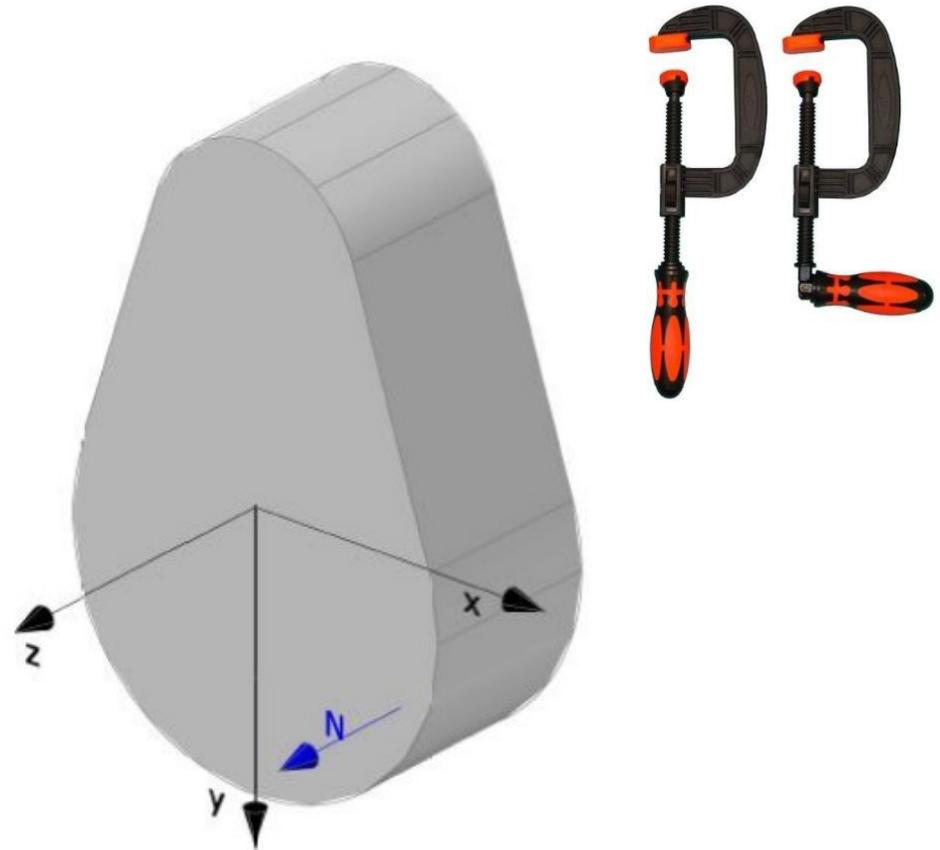


Unidad 10: Sollicitación x FLEXIÓN Compuesta

Conceptos Generales . Solución General . Relación entre el eje neutro y el centro de presión. Solución por superposición. Núcleo Central.

Referencias- Bibliografía sugerida

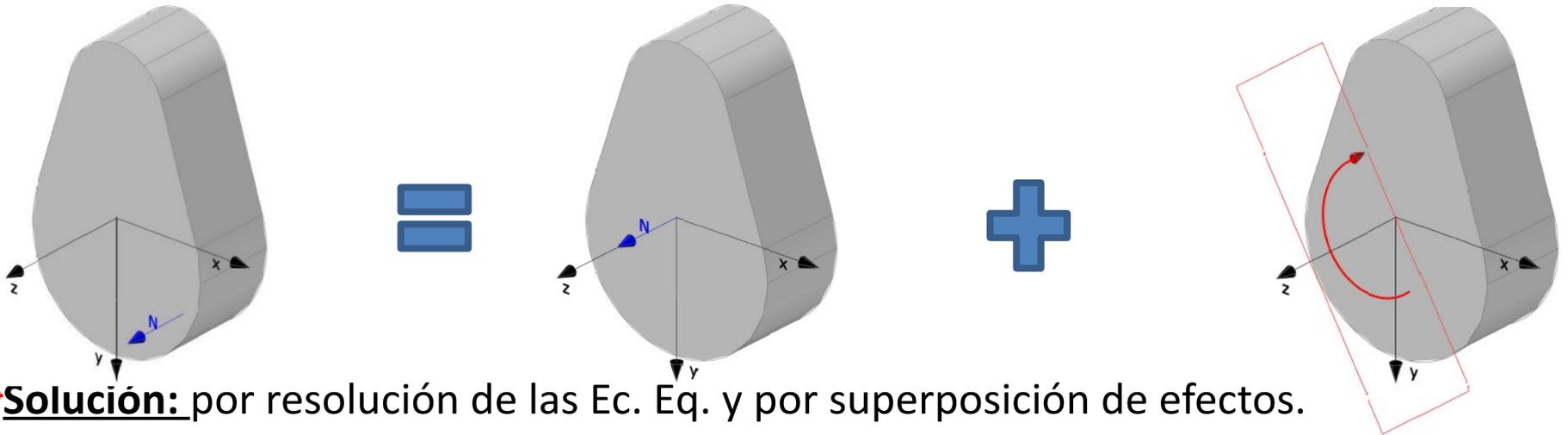
E.D.Fliess Estabilidad. Segundo curso.
F.P. Beer y J.R.Russell Johnston. Mecánica de Materiales—
James M.Gere. Mecánica de Materiales—
Riley Sturges Morris. Mecánica de Materiales—
R.C .Hibbeler. Mecánica de Materiales—



Flexión compuesta ó Solicitación Axil Excéntrica

Conceptos generales

- Sobre la sección actúa una fuerza normal excéntrica.
- La reducción al baricentro origina un par más un esfuerzo axil, de modo que también puede estar dada por un par más una fuerza axil



- **Solución:** por resolución de las Ec. Eq. y por superposición de efectos.
- **Centro de presión (C.P.)** Es la intersección de la recta de acción de la fuerza axil excéntrica con el plano de la sección en estudio.
- **Línea de fuerzas** : Resulta de la unión del C.P y el baricentro G.
- **Excentricidad: (e)** distancia entre el C.P. y G.
- **Hipótesis** ley de Hooke y Bernoulli Navier. Las secciones giran en torno al E.N. y las tensiones siguen una ley de variación lineal; por lo tanto las fibras mas alejadas respecto del E.N. serán la más tensionadas.

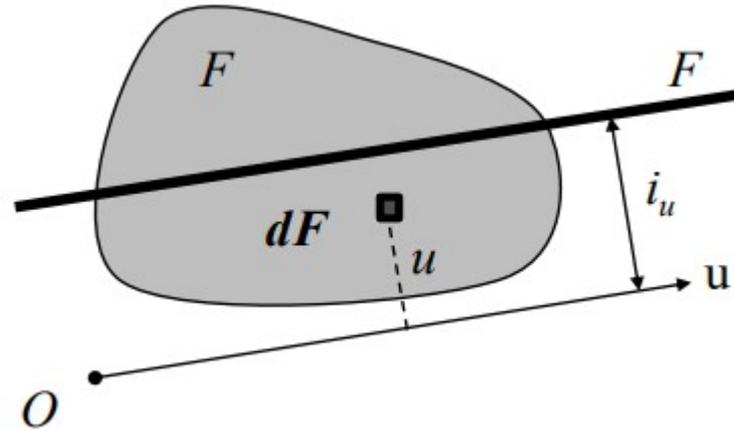
Radio de giro

Concepto

Se define como Radio de Giro Axial i_u de la figura con respecto al eje "u" : $i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}$

Siendo

$$J_u = \iint_F u^2 dF$$



Obsérvese que un fleje de misma área F paralelo al eje u , a una distancia i_u , posee el mismo momento de inercia axial:

$$J_u = \iint_F i_u^2 dF = i_u^2 \iint_F dF = i_u^2 F$$

De donde

$$i_u^2 = \frac{J_u}{F}$$

Radio de giro respecto de un eje y polar

Radio de giro respecto del eje x

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$$

Radio de giro respecto del eje y

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

Radio de giro polar

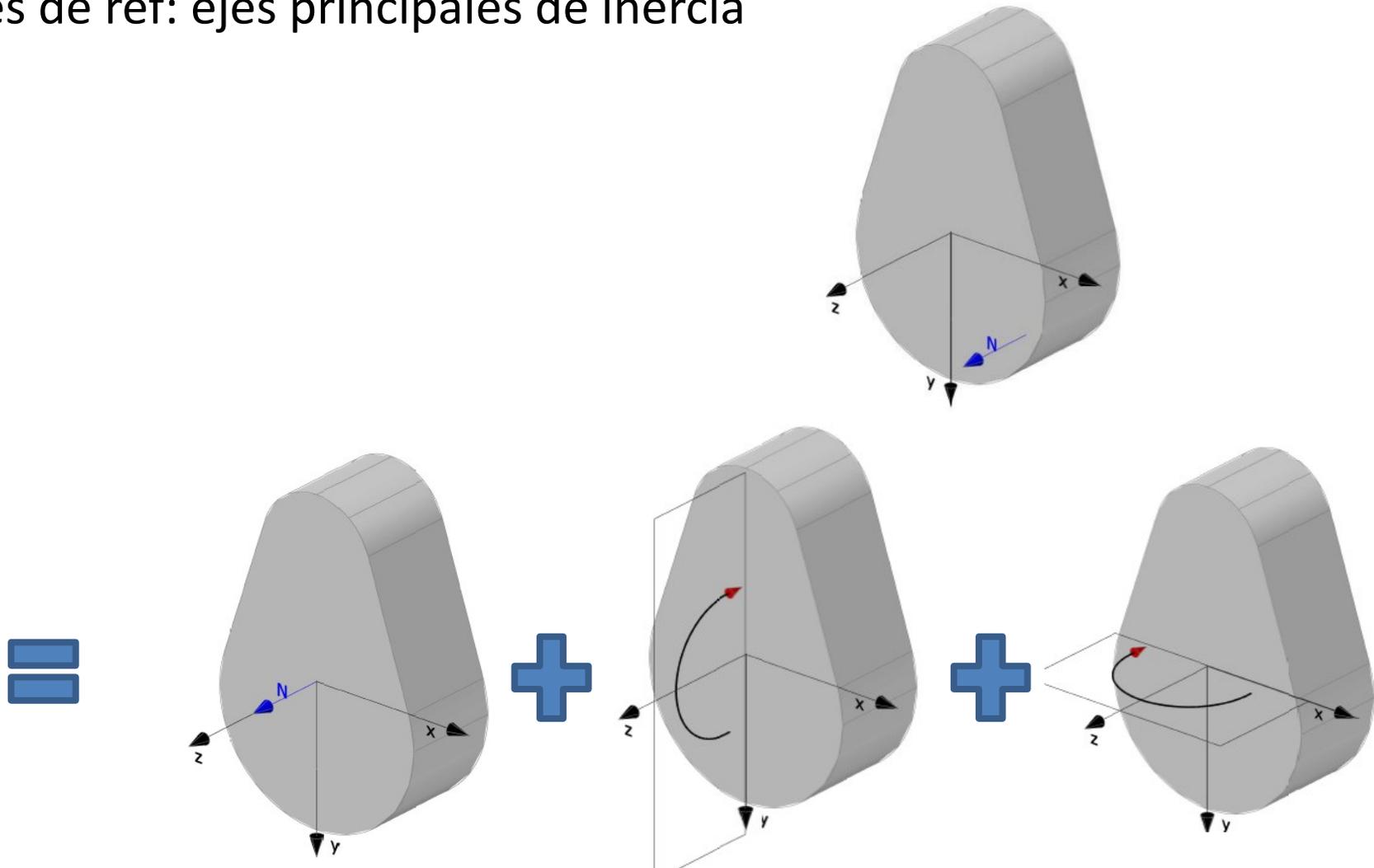
$$J_p = J_x + J_y \Rightarrow \frac{J_p}{F} = \frac{J_x + J_y}{F}$$

$$i_p = \sqrt{i_x^2 + i_y^2}$$

Flexión compuesta oblicua

Resolución como suma de esfuerzo axial y dos flexiones normales

Ejes de ref: ejes principales de inercia



Flexión compuesta

Resolución como suma de esfuerzo axial y dos flexiones normales

Si hacemos coincidir x e y con los ejes principales de inercia

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$$

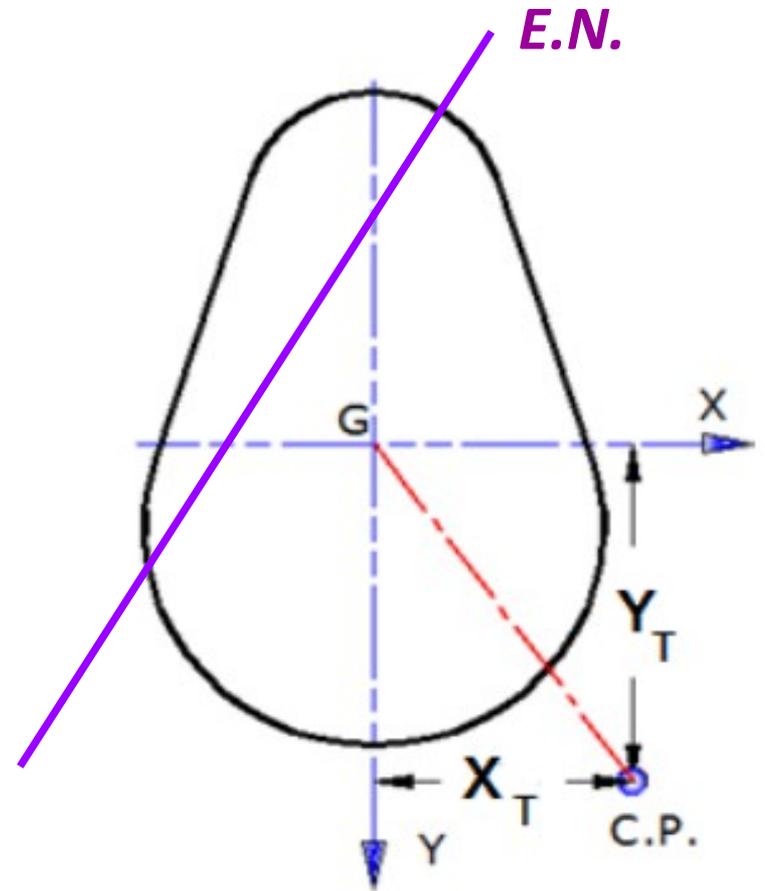
$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N \cdot y_T}{J_x} y + \frac{N \cdot x_T}{J_y} x$$

Determinación del eje neutro:

$$0 = \frac{N}{F} \left(1 + \frac{e_y}{J_x/F} y_N + \frac{e_x}{J_y/F} x_N \right)$$

$$y_N = 0 \Rightarrow -1 = \frac{e_x}{i_y^2} x_N \Rightarrow x_N = -\frac{i_y^2}{e_x}$$

$$x_N = 0 \Rightarrow -1 = \frac{e_y}{i_x^2} y_N \Rightarrow y_N = -\frac{i_x^2}{e_y}$$



NOTA: los signos de las coordenadas del C.P. y del E.N. son contrarias.

Flexión Compuesta Oblicua

Planteo de las Ecuaciones de Equivalencia para ejes x e y

$$(1) \quad N_z = \int_F \sigma_z . dF$$

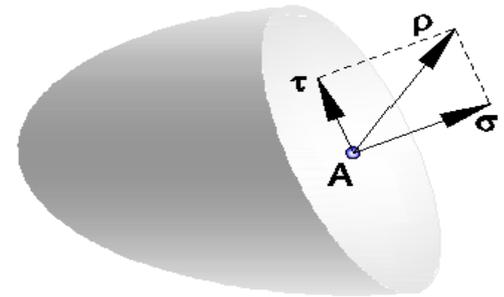
$$(2) \quad 0 = \int_F \tau_{zy} . dF$$

$$(3) \quad 0 = \int_F \tau_{zx} . dF$$

$$(4) \quad 0 = \int_F (\tau_{zx} y + \tau_{zy} x) . dF$$

$$(5) \quad M_x = \int_F \sigma . y . dF$$

$$(6) \quad M_y = \int_F \sigma . x . dF$$



Flexión compuesta

Solución para el caso general de Flexión compuesta oblicua

Ejes de referencia: L.F. y n' a) $N = \int_F \sigma \cdot dF$ b) $0 = \int_F \sigma \cdot m \cdot dF$ c) $N \cdot e' = \int_F \sigma \cdot n' \cdot dF$

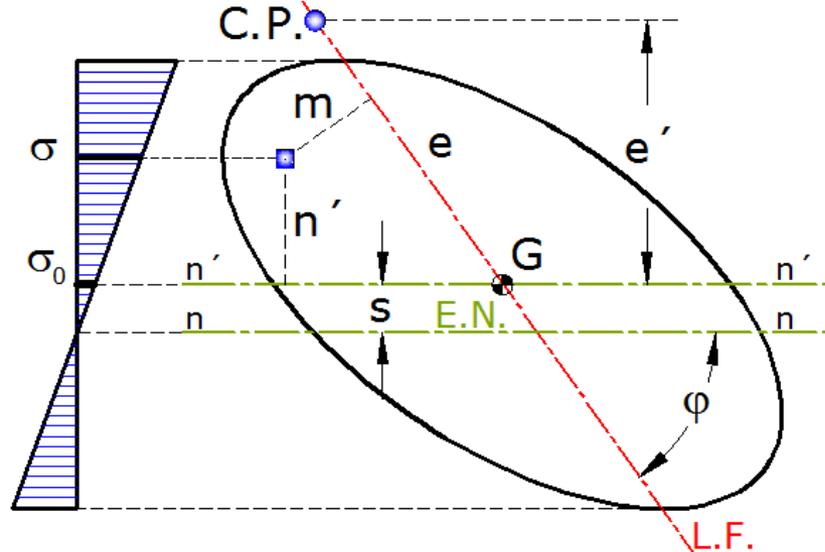
De acuerdo al diagrama de tensiones

$$k = \frac{\sigma_0}{s} = \frac{\sigma}{s + n'} \Rightarrow \sigma = k \cdot (s + n')$$

Reemplazando en a)

$$N = k \cdot s \int_F dF + k \int_F n' \cdot dF \Rightarrow \sigma_0 = \frac{N}{F}$$

De b) el eje n' y la LF son E.C.



