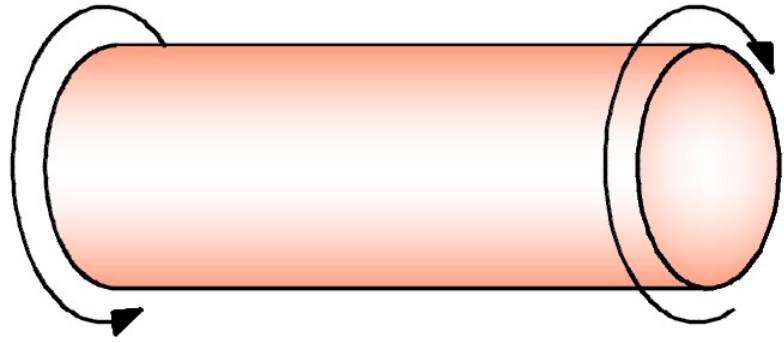


Solicitud x TORSIÓN



Estudiaremos la solicitud por torsión, que es el caso en el cual, al trazar los diagramas de características, la única solicitud que aparece en la sección es un momento torsor.

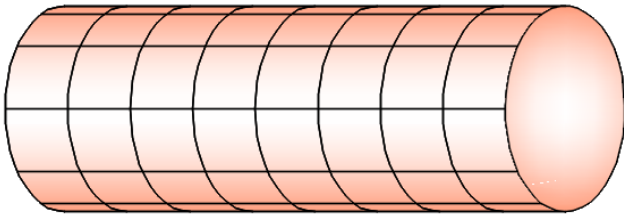
Se estudiarán las tensiones y deformaciones producidas por el efecto de un par o momento torsor. La aplicación más común es la asociada a árboles o ejes de transmisión.

La solución rigurosa la dio Saint Venant mediante la función de Airy que escapa a los alcances de Estática y Resistencia de Materiales.

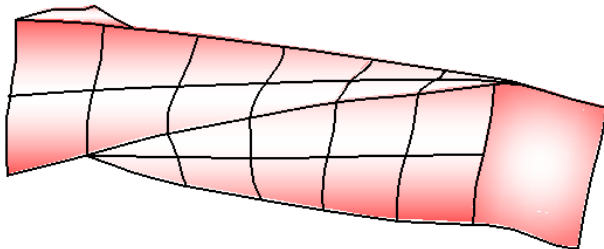
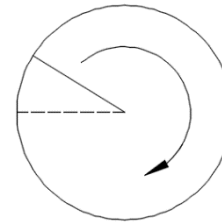
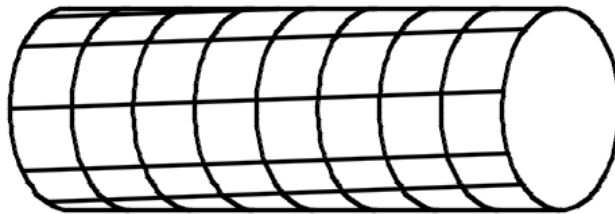
Primero resolveremos el problema mediante la Hipótesis de Coulomb (que sólo se cumple para secciones circulares).

Torsión en barras de sección circular

Hipótesis de Coulomb

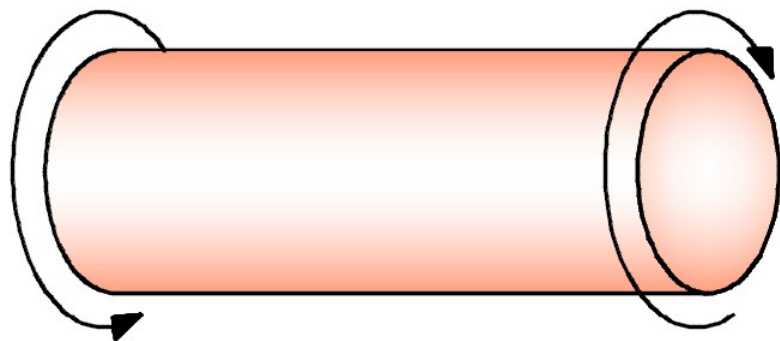


“Las secciones normales al eje longitudinal baricéntrico de la pieza permanecen planas y paralelas a si mismas luego de la deformación; y mantienen su forma”.



Esto no ocurre en secciones que no son circulares

Ecuaciones de equivalencia



Al reducir el sistema de fuerzas actuantes al baricentro de la sección sólo se obtiene un par contenido en el plano de la sección.

Por lo tanto, las ecuaciones de equivalencia se transforman en:

$$(1) \quad 0 = \int_F \sigma_z . dF$$

$$(2) \quad 0 = \int_F \tau_{zy} . dF$$

$$(3) \quad 0 = \int_F \tau_{zx} . dF$$

$$(4) \quad Mt = \int_F (\tau_{zx} y + \tau_{zy} x) . dF$$

$$(5) \quad 0 = \int_F \sigma_z . y . dF$$

$$(6) \quad 0 = \int_F \sigma_z . x . dF$$

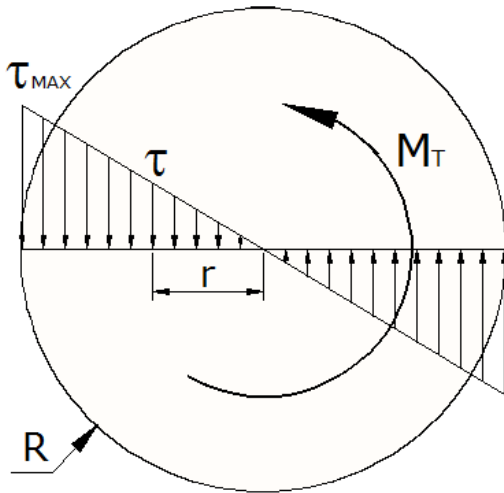
Sección circular de material elástico lineal

Determinación de las tensiones tangenciales

De acuerdo a la ley de Hooke:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\tau_r = \frac{r}{R} \tau_{Max}$$



Esta última ecuación nos dice que la ley de variación de la tensión tangencial es lineal respecto de la distancia al baricentro.

$$\text{siendo } J_P = \frac{\pi.D^4}{32}$$



$$\tau_{Max} = \frac{M_T.R}{J_P}$$

$$\tau_{Max} = \frac{16M_T}{\pi.D^3}$$

Sección circular de material elástico lineal

Ángulo de torsión específico

Partiendo de la expresión desarrollada en la teoría y a la ley de Hooke:

$$\theta = \frac{\gamma}{R} = \frac{\tau_{Max}}{G.R}$$

$$\theta = \frac{M_T}{G.J_P}$$

Ángulo de torsión total

Si queremos encontrar el ángulo de torsión total (rotación entre dos secciones separadas una distancia “l”)

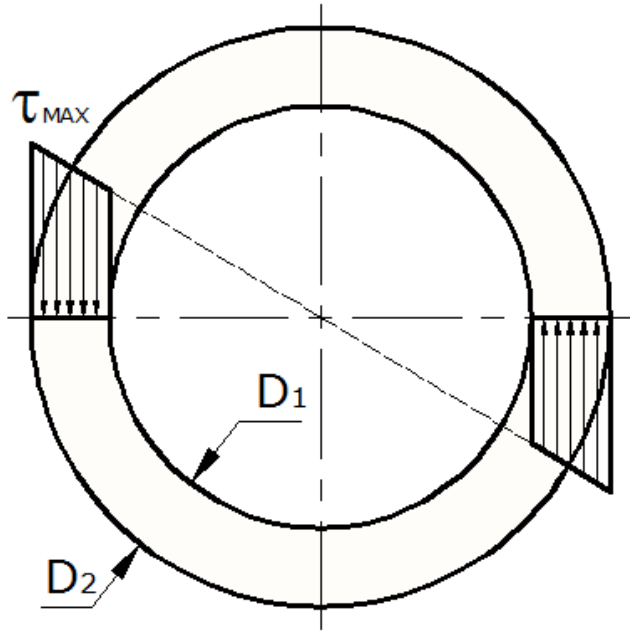
$$\Theta = \theta.l = \frac{M_T.l}{G.J_P}$$

$$\Theta = \frac{32M_T.l}{G.\pi.D^4}$$

Al producto $G.J_P$ se lo denomina rigidez a la torsión

Sección anular

Determinación de τ



$$\tau_{Max} = \frac{M_T \cdot R}{J_P} \quad J_P = \frac{\pi \cdot (D_2^4 - D_1^4)}{32}$$

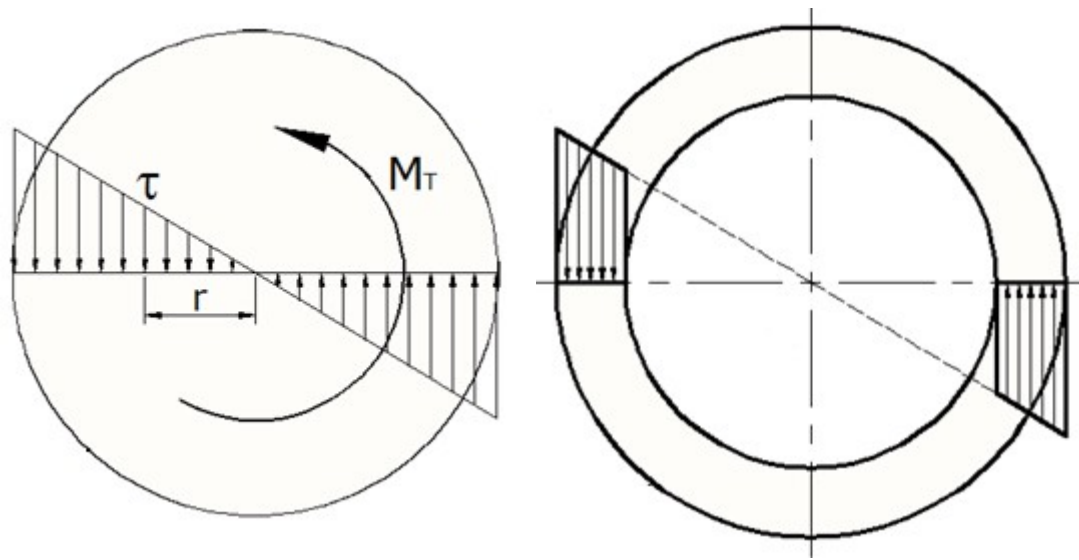
$$\tau_{Max} = \frac{16 \cdot M_T \cdot D_2}{\pi \cdot (D_2^4 - D_1^4)}$$

Ángulo de torsión

$$\Theta = \frac{M_T \cdot l}{G \cdot J_P} = \frac{M_T \cdot l}{G \cdot \frac{\pi \cdot (D_2^4 - D_1^4)}{32}}$$

$$\Theta = \frac{32 M_T \cdot l}{G \cdot \pi \cdot (D_2^4 - D_1^4)}$$

Comparación Sección anular vs. circular



Observando el diagrama de tensiones, vemos que la zona central de material colabora en forma escasa a la resistencia; en cambio en la sección anular la diferencia de tensiones no es tan importante.

