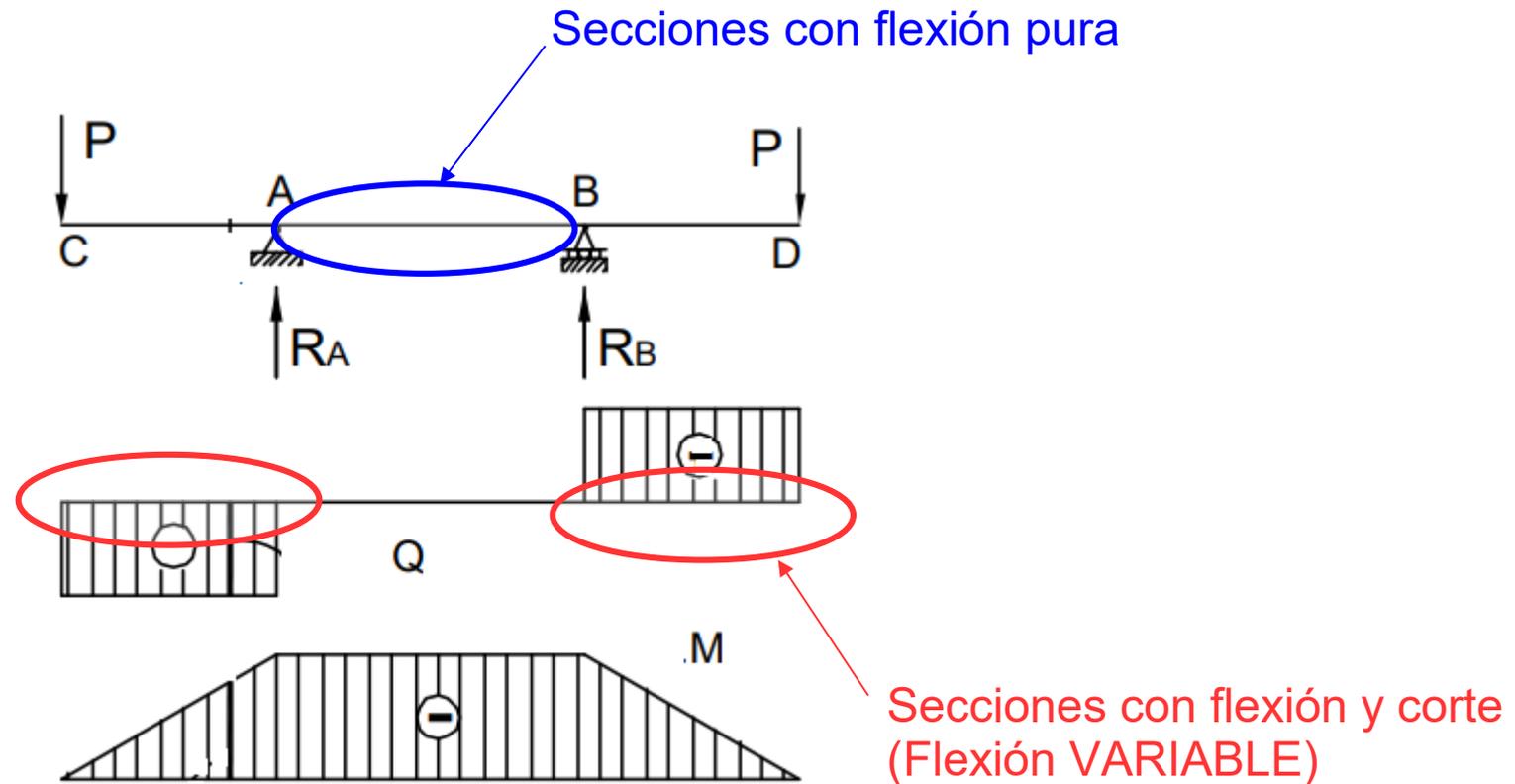


Flexión Variable (Flexión y Corte)

Conceptos generales

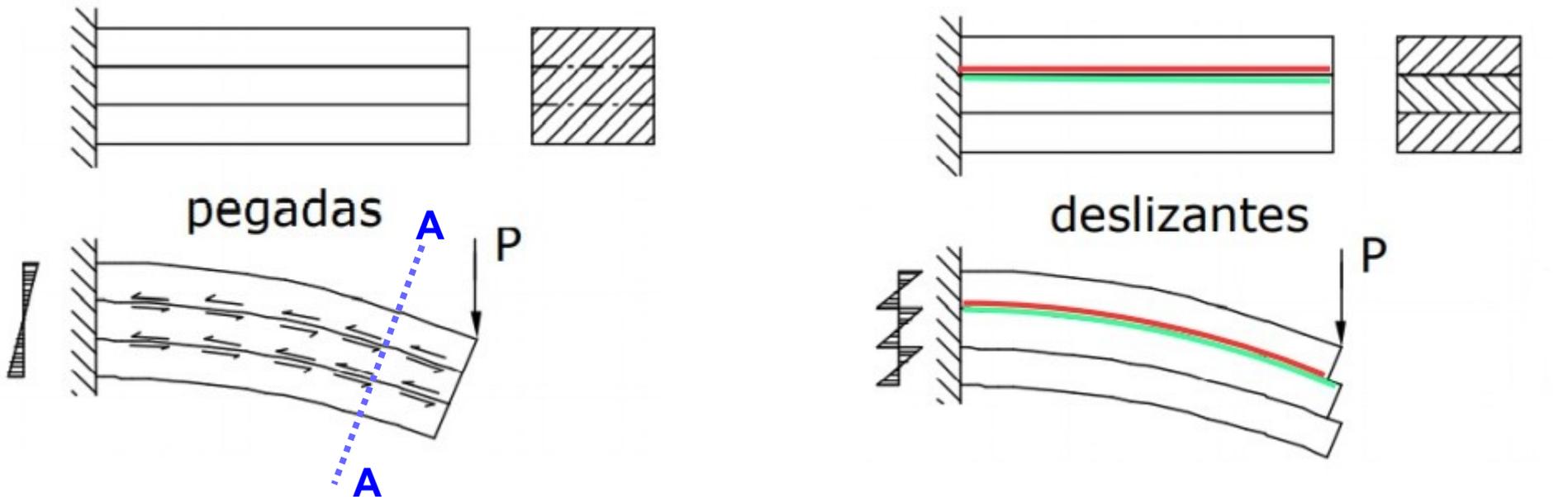
- **Flexión**: La sollicitación se limita a dos pares normales al plano de la sección, sin o **con esfuerzo de corte**, en el primer caso es flexión pura y en el segundo es **flexión y corte**.



- **Corte Vs Flexión**: Si la distancia entre apoyos es importante (brazo de palanca), la flexión predomina. Si la carga es importante y la distancia entre apoyos es mínima, es el corte el predominante. Siempre es **flexión y corte**.

FLEXIÓN VARIABLE o Flexión y Corte

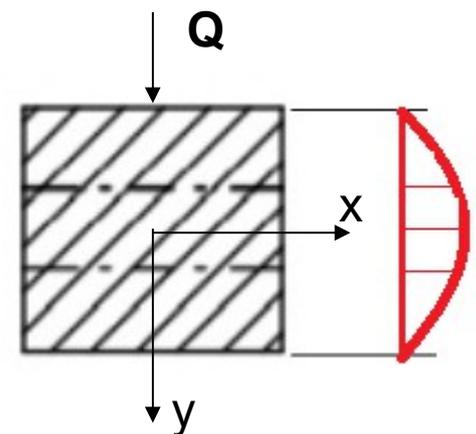
Planos de deslizamiento



Sección A-A

Fórmula de Jouravsky/Colignón:

$$\zeta_{zy} = \frac{Q \cdot S_x^*}{b_y \cdot I_x}$$



Solicitación por FLEXIÓN VARIABLE

- Tensiones generadas:

Tensiones normales σ_z (FSO):

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y}$$

Utilizando el principio de superposición de los efectos para ejes principales: FSO como suma de 2 FSN

$$\sigma = \pm \frac{M \cdot \text{sen} \varphi \cdot n}{J_n}$$

Utilizando la línea de fuerzas (L.f.) y el eje neutro (E.n.) como referencias

Tensiones tangenciales τ_{zy} (Corte):

$$\tau_{zy} = \frac{Q_{zy} S_x^*}{J_x b^*}$$

Donde:

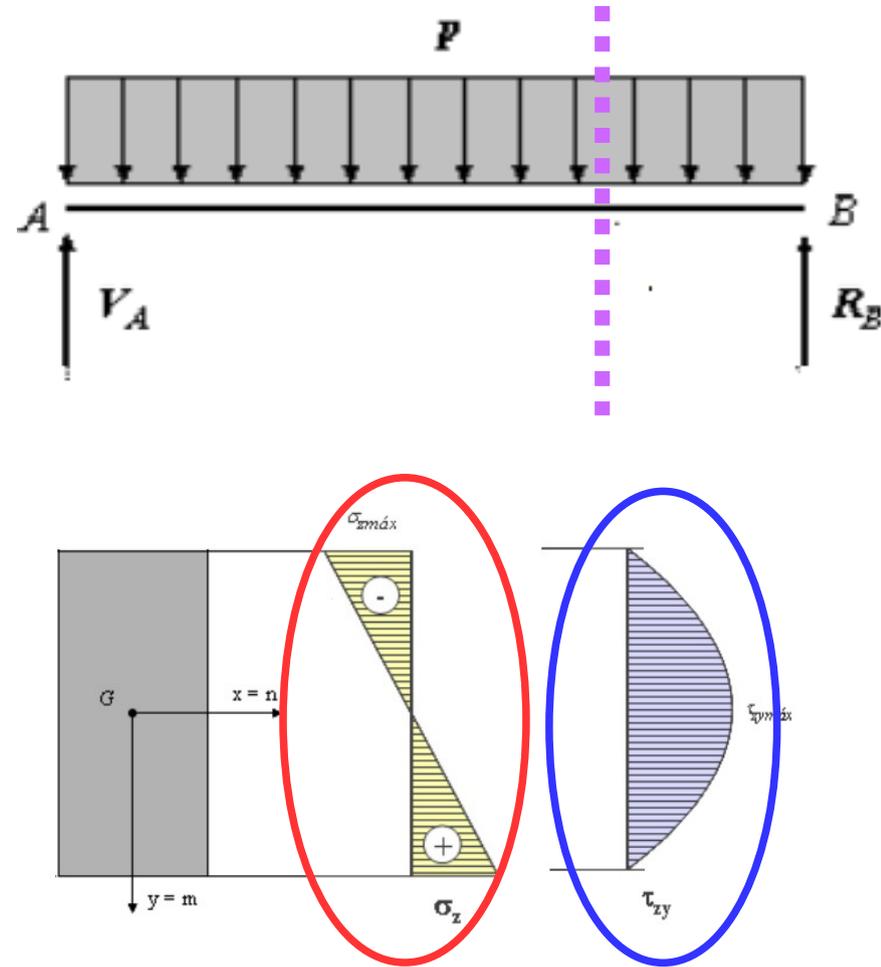
Q_{zy} es el corte, en la dirección de y;

