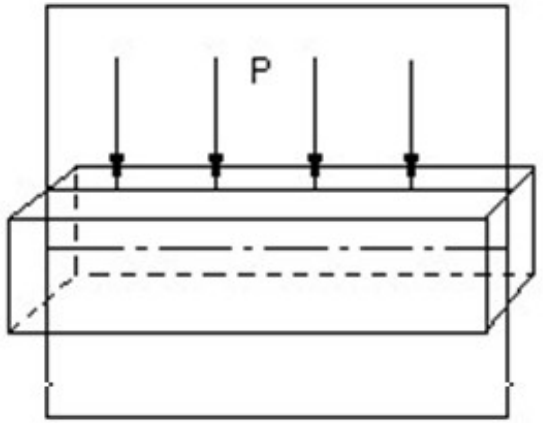
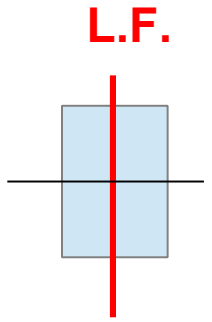
Conceptos generales

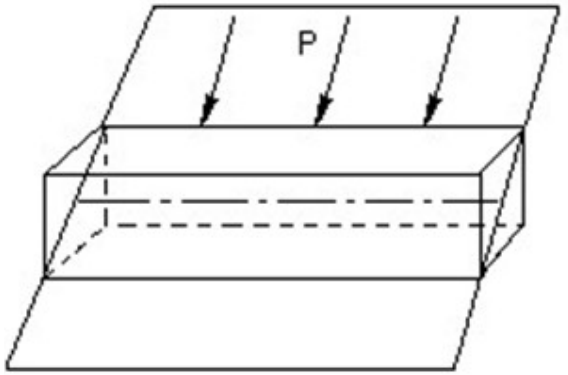
- ***Flexión simple***: La solicitación se limita a dos pares normales al plano de la sección, sin o con esfuerzo de corte, en el primer caso es pura y en el segundo es flexión y corte.
- ***Plano de flexión***: plano donde actúan los pares flexores
- ***Línea de fuerzas***: intersección del plano de flexión con el plano de la sección

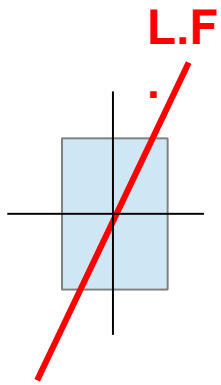
Flexión Simple normal (F.S.N.): La línea de fuerzas coincide con un eje principal de inercia de la sección





Flexión simple oblicua (F.S.O.): La línea de fuerzas forma un cierto ángulo con un eje principal de inercia





Solicitación por FLEXIÓN SIMPLE

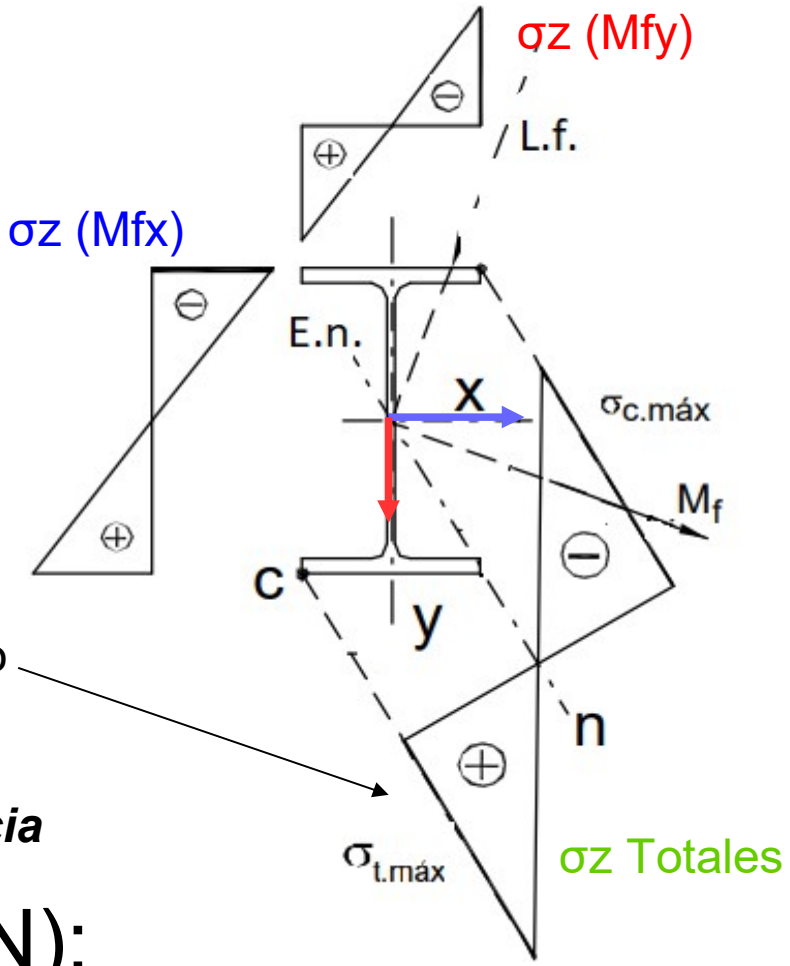
- Tensiones generadas (FSO):