Esto conduce a deducir que la sección anular permite un mejor aprovechamiento del material, de forma tal que el peso de un árbol hueco será menor que el de uno macizo para transmitir el mismo par torsor M_T .

NOTA: para el mismo M_T e igual ϕ_{ext} , como las áreas de los diagramas de tensiones son equivalentes, la τ_{MAX} de la sección anular es levemente mayor que la de la maciza equivalente, en función de la relación de $J_{polares}$

$$\tau_{Max} = \frac{16M_T \cdot}{\pi \cdot D^3}$$

$$\tau_{Max} = \frac{16 \cdot M_T \cdot D_2}{\pi \cdot (D_2^4 - D_1^4)}$$

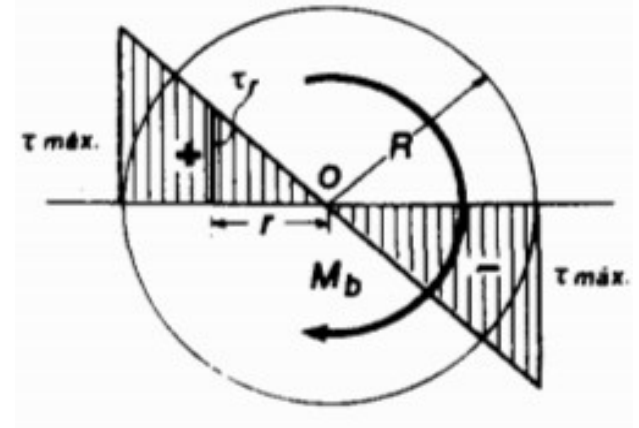
Solicitud por TORSIÓN - resumen

- Tensiones generadas:

$$\tau_{zt} = \frac{M_T \cdot R}{J_P}$$

- Deformaciones producidas:

$$\Theta = \theta \cdot l = \frac{l \cdot M_T}{J_P \cdot G}$$



Comparación de Solicitaciones

AXIL

$$\sigma_z = N_z / F$$

$$\Delta l = \frac{l \cdot N_z}{E \cdot F}$$

TORSIÓN

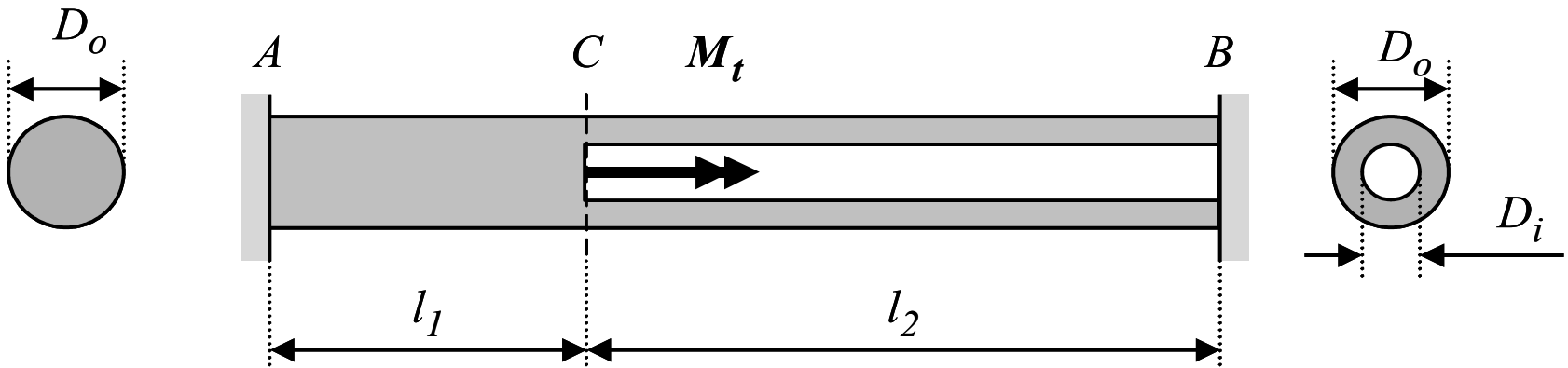
$$\tau_{zt_{\max}} = \frac{M_T \cdot R}{J_P}$$

$$\Theta = \theta \cdot l = \frac{l \cdot M_T}{J_P \cdot G}$$

Ejercicio ejemplo N° 1

La barra circular de diámetro D , que se indica en la figura, se encuentra empotrada en ambos extremos y sometida a un par torsor M_t aplicado en la sección C. De acuerdo con los datos indicados en la tabla se solicita:

- 1) Determinar las reacciones de vínculo
- 2) Realizar los diagramas de momento torsor Mt_z , ángulo de torsión total Θ y ángulo de torsión específico θ a lo largo del eje de la barra, explicitando valores
- 3) Calcular las tensiones tangenciales máximas en cada tramo



l_1	l_2	G_1	G_2	Mt	D_i	D_o
cm	cm	kN/cm ²	kN/cm ²	kN cm	cm	cm
85	125	6000	8000	95	5	15

Diagrama DEC

Lo primero que tenemos que hacer es hacer el diagrama de momentos torsores (el único D.E.C. posible en torsión pura). Y lo hacemos ya que las fórmulas, tanto de tensiones como de deformaciones, involucran pares torsores ***Mt actuantes*** en cada tramo a calcular o considerado:

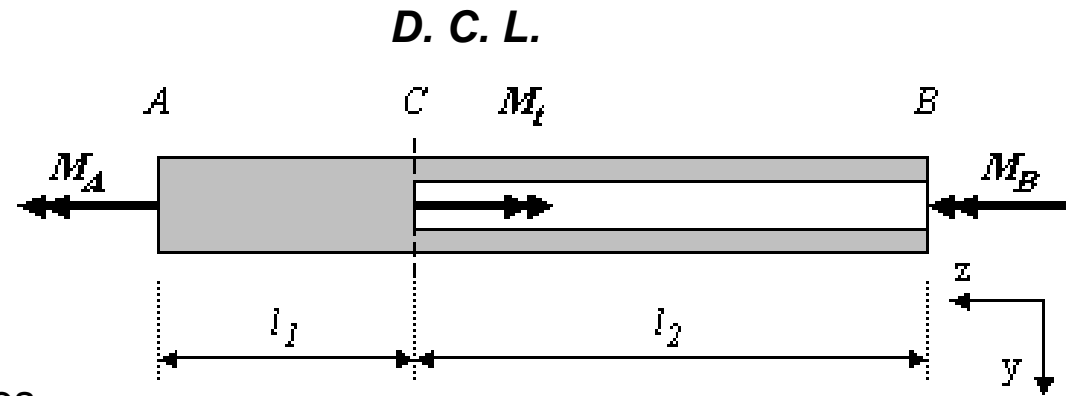
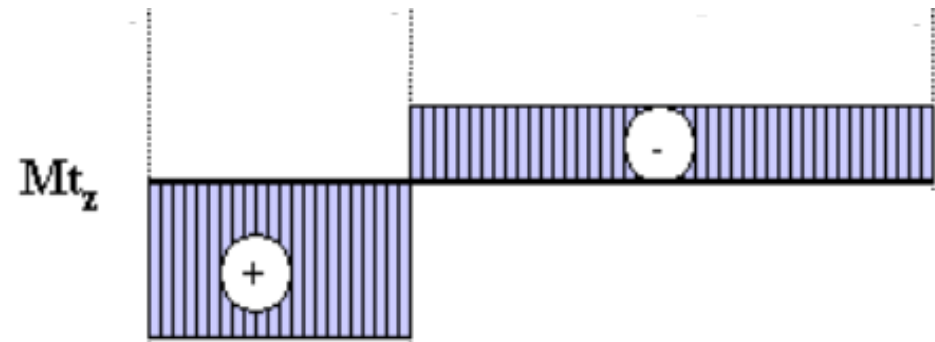


Diagrama de ***Mt actuantes***
(*estimativo no valorizado*)

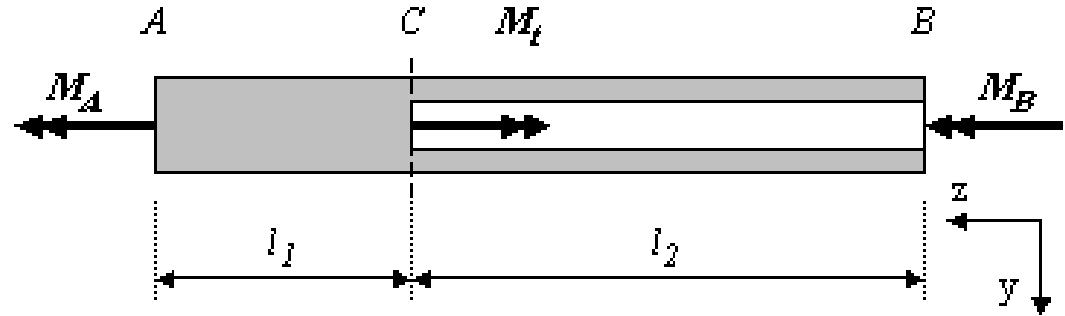


$$\tau_{zt} = \frac{M_{\text{ACTUANTE}} \cdot R}{J_P}$$

$$\Theta = \frac{l \cdot M_{\text{ACTUANTE}}}{J_P \cdot G}$$

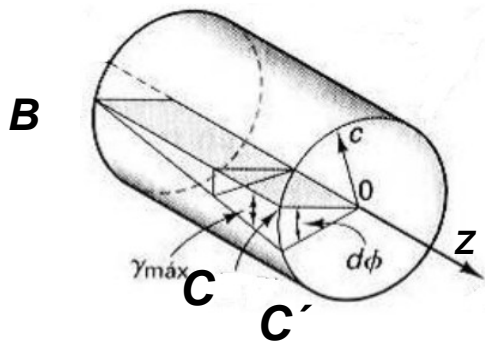
Determinar las reacciones de vínculo

D. C. L.



1) Equilibrio Estático. La única ecuación que permite la estática es: $M_A + M_B = M_t$ (1)