S_x^* es el momento estático del área de la sección que queda por encima del plano de deslizamiento, respecto del eje x;

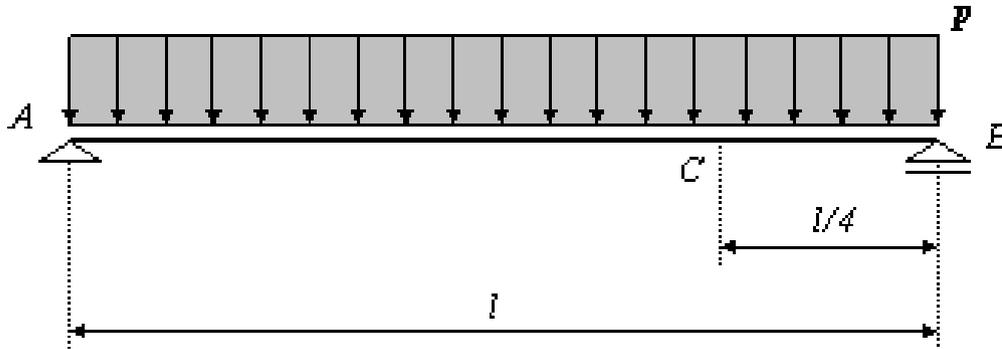
J_x es el momento de inercia de toda la sección, respecto del eje x;

b^* es el ancho del plano de deslizamiento

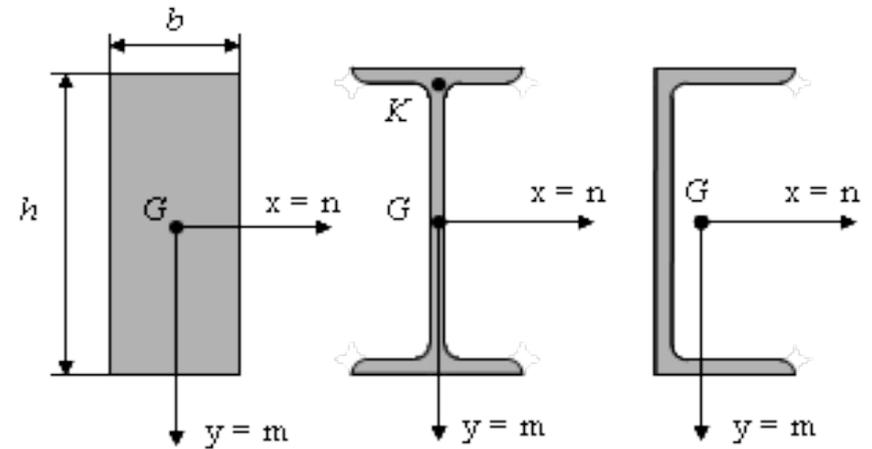
τ_{zy} es la tensión tangencial calculada en el plano de deslizamiento



Ejercicio N° 1 - Comparación de secciones

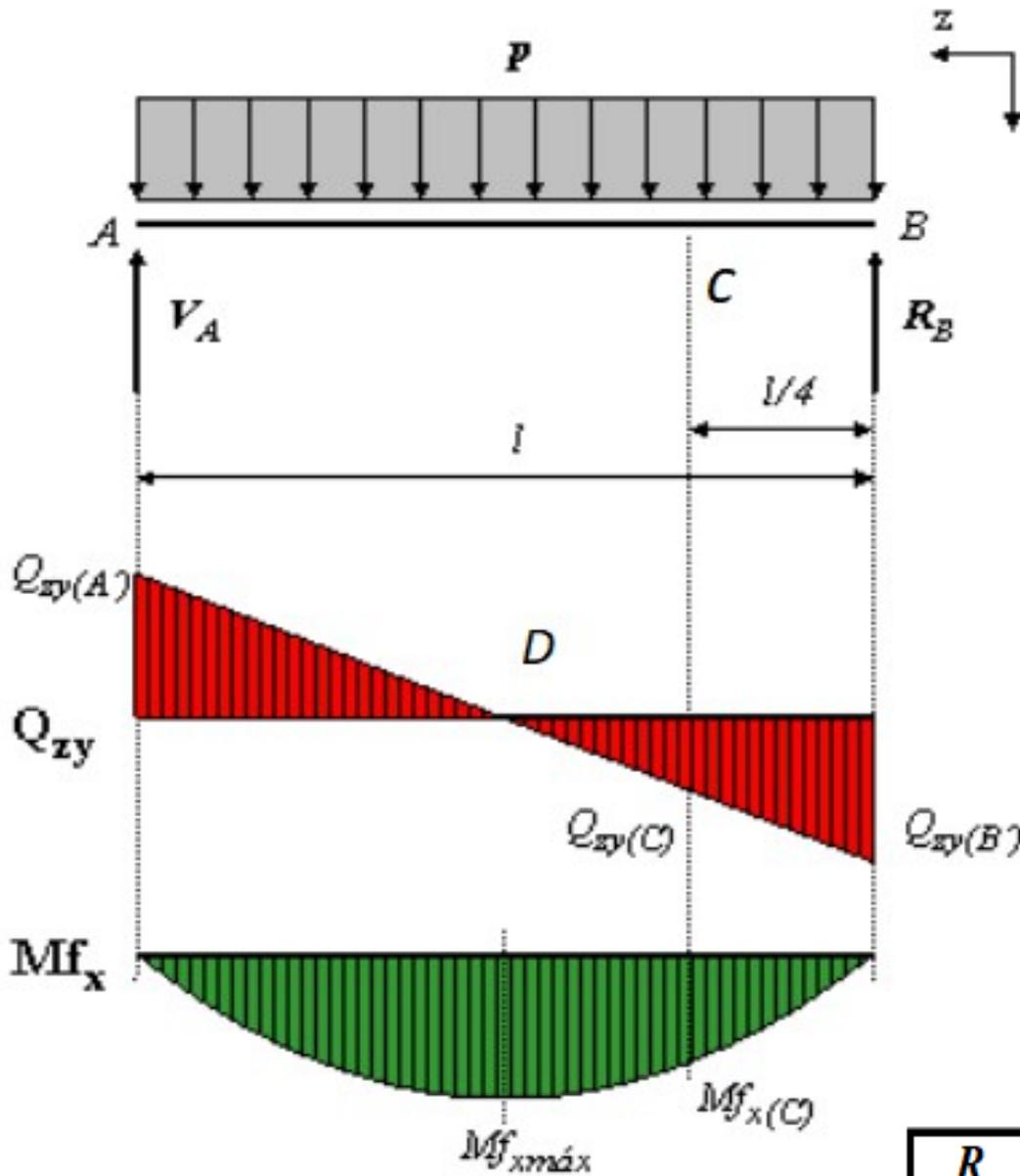


p	l	σ_{adm}	τ_{adm}
kN/m	m	kN/cm^2	kN/cm^2
30	4	14	7



1. Trazar los diagramas de esfuerzos característicos
2. Teniendo en cuenta la flexión y el corte, dimensionarla, adoptando las siguientes formas geométricas indicadas en la figura:
 - (a) Sección rectangular ($h \approx 3b$)
 - (b) Perfil *IPN*
 - (c) Perfil *UPN*
3. Trazar para cada forma geométrica dimensionada en 2. los correspondientes diagramas de tensiones normales y tangenciales en la sección C, explicitando los valores relevantes.
4. Determinar analíticamente para la fibra extrema superior del alma de la forma geométrica dimensionada en 2.(b) en la sección C (*punto K*):
 - (a) Las tensiones y planos principales
 - (b) Las tensiones y planos principales de corte, y la tensión normal σ^* asociada a dichos planos
5. Para la forma geométrica dimensionada en 2 (c) - *UPN*, calcular la posición del centro de corte

1.- Diagramas de Características



$$Q_{zy(A')} = -\frac{p \cdot l}{2} = -Q_{zymáx}$$

$$Q_{zy(B')} = \frac{p \cdot l}{2} = Q_{zymáx}$$

$$Q_{zy(C)} = -\frac{p \cdot l}{2} + p \cdot \frac{3}{4} \cdot l = \frac{p \cdot l}{4}$$

$$Mf_{x máx} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - p \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{p \cdot l^2}{8}$$

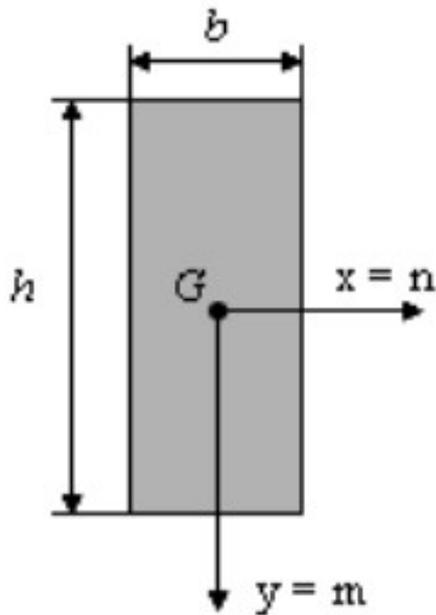
$$Mf_{x(C)} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot l\right) - p \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot l\right)^2 = \frac{3}{32} \cdot p \cdot l^2$$

R_B	V_A	$Q_{zy(A')}$	$Q_{zy(B')}$	$Q_{zy(C)}$	$Mf_{x máx}$	$Mf_{x(C)}$
kN	kN	kN	kN	kN	$kN m$	$kN m$
60	60	-60	60	30	60	45

2.- Dimensionamiento

(a) Sección Rectangular

El dimensionamiento se realiza por flexión, y luego se realizará una verificación por corte, ya que, a simple vista, la luz o distancia entre apoyos es tal que prevemos una predominancia de la flexión.



Dimensionamiento x FLEXIÓN:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$W_x = \frac{b \cdot (3 \cdot b)^2}{6}$$

$$W_x = \frac{3}{2} \cdot b^3$$

$$\longrightarrow W_x \geq \frac{Mf_{x\text{máx}}}{\sigma_{adm}}$$

$$\frac{3}{2} \cdot b^3 \geq \frac{Mf_{x\text{máx}}}{\sigma_{adm}}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2}{3} \cdot \frac{Mf_{x\text{máx}}}{\sigma_{adm}}}$$

$$\longrightarrow b=7\text{cm} / h=20\text{cm}$$

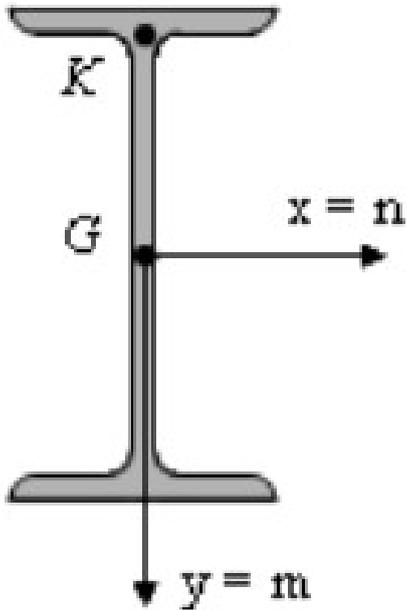
Verificación x CORTE:

$$\tau_{máx} = \frac{Q_{zymáx} \cdot S_x^*}{J_x \cdot b} \longrightarrow \tau_{máx} = \frac{Q_{zymáx} \cdot \left(\frac{b \cdot h^2}{8}\right)}{\left(\frac{b \cdot h^3}{12}\right) \cdot b} = \frac{3}{2} \frac{Q_{zymáx}}{(b \cdot h)} \leq \tau_{adm}$$

<i>b</i>	<i>h</i>	<i>h/b</i>	<i>J_x</i>	<i>W_x</i>	<i>S_x[*]</i>	<i>σ_{z máx}</i>	<i>τ_{máx}</i>
cm	cm		cm ⁴	cm ³	cm ³	kN/cm ²	kN/cm ²
7	20	2,85714	4666,67	466,667	350	12,8571	0,64286

2.- Dimensionamiento (b) Sección IPN

El dimensionamiento se realiza por flexión, y luego se realizará una verificación por corte, ya que, a simple vista, la luz o distancia entre apoyos es tal que prevemos una predominancia de la flexión.



