,05	10,14	10,22	10,30	10,39	10,47	240
250	10,55										250

Valores intermedios no necesitan ser interpolados

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Dimensionamiento – Método directo según DIN 4114

Método Directo de la DIN 4114:

Para el caso de secciones semejantes, además de que la expresión $\lambda\sqrt{\omega} = cte.$, también lo es la relación:

$$\frac{F}{i^2} = cte. = z \quad (\text{coeficiente de forma})$$

$$\zeta = \lambda \cdot \sqrt{\omega} = \frac{l_p}{i_{min}} \sqrt{\frac{\sigma_{adm} \Omega F}{P}} = \sqrt{\frac{\Omega F \sigma_{adm}}{P i_{min}^2}} = \sqrt{\frac{E \sigma_{adm} \left(\frac{l_p}{i_{min}}\right)^2}{P}} = \sqrt{\frac{z \cdot \sigma_{adm} \cdot l_p^2}{P}}$$

ζ : característica de la barra

En manuales existen tablas $\zeta - \omega - \lambda$.

Atento a la forma de la sección, en publicaciones específicas figura el valor del coeficiente z (también puede determinarse haciendo el cálculo de la relación $\frac{F}{i_{min}^2} = \frac{\Omega F}{P} = z$)

Conocido el coeficiente ζ , de la tabla respectiva sacamos un valor para ω . Se calcula:

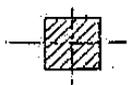
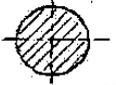
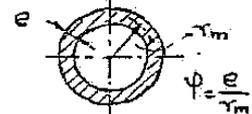
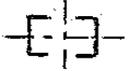
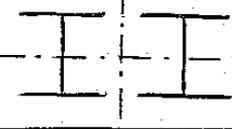
$$F_{nec} = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_{adm}}$$

Con la sección necesaria adoptamos un perfil (F', i'_{min}) . Se calcula $\lambda = \frac{l_p}{i'_{min}}$ y de tabla $\lambda - \omega$ se obtiene un valor de ω' ; se verifica entonces que:

$$\sigma = \frac{\omega' \cdot P}{F'} \leq \sigma_{adm}$$

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Dimensionamiento – Método directo según DIN 4114

SECCION		Z
		12
		4 π
		Para $\psi = 0,05 \Rightarrow Z = 0,63$ Para $\psi = 0,10 \Rightarrow Z = 1,25$ Para $\psi = 0,20 \Rightarrow Z = 2,00$
N O R M A L		10 a 12
		1
	 	1,20
G R E Y		4,1 a 4,25
		1,60

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Dimensionamiento – Método AISC (American Institute of Steel Construction)

Para columnas largas, se propone la fórmula de Euler, es decir, con un factor de seguridad de 1,92=23/12.

Así la tensión permisible resulta:

$$\sigma_{perm} = \frac{12 \cdot \pi^2 \cdot E}{23 \cdot \lambda^2} \quad \text{con} \quad \lambda_c \leq \lambda \leq 200 \quad \text{y} \quad \lambda_c = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E}{\sigma_{fl}}}$$

Suponiendo que la fórmula de Euler puede aplicarse hasta una tensión crítica de $\sigma_{fl}/2$

Las columnas que tienen relaciones de esbelteces menores que λ_c si diseñan en base a una fórmula empírica que es parabólica y tiene la forma:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \left[1 - \frac{\lambda}{2 \cdot \lambda_c^2} \right] \cdot \sigma_{fl}$$

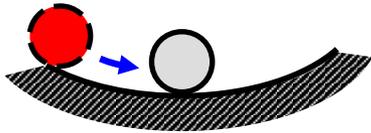
El factor de seguridad FS que se aplica depende de la esbeltez: $\frac{5}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_c} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^3$

La tensión permisible queda:

$$\sigma_{perm} = \frac{\left[1 - \frac{\lambda}{2 \cdot \lambda_c^2} \right] \cdot \sigma_{fl}}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_c} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^3}$$