$$\sigma_z = \frac{M_x.y}{J_x} + \frac{M_y.x}{J_y}$$

Utilizando el principio de superposición de los efectos para ejes principales: FSO como suma de 2 FSN

$$\sigma = \pm \frac{M.sen\varphi.n}{J_n}$$

Utilizando la línea de fuerzas (L.f.) y el eje neutro (E.n.) como referencias

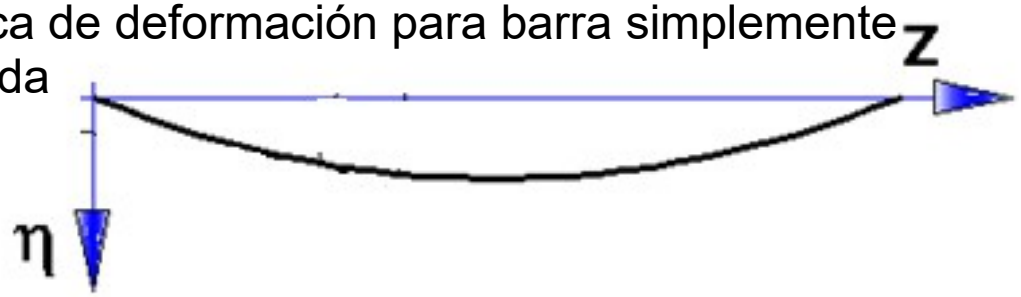


NOTA: ***E.n. y L.f. son ejes conjugados de inercia***

- Deformaciones producidas (FSN):

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{M}{J_n E}$$

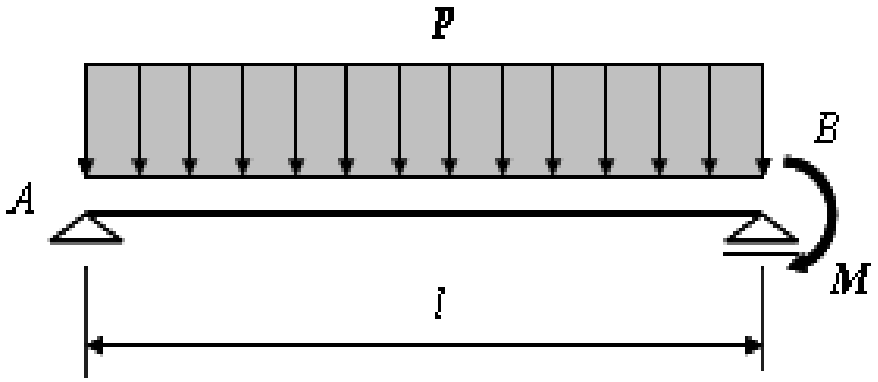
Elástica de deformación para barra simplemente apoyada