Dimensionamiento x FLEXIÓN:

$$W_x \geq \frac{Mf_{x\text{máx}}}{\sigma_{adm}} \longrightarrow W_{x(mín)} = 428,6 \text{ cm}^3$$

$$\longrightarrow \text{IPN 260}$$

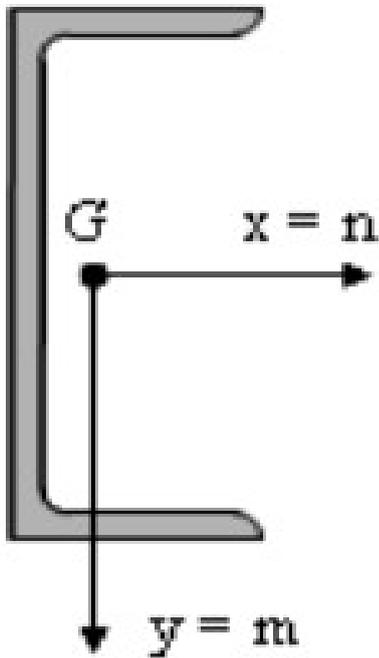
Verificación x CORTE:

$$\tau_{máx} = \frac{Q_{zymáx} \cdot S_x^*}{J_x \cdot b} \longrightarrow \tau_{máx} \leq \tau_{adm}$$

$W_{x\text{mín}}$	Perfil	J_x	W_x	S_x^*	s	$\sigma_{zmáx}$	$\tau_{máx}$
cm^3	IPN	cm^4	cm^3	cm^3	cm	kN/cm^2	kN/cm^2
428,571	260	5740	441,538	257	0,94	12,8571	2,85788

2.- Dimensionamiento (c) Sección UPN

El dimensionamiento se realiza por flexión, y luego se realizará una verificación por corte, ya que, a simple vista, la luz o distancia entre apoyos es tal que prevemos una predominancia de la flexión.



Dimensionamiento x FLEXIÓN:

$$W_x \geq \frac{Mf_{x\text{máx}}}{\sigma_{adm}} \longrightarrow W_{x\text{ (mín)}} = 428,6 \text{ cm}^3$$

$$\longrightarrow \text{UPN 280}$$

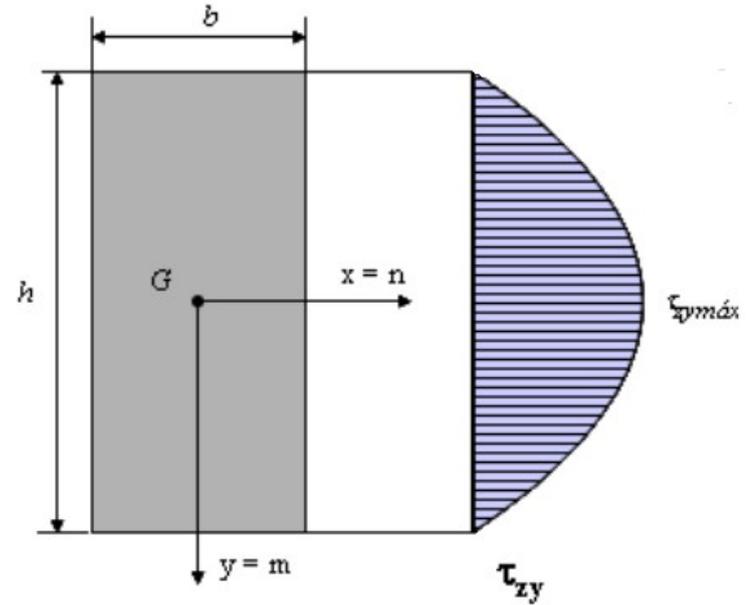
Verificación x CORTE:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Q_{z\text{máx}} \cdot S_x^*}{J_x \cdot b} \longrightarrow \tau_{\text{máx}} \leq \tau_{adm}$$

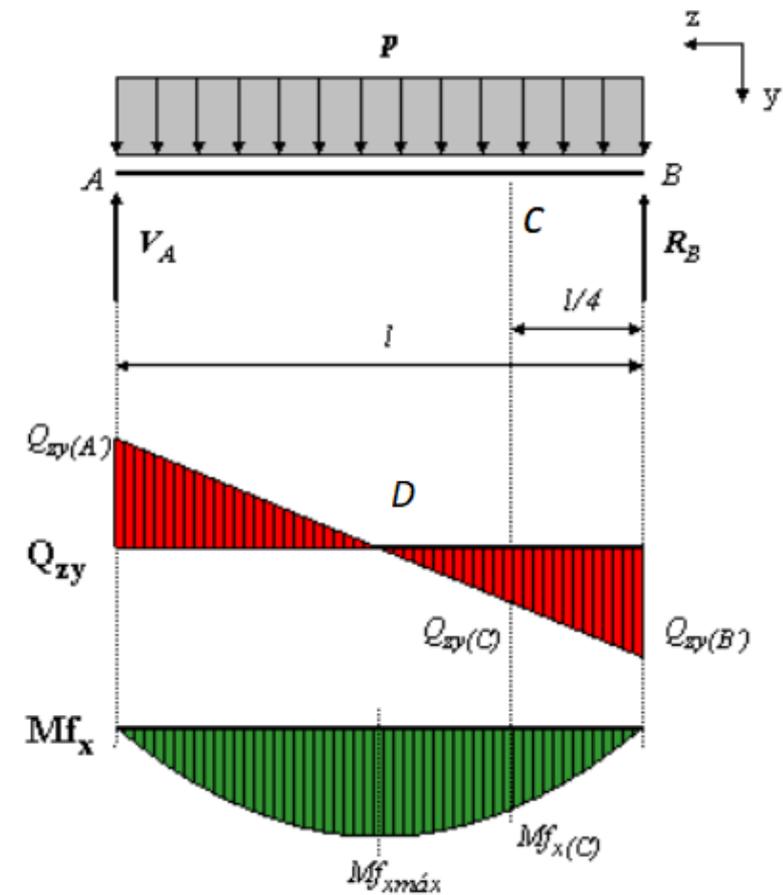
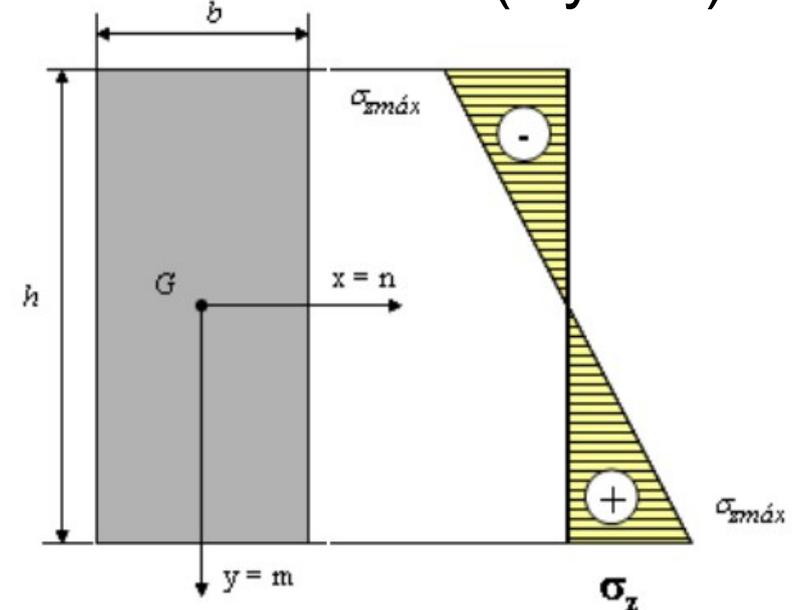
$W_{x\text{mín}}$	Perfil	J_x	W_x	S_x^*	s	$\sigma_{z\text{máx}}$	$\tau_{\text{máx}}$
cm^3	UPN	cm^4	cm^3	cm^3	cm	kN/cm^2	kN/cm^2
428,571	280	6280	448,571	266	1	13,3758	2,5414

3.- Trazado de Diagramas de tensiones

Sección "B" ($M_f = 0$)



Sección "D" ($Q_y = 0$)



3.- Trazado de Diagramas de tensiones en la sección "C"

Tensiones normales x flexión:

$$\sigma_{zm\acute{a}x} = \frac{Mf_{x(C)}}{W_x}$$

Tensiones tgcnciales x corte:

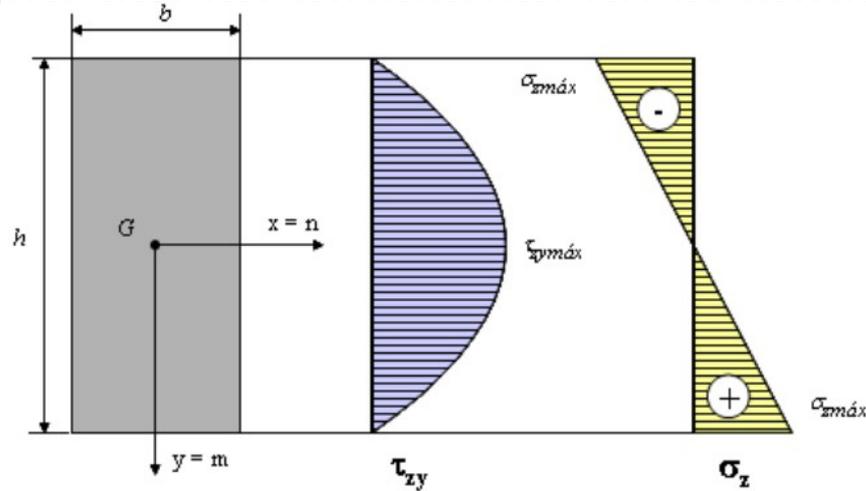
$$\tau_{zym\acute{a}x} = \frac{Q_{zy(C)} \cdot S_x^*}{J_x \cdot b}$$