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Método energético

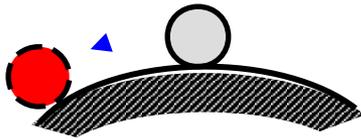


Estable

**Energía del sistema
en equilibrio**

<

**Energía del sistema
perturbado**

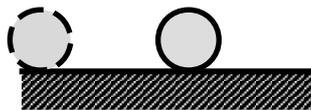


Inestable

**Energía del sistema
en equilibrio**

>

**Energía del sistema
perturbado**



Indiferente

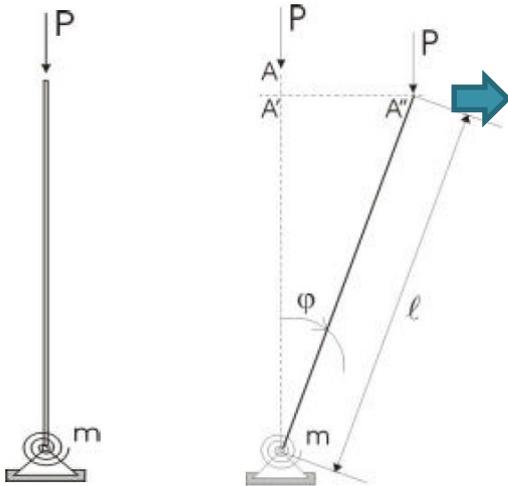
**Energía del sistema
en equilibrio**

=

**Energía del sistema
perturbado**

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Método energético



Debido a la perturbación, la fuerza P experimenta un descenso:

$$u_A = l \cdot (1 - \cos \varphi) \cong \frac{l \cdot \varphi^2}{2}$$

La fuerza P, entonces realiza un trabajo $\frac{l \cdot \varphi^2}{2}$

El incremento de energía del resorte es: $\frac{m \cdot \varphi}{2}$

$\frac{m \cdot \varphi}{2} > P \cdot \frac{l \cdot \varphi^2}{2}$ Sistema estable

$\frac{m \cdot \varphi}{2} < P \cdot \frac{l \cdot \varphi^2}{2}$ Sistema inestable

$$\frac{m \cdot \varphi}{2} = P \cdot \frac{l \cdot \varphi^2}{2} \Rightarrow \frac{m \cdot \varphi}{2} = P_k \cdot \frac{l \cdot \varphi^2}{2} \Rightarrow P_k = \frac{m}{l}$$

Por analogía se tiene con el ejemplo anterior:

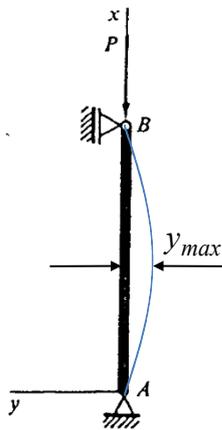
Para una barra cargada en general

ΔU trabajo de deformación por flexión de la barra; W trabajo que realiza la fuerza P durante la flexión)

- $\Delta U > W$ Sistema estable
- $\Delta U < W$ Sistema inestable
- $\Delta U = W$ Condición para determinar P_k

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Método energético



Se postula una elástica de la barra perturbada de la forma

$$y = y_{\max} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad Mf_z = P \cdot y_{\max} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pi \cdot y_{\max}}{l} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)$$

La energía de deformación de la barra por flexión es

$$\int_l \frac{Mf_z \cdot d\theta}{2} = \int_l \frac{Mf_z^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z} = \int_l \frac{P_k^2 \cdot y_{\max}^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z} =$$

$$\frac{P_k^2 \cdot y_{\max}^2 \cdot l}{4 \cdot \pi \cdot E \cdot J_z} \cdot \left[\frac{\pi \cdot x}{l} - \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi \cdot x}{l}\right) \right]_0^l = \frac{P_k^2 \cdot y_{\max}^2}{4 \cdot E \cdot J_z}$$

