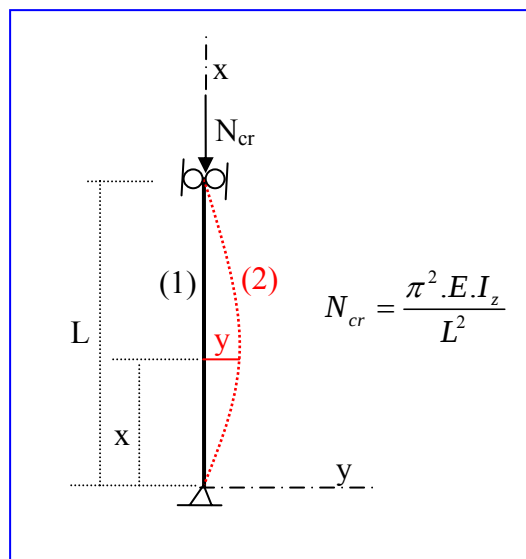


Tema 10 : PANDEO

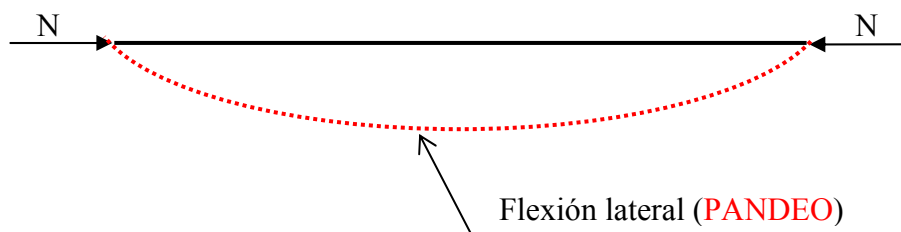


10.1.- INTRODUCCIÓN

Los diferentes elementos que conforman una estructura pueden “fallar” por diferentes motivos, dependiendo de los materiales utilizados, tipos de cargas, ligaduras y apoyos.

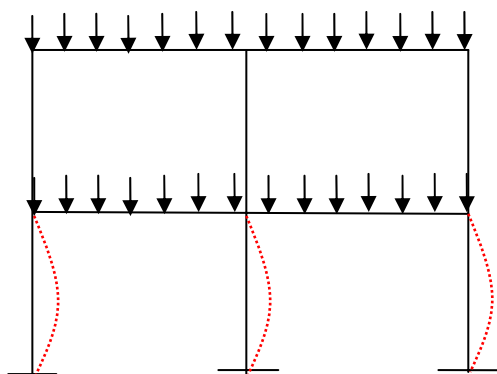
Muchos de estos tipos de “fallos” se podrán evitar, dimensionando dichos elementos de tal forma, que las tensiones y deformaciones máximas que se produzcan permanezcan dentro de los límites admisibles y así se efectuarán los dimensionamientos a Resistencia y a Rigidez, estudiados en los temas precedentes.

Pero existen otros tipos de “fallos”, como es el “fallo por inestabilidad o pandeo”, que puede tener lugar en el caso de elementos estructurales esbeltos sometidos a compresión. En estos casos, en el elemento puede aparecer una flexión lateral que puede llegar a ser grande y hacer “fallar” al elemento

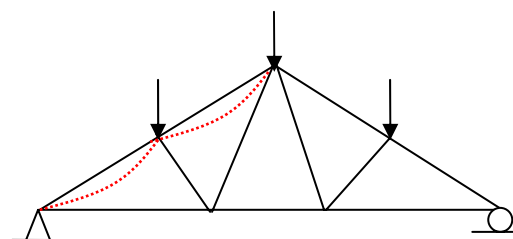


La aparición de dicha flexión lateral, su rápido crecimiento y la pérdida total de estabilidad del elemento y el consiguiente colapso de la estructura, constituyen el estudio del Pandeo.