$$\text{de c) } N \cdot e' = k \cdot s \int_F n' \cdot dF + k \int_F n'^2 \cdot dF \Rightarrow N \cdot e' = k \cdot J_{n'} \Rightarrow N \cdot e' = \frac{\sigma_0}{s} \cdot J_{n'}$$

$$N \cdot e' = \frac{\sigma}{s + n'} \cdot J_{n'} \Rightarrow \sigma = \frac{N \cdot e' \cdot s + N \cdot e' \cdot n'}{J_{n'}} \Rightarrow \sigma = \sigma_0 + \frac{N \cdot e' \cdot n'}{J_{n'}}$$

A

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N \cdot e' \cdot n'}{J_{n'}}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N \cdot e \cdot \text{sen} \varphi}{J_{n'}} \cdot n'$$

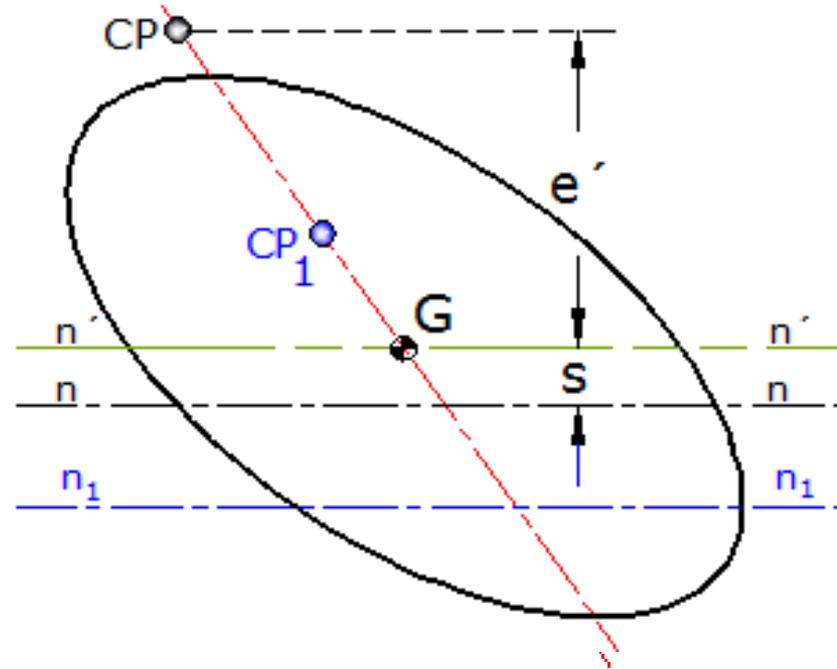
Relación entre EN y CP

De la expresión A y para el eje neutro:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Ne'n'}{J_{n'}} \Rightarrow 0 = \frac{1}{F} + \frac{e's}{J_{n'}}$$

$$-e's = i_{n'}^2$$

B



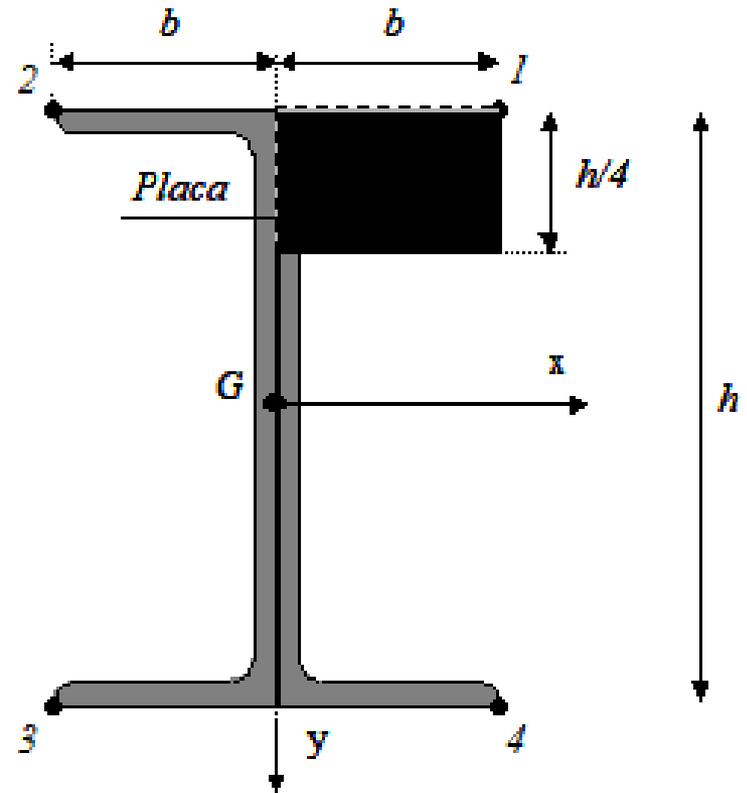
Esta última expresa que a medida que CP se acerca al baricentro el EN se aleja del mismo teniendo dos extremos :

Flexión pura: $s=0$ resulta $e= \infty$. El EN es baricentrico

Solicitación Axil: $e= 0$ resulta $s=\infty$. EN impropio (en el infinito)

Ejercicio 1 ejemplo

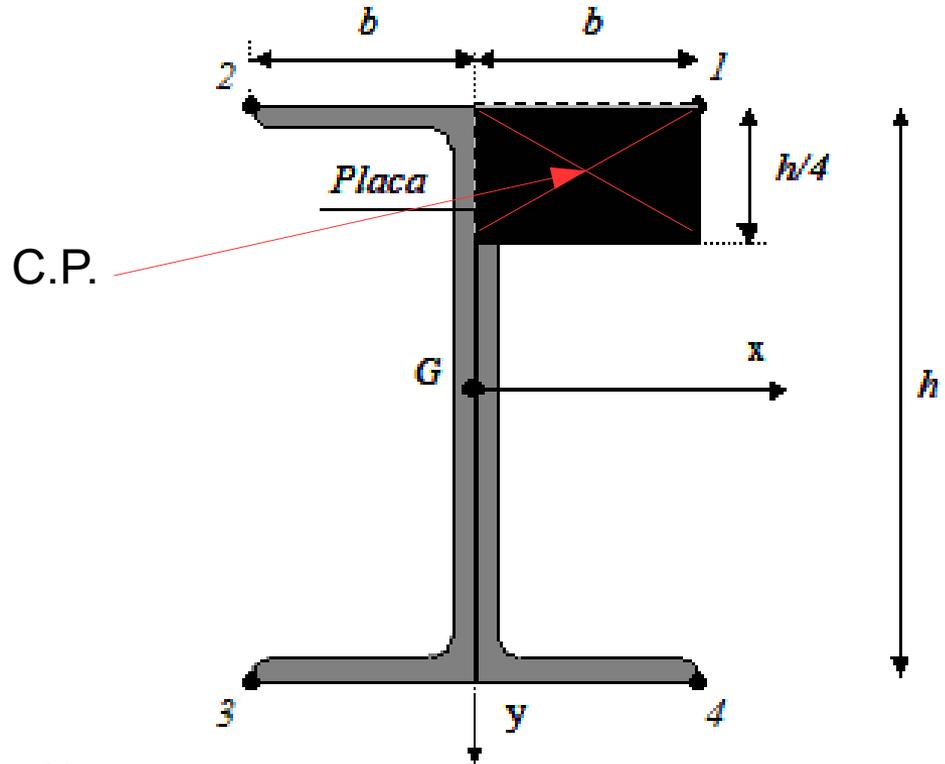
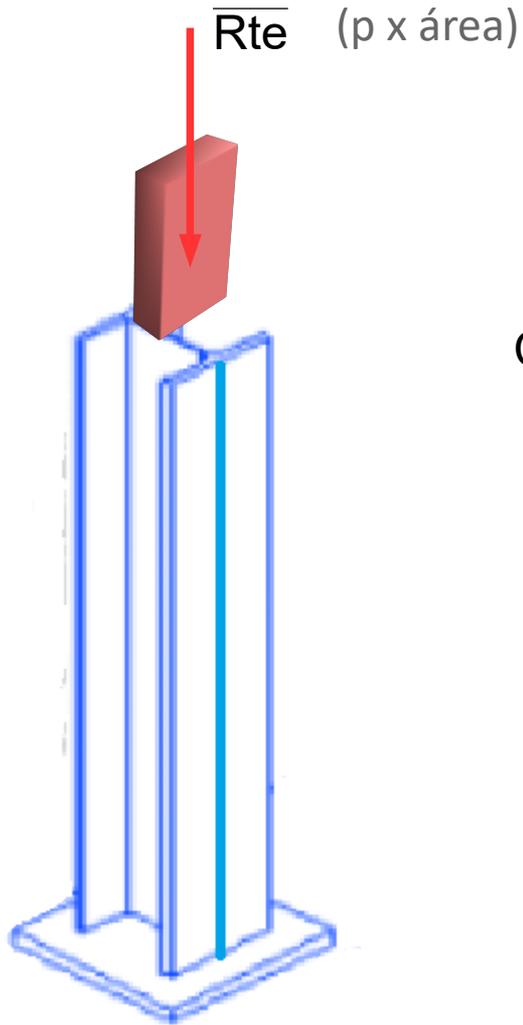
Como se indica en la figura, sobre una parte de una columna de una planta industrial, formada por dos perfiles UPN 180 de acero, unidos “espalda con espalda”, apoya una placa que le transite una carga de compresión uniformemente distribuida y paralela a su eje (carga $p = 5,2 \text{ KN/cm}^2$)