El corrimiento vertical del punto B es:

$$u_B = l - \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\pi}{l} \cdot y_{\max} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)\right)^2 \cdot dx =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot y_{\max}^2 \cdot \int_0^l \left(\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)\right)^2 \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{l} \cdot y_{\max}^2 \cdot \left[\frac{\pi \cdot x}{l} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi \cdot x}{l}\right) \right]_0^l = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot y_{\max}^2$$

$$\Delta U = \frac{P_k^2 \cdot y_{\max}^2}{4 \cdot E \cdot J_z}$$

$$W = P_k \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot y_{\max}^2$$

$$\Delta U = W \Rightarrow \frac{P_k^2 \cdot y_{\max}^2}{4 \cdot E \cdot J_z} = P_k \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot y_{\max}^2 \Rightarrow P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{l^2}$$

1. PANDEO DE BARRAS DE EJE RECTO

Pandeo elástico. Método energético

En caso que la ecuación de la elástica perturbada no sea conocida, se puede aproximar con:

$$y = a_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) + a_2 \cdot \sin\left(2 \frac{\pi \cdot x}{l}\right) + a_3 \cdot \sin\left(3 \frac{\pi \cdot x}{l}\right) + \dots$$

Luego se calcula el trabajo que realiza la fuerza axial P_k aplicada en B: $u_B = P_k \cdot \int_0^l \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot dx$

El trabajo de la deformación por flexión en la barra: $U = \int_0^l \frac{M_f^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_z}$

Haciendo $\Delta U = W$

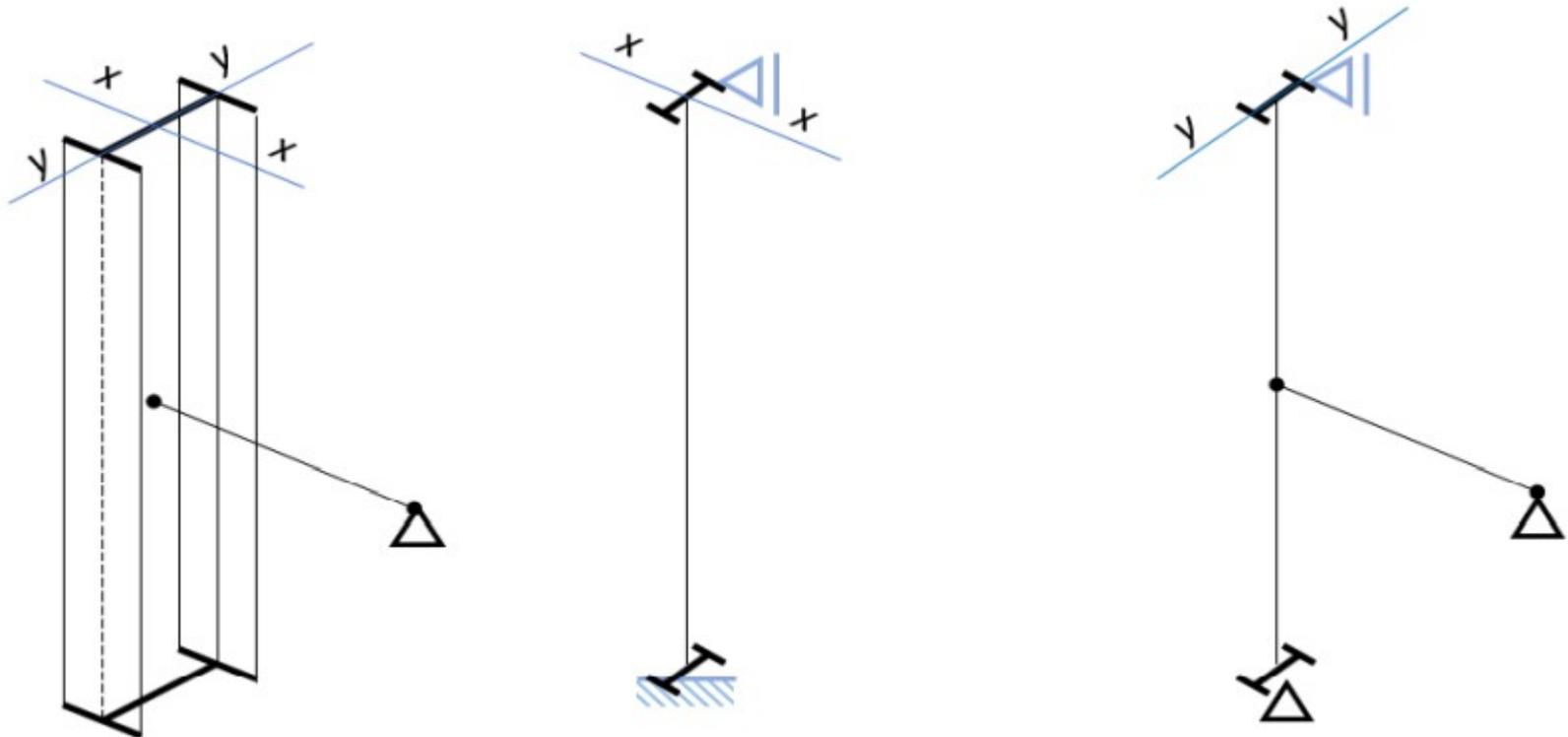
Puede obtenerse P_k , que queda en función de las constantes a_1, a_2, a_3 . $P_k = P_k(a_1, a_2, a_3, \dots)$