Ejemplos de elementos estructurales donde puede aparecer el Pandeo:



Pandeo en los pilares de los edificios



Pandeo en las barras de las Estructuras Articuladas

10.
2.-

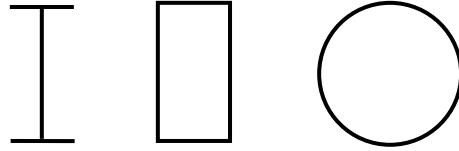
ESTUDIO TEÓRICO DEL PANDEO DE PIEZAS SOMETIDAS A COMPRESIÓN

Las piezas sometidas a compresión pueden agruparse en dos grupos:

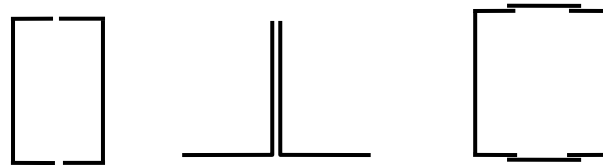
- PIEZAS SIMPLES
- PIEZAS COMPUESTAS

1.-Las PIEZAS SIMPLES pueden estar constituidas por:

a) Un solo perfil



b) Varios perfiles o chapas unidas mediante tornillos o soldadura



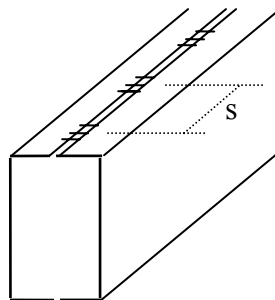
- Si el enlace se hace por medio de tornillos, se deberá cumplir:

$$s \leq 8.a \quad s \leq 15.e$$

s: distancia entre ejes de uniones
a: diámetro de los agujeros
e: mínimo espesor de las piezas a unir

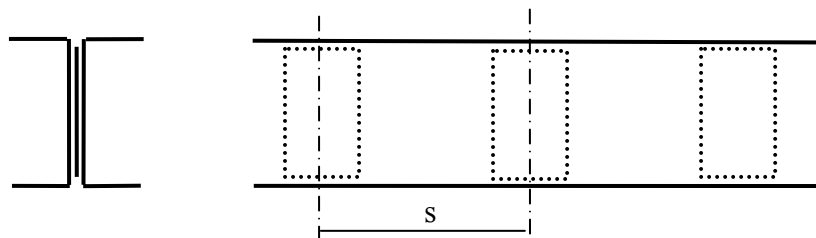
- Si el enlace se hace con soldadura discontinua, se deberá cumplir:

$$s \leq 15.e \quad s \leq 300 \text{ mm}$$



s: distancia entre ejes de soldaduras
e: mínimo espesor de las piezas a unir

c) Perfiles unidos con forros discontinuos de chapa o presillas



En este caso se deberá cumplir: $s \leq 15.i$

i: radio de giro mínimo de los perfiles a unir

2.-Las PIEZAS COMPUESTAS, lo serán, cuando no se cumplan alguno de los supuestos anteriores.

Observación:

En este Tema se hará el estudio del Pandeo para los casos de PIEZAS SIMPLES. (El Pandeo en Piezas Compuestas se estudia en otras asignaturas, tales como: “Estructuras Metálicas”)

10.2.1.- CARGA CRÍTICA DE EULER

El estudio teórico del Pandeo, que es debido a Euler, se planteó como un estudio de equilibrio.

Así, si se tiene una pieza sometida a una fuerza N de compresión y se encuentra en equilibrio, posición (1), su equilibrio podrá ser: ESTABLE, INESTABLE o INDIFERENTE