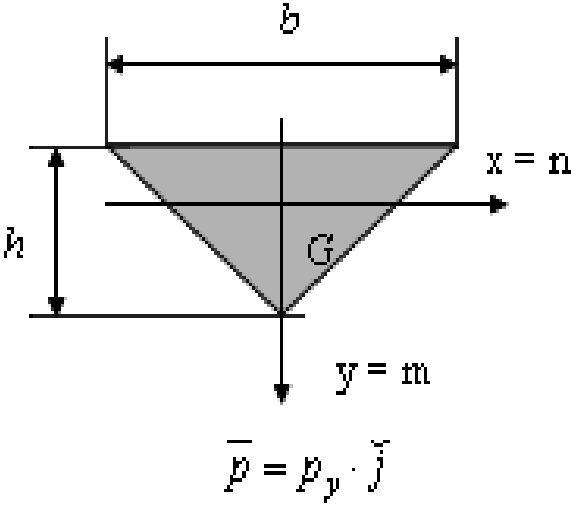


Ejercicio N° 1 - Flexión Simple Normal

Para la barra de una aleación frágil pero elástica, mostrada en la figura, y de acuerdo con los datos indicados en la tabla, se solicita:

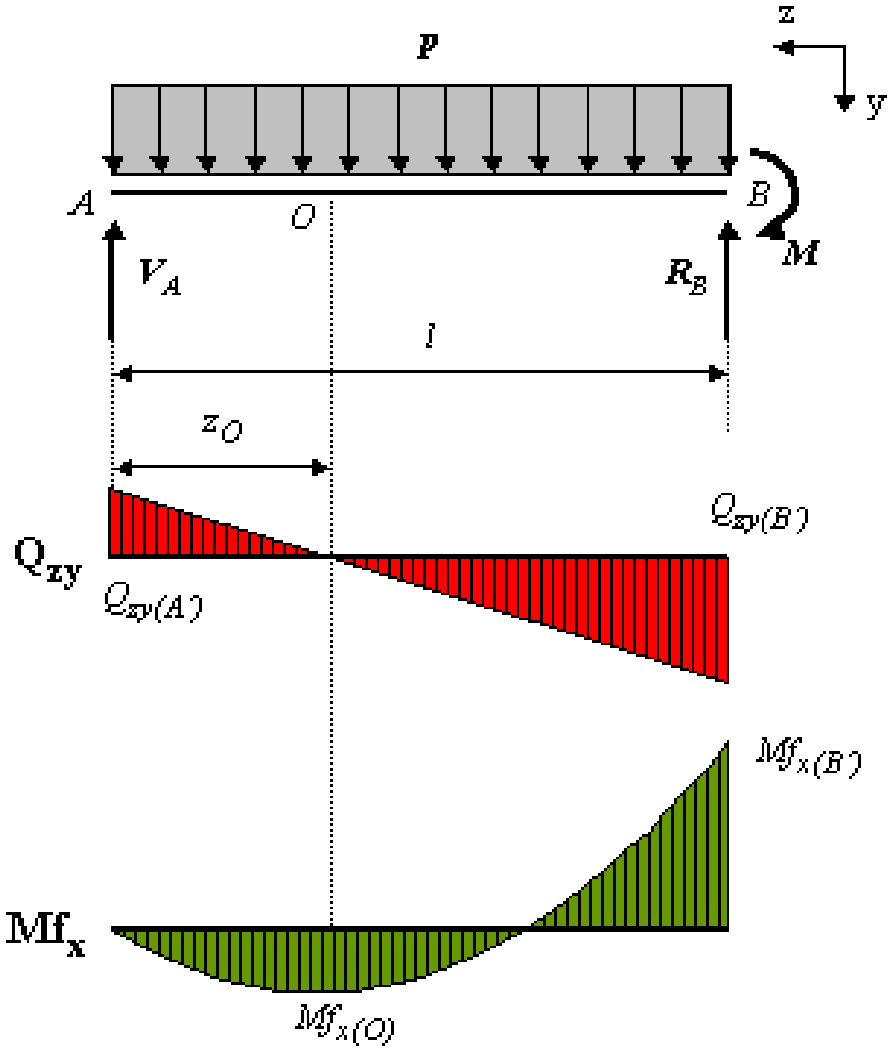
1) Trazar los diagramas de esfuerzos característicos
2) Dimensionar la misma, adoptando la relación *b/h* indicada, de forma tal que en ningún punto se supere la tensión admisible.
3) Trazar el diagrama de tensiones normales en las secciones donde el momento flexor alcanza sus valores máximo y mínimo





p	M	l (a)	b/h	σ^c_{adm}	σ^t_{adm}	E
kN/m	*kNm*	*m*		*kN/cm²*	*kN/cm²*	*kN/cm²*
40	60	4	1,5	12	4	16000

Diagramas de Características



Lo primero es encontrar el valor de las reacciones y los valores máximos (y mínimos) de la característica Mfx.