Los valores correctos de los coeficientes a_i son los que hacen mínimo el valor de P_k . O sea:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P_k}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial P_k}{\partial a_2} = 0 \\ \frac{\partial P_k}{\partial a_3} = 0 \\ \dots \end{array} \right\} a_1, a_2, a_3, \dots \rightarrow P_k$$

3. Ejercicio de aplicación

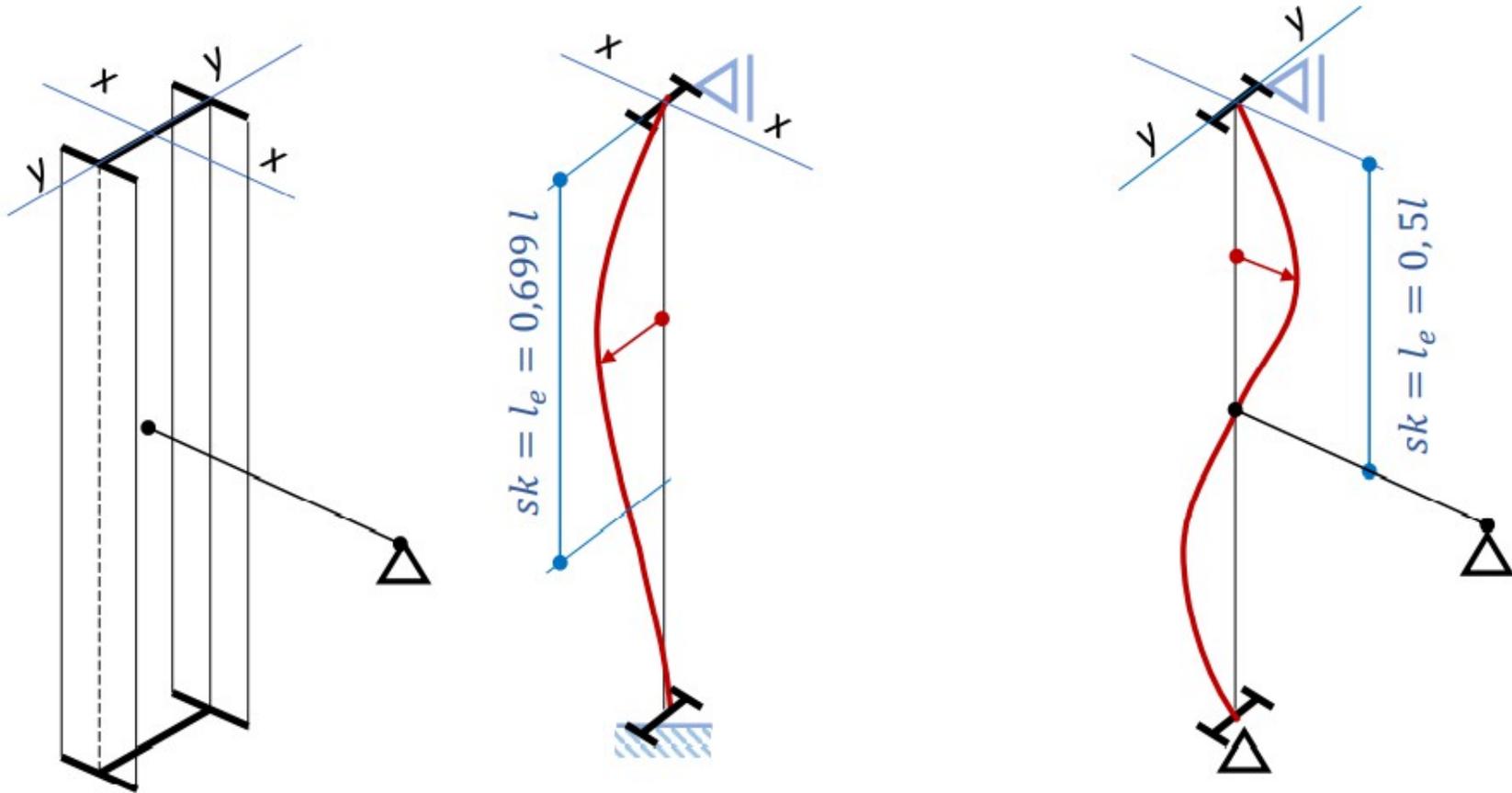
- Una columna IPN 160 se encuentra empotrada – articulada según el eje **x-x** y simplemente apoyada con un arriostramiento intermedio según **y-y**.
- ¿Cuál será la carga crítica según Euler, y cual el esfuerzo normal máximo admitido si el material es acero F24, el coeficiente de seguridad $C_s=1.6$ y la altura de la columna es de 4 m?
- Considere $E= 2100000 \text{ kgf /cm}^2$.