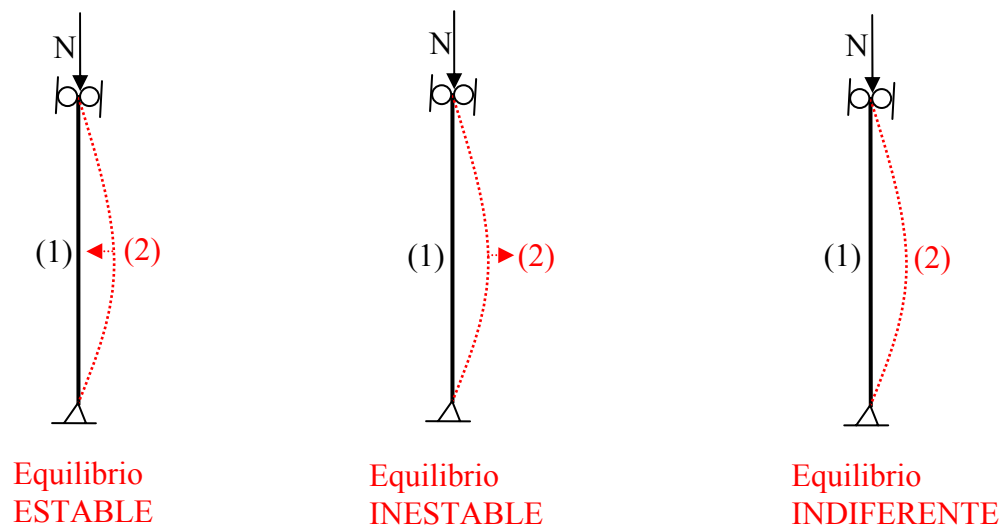


Fig. 10.1

Equilibrio Estable: si al separarla un poco, a la pos. (2) y soltar, vuelve a la pos.(1)

Equilibrio Inestable: si al separarla un poco, a la pos. (2) y soltar, se aleja de la pos.(1)

Equilibrio Indiferente: al separarla un poco, a la pos. (2) y soltar, se queda en la pos.(2)

El que una pieza dada adopte uno u otro tipo de equilibrio, va a depender del valor de la carga F de compresión a la que se le someta.

Se denomina: **CARGA CRÍTICA (N_{cr})**: “*al valor de la carga N de compresión que hace que se alcance el EQUILIBRIO INDIFERENTE*”

Así pues se tendrá:

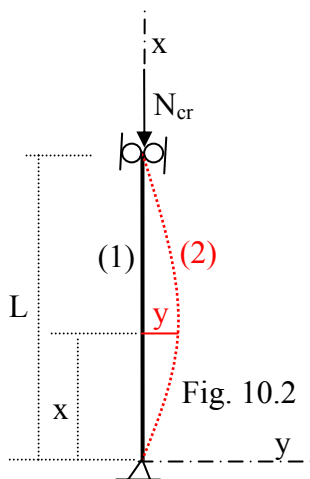
- si $N = N_{cr} \rightarrow$ Equilibrio Indiferente
- si $N < N_{cr} \rightarrow$ Equilibrio Estable
- si $N > N_{cr} \rightarrow$ Equilibrio Inestable

Naturalmente se deberá hacer trabajar a las piezas con $N < N_{cr}$, para que se encuentren siempre en equilibrios estables.

Cálculo del valor de la Carga Crítica de Euler: N_{cr}

Fue Euler el que calculó dicho valor.

Considérese una pieza (columna), recta, con sus extremos articulados y sometida a una carga de compresión centrada, de valor la carga crítica N_{cr} .



Por lo visto anteriormente, la columna se encontrará en la posición (1) en equilibrio INDIFERENTE y por tanto, si la separamos un poco a la posición (2), permanecerá en dicha posición.

Si $N = N_{cr} \rightarrow$ Equilibrio Indiferente.

La ecuación diferencial de la Elástica en la posición (2) será, (ver 6.2):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_z}{E \cdot I_z} \quad \text{siendo: } M_z = N_{cr} \cdot y$$

$$E \cdot I_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_z = -N_{cr} \cdot y \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N_{cr}}{E \cdot I_z} \cdot y = 0 \quad \text{ecuación diferencial línea elástica}$$

$$\text{haciendo: } k_z^2 = \frac{N_{cr}}{E \cdot I_z} \quad (10.1) \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + k_z^2 \cdot y = 0$$

la solución general de esta ecuación diferencial es de la forma: $y = C_1 \cdot \text{sen} k_z \cdot x + C_2 \cdot \text{cos} k_z \cdot x$