Se solicita:

- Calcular las tensiones en los puntos 1, 2, 3 y 4
- Decidir si la sección de la columna es adecuada, teniendo en cuenta que en ningún punto debe ser superada la tensión admisible $\sigma_{adm} = 16 \text{ KN/cm}^2$
- Determinar analíticamente la posición del eje neutro y su pendiente

carga $p = 5,2 \text{ KN/cm}^2$



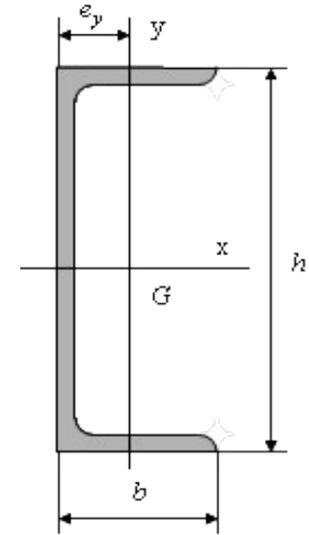
Notas:

- (1) Debe considerarse que la sección a analizar se encuentra suficientemente alejada de la zona de aplicación de la carga, de acuerdo con el Principio de Saint Venant.
- (2) La longitud de la columna es tal que los efectos de segundo orden son despreciables

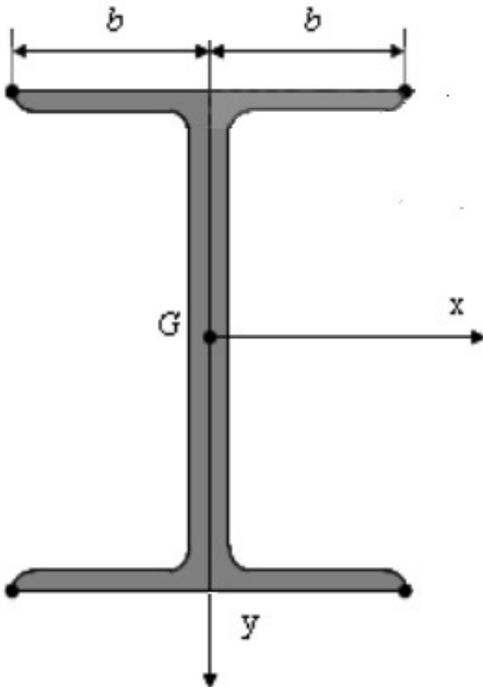
Cálculo de las tensiones en los puntos 1, 2, 3 y 4

1) Vemos las características del perfil UPN 180:

J_{x1}	J_{y1}	h	b	F_1	e_y
cm^4	cm^4	cm	cm	cm^2	cm
1350	114	18,0	7,0	28,0	1,92



2) Calculamos las características geométricas de nuestra sección (compuesta x 2 UPN “espalda con espalda”):



$$F = 2 \cdot F_1$$

$$J_x = 2 \cdot J_{x1}$$

$$J_y = 2 \cdot (J_{y1} + F_1 e_y^2)$$

F	J_x	J_y
cm^2	cm	cm
56	2700	434

Cálculo de las tensiones en los puntos 1, 2, 3 y 4

3) Calculamos la Rte de fuerzas del sistema de cargas activas dado

$$P = p \cdot b \cdot \frac{h}{4} \quad \longrightarrow \quad P \text{ (Rte)} = 5,2 \text{ KN/cm}^2 \times 7 \text{ cm} \times 18/4 \text{ cm} = 163,8 \text{ KN}$$

4) Calculamos las coordenadas del centro de presión T

$$x_T = \frac{b}{2} \quad y_T = -\frac{3}{8} \cdot h \quad \longrightarrow \quad x_T = 3,5 \text{ cm} \quad ; \quad y_T = -6,75 \text{ cm}$$

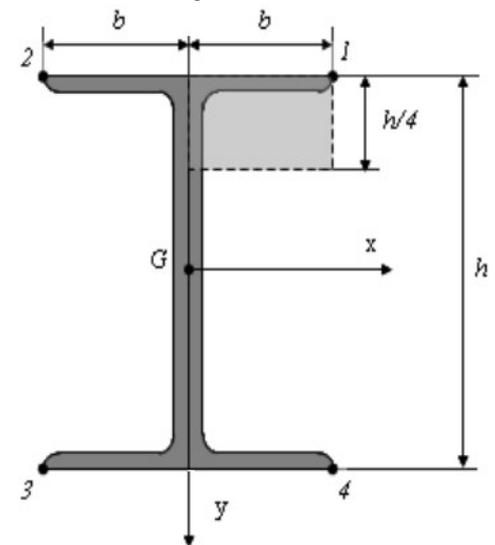
5) Calculamos las tensiones normales en los puntos extremos solicitados.

6) La tensión en cualquier punto está dada por la fórmula de superposición de efectos para esta flexión compuesta oblicua (considerando que la carga P es de compresión):

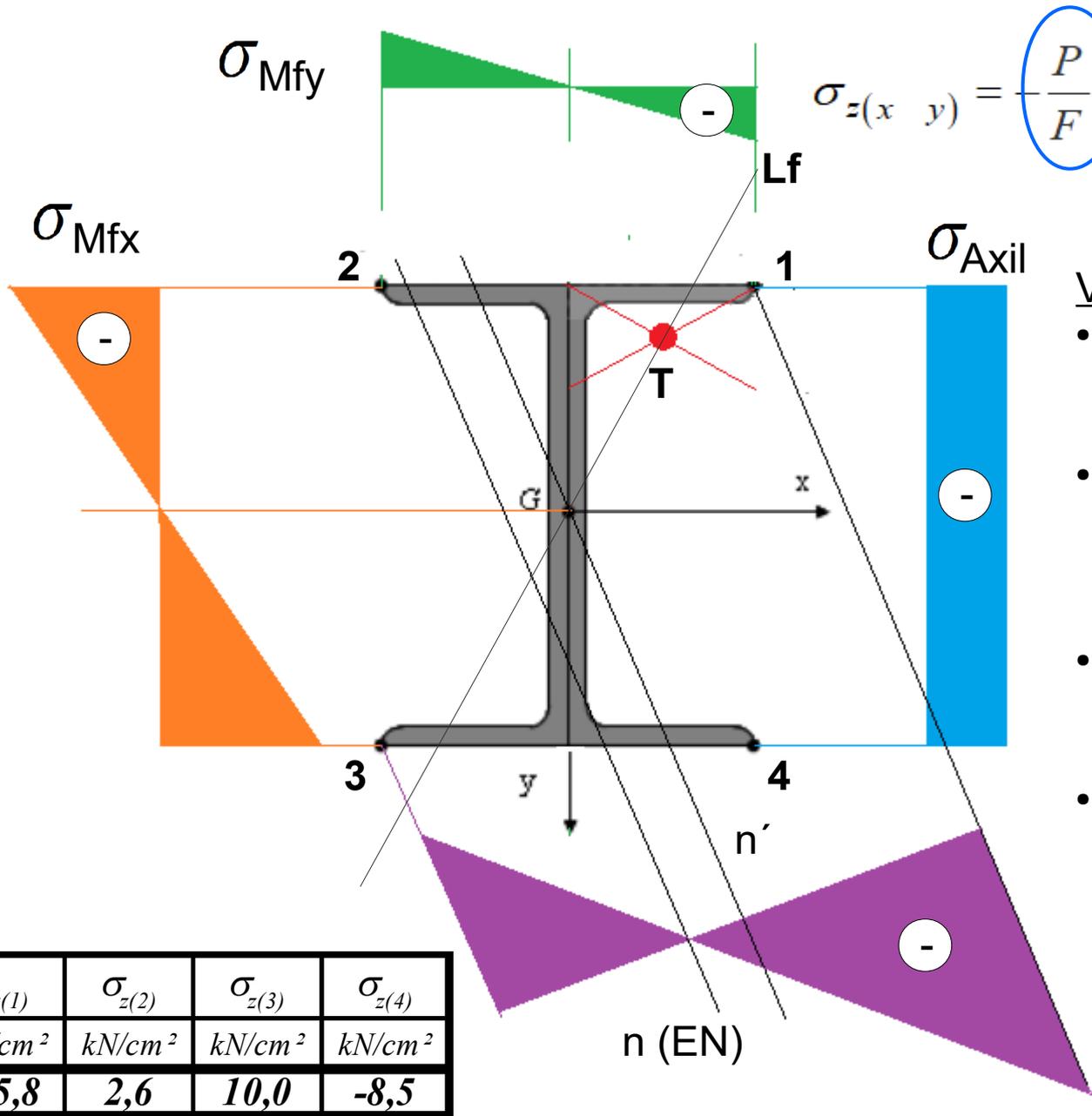
$$\sigma_{z(x \ y)} = -\frac{P}{F} + \frac{(P \cdot y_T)}{J_x} \cdot y - \frac{(P \cdot x_T)}{J_y} \cdot x$$

Reemplazando valores:

$\sigma_{z(1)}$	$\sigma_{z(2)}$	$\sigma_{z(3)}$	$\sigma_{z(4)}$
kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²
-15,8	2,6	10,0	-8,5



Diagramas de tensiones (parciales y totales)