$$\tau_{zy(K)} = \frac{Q_{zy(C)} \cdot (S_x^*)_K}{J_x \cdot s}$$

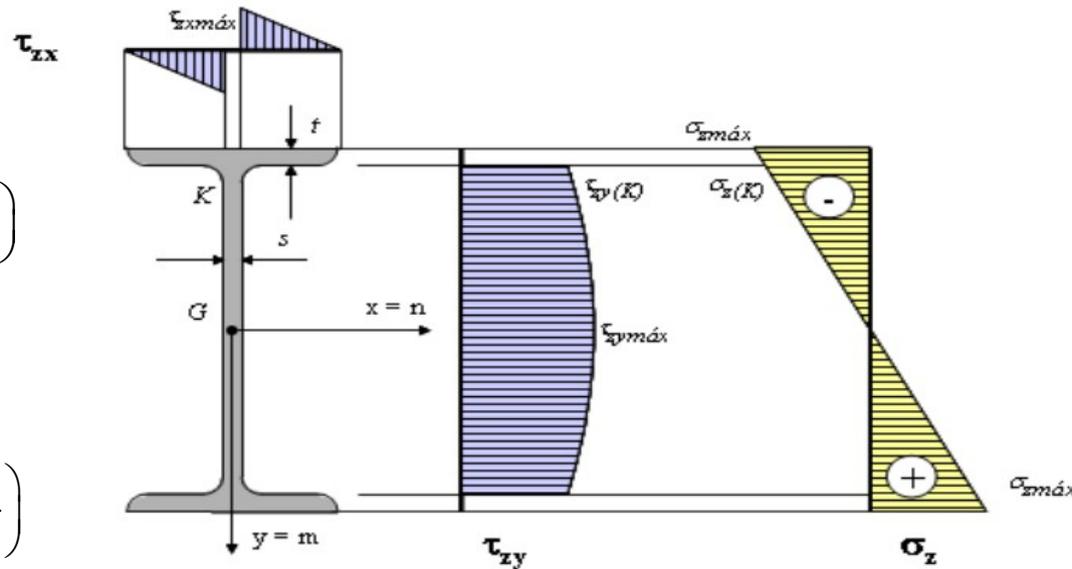
con $(S_x^*)_K = (b \cdot t) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$

$$\tau_{zxm\acute{a}x} = \frac{Q_{zy(C)} \cdot (S_x^*)_{ala}}{J_x \cdot t}$$

con $(S_x^*)_{ala} = \left[\frac{(b-s)}{2} \cdot t\right] \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$



$\sigma_{zm\acute{a}x}$	$\tau_{zym\acute{a}x}$
kN/cm^2	kN/cm^2
9,64286	0,32143



Perfil	b	h	t	s	S_x^*	$(S_x^*)_K$	$(S_x^*)_{ala}$	$\tau_{zym\acute{a}x}$	$\tau_{zy(K)}$	$\tau_{zxm\acute{a}x}$	$\sigma_{zm\acute{a}x}$	$\sigma_{z(K)}$
IPN	cm	cm	cm	cm	cm ³	cm ³	cm ³	kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²
260	11,30	26	1,41	0,94	257	195,896	89,8002	1,42894	1,0892	0,33286	10,1916	-9,6389

3.- Trazado de Diagramas de tensiones en la sección "C"

Tensiones normales x flexión:

$$\sigma_{zm\acute{a}x} = \frac{Mf_{x(C)}}{W_x}$$

Tensiones tgenciales x corte:

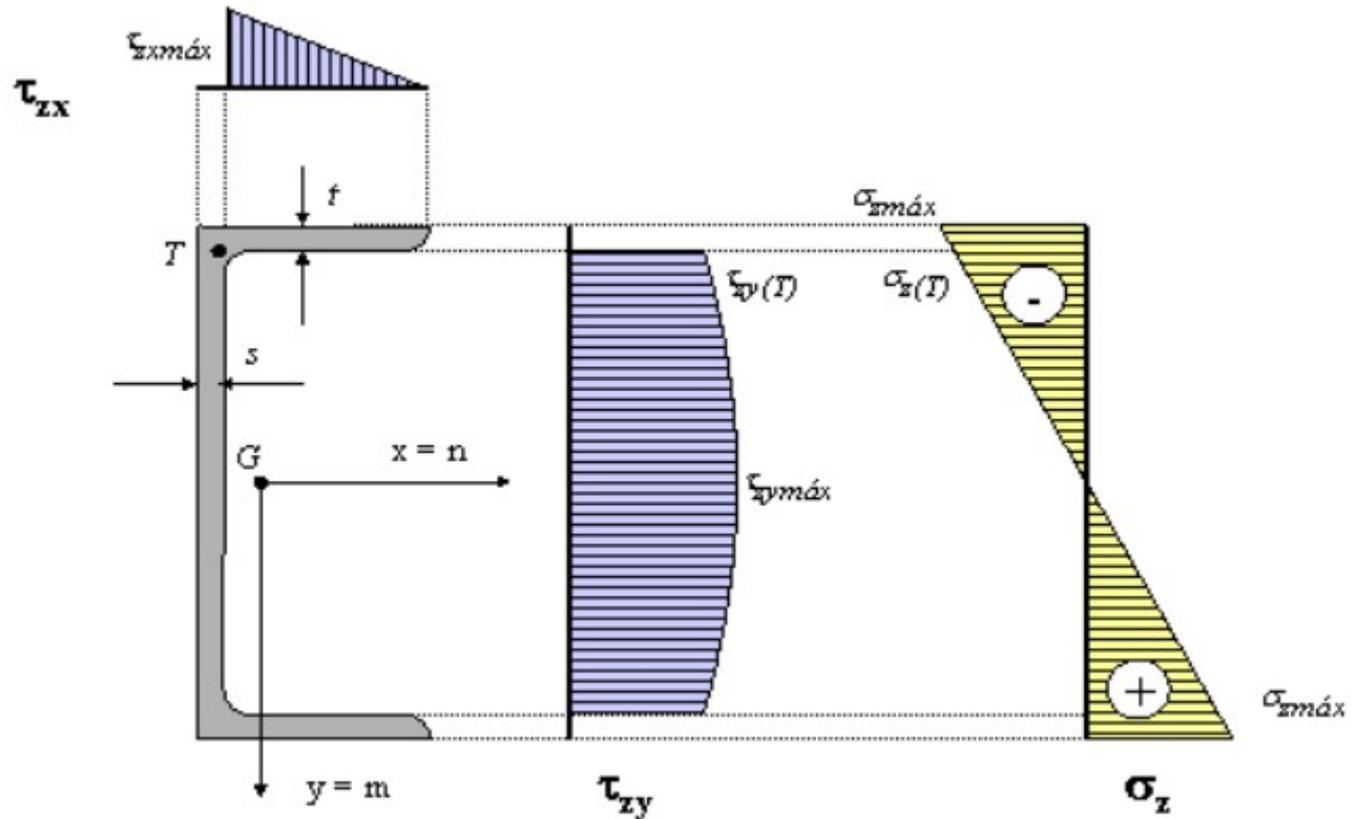
$$\tau_{zym\acute{a}x} = \frac{Q_{zy(C)} \cdot S_x^*}{J_x \cdot b}$$

$$\tau_{zy(T)} = \frac{Q_{zy(C)} \cdot (S_x^*)_T}{J_x \cdot s}$$

con $(S_x^*)_T = (b \cdot t) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$

$$\tau_{zxm\acute{a}x} = \frac{Q_{zy(C)} \cdot (S_x^*)_{ala}}{J_x \cdot t}$$

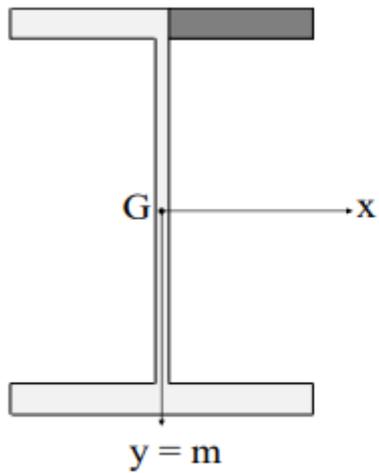
con $(S_x^*)_{ala} = [(b - s) \cdot t] \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$



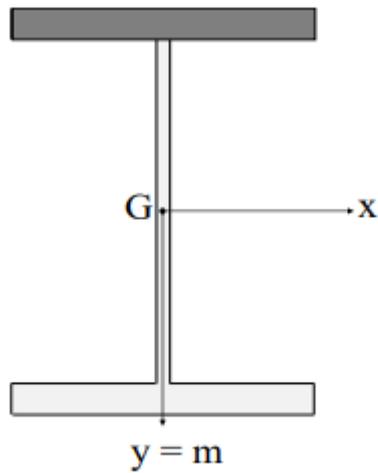
Perfil	b	h	t	s	S_x^*	$(S_x^*)_T$	$(S_x^*)_{ala}$	$\tau_{zym\acute{a}x}$	$\tau_{zy(T)}$	$\tau_{zxm\acute{a}x}$	$\sigma_{zm\acute{a}x}$	$\sigma_{z(T)}$
UPN	cm	cm	cm	cm	cm ³	cm ³	cm ³	kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²
280	9,5	28	1,5	1	266	188,813	168,938	1,2707	0,90197	0,53802	10,0318	-8,957

Comparación de tensiones tangenciales en perfiles y S^* asociados

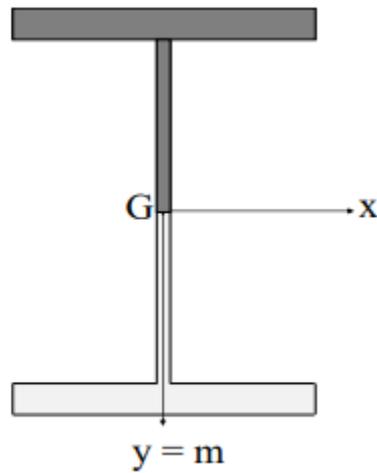
Considerando un espesor constante:



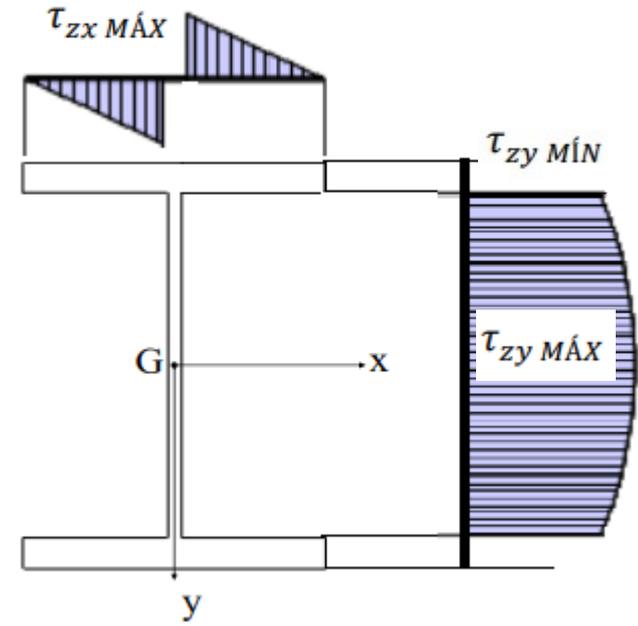
F^* para $\tau_{zxMÁX}$



F^* para $\tau_{zyMÍN}$



F^* para $\tau_{zyMÁX}$



$$\tau_{zy} = \frac{Q_{zy} S_x^*}{J_x b^*}$$

$$\tau_{zx MÁX} < \tau_{zy MÍN} < \tau_{zy MÁX}$$

En perfiles normalizados el espesor del alma es considerablemente menor que el de las alas



$$\tau_{zx MÁX} \ll \tau_{zy MÁX}$$

4.- Análisis de tensiones en el punto "K" de la sección "C"