Cálculo de las constantes C_1 y C_2 :

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x = L \rightarrow y = 0 \Rightarrow C_1 \cdot \text{sen} k_z \cdot L = 0 \rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow \underline{y = 0} \quad \text{elástica rectilínea (pos.1)}$$

$$\rightarrow \text{sen} k_z \cdot L = 0 \Rightarrow k_z \cdot L = n \cdot \pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$k_z = \frac{n \cdot \pi}{L} \rightarrow k_z^2 = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \quad (10.2) \quad \text{igualando las expresiones (10.1) y (10.2):}$$

$$\frac{N_{cr}}{E.I_z} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \rightarrow N_{cr} = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E.I_z}{L^2}$$

El menor de estos valores se obtendrá para $n = 1$ y será: $N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E.I_z}{L^2}$ (10.3)

Observaciones:

1.-Si el pequeño desplazamiento que se da a la columna para llevarla a la posición (2) se hiciera en el plano XZ, la expresión de la carga crítica F_C sería:

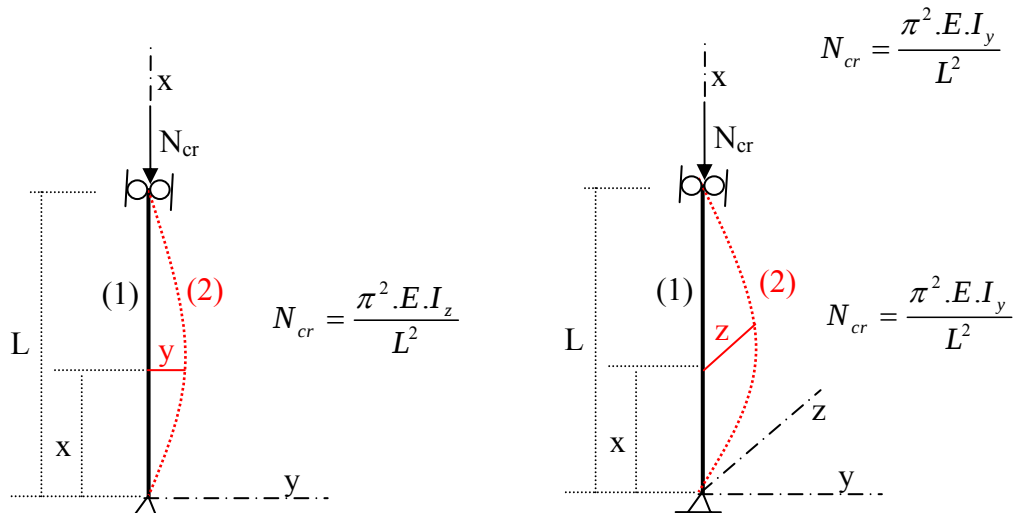


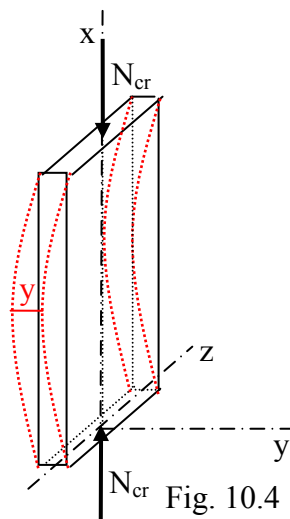
Fig. 10.3

¿En cual de los dos planos pandeará finalmente la columna?