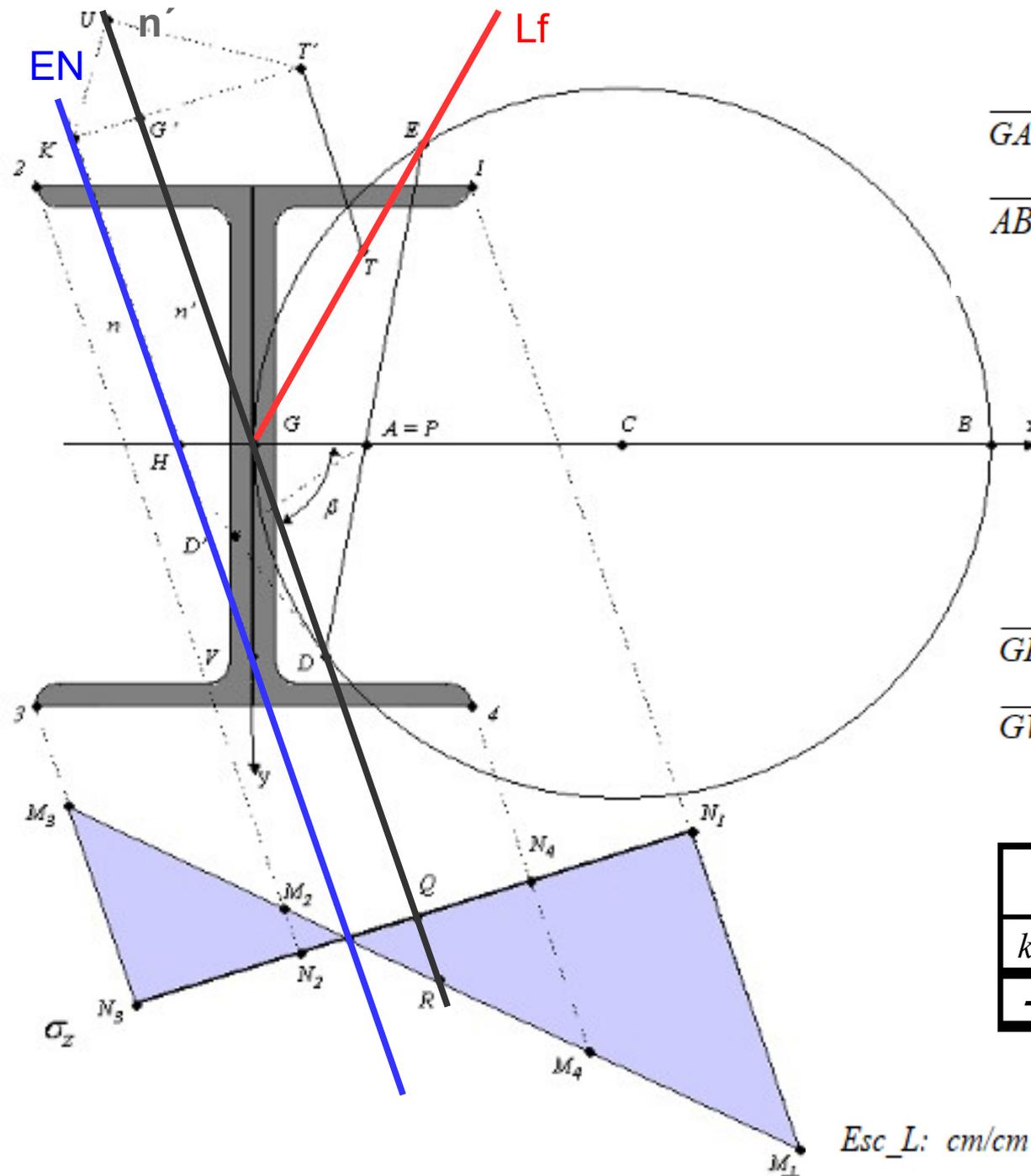
$$\sigma_{z(x,y)} = \frac{P}{F} + \frac{(P \cdot y_T)}{J_x} \cdot y - \frac{(P \cdot x_T)}{J_y} \cdot x$$

Verificamos:

- L_f y eje n' (paralelo al EN y baricéntrico) son conjugados de inercia.
- El ángulo entre ellos (y por lo tanto el ángulo entre L_f y EN) no es 90° , ya que es flexión oblicua.
- CP ("T") y EN están de lados opuestos respecto del baricentro.
- La tensión en el baricentro es la debida al término independiente o de Axil.

$\sigma_{z(1)}$	$\sigma_{z(2)}$	$\sigma_{z(3)}$	$\sigma_{z(4)}$
kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²
-15,8	2,6	10,0	-8,5

Método Gráfico



$$\overline{GA} = J_y \quad \overline{UG'} = i'_n \quad \overline{GT} = (x_T \quad y_T)$$

$$\overline{AB} = J_x \quad \overline{D'P} = J_n' \quad \overline{QR} = \sigma_{z(G)}$$

DATOS

x_0	y_0
cm	cm
-2,2	7,1

RESULTADOS

$$\overline{GH} = x_0 \quad \overline{N_1M_1} = \sigma_{z(1)} \quad \overline{N_3M_3} = \sigma_{z(3)}$$

$$\overline{GV} = y_0 \quad \overline{N_2M_2} = \sigma_{z(2)} \quad \overline{N_4M_4} = \sigma_{z(4)}$$

$\sigma_{z(1)}$	$\sigma_{z(2)}$	$\sigma_{z(3)}$	$\sigma_{z(4)}$
kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²	kN/cm ²
-15,8	2,6	10,0	-8,5

Esc_L: cm/cm Esc_J: cm⁴/cm Esc_σ: kN cm²/cm

Decidir si la sección conformada por los 2 UPN es adecuada para las cargas puestas en juego:

Como se trata de un material dúctil (acero estructural) que se comporta de igual modo ante la tracción que a la compresión, compararemos la única tensión de referencia $\sigma_{adm} = 16\text{KN/cm}^2$, con la de mayor módulo de entre las calculadas como tensiones extremas de nuestra sección:

$\sigma_{z(1)}$	$\sigma_{z(2)}$	$\sigma_{z(3)}$	$\sigma_{z(4)}$
kN/cm^2	kN/cm^2	kN/cm^2	kN/cm^2
-15,8	2,6	10,0	-8,5

$$\sigma_{adm} > |\sigma_1|$$

CONCLUSIÓN: La sección es adecuada desde el punto de vista de su resistencia

Determinar analíticamente la posición del eje neutro y su pendiente

Igualamos a cero la ecuación de σ

$$\sigma_{z(x,y)} = -\frac{P}{F} + \frac{(P \cdot y_T)}{J_x} \cdot y - \frac{(P \cdot x_T)}{J_y} \cdot x = 0$$

Nos queda, efectivamente la ecuación de una recta. Del tipo $y=f(x)$. Con término independiente que caracteriza al E.N. de la flexión compuesta como recta “NO BARICÉNTRICA”; ecuación ésta que no depende del monto de la carga excéntrica, sino sólo de la distancia de su punto de aplicación tomada al baricentro (excentricidad).

$$-y = -\frac{J_x}{F \cdot y_T} - \frac{J_x}{J_y} \frac{x_T}{y_T} x$$

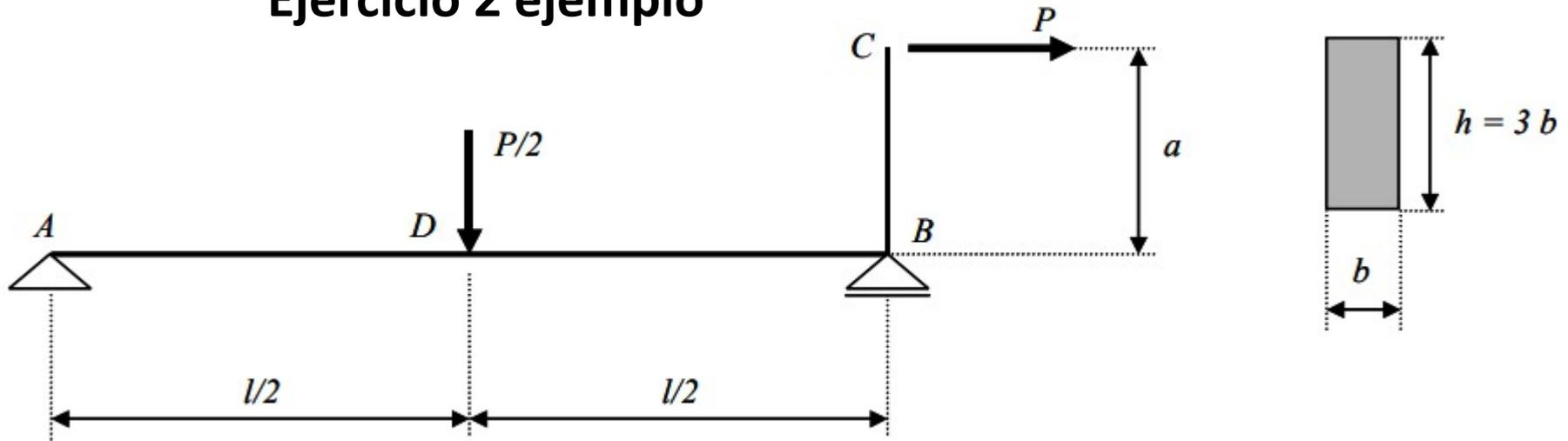
Las intersecciones con los ejes coordenados x e y valen, respectivamente:

$$0 = -\frac{J_x}{F \cdot y_T} - \frac{J_x \cdot x_T}{J_y \cdot y_T} \cdot x_O \quad -y_O = -\frac{J_x}{F \cdot y_T} - \frac{J_x \cdot x_T}{J_y \cdot y_T} \cdot 0$$

$$x_O = -\left(\frac{J_y}{F}\right) \cdot \frac{1}{x_T} \quad -y_O = -\left(\frac{J_x}{F}\right) \cdot \frac{1}{y_T}$$

x_O	y_O
cm	cm
-2,2	7,1

Ejercicio 2 ejemplo



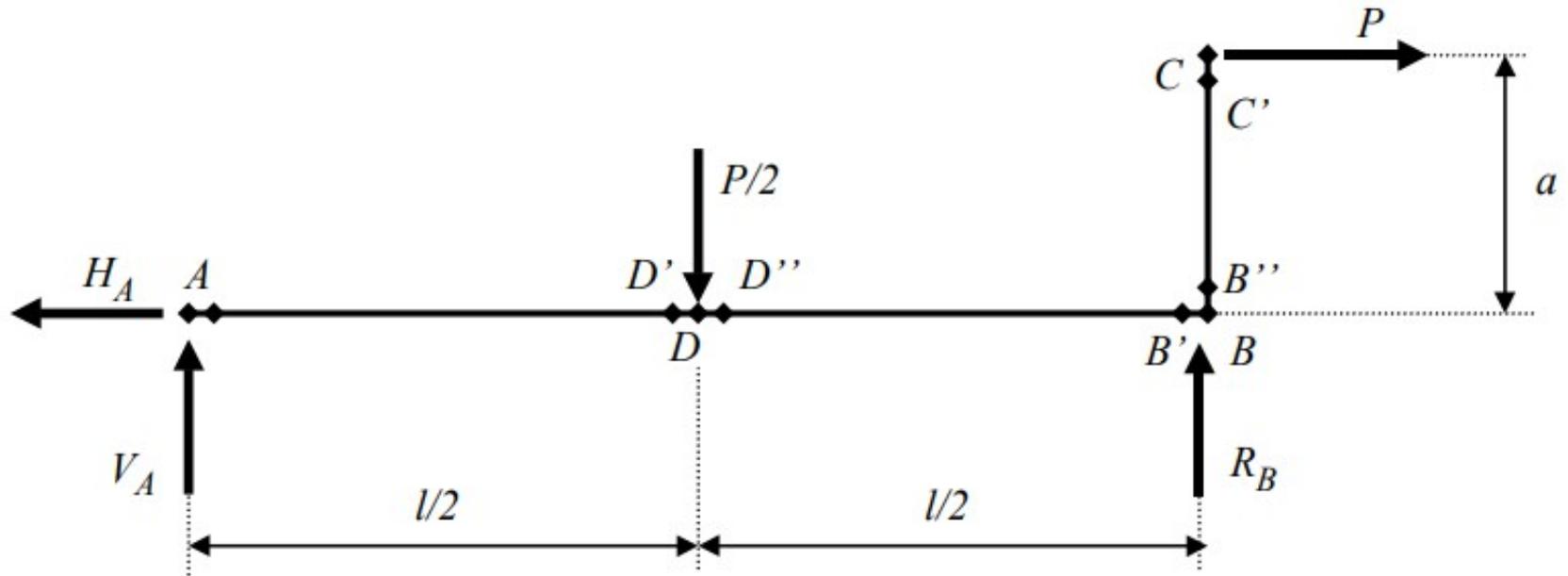
l	a	P	σ_{adm}
m	m	kN	kN/cm^2
1,20	0,30	20	14

Dado el siguiente elemento estructural de acero, cuyas características y geometría se detallan;

Se solicita:

1. Trazar los diagramas de esfuerzos característicos
2. Dimensionar el tramo horizontal, teniendo en cuenta la flexión compuesta
3. Determinar la posición del eje neutro
4. Trazar el diagrama de tensiones

1 Trazado de DEC : reacciones de vínculo y DCLE

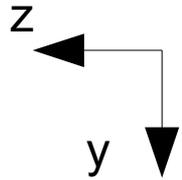


l	a	P	σ_{adm}
m	m	kN	kN/cm^2
1,20	0,30	20	14

Resolviendo las ecuaciones de equilibrio, obtenemos el valor de las reacciones:

- $H_A = 20 \text{ KN}$
- $V_A = 0$
- $R_B = 10 \text{ KN}$

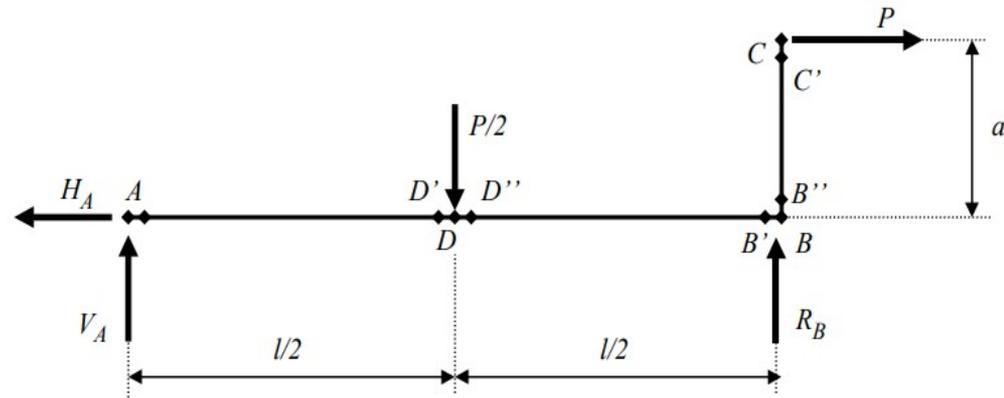
1 Trazado de DEC



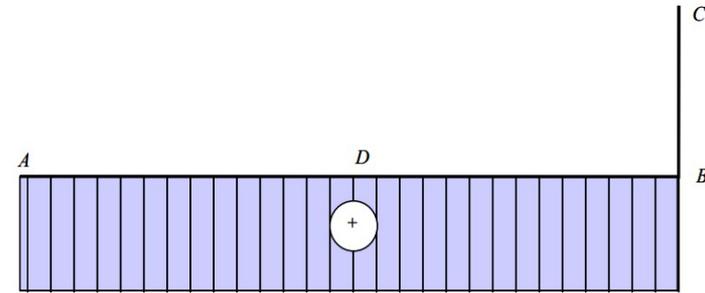
$$H_A = 20 \text{ KN}$$

$$V_A = 0$$

$$R_B = 10 \text{ KN}$$

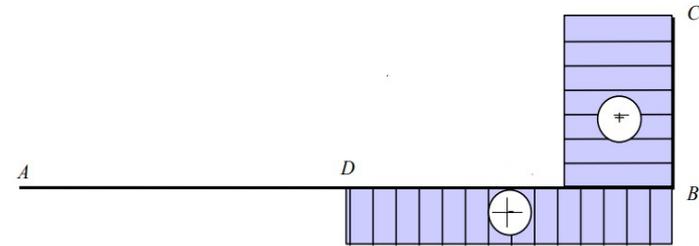


$$N_{z A'} = N_{z B'} = 20 \text{ KN}$$



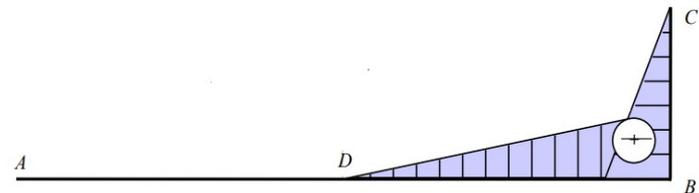
$$Q_{zy B''} = Q_{z C'} = -20 \text{ KN}$$

$$Q_{zy D''} = Q_{z B'} = 10 \text{ KN}$$



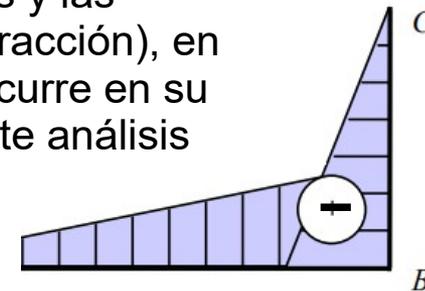
$$M_{fx B''} = M_{fx B'} = -6 \text{ KNm}$$

$$M_{fx A} = M_{fx D} = 0$$



2 Dimensionar el tramo horizontal a la Flexión Compuesta:

Se dimensiona para la sección más comprometida, que es aquella situada un infinitésimo a la izquierda del punto B (B'). Se observa que la concavidad generada en la barra horizontal es tal que las fibras superiores son las traccionadas y las inferiores comprimidas, y como, además, el esfuerzo Nz es positivo (de tracción), en consecuencia, para dicha sección, la máxima tensión normal (positiva) ocurre en su fibra extrema superior, paralela al eje baricéntrico x_G . De acuerdo con este análisis y, considerando la relación $3b=h$, la expresión correspondiente será:



$$\sigma_{z\text{máx}} = \sigma_{z(B')} = \frac{N_{z(B')}}{F} + \frac{Mf_{x(B)}}{W_x}$$

$$\sigma_{z\text{máx}} = \sigma_{z(B')} = \frac{N_{z(B')}}{\frac{h}{3} \cdot h} + \frac{Mf_{x(B)}}{\frac{h}{3} \cdot \frac{h^2}{6}} = \frac{1}{h^2} \left(3 \cdot N_{z(B')} + \frac{18 \cdot Mf_{x(B)}}{h} \right) \quad (1)$$