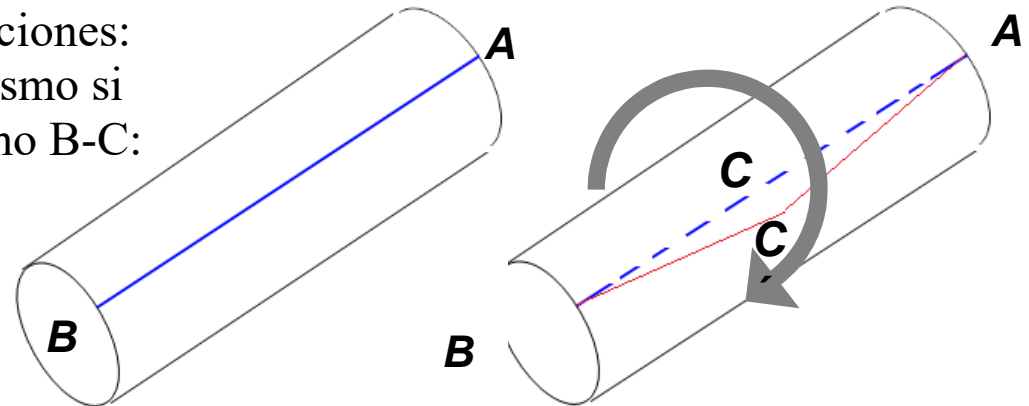
2) Equilibrio Elástico. Ecuación de compatibilidad geométrica o de deformaciones: el ángulo de torsión total en "C" es el mismo si lo considero en el tramo A-C o en el tramo B-C:



$$\frac{M_A \cdot l_1}{G_1 \cdot J_{o1}} = \frac{M_B \cdot l_2}{G_2 \cdot J_{o2}} \quad (2)$$

$$J_{o1} = \frac{\pi \cdot D_o^4}{32}$$

$$J_{o2} = \frac{\pi \cdot (D_o^4 - D_i^4)}{32}$$



(1) y (2) configuran un sistema de 2 ec x 2 ?

Jo1	Jo2	MA	MB
cm4	cm4	kNm	kNm
4970,11	4908,75	50,1194	44,8806

Diagramas

$Mt_{z(A')}$	$Mt_{z(C')}$	$Mt_{z(C'')}$	$Mt_{z(B')}$
kNm	kNm	kNm	kNm
50,1194	50,1194	44,8806	44,8806

$$Mt_{z(A')} = Mt_{z(C')} = M_A$$

$$Mt_{z(C'')} = Mt_{z(B')} = -M_B$$

$$\frac{\Theta}{l} = \frac{M_{\text{ACTUANTE}}}{J_p \cdot G}$$

Mt_z

$\theta_{(A')}$	$\theta_{(C')}$	$\theta_{(C'')}$	$\theta_{(B')}$
°/m	°/m	°/m	°/m
0,01	0,01	0,01	0,01

$$\theta_{(A')} = \theta_{(C')} = \frac{M_A}{G_1 \cdot J_{o1}}$$

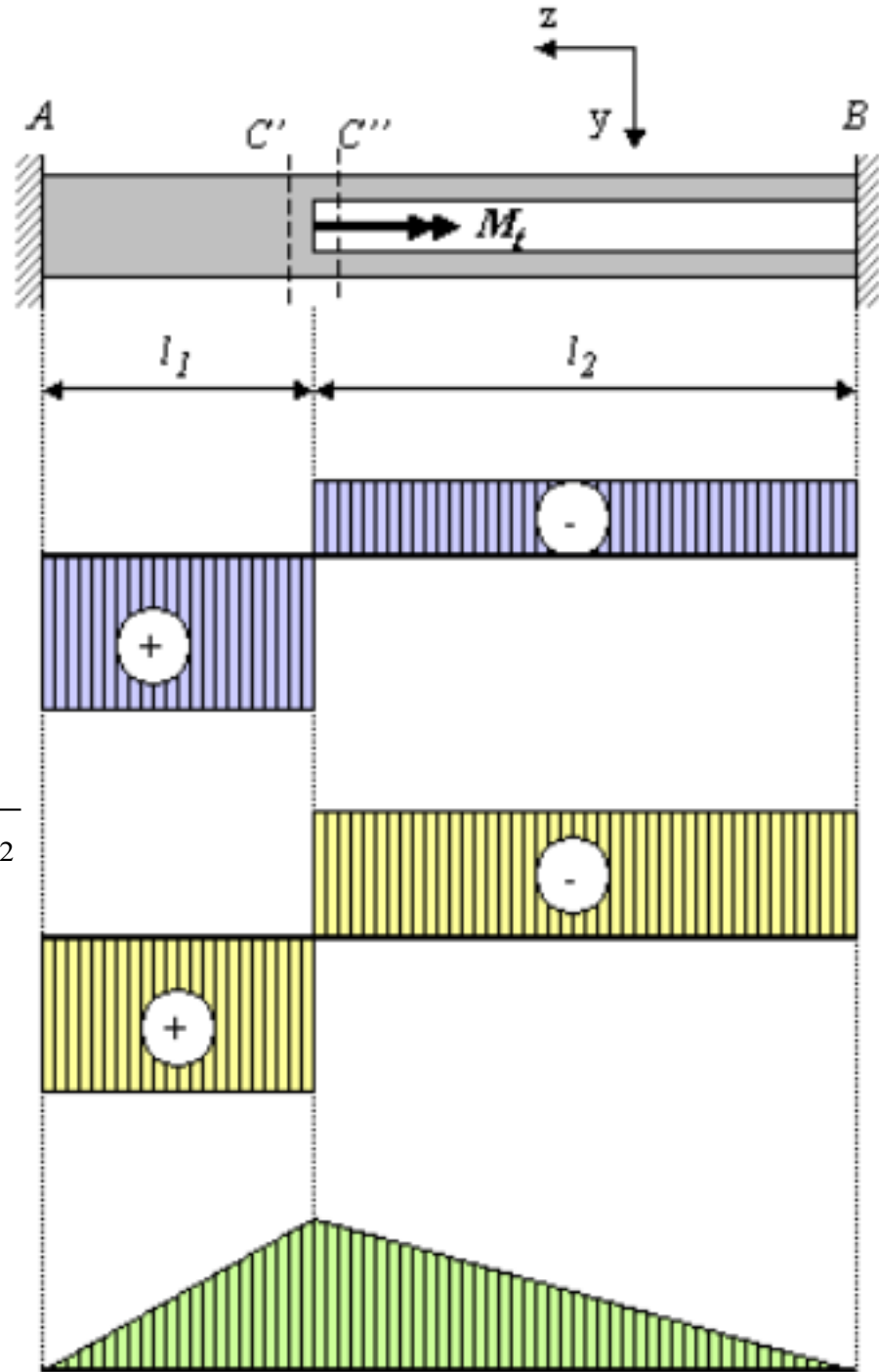
$$\theta_{(C'')} = \theta_{(B')} = -\frac{M_B}{G_2 \cdot J_{o2}}$$

$$\Theta = \frac{l \cdot M_{\text{ACTUANTE}}}{J_p \cdot G}$$

$\Theta_{(A)}$	$\Theta_{(B)}$	$\Theta_{(C)}$
°	°	°
0	0	0,0082

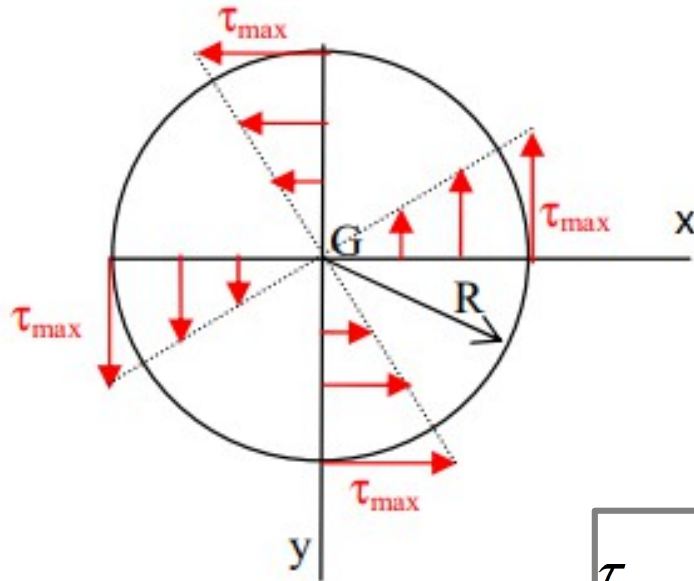
$$\Theta_{(A)} = \Theta_{(B)} = 0$$

$$\Theta_{(C)} = \frac{M_A \cdot l_1}{G_1 \cdot J_{o1}} = \frac{M_B \cdot l_2}{G_2 \cdot J_{o2}}$$



Calcular las tensiones tangenciales máximas en cada tramo:

SECCIÓN CIRCULAR

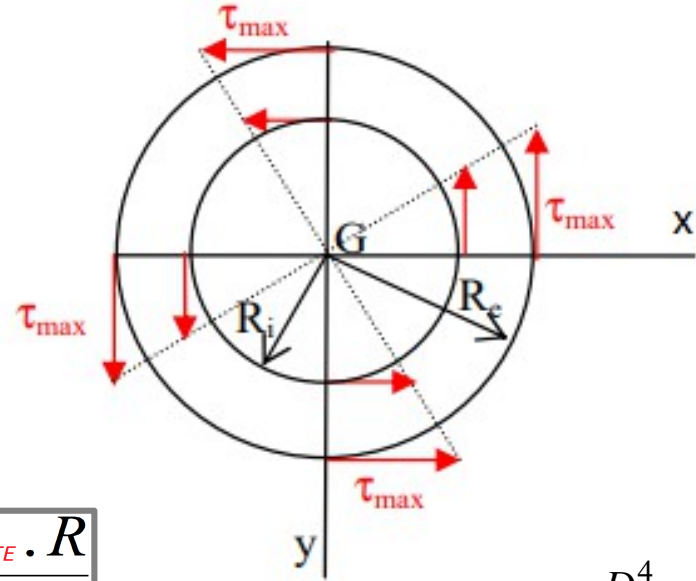


$$\tau_{zt} = \frac{M_{\text{ACTUANTE}} \cdot R}{J_P}$$

Tramo 1 (A-C):

$$\tau_{m\acute{a}x1} = \frac{Mt_A}{J_{o1}} \cdot \frac{D_o}{2}$$

SECCIÓN CIRCULAR HUECA



$$J_{o1} = \frac{\pi \cdot D_o^4}{32}$$

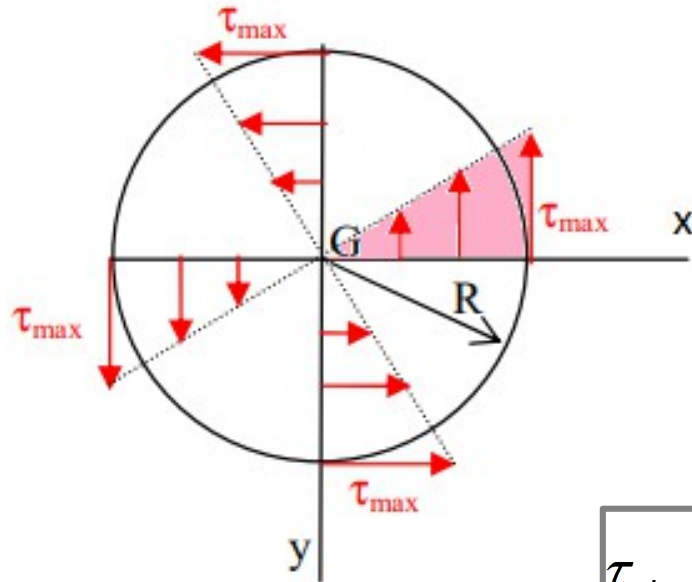
$$J_{o2} = \frac{\pi \cdot (D_o^4 - D_i^4)}{32}$$

Tramo 2 (B-C):

$$\tau_{m\acute{a}x2} = \frac{Mt_B}{J_{o2}} \cdot \frac{D_o}{2}$$

Calcular las tensiones tangenciales máximas en cada tramo:

SECCIÓN CIRCULAR



$$\tau_{zt} = \frac{M_{\text{ACTUANTE}} \cdot R}{J_P}$$

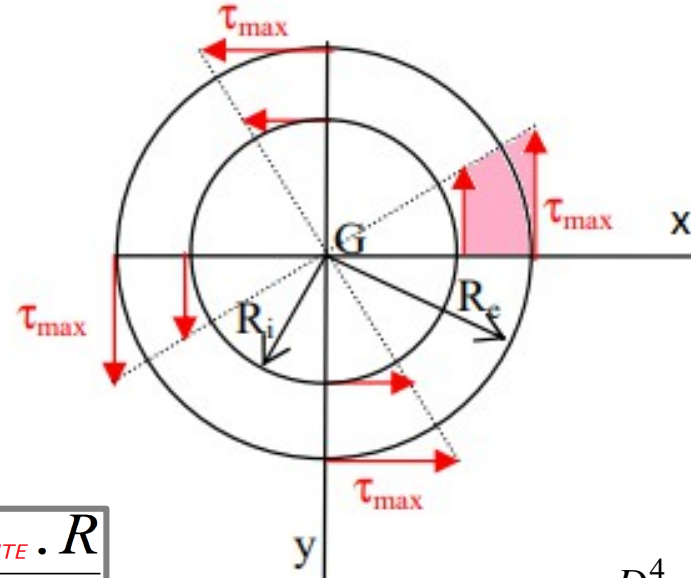
Tramo 1 (A-C):

$$\tau_{\text{máx1}} = \frac{Mt_A}{J_{o1}} \cdot \frac{D_o}{2}$$

Tramo 2 (B-C):

$$\tau_{\text{máx2}} = \frac{Mt_B}{J_{o2}} \cdot \frac{D_o}{2}$$

SECCIÓN CIRCULAR HUECA



$$J_{o1} = \frac{\pi \cdot D_o^4}{32}$$

$$J_{o2} = \frac{\pi \cdot (D_o^4 - D_i^4)}{32}$$

$\tau_{\text{máx1}}$	$\tau_{\text{máx2}}$
kN/cm ²	kN/cm ²
0,07563	0,06857

Aplicación para cálculo de árboles de transmisión:

Con frecuencia, los ejes y tubos con secciones circulares se utilizan para transmitir la potencia desarrollada por un motor. Cuando se utiliza con este fin, se somete al eje a un par torsor (que se denomina árbol) que depende de la **potencia** generada por la máquina y de la **velocidad angular** del eje.

La potencia se define como el trabajo realizado por unidad de tiempo. Por su parte, el trabajo transmitido por un eje giratorio es igual al par aplicado por el ángulo de torsión. Por lo tanto, si durante un período de tiempo dt un par de torsión Mt aplicado hace que el eje gire un ángulo $d\Theta$, entonces la potencia instantánea es:

$$\dot{L} = \frac{Mt d\Theta}{dt}$$

Como la velocidad angular del eje es $\omega = d\Theta/dt$, la potencia puede expresarse de la siguiente manera:

$$\dot{L} = Mt \omega$$

Para poder utilizar esta expresión deben emplearse unidades consistentes. Por ejemplo en el sistema SI (SIMELA para nuestro país), la velocidad angular ω se mide en seg^{-1} , el momento torsor Mt se mide en kN m y, en consecuencia, la potencia L en kJ/seg . Sin embargo, estas no son unidades empleadas normalmente en la práctica.

Al medirse la potencia en CV, llamándola N , la velocidad angular en rpm, llamándola n , y el momento en kN cm , llamándolo Mt , la expresión anterior se convierte en:

$$Mt [\text{kN.cm}] = 716,2 N/n$$

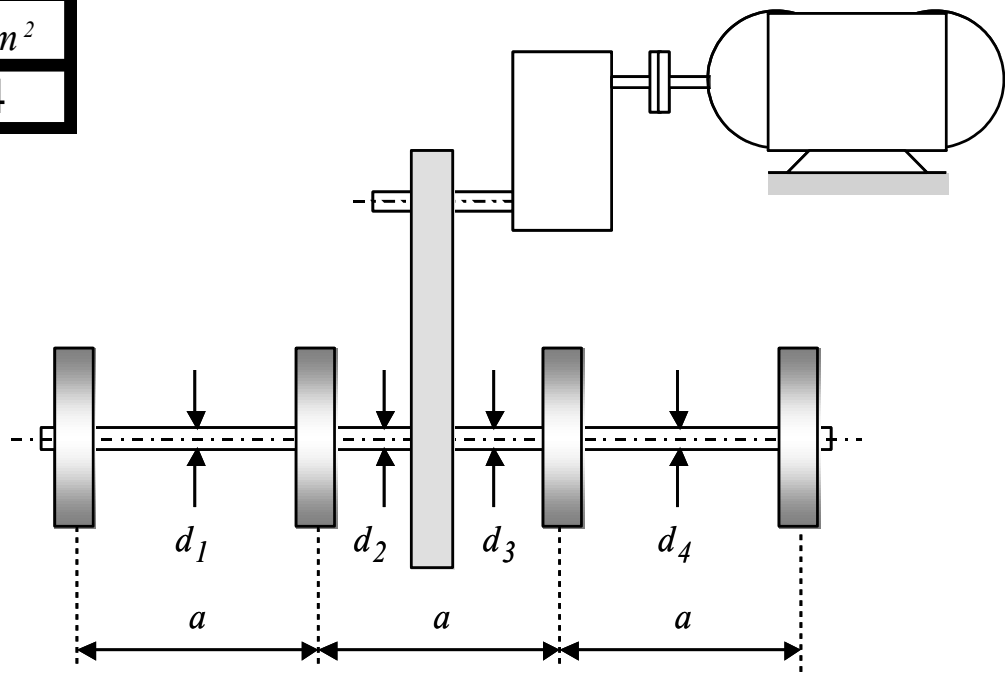
Para las unidades del sistema técnico:

$$Mt [\overline{\text{kg.cm}}] = 71620 N [\text{CV}] / n [\text{rpm}]$$

Ejercicio ejemplo N° 2

Dado un árbol motriz sobre el cual están montadas cuatro ruedas según se observa en la figura, y de acuerdo con lo indicado en la tabla de valores, se solicita calcular los diámetros de los ejes d_1 , d_2 , d_3 y d_4 .

N	n	τ_{adm}
HP	$r.p.m.$	kN/cm^2
400	800	4



Condiciones de borde o de cálculo:

- 1) Consideramos la potencia en CV (para uso del coeficiente más usado en la práctica).
Recordemos que 1 HP son 1,0138 CV
- 2) Consideramos que los rendimientos mecánicos son ideales (no existen pérdidas de potencia).
- 3) Consideramos que las 4 cuplas reactivas son iguales.
- 4) Consideramos para el cálculo la situación más desfavorable o comprometida: las 4 cuplas reactivas toman potencia simultáneamente.