Mmín es en el extremo ”B” donde está aplicado el par: **Mmín= -6000KN.cm**

La función Momento: $Mfx_{(z)}=V_A.z - p.z^2/2$

Mmáx será en ”O” donde Q=0 ($z=z_0$):

Mmáx= 5281KN.cm

VA	RB	z_O	$Q_{zy(A')}$	$Q_{zy(B')}$	$Mf_{x(O)}$	$Mf_{x(B')}$
kN	kN	m	kN	kN	$kN\,m$	$kN\,m$
65	95	1,625	-65	95	52,8125	-60

Dimensionamiento por Resistencia (tensiones)

$$\sigma_{z(x\ \ y\ \ z)} = \frac{Mf_{x(z)}}{J_x} \cdot y \qquad \text{con} \qquad -\frac{h}{3} \le y \le \frac{2}{3} \cdot h$$

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{36} \longrightarrow J_x = \frac{\left(b/h\right) \cdot h^4}{36}$$

b/h = 1,5

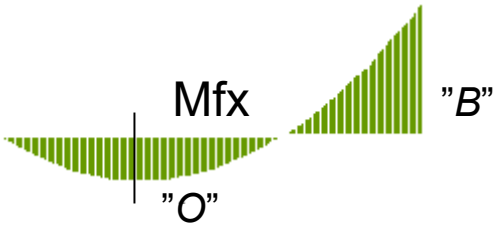
Mmín= -6000KN.cm

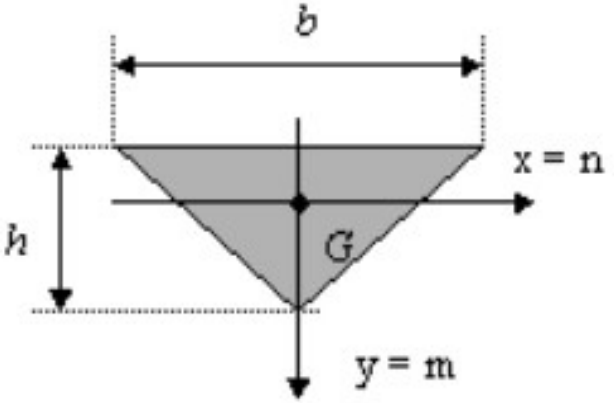
Mmáx= 5281KN.cm

Como el material es frágil no se comporta de la misma manera a la tracción que a la compresión. Por lo que deben analizarse las tensiones máximas de tracción y compresión en las secciones donde ocurren los momentos máximos positivos y negativos, cuyas expresiones son:

$$\sigma^c_{z\,máx(O)} = \frac{Mf_{x(O)}}{J_x} \cdot \left(-\frac{h}{3}\right) \qquad \sigma^c_{z\,máx(B)} = \frac{Mf_{x(B)}}{J_x} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h\right)$$

$$\sigma^t_{z\,máx(O)} = \frac{Mf_{x(O)}}{J_x} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h\right) \qquad \sigma^t_{z\,máx(B)} = \frac{Mf_{x(B)}}{J_x} \cdot \left(-\frac{h}{3}\right)$$





Dimensionamiento por Resistencia (tensiones)

Comparando cada valor con la tensión admisible de referencia obtenemos 4 valores de h:

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{12 \cdot \left| Mf_{x(O)} \right|}{\sigma^{c}_{adm} \cdot \left(b / h \right)}}$$

h1 ≥ 15,21cm

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{24 \cdot \left| Mf_{x(B)} \right|}{\sigma^{c}_{adm} \cdot \left(b / h \right)}}$$