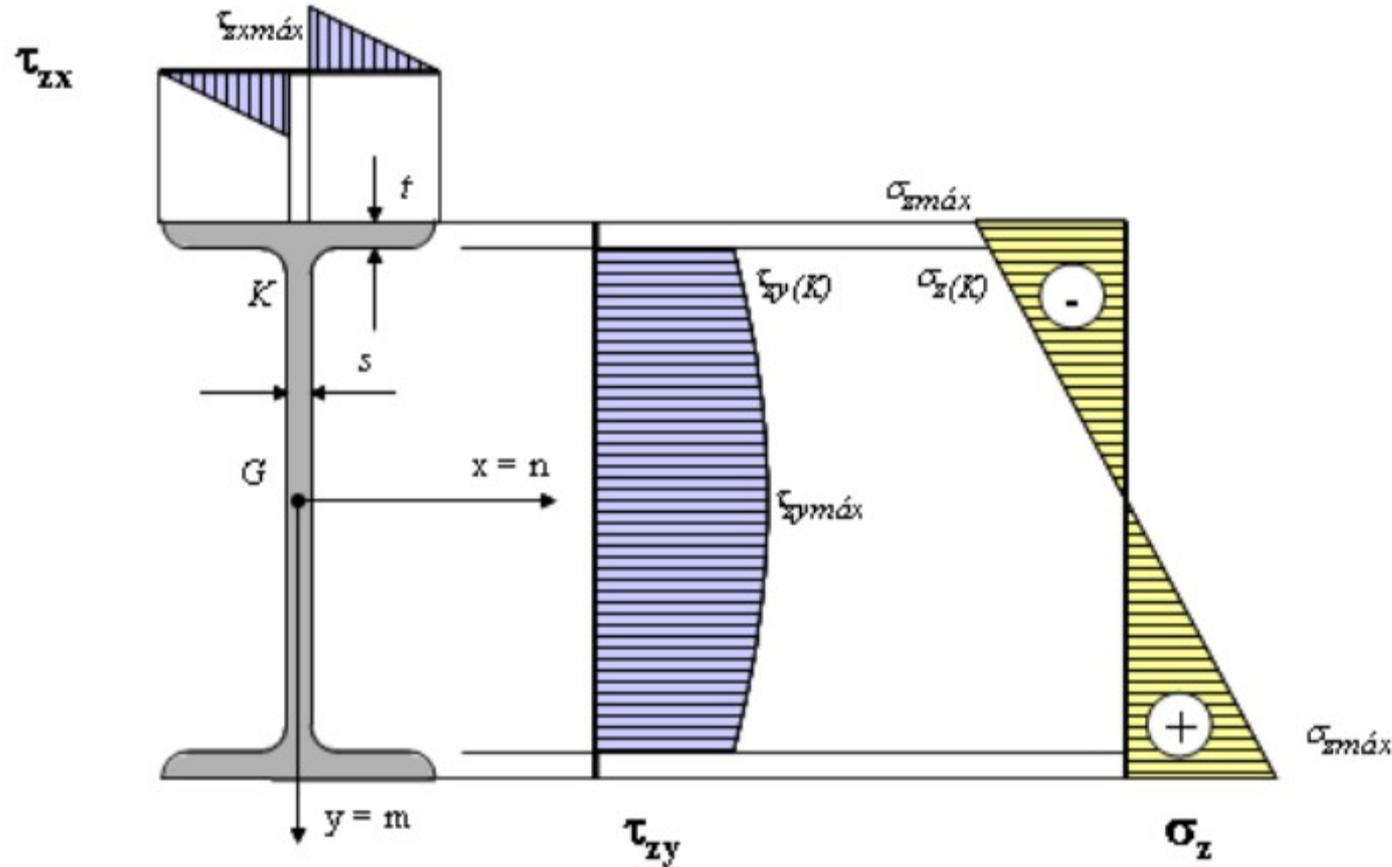
Tensiones normales x flexión:

$$\sigma_{z(K)} = \frac{M f_{x(C)}}{W_x} \cdot \left(\frac{h/2 - t}{h/2} \right)$$

Tensiones tgenciales x corte:

$$\tau_{zy(K)} = \frac{Q_{zy(C)} \cdot (S_x^*)_K}{J_x \cdot s}$$

con $(S_x^*)_K = (b \cdot t) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$



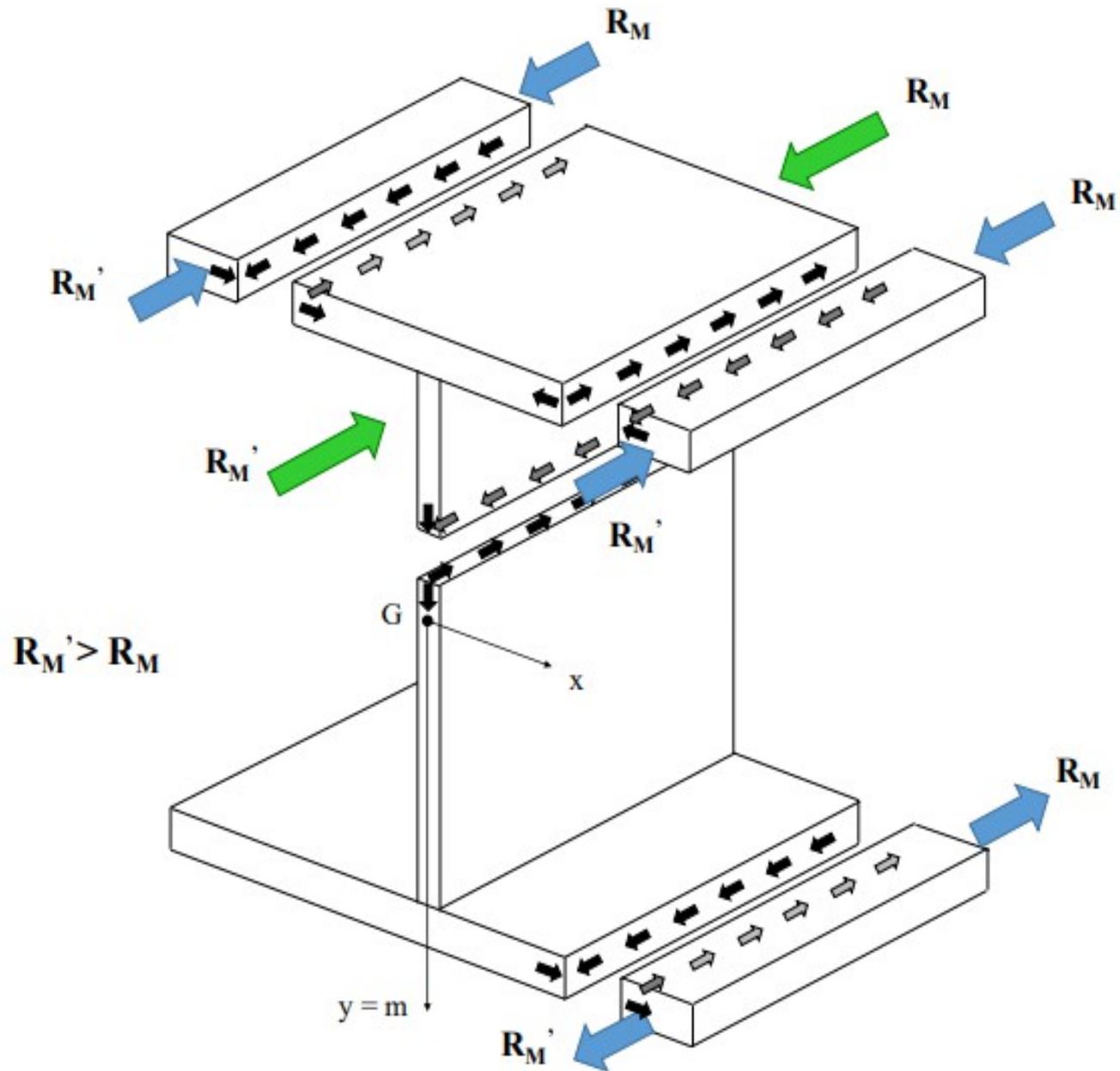
Tensiones principales

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{yz}^2}$$

$$\alpha_o = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \tau_{yz}}{\sigma_z - \sigma_y} \right) \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2 \cdot \tau_{yz}} \right)$$

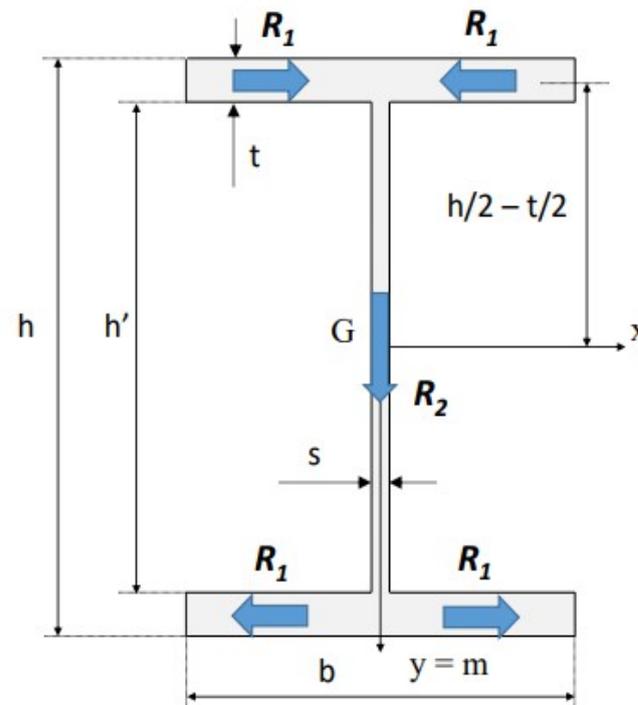
σ_z	τ_{yz}	σ_I	σ_{II}	α_I	α_{II}	$\tau_{máx}$	$\tau_{mín}$	$\alpha_{Imáx}$	$\alpha_{Imín}$
kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²	°	°	kN/cm ²	kN/cm ²	°	°
-9,6389	1,09	0,12155	-9,7605	83,6325	-6,3675	4,94102	-4,941	128,632	38,6325