- (1) Si obtenemos de la chapa de características técnicas del motor eléctrico el número n [rpm] y la potencia N [CV], el Mt entregado por el motor será **$Mt \text{ [kN.cm]} = 716,2 \text{ N/n} = 358 \text{ kNcm}$**
- (2) Si no existen pérdidas de potencia puedo considerar que el par entregado por el motor será el mismo aplicado al eje cuyos diámetros deberé calcular: $Mt = 358 \text{ kNcm}$
- (3) $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_i$

Dimensionamiento por resistencia (tensiones):

$$\tau_{adm} \geq \tau_{m\acute{a}x} = \frac{Mt_{ACTUANTE}}{J_o} \cdot \frac{D}{2} = \frac{Mt_{ACTUANTE}}{W_o} \quad \longrightarrow \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16 Mt}{\pi \cdot \tau_{adm}}}$$

con $W_o = \pi \cdot D^3/16$

Dimensionamiento (cálculo de los diámetros):

Lo primero que tenemos que hacer es hacer el diagrama de momentos torsores (el único D.E.C. posible en torsión pura). Y lo hacemos ya que las fórmulas, tanto de tensiones como de deformaciones, involucran pares torsores M_t actuantes en cada tramo a calcular o dimensionar

M_t actuantes

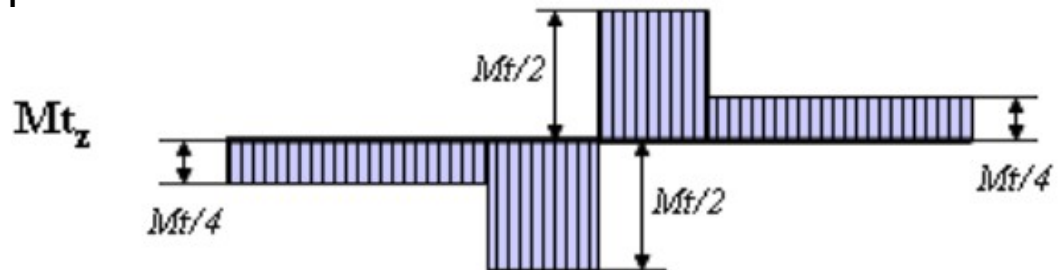
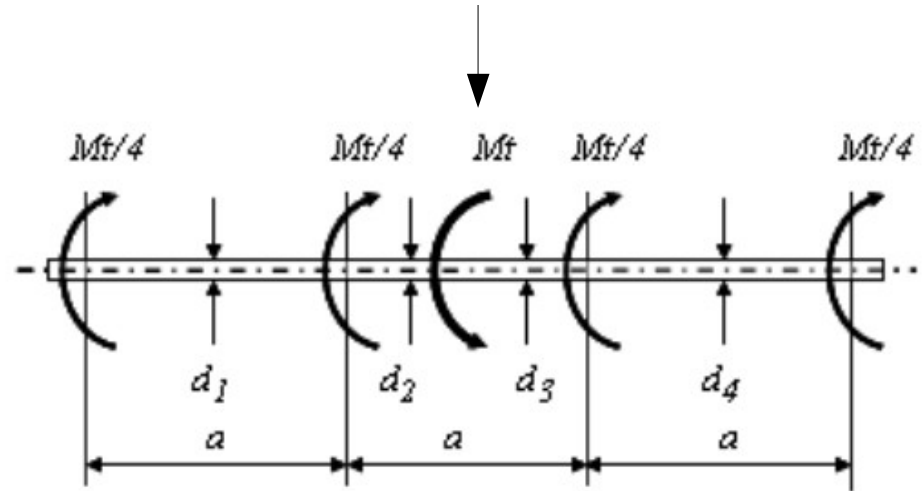
$$M_i = M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_t/4$$

Dimensionamiento:

$$d_1 = d_4 = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \cdot \tau_{adm}} \cdot \left(\frac{M_t}{4}\right)}$$

$$d_2 = d_3 = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \cdot \tau_{adm}} \cdot \left(\frac{M_t}{2}\right)}$$

M_t activo del eje a dimensionar = 358 kNcm



$M_t/4$	$M_t/2$	M_t	$d_1=d_4$	$d_2=d_3$
kN cm	kN cm	kN cm	cm	cm
89,525	179,05	358,1	4,84862	6,10887

Conclusiones

El dimensionamiento se hace:

A) o por **rigidez** (**deformación**)

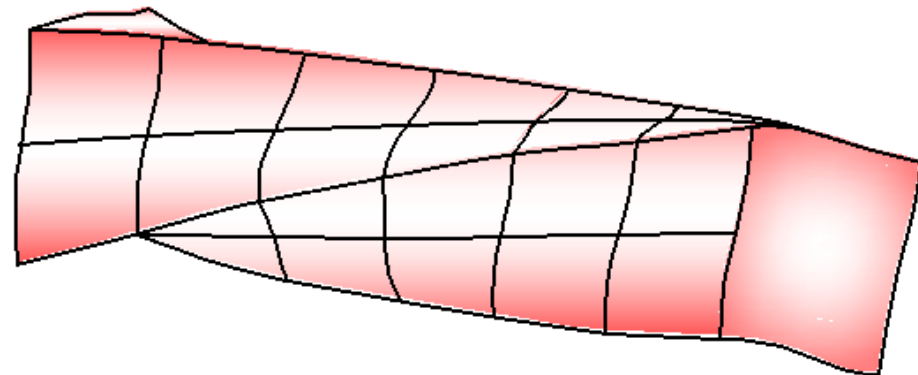
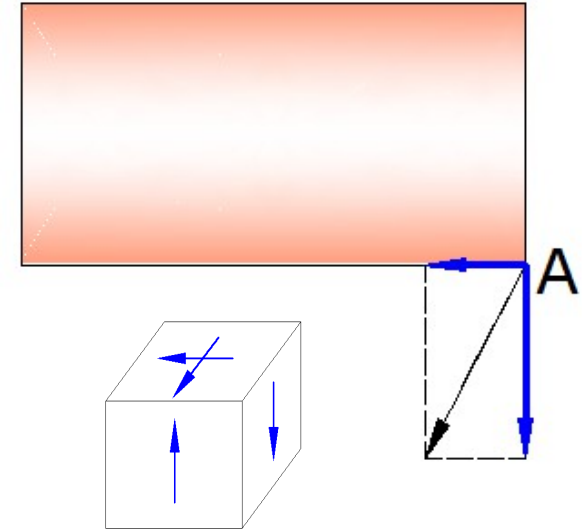
B) o por **resistencia** (**tensión**)

A) Si se dimensiona a la **resistencia**, se calculan los parámetros de la sección en función de la **tensión admisible**. Luego se deberá verificar a la **rigidez**, comprobando que las deformaciones máximas provocadas con la estructura ya dimensionada no superen las **deformaciones admisibles**.

B) Si se dimensiona a la **rigidez**, se calculan los parámetros de la sección en función de la **deformación admisible**. Luego se deberá verificar a la **resistencia**, comprobando que las tensiones máximas provocadas con la estructura ya dimensionada no superen las **tensiones admisibles**.

La sección rectangular sujeta a torsión

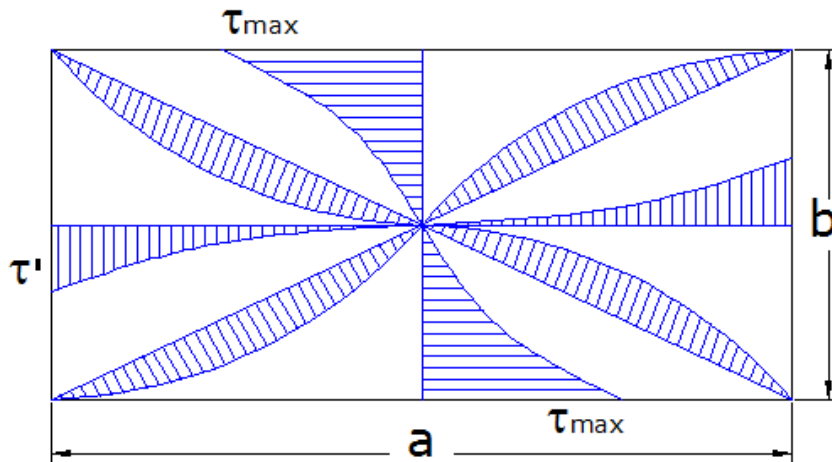
Si fuera válida la teoría de Coulomb, en el vértice A existiría una tensión normal al radio vector que une A con el baricentro, vector que admitiría dos componentes. Por Cauchy las mismas generarían tensiones actuantes en las caras laterales lo cual es imposible.



En realidad las secciones se alabean y de lo expuesto no se cumple la hipótesis de Coulomb. La solución exacta la da la teoría matemática de la elasticidad.

La sección rectangular sujeta a torsión

Distribución de Tensiones tangenciales x Torsión en la sección rectangular
(analogía de la membrana – teoría de **Saint Venant**)



$$\tau_{Max} = \alpha \cdot \frac{M_T}{a \cdot b^2}$$

$$\theta = \beta \cdot \frac{M_T}{G a b^3}$$

$$\tau^* = \varphi \cdot \tau_{Max}$$

NOTA: α , β y φ se obtienen de tablas para la relación entre la base y la altura del rectángulo (b/a).

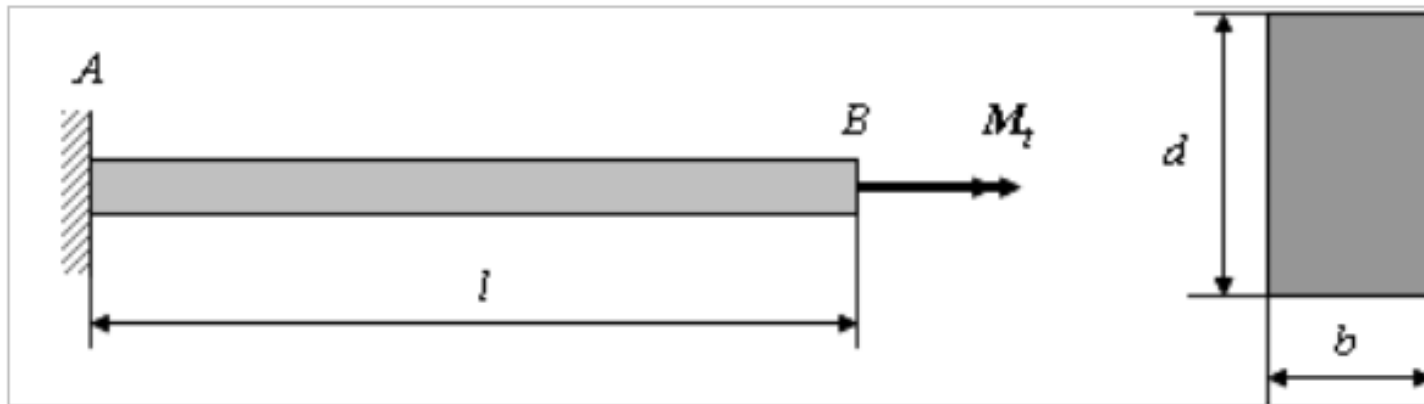
Ejemplo:

$$\frac{a}{b} = \infty \Rightarrow \alpha = 3 \quad \beta = 3 \quad \tau_{Max} = 3 \cdot \frac{M_T}{a \cdot b^2} \quad \theta = 3 \cdot \frac{M_T}{G a b^3}$$