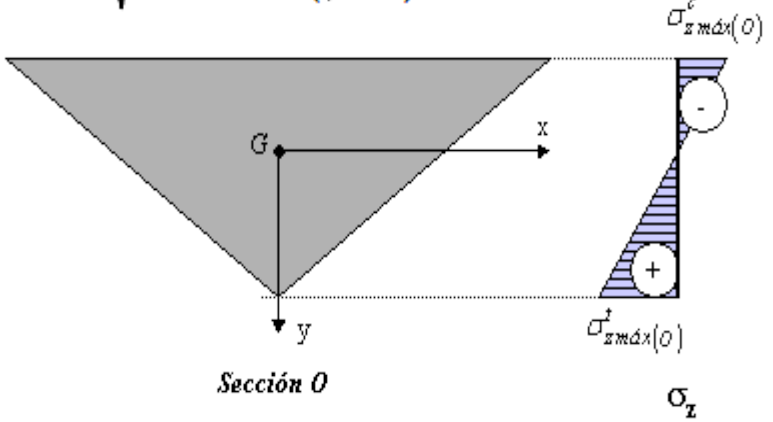
h3 ≥ 20cm

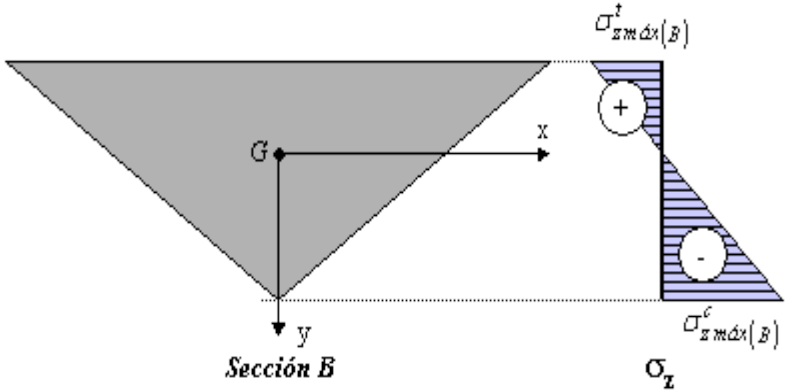
$$h \geq \sqrt[3]{\frac{24 \cdot \left| Mf_{x(O)} \right|}{\sigma^{t}_{adm} \cdot \left(b / h \right)}}$$

h2 ≥ 27,64cm

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{12 \cdot \left| Mf_{x(B)} \right|}{\sigma^{t}_{adm} \cdot \left(b / h \right)}}$$

h4 ≥ 22,89cm





Adoptamos **h=28cm** y **b=42cm**

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

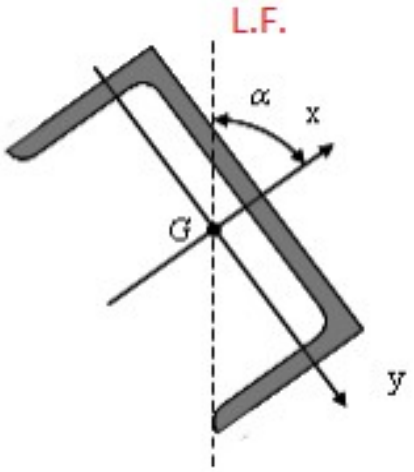
J_x (real) = 25610 cm4

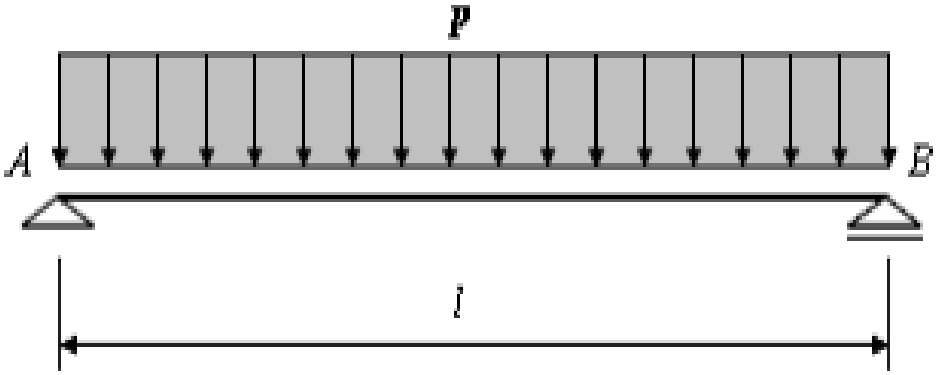
Para realizar los diagramas de tensiones valorizados aplicamos:

$$\sigma_{z(x \quad y \quad z)} = \frac{Mf_{x(z)}}{J_x} \cdot y$$

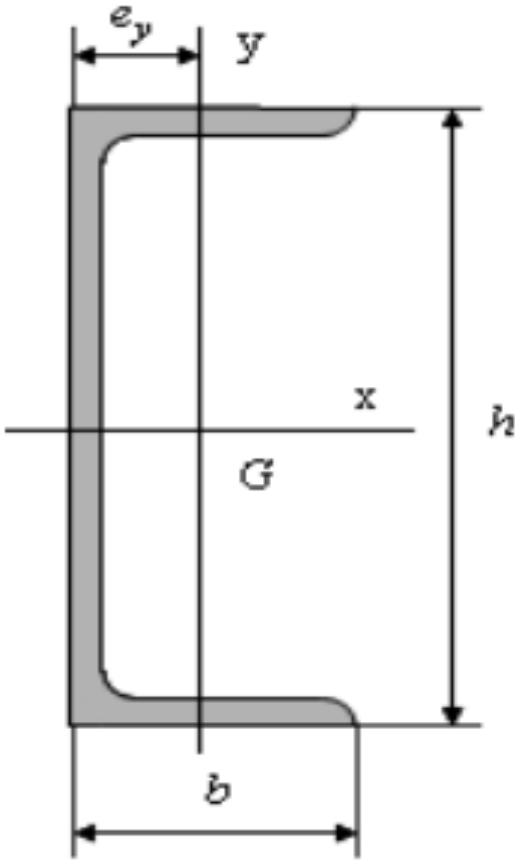
Ejercicio N° 2 - Flexión Simple Oblicua

1.- Analíticamente, hallar la posición del eje neutro y el diagrama de tensiones normales para la sección ubicada a la mitad de la luz de la barra UPN simplemente apoyada de la figura, cuyos datos se tabulan:





p	l	α	*Perfil*	σ_{adm}
kN/m	*m*	°	*UPN*	*kN/cm²*
15	*2,0*	*80*	*160*	*16,0*



Datos del perfil UPN

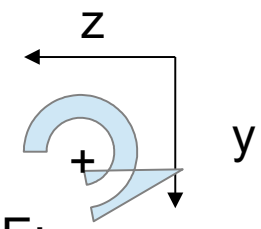
Recordar que son todos datos respecto de los ejes principales "***x***" e "***y***" tabulados

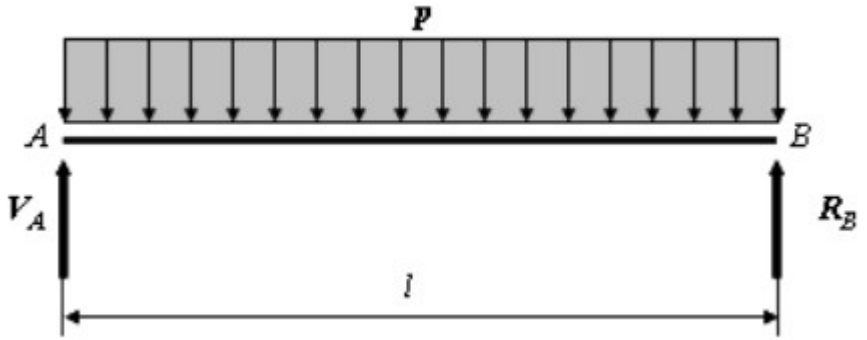
UPN	h mm	b mm	F cm^2	Jx cm4	Jy cm4	ey cm
160	160	65	24	925	85,3	1,84

Lo primero será hallar el Momento flexor a la mitad de la luz.

Allí será el Momento máximo.