Flujos de corte en perfil IPN

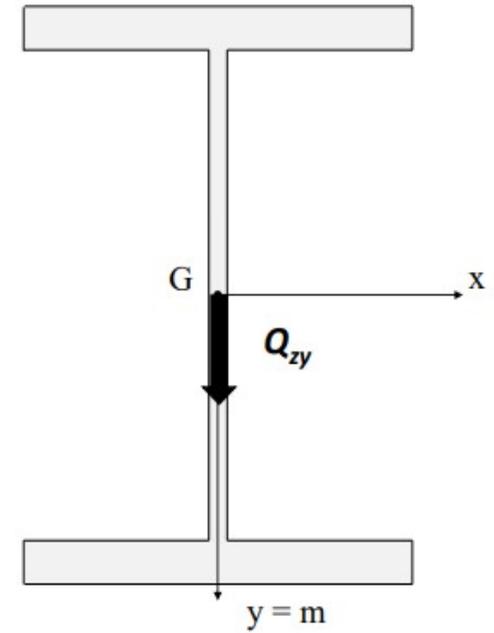


Flujos de corte

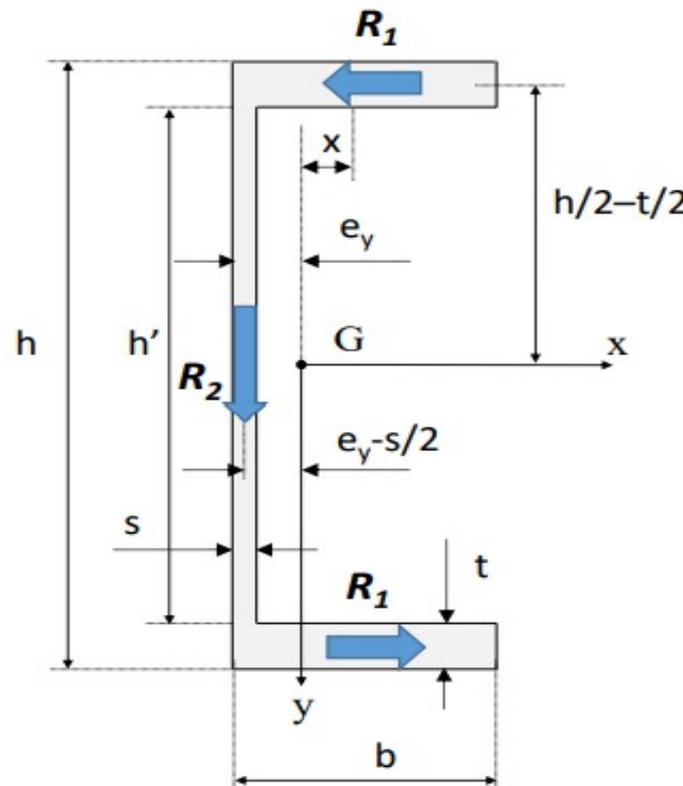
Corte aplicado sobre eje de simetría



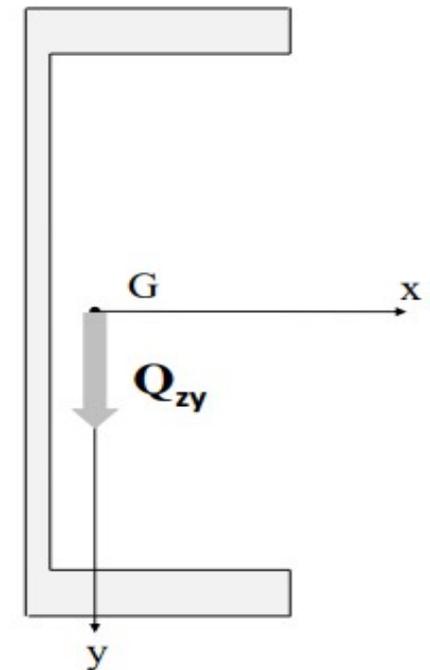
\approx



Corte aplicado sobre eje que no es de simetría



\neq



5.- Posición del centro de corte de la sección UPN

Tensiones tgnciales x corte:

$$\tau_{zym\acute{a}x} = \frac{Q_{zy(C)} \cdot S_x^*}{J_x \cdot b}$$

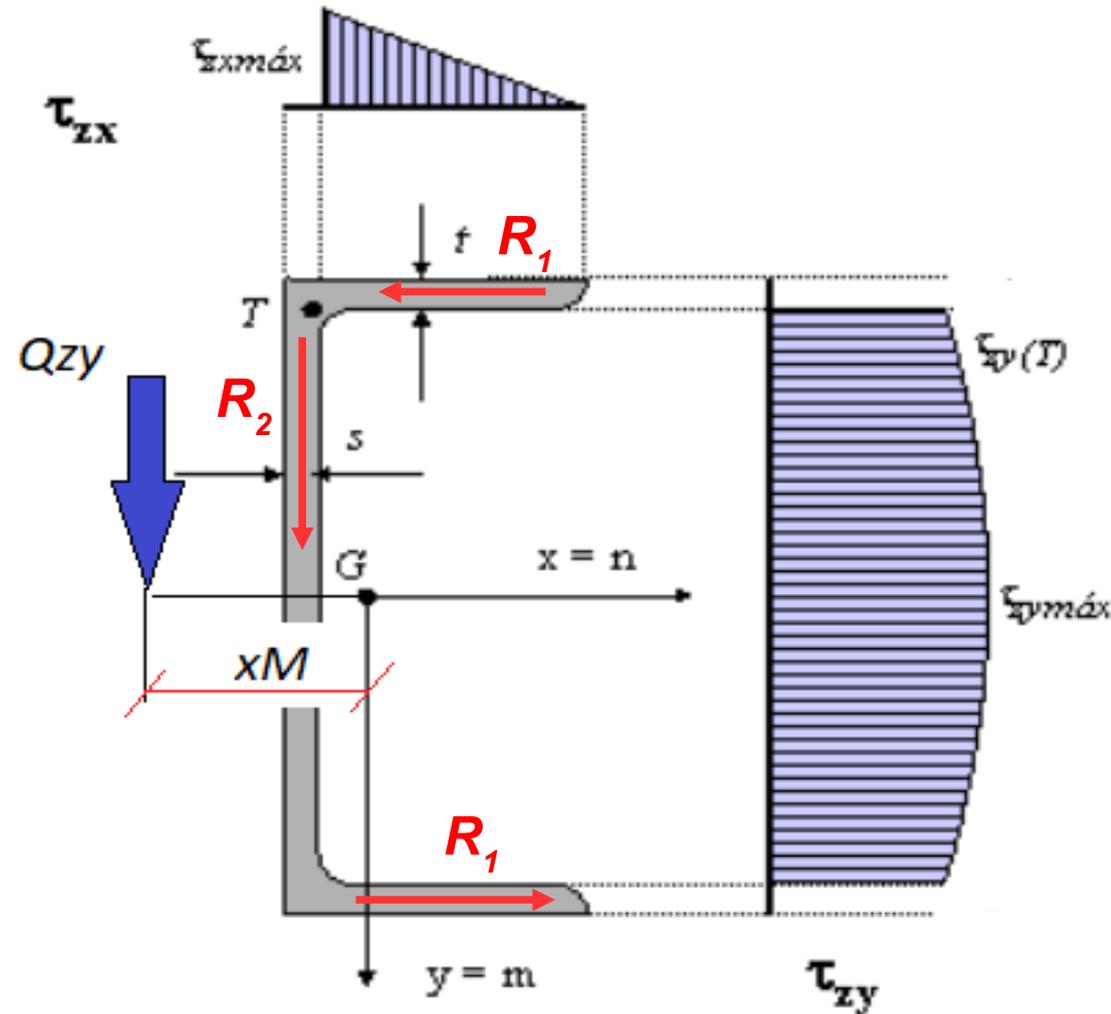
$$\tau_{zy(T)} = \frac{Q_{zy(C)} \cdot (S_x^*)_T}{J_x \cdot s}$$

con $(S_x^*)_T = (b \cdot t) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$

$$\tau_{zxm\acute{a}x} = \frac{Q_{zy(C)} \cdot (S_x^*)_{ala}}{J_x \cdot t}$$

con $(S_x^*)_{ala} = [(b-s) \cdot t] \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$

$$R_2 = Q_{zy} \quad R_1 = \tau_{zxm\acute{a}x} \cdot \frac{(b-s) \cdot t}{2}$$



Momentos respecto de "G":

$$-2 \cdot \tau_{zxm\acute{a}x} \cdot \frac{(b-s) \cdot t}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) - \left(e_y - \frac{s}{2}\right) \cdot Q_{zy} = -x_M \cdot Q_{zy}$$

$$\longrightarrow x_M = \frac{[(b-s) \cdot t]^2 \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)^2}{J_x \cdot t} - \left(e_y - \frac{s}{2}\right)$$

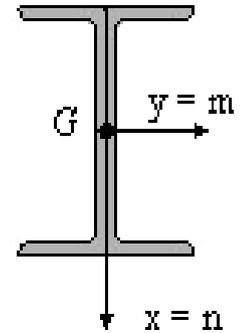
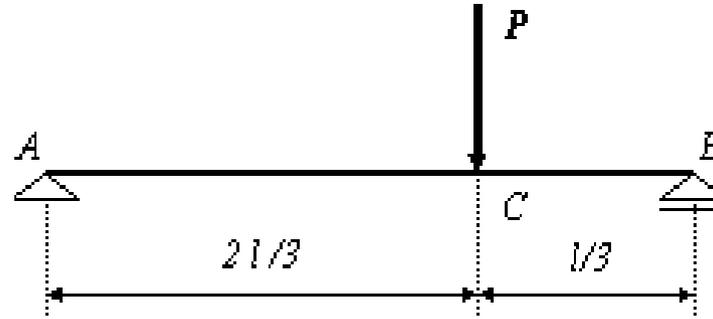
Perfil	e_y	x_M
UPN	cm	cm
280	2,53	5,05971

x_M
Tabla
5,02

Ejercicio N° 2 - Platabandas de refuerzo

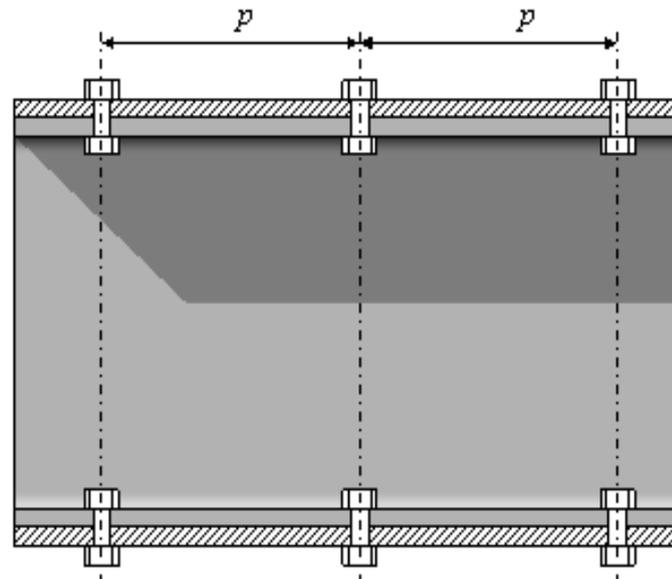
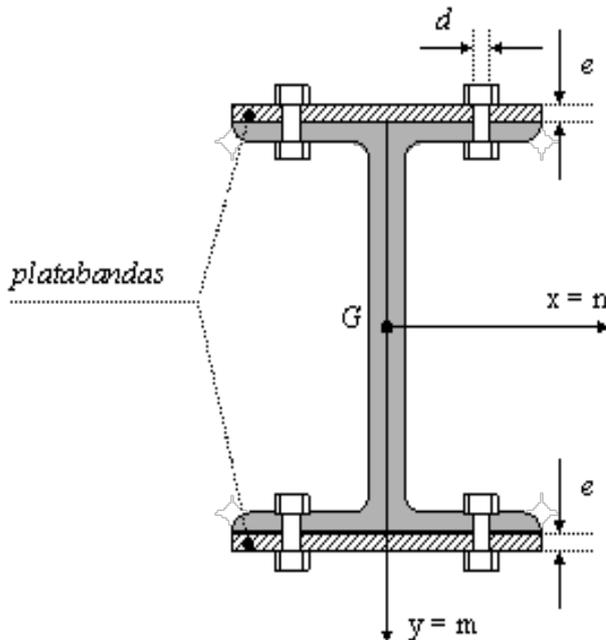
La estructura de acero mostrada, cuya sección se encuentra formada por dos perfiles *UPN* (espalda con espalda) va a ser sometida a una carga P . Teniendo en cuenta la flexión y el corte, y empleando los datos indicados en la tabla, se solicita:

1. Determinar si la estructura será adecuada
2. En caso de no resultar adecuada la estructura, diseñar el espesor e de las platabandas de refuerzo (ver figura inferior)
3. Determinar la máxima separación p entre los pernos de unión, cuyos diámetro y tensión tangencial admisible son, respectivamente, d y



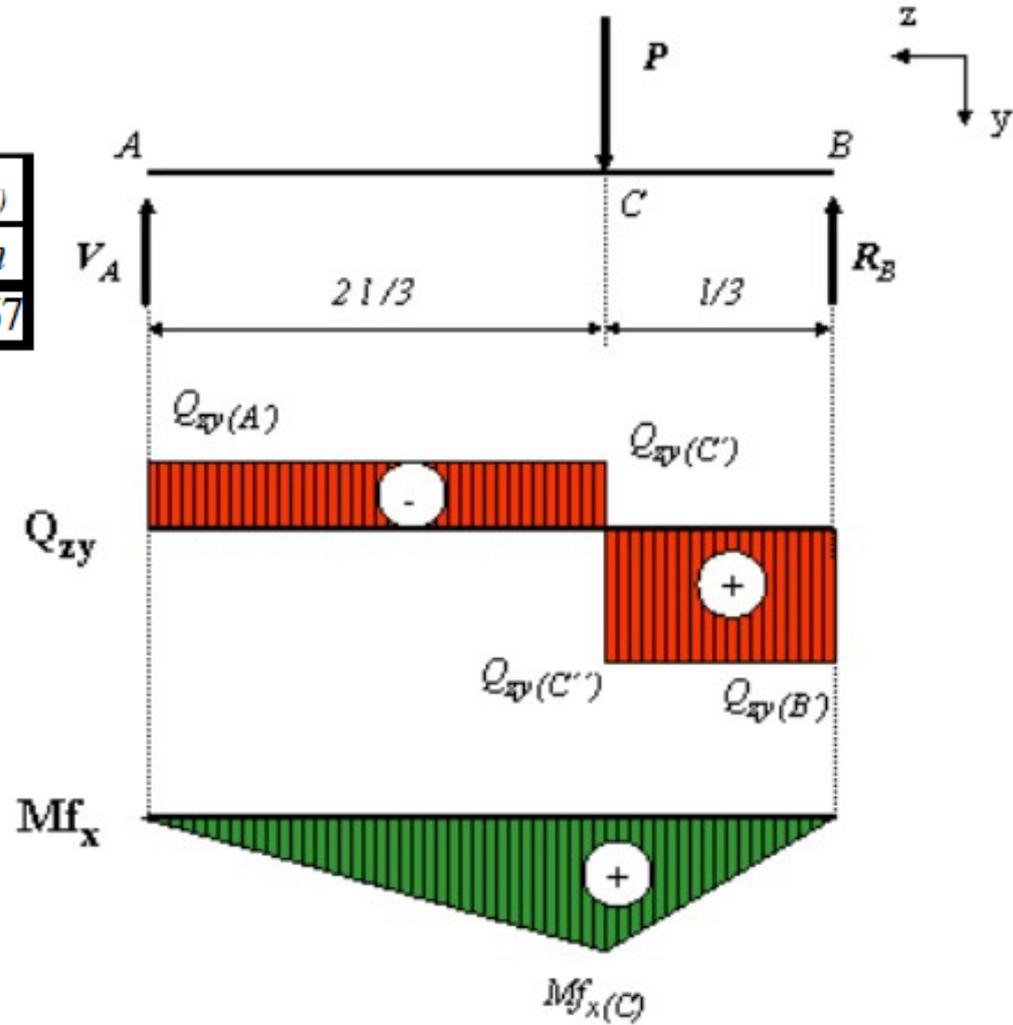
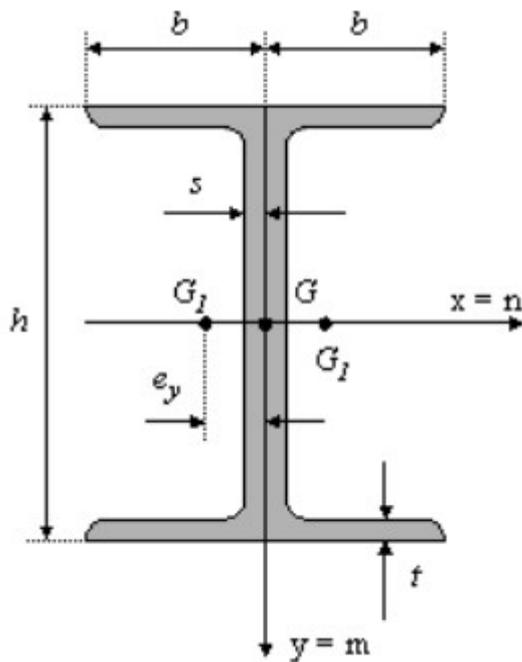
P	l	Perfiles	σ_{adm}	τ_{adm}	d	τ_{1adm}
kN	m	UPN	kN/cm^2	kN/cm^2	in	kN/cm^2
170	6	300	16	8	1 1/4	8

τ_{1adm}



Cálculos y datos iniciales

R_B	V_A	$Q_{zy}(A')$	$Q_{zy}(C')$	$Q_{zy}(C'')$	$Q_{zy}(B')$	$Mf_x(C)$
<i>kN</i>	<i>kN</i>	<i>kN</i>	<i>kN</i>	<i>kN</i>	<i>kN</i>	<i>kNm</i>
113,333	56,6667	-56,667	-56,667	113,333	113,333	226,667



Perfil	h	b	s	t	F_1	J_{x1}	J_{y1}	e_y	S_x^*1
UPN	<i>cm</i>	<i>cm</i>	<i>cm</i>	<i>cm</i>	<i>cm²</i>	<i>cm⁴</i>	<i>cm⁴</i>	<i>cm</i>	<i>cm³</i>
300	30	10	1	1,6	58,8	8030	495	2,7	316

Para la sección de 2 UPN:

Perfil	F	J_x	J_y
UPN	<i>cm²</i>	<i>cm⁴</i>	<i>cm⁴</i>
300	117,6	16060	1847,3

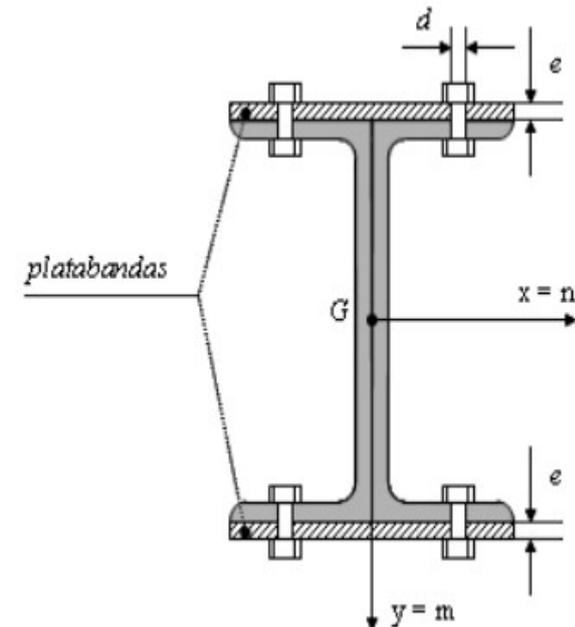
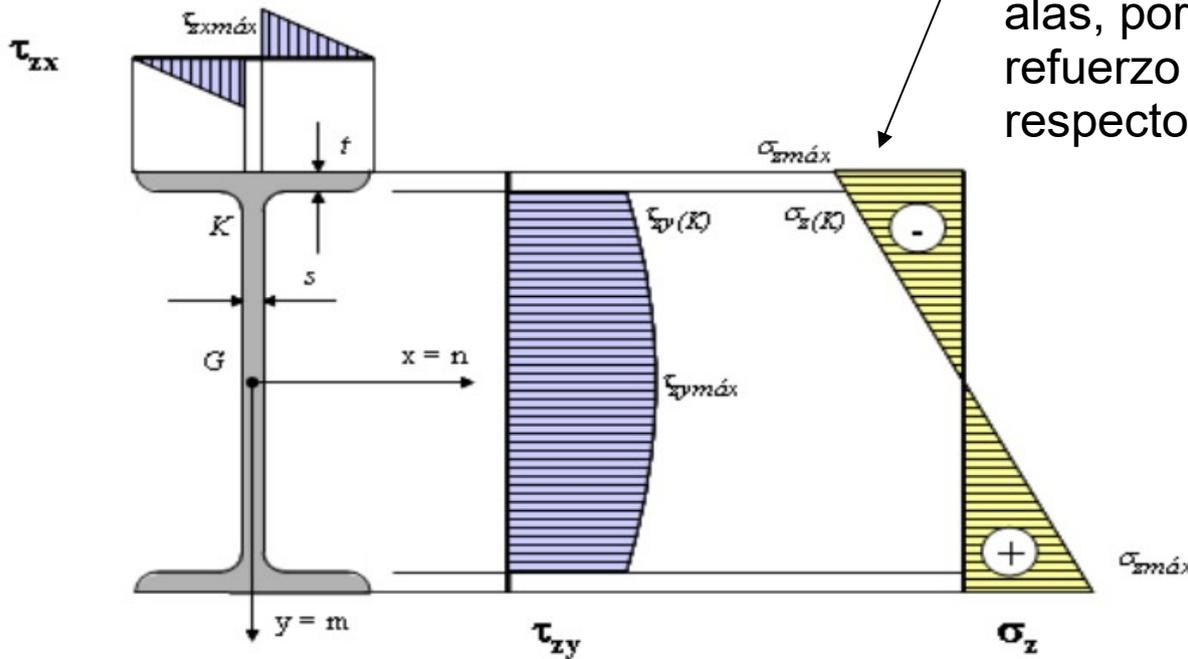
1. Verificación de la estructura