Con:

$$Nz_{B'} = 20 \text{ KN}$$

$$Mfx_{B'} = 6 \text{ KNm}$$

El dimensionado se realiza por aproximaciones sucesivas. Se puede adoptar un valor provisorio de "h" que surja del siguiente análisis:

Por AXIL:

$$\sigma_{adm} = \frac{N_{z(B')}}{F} = \frac{N_{z(B')}}{h \cdot \frac{h}{3}}$$

$$h = \sqrt{\frac{3 \cdot N_{z(B')}}{\sigma_{adm}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 20}{14}} = 2,07 \cdot \text{cm}$$

Por FLEXIÓN:

$$\sigma_{adm} = \frac{Mf_{x(B)}}{W_x} = \frac{Mf_{x(B)}}{\frac{h}{3} \cdot \frac{h^2}{6}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot Mf_{x(B)}}{\sigma_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot (600)}{14}} = 9,17 \cdot \text{cm}$$

2 Dimensionar el tramo horizontal a la F. Compuesta:

Adoptando el mayor valor de h en (1), y considerando que $\sigma_{z\text{máx}} = \sigma_{z(B')}$ toma el valor de σ_{adm} , se obtiene que

$$\sigma_{adm} = \frac{1}{h^2} \cdot \left(3 \cdot N_{z(B')} + \frac{18 \cdot Mf_{x(B)}}{h} \right)$$

$$h = \sqrt{\frac{\left(3 \cdot N_{z(B')} + \frac{18 \cdot Mf_{x(B)}}{h} \right)}{\sigma_{adm}}} = \sqrt{\frac{\left(3 \cdot 20 + \frac{18 \cdot (600)}{9,17} \right)}{14}}$$

$$h = 9,40 \cdot \text{cm}$$

De acuerdo con la tabla de aceros planos (laminados en caliente), se adopta: $h=10\text{cm}$
 $b=3\text{cm}$

$$F = b \times h = 30 \text{ cm}^2 \quad ; \quad W_x = b \times h^2/6 = 50 \text{ cm}^3$$

Comprobamos
las tensiones
máximas:

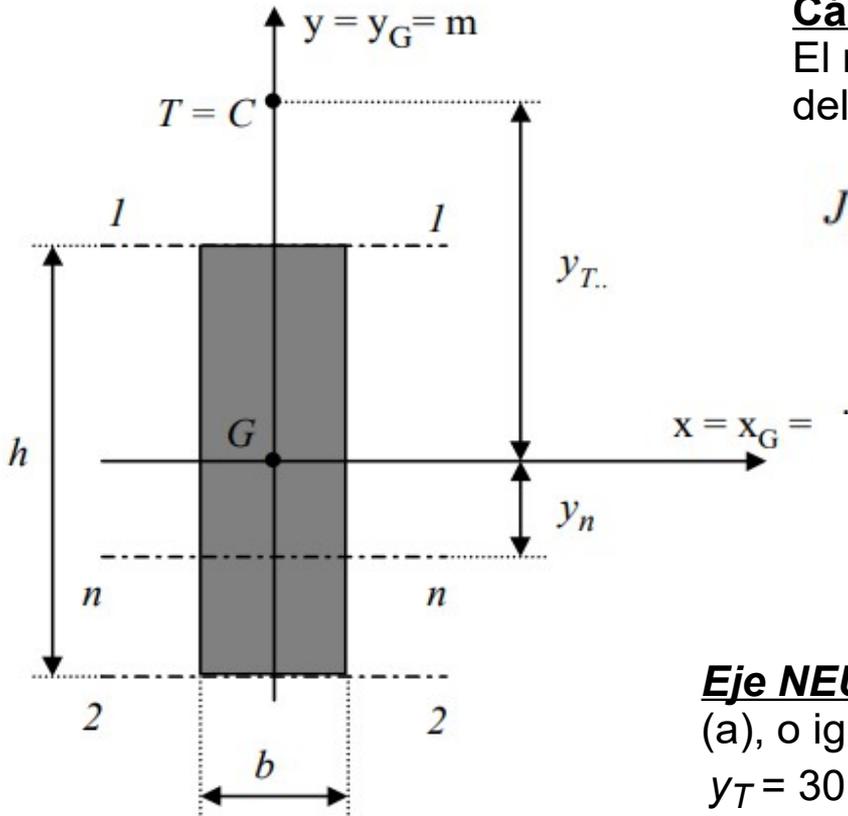
$$\sigma_{z\text{máx}} = \sigma_{z(B')} = \frac{N_{z(B')}}{F} + \frac{Mf_{x(B)}}{W_x} \quad (2) \quad \sigma_{z\text{máx}} = 12,67 \cdot \text{kN/cm}^2$$

$$\sigma_{z\text{máx}} = \frac{20}{30} + \frac{(600)}{50}$$

$$\sigma_{z\text{máx}} \leq \sigma_{adm}$$

VERIFICA

3 Determinar la posición del Eje Neutro (EN):



Cálculo de $J_{n'}$:

El momento inercia del área de la sección $J_{n'}$, respecto del eje n' paralelo al neutro y baricéntrico, será = J_x :

$$J_{n'} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{3 \cdot 10^3}{12}$$

$$J_{n'} = 250 \cdot \text{cm}^4$$

Cálculo de $i_{n'}$:

$$i_{n'}^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{250}{30} = 8,33 \cdot \text{cm}^2$$

$$i_{n'}^2 = 8,33 \cdot \text{cm}^2$$

$$i_{n'} = 2,89 \cdot \text{cm}$$

Eje NEUTRO: o usamos la relación entre radios de giro (a), o igualamos a cero la ecuación de las tensiones (b):
 $y_T = 30 \text{ cm}$ (excentricidad o distancia - dato - de \bar{P} a G)

$$\text{a) } y_T \cdot y_n = -i_{n'}^2 \quad \longrightarrow \quad y_n = \frac{-i_{n'}^2}{y_T} = \frac{-8,33}{30}$$

o'

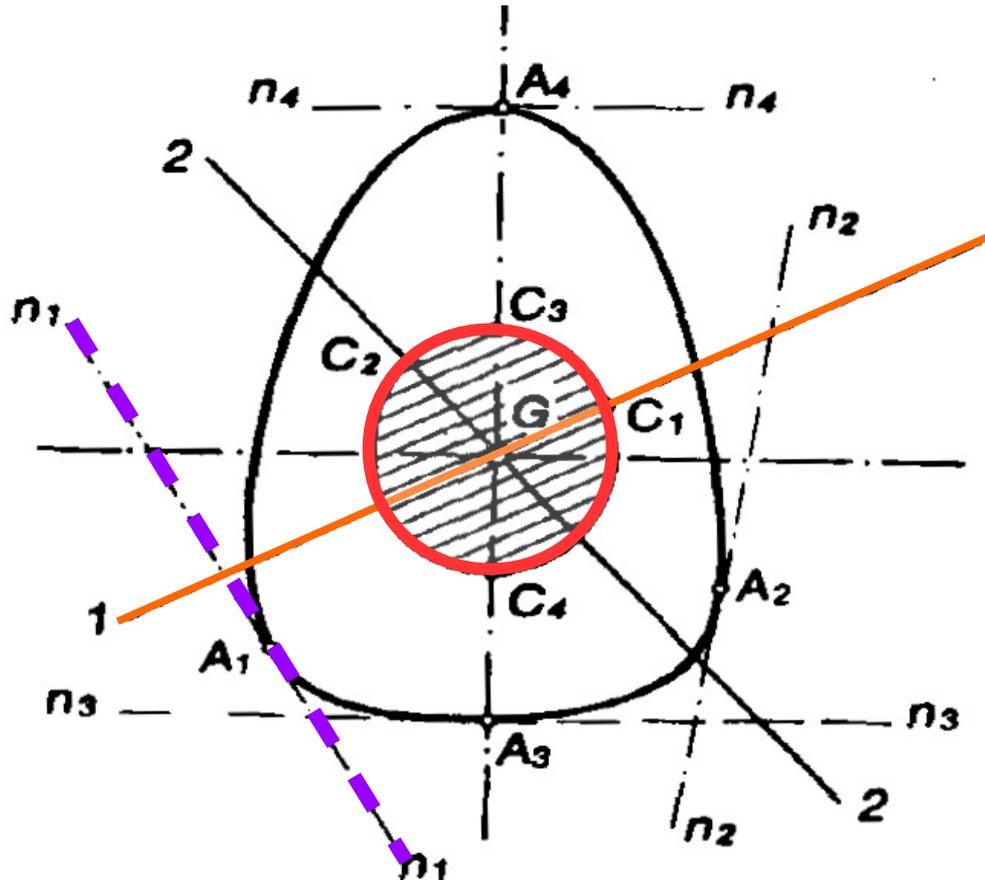
b) Reemplazando en (2):