Conclusión: “Una columna pandeará en el plano que presente menor rigidez a la flexión, es decir, en el plano respecto del cual el módulo de rigidez a la flexión sea mínimo: $E.I_{min}$ ”

Así pues la expresión de la carga crítica de Euler será: $N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E.I_{min}}{L^2}$ (10.4)

Ejemplo:



Los ejes Y, Z son ejes principales de inercia (ejes de simetría).
Respecto de ellos se obtendrán: I_{max} , I_{min}

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \quad I_z = \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3$$

$$\text{si } b < h \rightarrow I_z < I_y \Rightarrow I_{min} = I_z$$

$$E.I_{min} = E.I_z$$

“la columna pandeará (flexará) en el plano XY, o sea alrededor del eje Z”

2.-De la fórmula 10.4, que da la carga crítica, se obtienen las siguientes conclusiones:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L^2}$$

- a) “ El valor de la carga crítica N_{cr} depende del material del que esté fabricada la columna: E_{acero} , $E_{\text{hormigón}}$, E_{aluminio} ,.....”
- b) “ Para un material dado, el valor de N_{cr} no depende de la calidad del mismo, esto es de su resistencia” (en la fórmula de N_{cr} no interviene la f_y ni la f_u)

Ejemplo: material 1: acero tipo 1: $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$; $f_y = 275 \text{ N/mm}^2$
material 2: acero tipo 2: $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$; $f_y = 350 \text{ N/mm}^2$

Conclusión: *Los dos aceros tendrán la misma carga crítica N_{cr} , es decir, se comportarán igual frente al Pandeo*

- c) “ La carga crítica N_{cr} es directamente proporcional al módulo de rigidez a la flexión: $E \cdot I$ “. Así pues, mejoraremos la resistencia al Pandeo, utilizando columnas que opongan gran resistencia a la flexión, es decir, que tengan módulos de rigidez a la flexión grandes
- d) “ La carga crítica N_{cr} es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la columna: L^2 “. Así pues cuanto mayor sea la longitud de la columna, más posibilidades de que se alcance la carga crítica y se produzca el fallo por Pandeo.

Ecuación de la línea elástica:

Anteriormente se vió que la solución de la integración de la ecuación diferencial de la elástica era de la forma: $y = C_1 \cdot \text{sen } k_z \cdot x + C_2 \cdot \text{cos } k_z \cdot x$

en donde : $C_2 = 0 \rightarrow y = C_1 \cdot \text{sen } k_z \cdot x$ siendo : $k_z = (10.2) = \frac{n \cdot \pi}{L}$

y sustituyendo : $y = C_1 \cdot \text{sen } \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x$ ecuación línea elástica

Observaciones: El valor de C_1 resulta indeterminado, ello es debido a haber tomado como valor del radio de curvatura:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{en lugar de su valor exacto: } \frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Si se dan valores a $n = 1, 2, 3, \dots$, se obtienen las elásticas correspondientes a los diferentes estados de equilibrios indiferentes:

- Si $n=1 \rightarrow y = C_1 \cdot \sin \frac{\pi}{L} \cdot x$ siendo: $N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L^2}$

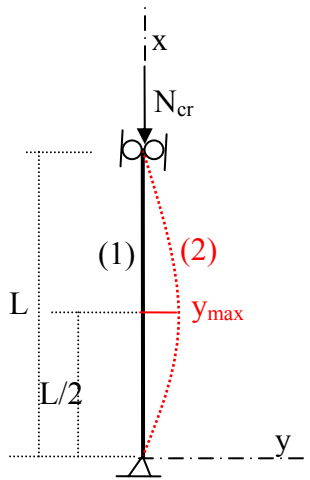


Fig. 10.5

la flecha máxima será: $\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2}$

$$y_{\max} = y\left(x = \frac{L}{2}\right) = C_1 \cdot \sin \frac{\pi}{L} \cdot \frac{L}{2} = C_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = C_1$$

Esta será la forma que tome la elástica cuando se consiga el equilibrio indiferente bajo la carga

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L^2}$$

- Si $n=2 \rightarrow y = C_1 \cdot \sin \frac{2\pi}{L} \cdot x$ siendo: $N_{cr} = 2^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L^2}$