Como la luz entre apoyos es considerable, verificamos que las tensiones generadas x la flexión no superen las admisibles

$$\sigma_{z\text{máx}} = \frac{Mf_{x(C)}}{J_x} \cdot \frac{h}{2} \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma_{z\text{máx}} = 21,1 \text{ KN/cm}^2 \not\leq 16 \text{ KN/cm}^2 (\sigma_{adm}) \quad \text{NO VERIFICA}$$

Debida a la distribución de tensiones normales generadas x la flexión (son máximas en las alas), lo razonable es aumentar "material" en las alas, por lo que se sumarán platabandas de refuerzo en ambas alas, simétricamente respecto del eje "x", aumentando el Jx:



2. Cálculo de platabandas

$$J_x \text{ real de la sección: } J_{xR} = J_x + 2 \cdot \left[\frac{2 \cdot b \cdot e^3}{12} + 2 \cdot b \cdot e \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{e}{2} \right)^2 \right]$$

$$\text{Suponiendo } e \ll h \text{ y } e \ll 2b: J_{xR} \cong J_x + 2 \cdot \left[2 \cdot b \cdot e \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

$$\text{Y como... } J_{xR} = \frac{M f_{x(C)}}{\sigma_{adm}} \cdot \frac{h}{2} \longrightarrow e_{MIN} = \left(\frac{M f_{x(C)}}{2 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_{adm}} - \frac{J_x}{b \cdot h^2} \right)$$

$$e_{MIN} = 0,6 \text{ cm}$$

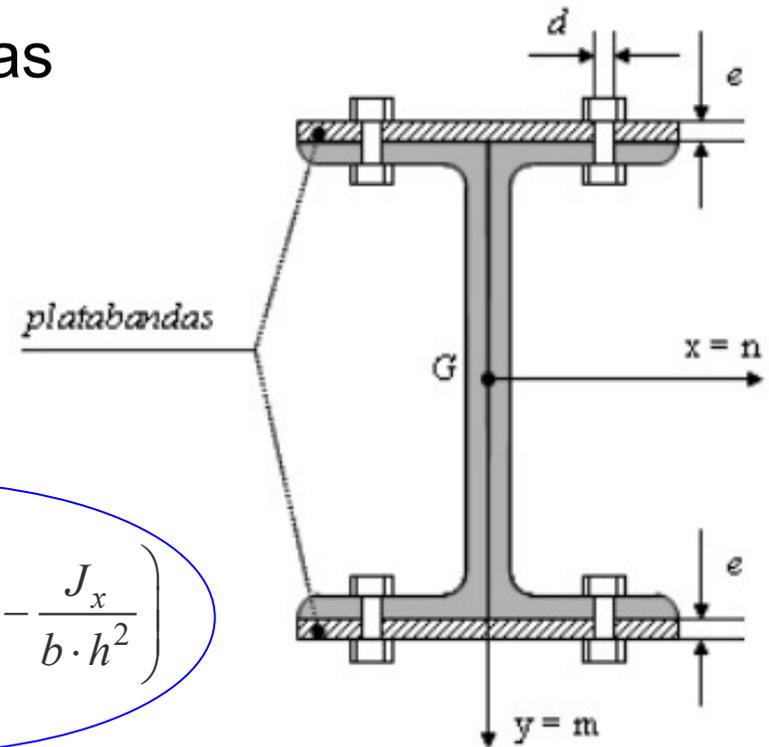
Con e_{min} ya dimensionado puedo calcular los valores reales de:

$$\sigma_{zmáx} = \frac{M f_{x(C)}}{J_{xR}} \cdot \left(\frac{h}{2} + e \right) \quad \text{y} \quad J_{xR} = J_x + 2 \cdot \left[\frac{2 \cdot b \cdot e^3}{12} + 2 \cdot b \cdot e \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{e}{2} \right)^2 \right]$$

e	J_{xR}	$\sigma_{zmáx}$
cm	cm ⁴	kN/cm ²
0,6	21452	15,8

$$\sigma_{zmáx} = 15,8 \text{ KN/cm}^2 < 16 \text{ KN/cm}^2 (\sigma_{adm})$$

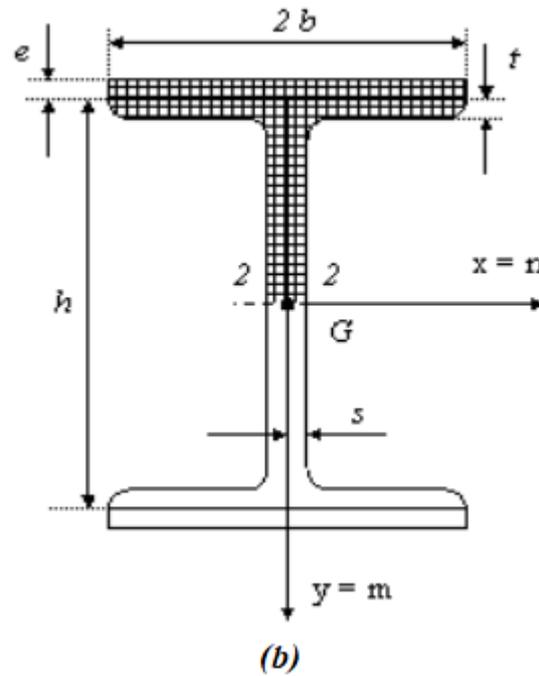
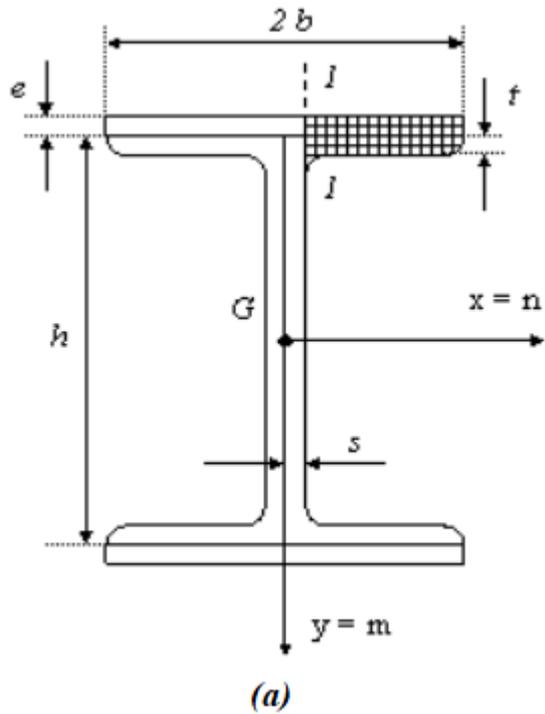
VERIFICA x Flexión



Verificación x Corte

Si bien sabíamos de antemano que la predominancia de la flexión hacía poco significativo el efecto del corte, vamos a verificarlo para ser coherentes con el método:

Para FLEXIÓN y CORTE **siempre dimensionar x una sollicitación y verificar con la otra**



Sección 1-1 (a):

$$\tau_{zx\text{máx}} = \frac{Q_{zy}(C'') \cdot S_x^*{}_{1-1}}{J_{xR} \cdot (t + e)}$$

$$S_x^*{}_{1-1} = (b - s) \cdot (t + e) \cdot \left(\frac{h}{2} + e - \frac{e + t}{2} \right)$$

Sección 2-2 (b):

$$\tau_{zym\text{áx}} = \frac{Q_{zy}(C'') \cdot S_x^*{}_{2-2}}{J_{xR} \cdot (2 \cdot s)}$$

$$S_x^*{}_{2-2} = 2 \cdot S_x^*{}_{1-1} + 2 \cdot b \cdot e \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{e}{2} \right)$$

$S_x^*{}_{1-1}$	$S_x^*{}_{2-2}$	$t + e$	$2s$	$\tau_{zx\text{máx}}$	$\tau_{zym\text{áx}}$
cm^3	cm^3	cm	cm	kN/cm^3	kN/cm^3
284	808	2,18	2	0,69	2,14

τ_{ladm}
kN/cm^2
8

VERIFICA x Corte
(tal y como previmos)

3. Separación entre pernos de unión

La fuerza de “resbalamiento” deberá ser absorbida por los pernos...

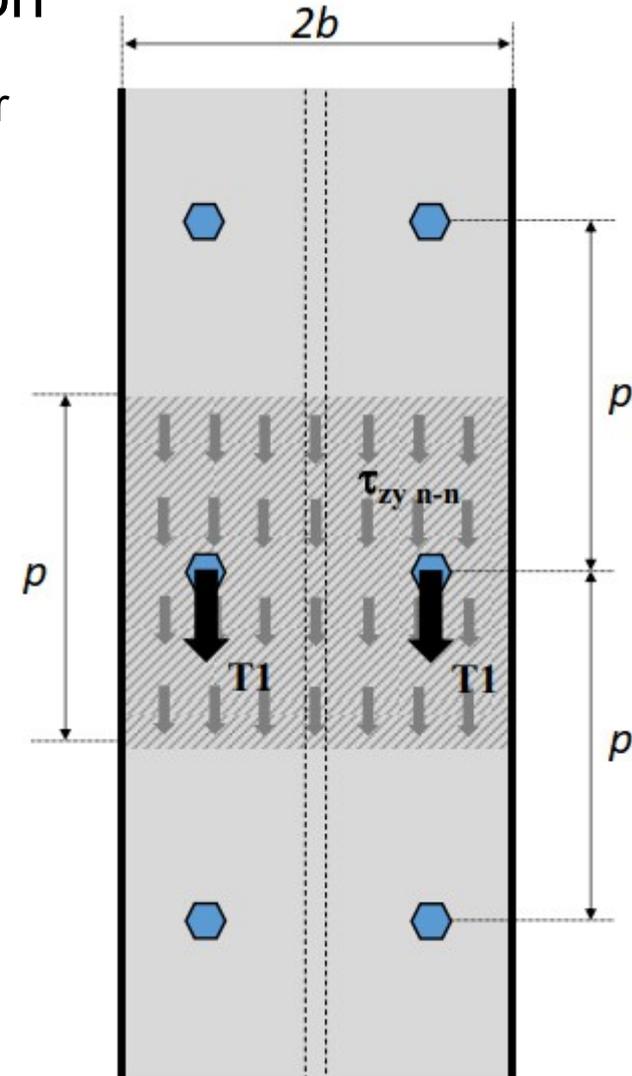
$$\tau_{zy3-3} = \frac{Q_{zy}(C'') \cdot S_x^{*3-3}}{J_{xR} \cdot (2 \cdot b)}$$

con $S_x^{*3-3} = 2 \cdot b \cdot e \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{e}{2} \right)$

Las tensiones $\zeta_{zy} 3-3$ distribuidas en un área $(2 b p)$ deben ser equilibradas mediante fuerzas correspondientes a cada par de bulones $2 \cdot T1$.
Es decir $= 2 \zeta_{1adm} \pi d^2 / 4$.

$$\tau_{zy3-3} \cdot 2 \cdot b \cdot p = 2 \cdot \tau_{1adm} \cdot \left(\frac{\pi \cdot d^2}{4} \right)$$

$$\longrightarrow p = \frac{\tau_{1adm}}{\tau_{zy3-3}} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot b}$$



S_x^{*3-3}	$2 b$	τ_{zy3-3}	p
cm^3	cm	kN/cm^2	cm
176,3	20	0,05	135,986