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{z(EN)} &= \frac{N_{z(B')}}{F} + \frac{M_{f_x(B)}}{J_x} \cdot y_n = 0 \\ y_n &= -\frac{N_z}{F} \cdot \frac{J_x}{M_{f_x}} = -\frac{20 \cdot 8,33}{600} \end{aligned} \right.$$

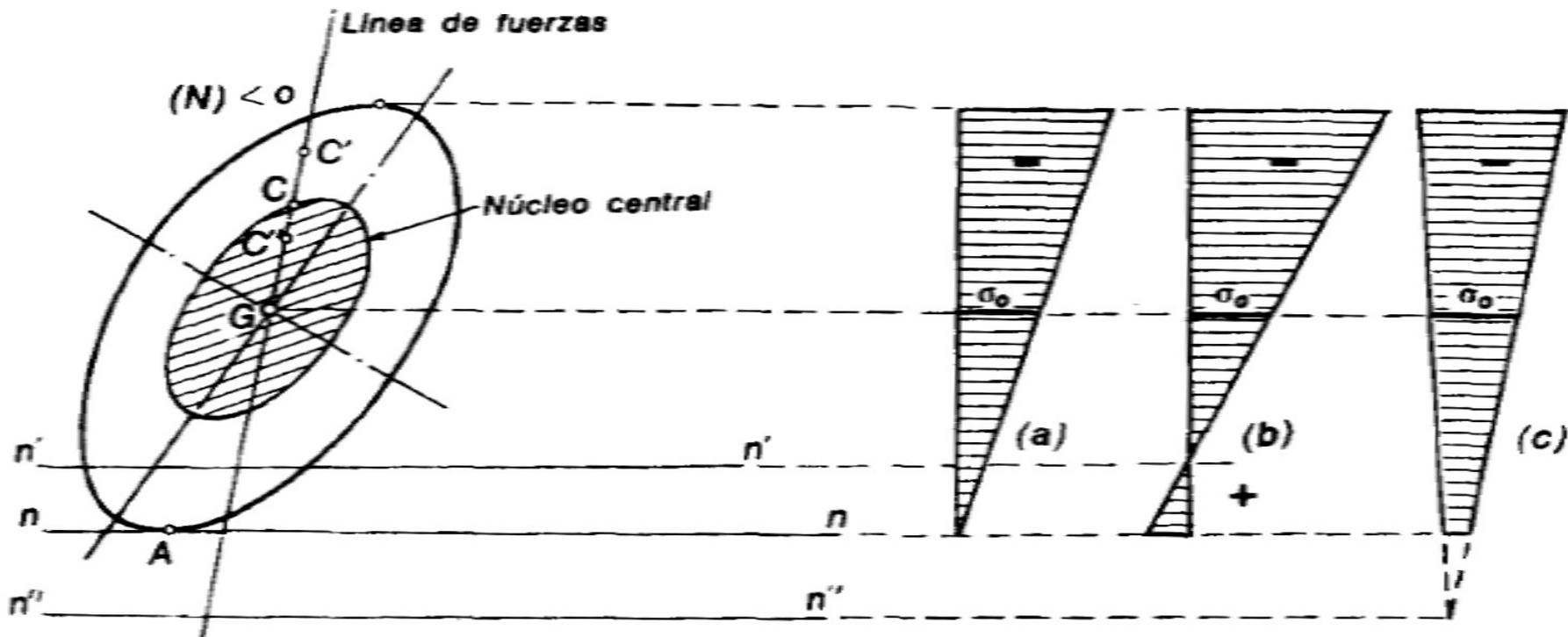
$$y_n = -0,28 \cdot \text{cm}$$

Núcleo central

- Si en la LF 1 de la figura buscamos un CP C_1 tal que defina una línea neutra n_1 tangente a la sección, el diagrama de tensiones será del mismo signo.
- Si continuamos del mismo modo con los infinitos centros de presión así concebidos definimos el contorno del núcleo central 



Núcleo central

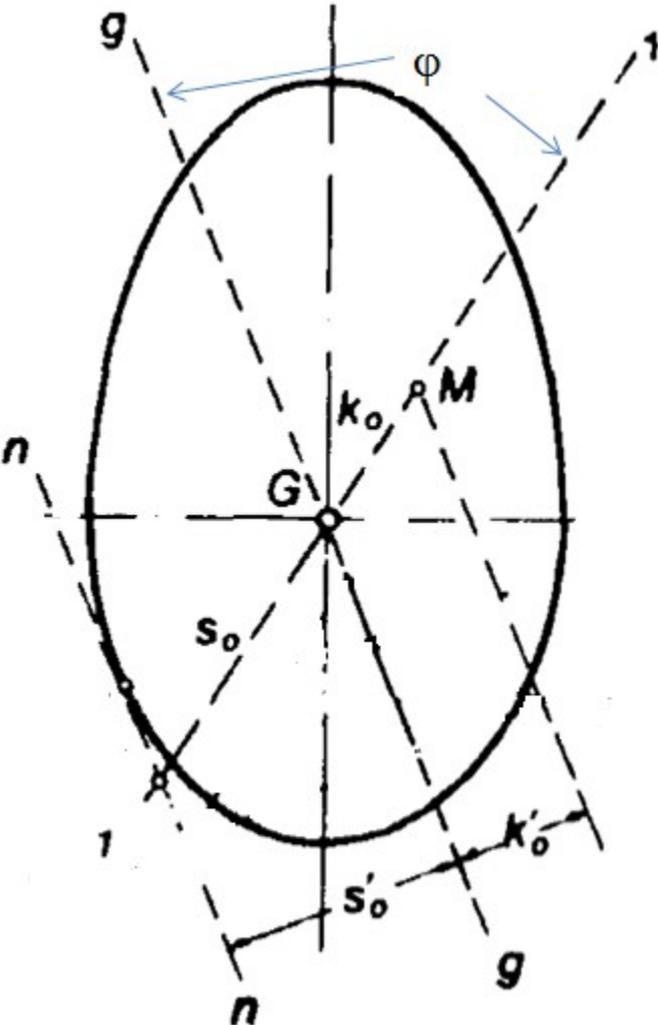


C define el eje $n-n$ C' define el eje $n'-n'$ C'' define el eje $n''-n''$

Se denomina núcleo central al lugar geométrico de los puntos de la sección, que tomados como centros de presión, originan en ella tensiones de un mismo signo.

Núcleo central

Determinación



Sea 1-1 la línea de fuerzas y n-n el eje neutro tangente a la sección, si M es el CP correspondiente también será un punto del contorno del núcleo central. Para encontrar la posición sobre la recta 1-1 utilizamos la expresión hallada anteriormente:

$$-e's' = i_G^2 \Rightarrow k_0' = -\frac{i_G^2}{s_0'}$$

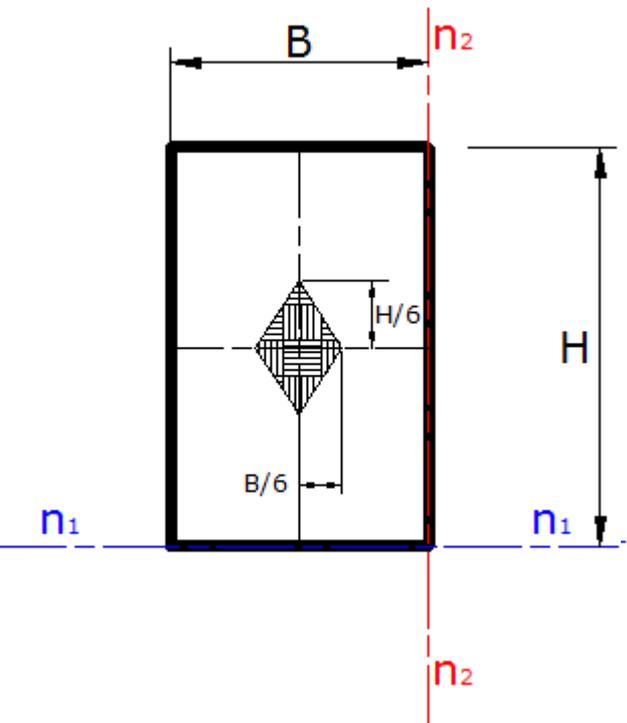
$$s_0' = s_0 \cdot \text{sen} \varphi \quad k_0' = k_0 \cdot \text{sen} \varphi$$

$$k_0 = -\frac{i_G^2}{s_0 \text{sen}^2 \varphi} \quad k_0 : \text{radio nuclear}$$

Entonces la posición de M la puedo hallar analítica o gráficamente, en este 2º caso utilizando la construcción de la media proporcional

Núcleo central

Ejercicio 2 ejemplo: sección cuadrada y rectangular



El centro de presión para n1-n1 será

$$k_0' = -\frac{i_G^2}{s_0'} \quad i_G^2 = \frac{J_G}{F} = \frac{B.H^3}{12.B.H} = \frac{H^2}{12}$$

$$k_0' = -\frac{H^2}{12} \frac{H}{2} \quad k_0' = -\frac{H}{6}$$

El centro de presión para n2-n2 será

$$k_0' = -\frac{B}{6}$$