Ejercicio ejemplo N° 3

La barra rectangular de acero mostrada en la figura será sometida a torsión. Teniendo en cuenta los datos que se indican en la tabla, Se solicita:

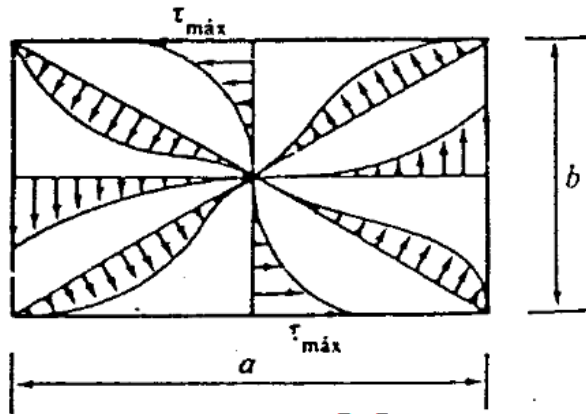
- (1) Para el M_t indicado en la tabla determinar la tensión tangencial τ y el ángulo de torsión Θ total máximos.
- (2) Calcular el valor del máximo momento torsor actuante que podría soportar la barra para que la tensión tangencial máxima no supere el valor admisible τ_{adm} .
- (3) Determinar a qué valor debería reducirse la longitud l de la barra para que, actuando el momento torsor calculado en (2), el ángulo de torsión total no supere el valor admisible Θ_{adm} .



b	d	L	M_t	G	τ_{adm}	Θ_{adm}
cm	cm	cm	kN cm	kN/cm ²	kN/cm ²	°
4,6	9,2	240	240	8000	8	3

(1) Determinación de valores máximos (τ y Θ):

Primero debe determinarse la relación (a/b), que en nuestro caso es $9,2/4,6 = 2$ para luego encontrar de tablas y/o calcular los coeficientes α , β , φ



$$\tau_{Max} = \alpha \cdot \frac{M_T}{a \cdot b^2}$$

$$\theta = \beta \cdot \frac{M_T}{G a b^3}$$

h/b		α		β		φ	
	1,0		4,80		7,11		1,000
1,0	1,5	4,80	4,33	7,11	5,11	1,000	0,859
1,5	1,8	4,33	4,18	5,11	4,67	0,859	0,820
1,8	2,0	4,18	4,07	4,67	4,37	0,820	0,795
2,0	2,5	4,07	3,88	4,37	4,02	0,795	0,766
2,5	3,0	3,88	3,74	4,02	3,80	0,766	0,753
3,0	4,0	3,74	3,55	3,80	3,56	0,753	0,745
4,0	6,0	3,55	3,35	3,56	3,35	0,745	0,743
6,0	8,0	3,35	3,26	3,35	3,26	0,743	0,742
8,0	10,0	3,26	3,20	3,26	3,20	0,742	0,742
10,0	9999	3,20	3,00	3,20	3,00	0,742	0,742
9999		3,00		3,00		0,742	

Los valores máximos son:

Para nuestros datos:

$$W_t^* = \frac{a \cdot b^2}{\alpha} \quad J_t^* = \frac{a \cdot b^3}{\beta}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M t}{W_t^*}$$

$$\Theta_{m\acute{a}x} = \frac{M t \cdot l}{G \cdot J_t^*}$$

W_t^*	J_t^*	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\Theta_{m\acute{a}x}$
cm ³	cm ⁴	kN/cm ²	°
47,831	204,918	5,01767	2,01314

(2) Valor del máximo momento torsor actuante que podría soportar la barra para que la tensión tangencial máxima no supere el valor admisible τ_{adm}

$$Mt_{m\acute{a}x}^* = \tau_{adm} \cdot W_t^*$$

$$Mt_{max}^* = 383 \text{ kNcm (el Mt dato era 240 kNcm)}$$

El valor del máximo Mt^* a aplicar es claramente superior al Mt dato ya que, calculada la tensión máxima ($\tau_{max} = 5,01 \text{ kN/cm}^2$ es sensiblemente menor a la τ_{adm} de 8 kN/cm^2)

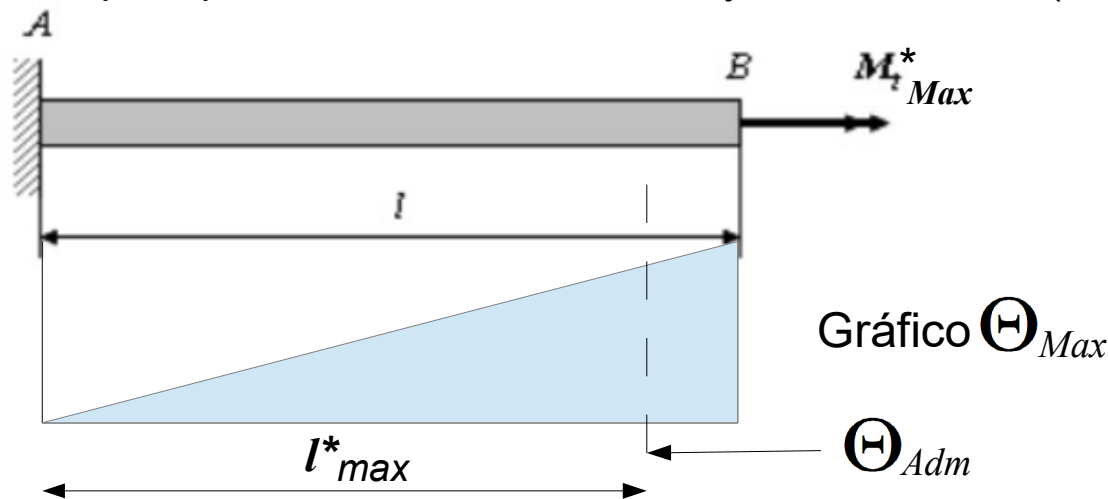
En estas condiciones la barra está en el límite de su resistencia

(3) Valor al que debería reducirse la longitud l de la barra para que actuando el momento torsor calculado Mt^*_{max} , el ángulo de torsión total no supere el valor admisible Θ_{adm}

$$l^*_{max} = \frac{\Theta_{adm} \cdot G \cdot J_t^*}{Mt^*_{max}}$$

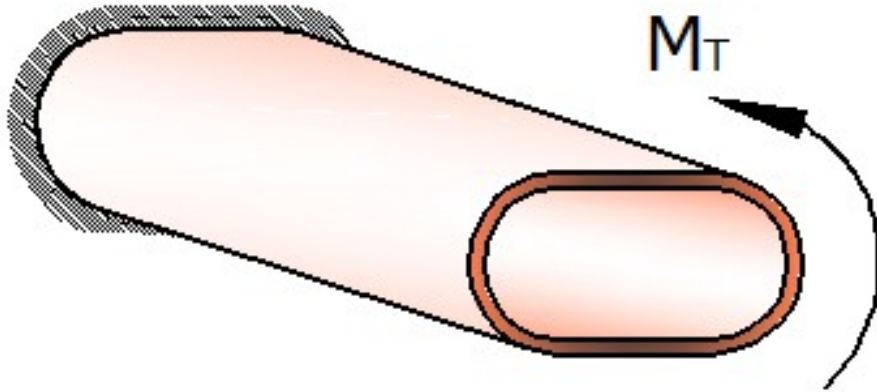
$$l^*_{max} = 224 \text{ cm (el } l \text{ dato era } 240 \text{ cm)}$$

El valor del l^*_{max} calculado es inferior a la longitud l dato ya que la deformación máxima (Θ_{max}) provocada por aplicación de Mt^*_{max} es mayor a la Θ_{adm} (de 3°)

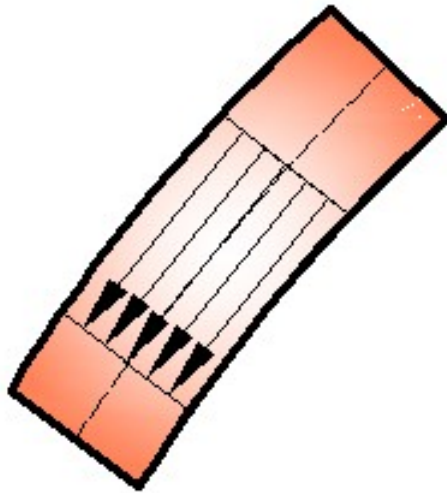


En estas condiciones ahora la barra también está en el límite de su rigidez

Secciones cerradas simples de pared delgada



Consideremos una sección cerrada de pared delgada, con paredes de espesor pequeño con respecto a las dimensiones de la sección. La misma se presta a un estudio elemental suficientemente aproximado.

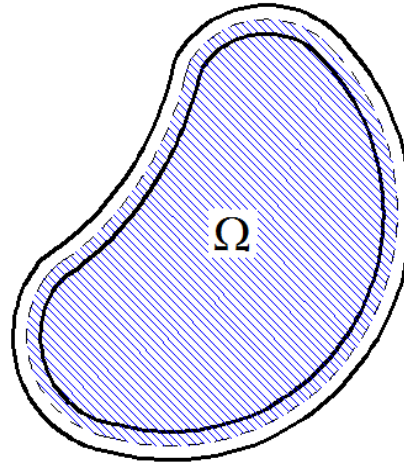
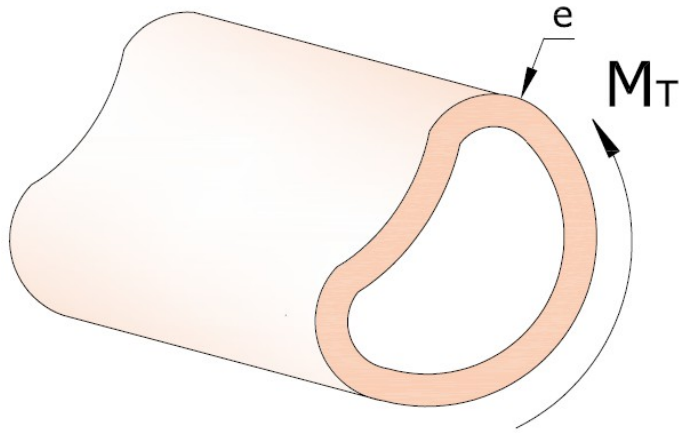


Sin mayor error, la teoría de **Bredt** establece:

- Como el espesor es reducido, τ se supone constante.
- Que la dirección de τ es tangente al contorno medio.