3. Ejercicio de aplicación – Resolución EULER

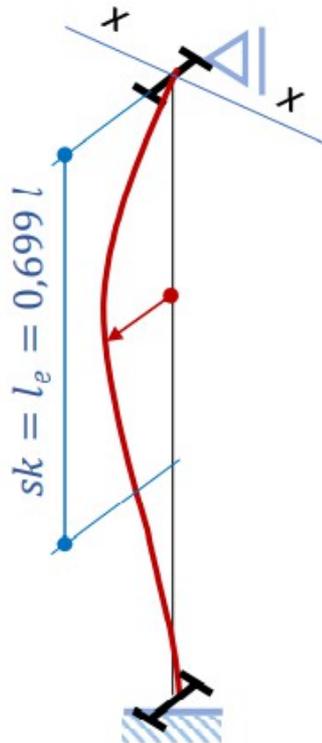
Primero analizamos las vinculaciones para determinar las longitudes

- equivalentes de pandeo:

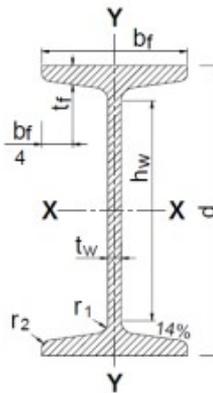


3. Resolución

Si bien el pandeo respecto del eje de mayor inercia, conceptualmente y a simple vista, no será el limitante, por procedimiento, calculamos ambos:



Pandeo según el eje x-x:



$$J_x = 935 \text{ cm}^4$$

$$F = 22.8 \text{ cm}^2$$

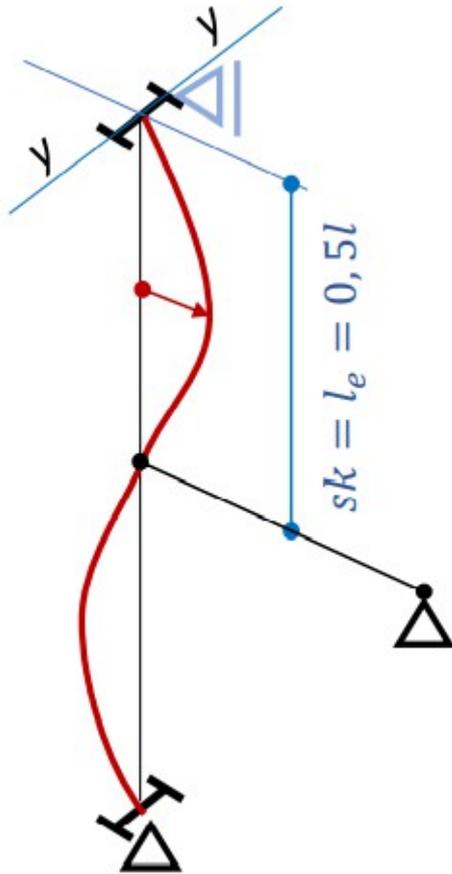
$$s_{kx} = 0.699 l = 0.699 \cdot 400 \text{ cm} = 279 \text{ cm}$$