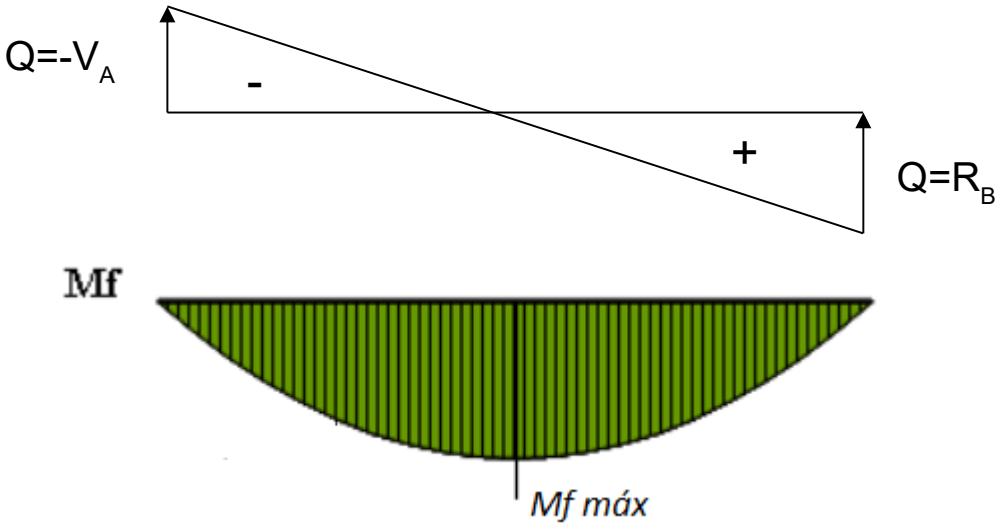
Para verlo dibujamos los diagramas de esfuerzos característicos a partir del DCLE:





$V_A = R_B = Rte/2 = \boldsymbol{p}.l/2 = 15$ KN

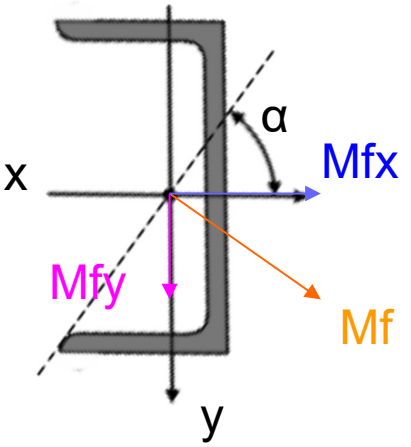
Mf max= $\boldsymbol{p}.l^2/8 = 7{,}5$ KNm = 750 KNcm



$$Mf_x = +Mf \cdot \sin(\alpha)$$
$$Mf_y = +Mf \cdot \cos(\alpha)$$

Mfx= 7386 KNcm

Mfy= 1302 KNcm



*<u>Calculamos la Flexión Oblicua como superposición de 2 Flexiones Normales (en ejes **x** e **y**)</u>*

Teniendo en cuenta que la tensión en el eje neutro es = 0 y, considerando el principio de superposición de efectos, tomamos la F.O. como suma de 2 F.N.:

$$\sigma_{z(x\quad y\quad z)} = \frac{Mf_{x(z)}}{J_x} \cdot y - \frac{Mf_{y(z)}}{J_y} \cdot x = 0$$

$$\sigma_{z(x\quad y\quad z)} = \frac{Mf_{(z)} \cdot \sin(\alpha)}{J_x} \cdot y - \frac{Mf_{(z)} \cdot \cos(\alpha)}{J_y} \cdot x = 0$$

Llegamos a la siguiente ecuación de una recta, sin término independiente (o sea que el eje neutro, tal y como desarrollamos en la teoría, es baricéntrico – pasa por el origen de coordenadas):

$$y = \frac{1}{\tan(\alpha)} \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot x$$

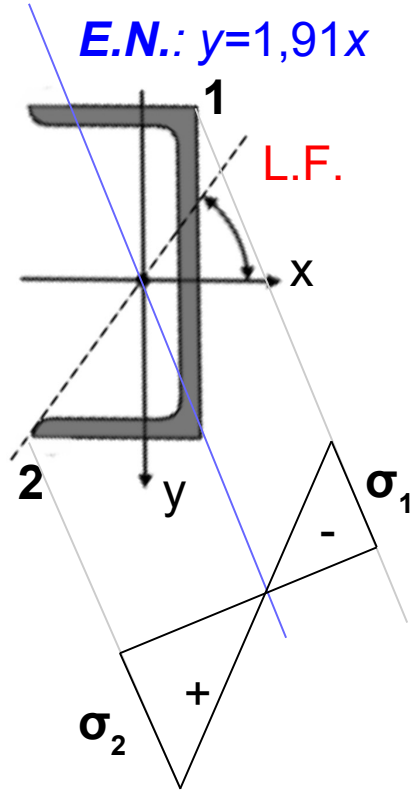
La posición del eje neutro es idéntica para todas las secciones.
Reemplazando valores obtenemos la posición del eje neutro:

$y = 1{,}91\ x$

Para poder dibujar los diagramas de tensiones debemos calcular las tensiones máximas generadas:

Los límites de la sección son: $-\frac{h}{2} \le y \le \frac{h}{2}$ $\quad -\left(b - e_y\right) \le x \le e_y$

Podremos escribir las ecuaciones para los puntos donde las tensiones alcanzan los mayores módulos (tanto positivos o de tracción [**2**], como negativos o de compresión [**1**])



Tensión normal en el punto **1** de máxima compresión:

$$\sigma^{c}_{z\,máx} = \frac{Mf_{x(z)}}{J_x} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) - \frac{Mf_{y(z)}}{J_y} \cdot e_y = -Mf \cdot \left[\frac{\sin(\alpha)}{J_x} \cdot \frac{h}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{J_y} \cdot e_y\right]$$

σ_1= -9,2 KN/cm2

Tensión normal en el punto **2** de máxima tracción:

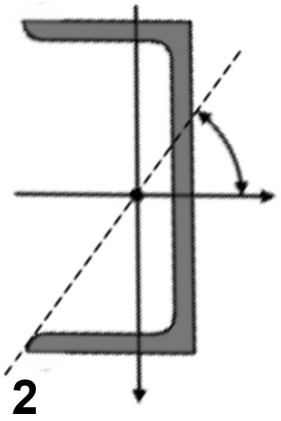
$$\sigma^{t}_{z\,máx} = \frac{Mf_{x(z)}}{J_x} \cdot \frac{h}{2} - \frac{Mf_{y(z)}}{J_y} \cdot \left[-\left(b - e_y\right)\right] = Mf \left[\frac{\sin(\alpha)}{J_x} \cdot \frac{h}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{J_y} \cdot \left(b - e_y\right)\right]$$

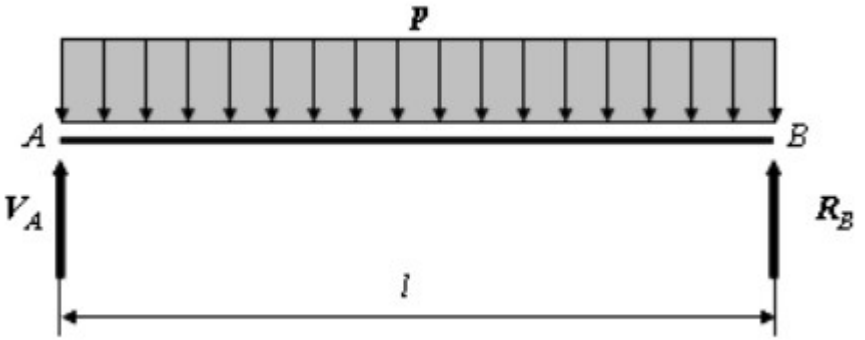
σ_2= 13,5 KN/cm2

3. Hallar la máxima carga "$p_{máx}$" que podría ser aplicada sin que sean superadas las tensiones admisibles en ningún punto

La sección a la mitad de la luz es la más peligrosa dada por la flexión. Por lo que calcularemos allí "$p_{máx}$". Y la calcularemos para el punto **2** del perfil (fibra extrema de la punta del ala inferior) donde la tensión es máxima e igual a 13,5 KN/cm^2.

Tomando en cuenta que: $Mf_{(máx)} = p.l^2/8$ y $Mfx = Mf \cdot \operatorname{sen} \alpha$; $Mfy = Mf \cdot \cos \alpha$





$$p_{máx} = \frac{8 \cdot \sigma_{adm}}{l^2 \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{J_x} \cdot \frac{h}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{J_y} \cdot (b - e_y) \right]} = 17{,}7 \text{ KN/m}$$