Secciones cerradas simples de pared delgada

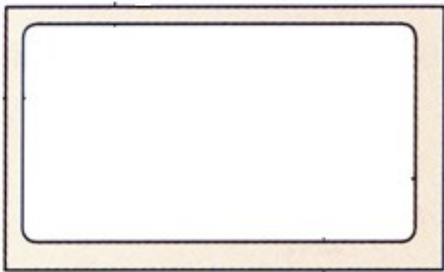
Tensión tangencial:



$$\tau_{Max} = \frac{M_T}{2 \cdot \Omega \cdot e_{Min}}$$

Ángulo específico de torsión:

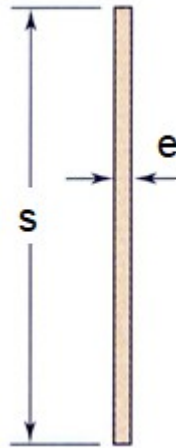
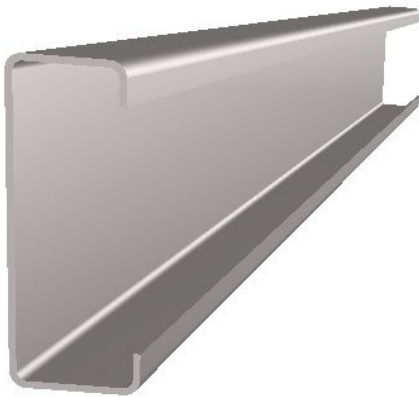
$$\theta = \frac{M_t}{4 \cdot G \cdot \Omega^2} \int \frac{ds}{e}$$



En secciones como la de la figura, la integral puede resolverse mediante una sumatoria de términos, dividiendo el contorno medio en segmentos finitos, por lo que el ángulo total de torsión será:

$$\Theta_{max} = \frac{M_t \cdot l}{4 \cdot G \cdot \Omega^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{t_i}$$

Torsión en secciones abiertas de pared delgada



La teoría de Saint Venant puede generalizarse para este tipo de secciones. Se considera enderezar el perfil tomándolo como un rectángulo muy alargado:

$$\frac{a}{b} = \infty \Rightarrow \alpha = 3 \quad \beta = 3 \quad \tau_{Max} = 3 \cdot \frac{M_T}{a \cdot b^2} \quad \theta = 3 \cdot \frac{M_T}{G a b^3}$$

$$\tau_{Max} = \frac{3 \cdot M_T}{s \cdot e^2} \wedge \theta = \frac{3 \cdot M_T}{G \cdot s \cdot e^3}$$

$$\Rightarrow \tau_{Max} = G \cdot e \cdot \theta \quad (II)$$

Torsión en secciones abiertas de pared delgada

Secciones armadas por rectángulos de distinto espesor

$$\theta = \frac{3.M_T}{G.\sum s_i.e_i^3}$$

De la expresión (II)

$$\tau_{Max} = \theta.G.e_{Max}$$

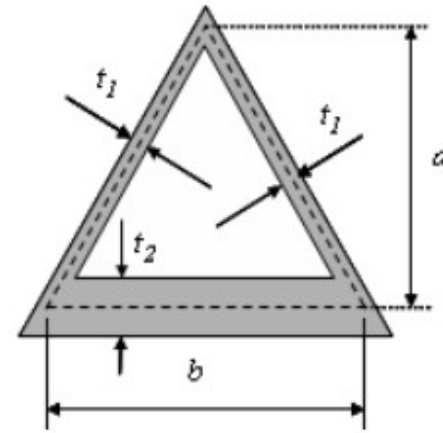
$$\tau_{Max} = \frac{3.M_T.e_{Max}}{\sum s_i.e_i^3}$$

$$\tau_i = \frac{3.M_T.e_i}{\sum s_i.e_i^3}$$

llamando Momento de inercia ficticio a:

$$J_{Ficticio} = \frac{1}{3} \sum s_i.e_i^3 \therefore \tau_{Max} = \frac{M_T.e_{max}}{J_{Ficticio}} \wedge \theta = \frac{M_T}{G.J_{Ficticio}}$$

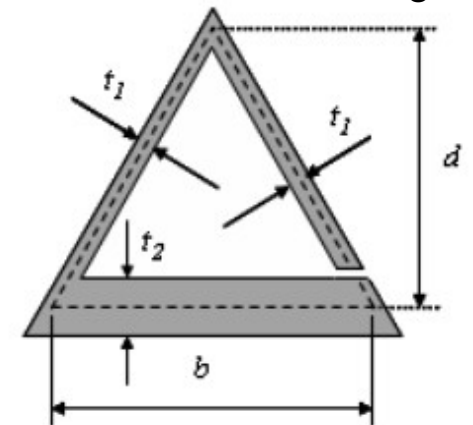
Ejercicio ejemplo N° 4



La barra de sección cerrada simple de paredes delgadas mostrada en la figura superior será sometida a torsión. Se solicita:

1. Determinar el máximo momento torsor $Mt_{\text{máxc}}$ que puede ser aplicado en la sección B, de forma tal que no sean superados los valores admisibles de la tensión tangencial τ_{adm} y del ángulo de torsión total Θ_{adm} .

2 Sin superar tampoco los valores admisibles de la tensión tangencial τ_{adm} ni del ángulo de torsión total Θ_{adm} hallar el máximo momento torsor Mt_{maxa} que puede ser aplicado en la misma sección B si, por un efecto de corrosión localizada, la sección se abre como se indica en la figura inferior



b	d	t_1	t_2	l	G	τ_{adm}	Θ_{adm}
cm	cm	cm	cm	cm	kN/cm ²	kN/cm ²	°
10	12	0,8	1	140	8000	8	5

(1) Determinar el máximo momento torsor $Mt_{máxc}$ que puede ser aplicado en la sección B , de forma tal que no sean superados los valores admisibles de la tensión τ_{adm} y del ángulo de torsión total Θ_{adm}

$$\Omega = \frac{b \cdot d}{2}$$

Contornos cerrados:

$$\tau_{máx} = \frac{Mt}{2 \cdot \Omega \cdot t_{mín}}$$

$$\Theta_{máx} = \frac{Mt \cdot l}{4 \cdot G \cdot \Omega^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{t_i}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{t_i} = 2 \cdot \frac{h_1}{t_1} + \frac{h_2}{t_2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + d^2}}{t_1} + \frac{b}{t_2}$$

NOTA: h_i y t_i son respectivamente las longitudes y los espesores de cada tramo a la altura del contorno medio

De donde el máximo $Mt_{máxc}$ es el mínimo de las siguientes expresiones (comprobando tanto a la resistencia como a la rigidez):

$$Mt_{c1} = 2 \cdot \Omega \cdot t_{mín} \cdot \tau_{adm}$$

Mt_{c1} : límite a la resistencia

$$Mt_{c2} = \frac{4 \cdot G \cdot \Omega^2 \cdot \Theta_{adm}}{l \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{t_i} \right)}$$

Mt_{c2} : límite a la rigidez

Ω	$\frac{h_1}{t_1}$	$\frac{h_2}{t_2}$	Mt_{c1}	Mt_{c2}	$Mt_{máxc}$
cm^2			$kNcm$	$kNcm$	$kNcm$
60	16,25	10	768	1689,6	768

(2) Determinar el máximo momento torsor $Mt_{\text{máx}}$ que puede ser aplicado en la sección **B** (*ahora abierta por un efecto de corrosión localizada*) de forma tal que no sean superados los valores admisibles de la tensión τ_{adm} y del ángulo de torsión total Θ_{adm}

Contornos abiertos:

$$\tau_{\text{máx } i} = \frac{3 \cdot Mt_i}{h_i \cdot t_i^2}$$

$$\theta = \frac{3 \cdot Mt_i}{G \cdot h_i \cdot t_i^3}$$

Con...

$$Mt = \sum_{i=1}^n Mt_i$$

NOTA: h_i y t_i son respectivamente las longitudes y los espesores de cada tramo

De donde el máximo $Mt_{\text{máx}}$ es el mínimo de las siguientes expresiones (comprobando tanto a la resistencia como a la rigidez):

$$Mt_{a1} = \frac{\tau_{\text{adm}}}{t_{\text{máx}}} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{h_i \cdot t_i^3}{3}$$

Mt_{a1} : límite a la resistencia

$$Mt_{a2} = \frac{G \cdot \Theta_{\text{adm}}}{l} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{h_i \cdot t_i^3}{3}$$

Mt_{a2} : límite a la rigidez

$\frac{h_1 \cdot t_1^3}{3}$	$\frac{h_2 \cdot t_2^3}{3}$	Mt_{a1}	Mt_{a2}	$Mt_{\text{máx}}$
cm ⁴	cm ⁴	kNcm	kNcm	kNcm
2,21867	3,33333	62,1653	38,7497	38,7497

Influencia de la forma en la eficiencia de secciones sometidas a torsión

Se proponen 7 secciones de diferentes formas, pero todas con:

- La misma área ($F=10 \text{ cm}^2$),
- El mismo material (mismo $G=1$ y misma $\tau_{\text{adm}}=1$).
- En las secciones delgadas, se toma 0,5 cm de espesor.

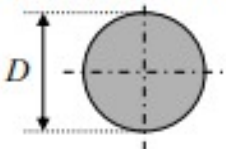
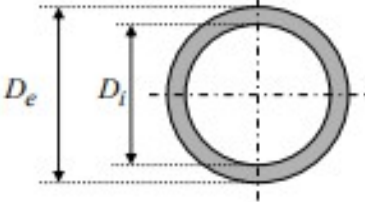
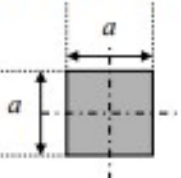
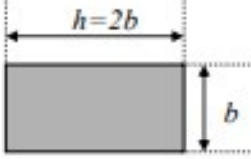
En primer lugar, se calcula para cada una su capacidad portante, esto es el máximo momento torsor que puede soportar sin que las tensiones admisibles sean superadas.

Como todas tienen la misma área, el momento calculado es una medida de su **eficiencia a la torsión** (kNm/cm^2).