$$P_{crx} = \frac{\pi^2 E \cdot J_x}{s_{kx}^2}$$

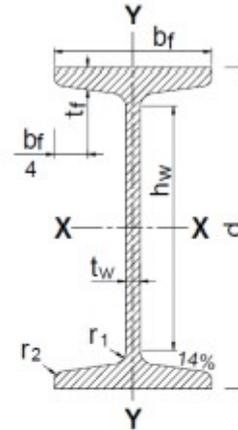
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 2100000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 935 \text{ cm}^4}{(279 \text{ cm})^2}$$

$$P_{cr} = 248956 \text{ kg}$$

3. Resolución



Pandeo según el eje y-y:



$$J_y = 54.7 \text{ cm}^4$$

$$F = 22.8 \text{ cm}^2$$

$$s_{ky} = 0.5 l = 0.5 \cdot 400 \text{ cm} = 200 \text{ cm}$$

$$P_{cr y} = \frac{\pi^2 E \cdot J_y}{s k_y^2}$$

$$P_{cr y} = \frac{\pi^2 \cdot 2100000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 54.7 \text{ cm}^4}{(200 \text{ cm})^2}$$

$$P_{cr y} = 28343 \text{ kg}$$

Claramente el pandeo sobre el eje de menor inercia será el limitante:

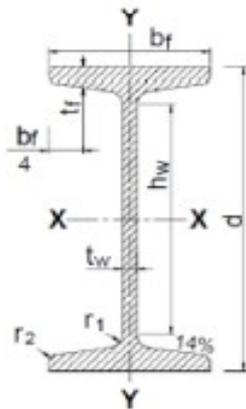
$$P_{cr} = \min[P_{cr x}, P_{cr y}] = 28.3 \text{ ton}$$

NOTA: En la carga crítica de EULER no aparece la **tensión** del material!

3. Resolución - Falla x carga de compresión

Como primera medida debemos hallar la máxima carga de compresión que no genere la falla x sollicitación axil en mi barra:

Cálculo por Sollicitación AXIL



$$F = 22.8 \text{ cm}^2$$

Acero F-24:

Coef de seguridad : $\gamma = 1.6$

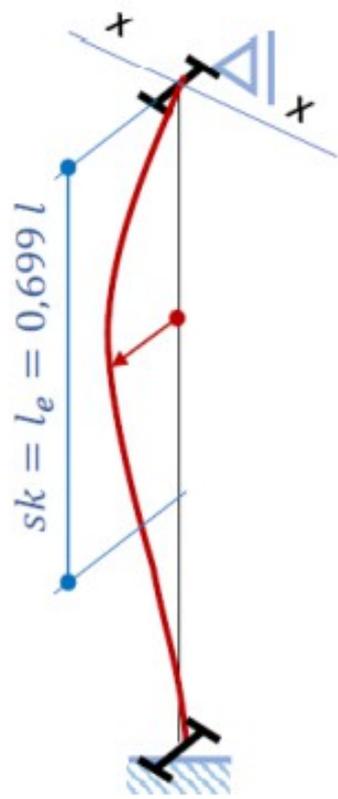
$$\sigma_{adm} = 2400 / 1.6$$

$$\rightarrow \sigma_{adm} = 1500 \text{ kg/cm}^2$$

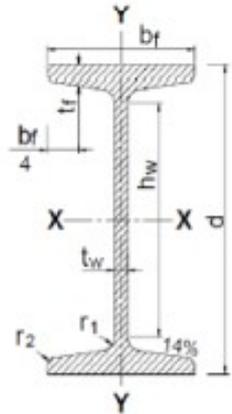
$$\frac{N_{adm}}{F} < \sigma_{adm} \quad N_{adm} = \sigma_{adm} F$$

$$N_{adm} = 1500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 22.8 \text{ cm}^2 = 34200 \text{ kg}$$