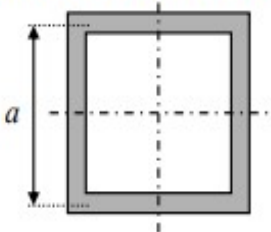
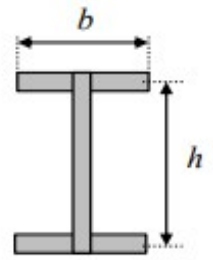
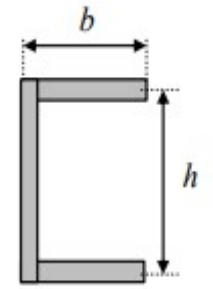
Luego, independientemente de su capacidad portante, a todas las secciones se les aplica un par torsor unitario, calculándose el ángulo de torsión específico a cada sección.

Esta es una medida de su **rigidez torsional**.

Influencia de la forma en la eficiencia de secciones sometidas a torsión

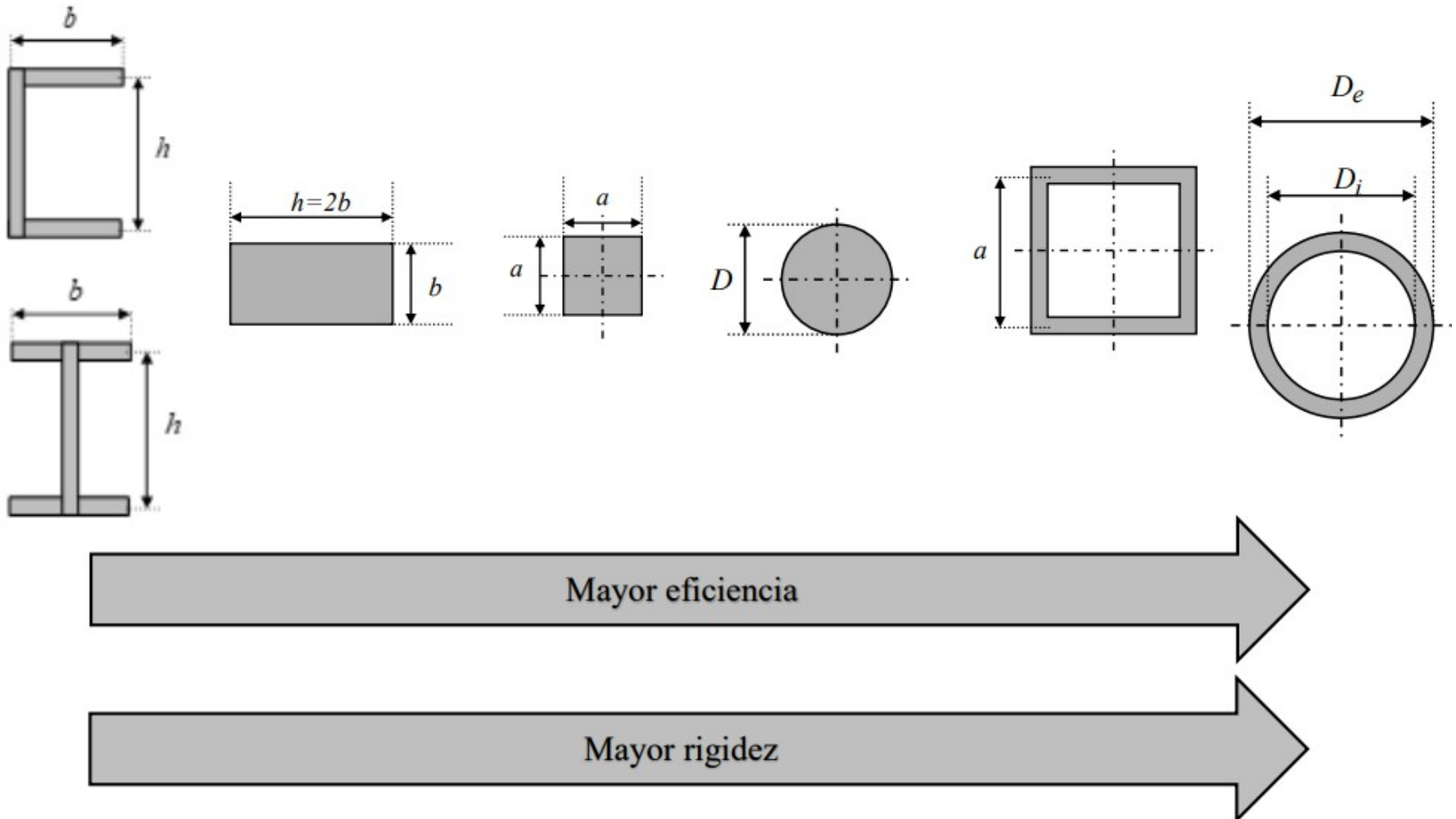
Forma de la sección	Parámetros geométricos	Análisis de tensiones	Análisis de deformaciones
Sección circular 	$D=3,57 \text{ cm};$ $J_o=15,9 \text{ cm}^4;$ $W_o=8,93 \text{ cm}^3$	Teoría de Coulomb: $\tau_{max} = \frac{Mt}{W_o}$ $Mt_{max} = \tau_{adm} W_o$ $Mt_{max} = 8,93$	Teoría de Coulomb: $\theta_z = \frac{Mt}{G J_o} = 6,3 \cdot 10^{-2}$
Sección anular 	$D_o=6,87 \text{ cm};$ $D_i=5,87 \text{ cm};$ $D_m=6,37 \text{ cm};$ $e=0,5 \text{ cm};$ $\text{Per}=20 \text{ cm};$ $J_o=102 \text{ cm}^4;$ $W_o=32 \text{ cm}^3;$ $\Omega=31,9 \text{ cm}^2$	Teoría de Coulomb: $\tau_{max} = \frac{Mt}{W_o}$ $Mt_{max} = \tau_{adm} W_o = 32,0$ Teoría de Bredt: $\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Mt}{2 \Omega e}$ $Mt_{max} = \tau_{adm} 2 \Omega e = 31,9$	Teoría de Coulomb: $\theta_z = \frac{Mt}{G J_o} = 0,98 \cdot 10^{-2}$ Teoría de Bredt: $\theta_z = \frac{Mt \text{ Per}}{4 G \Omega^2 e} = 0,98 \cdot 10^{-2}$
Sección cuadrada 	$a=3,17 \text{ cm};$ $\alpha=4,8 \text{ cm};$ $\beta=7,11 \text{ cm};$ $W_t^*=6,57 \text{ cm}^3;$ $J_t^*=14,0 \text{ cm}^4$	Analogía de la membrana $\tau_{max} = \frac{Mt}{W_t^*}$ $Mt_{max} = \tau_{adm} W_t^* = 6,6$	Analogía de la membrana $\theta_z = \frac{Mt}{G J_t^*} = 7,1 \cdot 10^{-2}$
Sección rectangular 	$b=2,24 \text{ cm};$ $b=4,48 \text{ cm};$ $\alpha=4,07 \text{ cm};$ $\beta=4,37 \text{ cm};$ $W_t^*=5,52 \text{ cm}^3;$ $J_t^*=11,5 \text{ cm}^4$	Analogía de la membrana $\tau_{max} = \frac{Mt}{W_t^*}$ $Mt_{max} = \tau_{adm} W_t^* = 5,5$	Analogía de la membrana $\theta_z = \frac{Mt}{G J_t^*} = 8,7 \cdot 10^{-2}$

Influencia de la forma en la eficiencia de secciones sometidas a torsión

Sección cuadrada hueca 	a=5 cm; e=0,5 cm; $\Omega=25 \text{ cm}^2$ Per=20 cm	Teoría de Bredt: $\tau_{\text{máx}} = \frac{Mt}{2 \Omega e}$ $Mt_{\text{max}} = \tau_{\text{adm}} 2 \Omega e = 25,0$	Teoría de Bredt: $\theta_z = \frac{Mt \text{ Per}}{4 G \Omega^2 e} = 1,6 \cdot 10^{-2}$
Perfil doble té 	h=10 cm; b=5 cm; e=0,5 cm $J_T^* = 0,833 \text{ cm}^4$	Teoría perfiles delgados abiertos $\tau_{\text{máx}} = \frac{Mt}{J_T^*} e$ $Mt_{\text{max}} = \tau_{\text{adm}} \frac{J_T^*}{e} = 1,7$	Teoría perfiles delgados abiertos $\theta_z = \frac{Mt}{G J_T^*} = 120 \cdot 10^{-2}$
Perfil doble té 	h=10 cm; b=5 cm; e=0,5 cm $J_T^* = 0,833 \text{ cm}^4$	Teoría perfiles delgados abiertos $\tau_{\text{máx}} = \frac{Mt}{J_T^*} e$ $Mt_{\text{max}} = \tau_{\text{adm}} \frac{J_T^*}{e} = 1,7$	Teoría perfiles delgados abiertos $\theta_z = \frac{Mt}{G J_T^*} = 120 \cdot 10^{-2}$

Influencia de la forma en la eficiencia de secciones sometidas a torsión

De la información suministrada en la tabla anterior surge que, a diferencia de lo que sucede en sollicitación axial, la forma de la sección tiene muy fuerte influencia en su eficiencia y rigidez: la sección más eficiente exhibe una capacidad portante del orden de 20 veces más que la menos eficiente, y semejante relación existe también para las rigideces, tratándose del mismo material y la misma área. De hecho, tanto en tensiones como en deformaciones pueden ordenarse así:



Influencia de la forma en la eficiencia de secciones sometidas a torsión

La sección ideal para torsión (tanto en tensiones como en deformaciones) es aquella en la que el área se encuentra lo más igualmente alejada posible del baricentro (una sección anular de gran diámetro y pared muy delgada), y cuanto menos se parece la geometría a la de un anillo, más ineficiente es.

Obsérvese que lo menos conveniente para utilizar en torsión es un perfil laminado como el “doble té” o el “U”. La explicación es que, en general para cualquier sollicitación, para que el área sea más eficiente debe estar presente en donde existen mayores tensiones.

En particular para torsión, las tensiones en el baricentro son nulas y aumentan conforme nos alejamos del baricentro, por eso el área es más conveniente cuanto más alejada está respecto del baricentro.