3. Resolución x método ω



Pandeo según el eje x-x:



$$i_x = 6.40 \text{ cm}$$

$$F = 22.8 \text{ cm}^2$$

$$S_{kx} = 0.699 l = 0.699 \cdot 400 \text{ cm} = 279 \text{ cm}$$

$$\lambda_x = \frac{S_{kx}}{i_x} = \frac{279 \text{ cm}}{6.40 \text{ cm}} = 44$$

¡Menor que la esbeltez mínima!

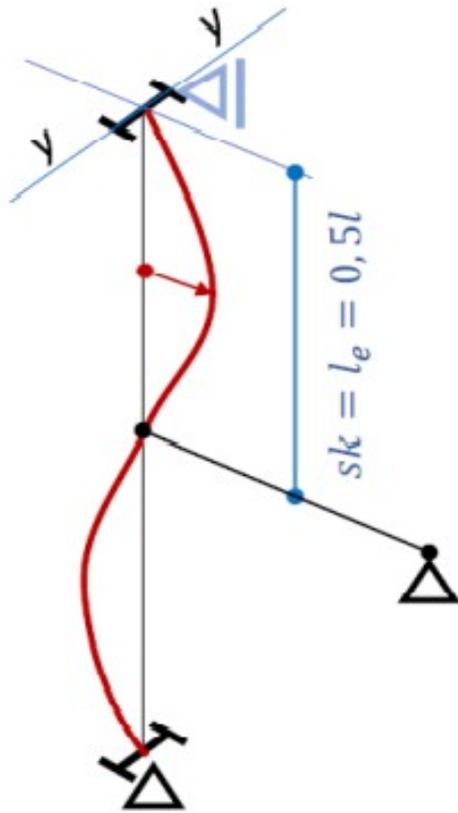
Acero F-24: $\lambda_x = 44 \rightarrow w = 1,34$

Coef de seguridad : $\gamma = 1.6 \rightarrow \sigma_{adm} = 1500 \text{ kg/cm}^2$

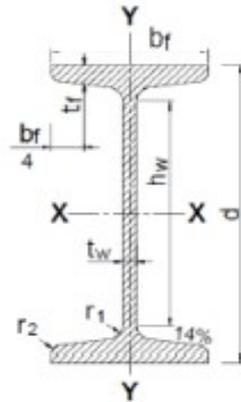
$$\frac{w \cdot N_{adm}^x}{F} < \sigma_{adm}$$

$$N_{adm}^x = \frac{\sigma_{adm} \cdot F}{w} = \frac{1500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 22.8 \text{ cm}^2}{1.34} = 22523 \text{ kg}$$

3. Resolución x método ω



Pandeo según el eje y-y:



$$i_y = 1.55 \text{ cm}$$

$$F = 22.8 \text{ cm}^2$$

$$S_{ky} = 0.5 l = 0.5 \cdot 400 \text{ cm} = 200 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{S_{ky}}{i_y} = \frac{200 \text{ cm}}{1.55 \text{ cm}} = 129$$

Acero F-24: $\lambda_y = 129 \rightarrow w = 3,21$

Coef de seguridad : $\gamma = 1.6 \rightarrow \sigma_{adm} = 1500 \text{ kg/cm}^2$

$$\frac{w \cdot N_{adm}^y}{F} < \sigma_{adm}$$

$$N_{adm} = 10655 \text{ kg}$$

$$\left\{ \begin{aligned} N_{adm}^y &= \frac{\sigma_{adm} \cdot F}{w} = \frac{1500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 22.8 \text{ cm}^2}{3,21} = 10655 \text{ kg} \\ N_{adm}^x &= 22523 \text{ kg} \end{aligned} \right.$$