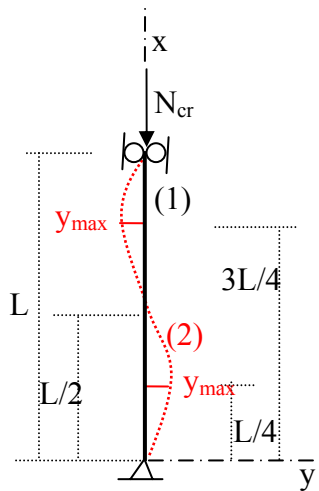


Fig. 10.6

la flecha máxima será: $\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow x = \frac{L}{4}, x = \frac{3L}{4}$

$$y_{\max} = y\left(x = \frac{L}{4}\right) = C_1 \cdot \sin \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L}{4} = C_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = C_1$$

$$y_{\max} = y\left(x = \frac{3L}{4}\right) = C_1 \cdot \sin \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{3L}{4} = C_1 \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = -C_1$$

Esta será la forma que tome la elástica cuando se consiga el equilibrio indiferente bajo la carga

$$N_{cr} = 2^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L^2}$$

Se tomará para el cálculo el menor de los valores de N_{cr} , es decir, la carga N_{cr} que consiga el primer equilibrio indiferente, o sea para el valor $n=1$

10.2.2.- INFLUENCIA DE LOS ENLACES. LONGITUD DE PANDEO

El valor obtenido para la carga crítica F_C , corresponde al caso de una columna articulada en sus extremos.

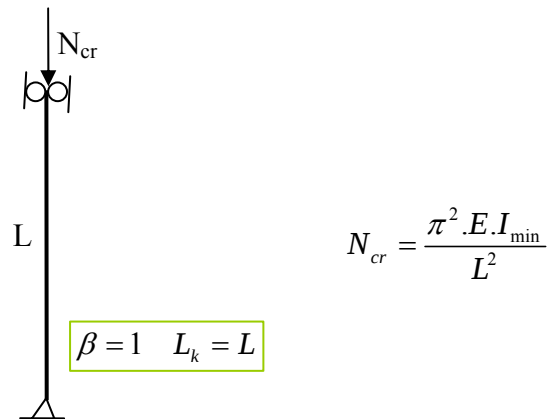


Fig. 10.7

Con otros tipos de apoyos y siguiendo un proceso similar al seguido en 10.2.1, se obtendrán los valores de F_C correspondientes:

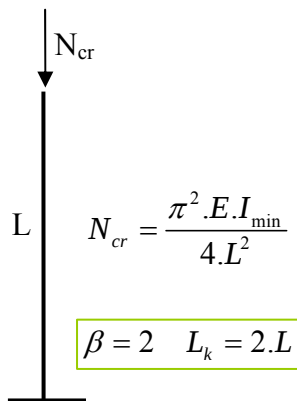


Fig. 10.8

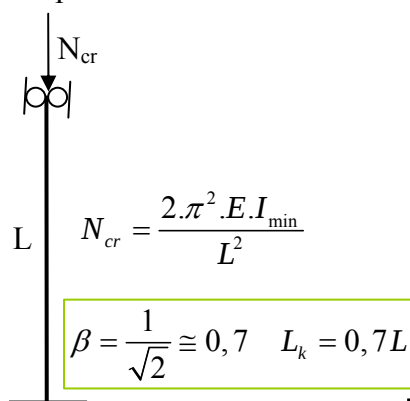


Fig. 10.9

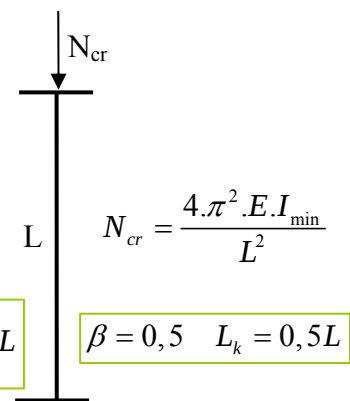


Fig. 10.10

Con el objeto de poder utilizar una sola fórmula que englobe a los cuatro casos, se utilizará la siguiente:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L_k^2} \quad (10.5)$$

siendo: $L_k = \beta \cdot L$ "longitud de pandeo" (10.6)

Los valores de β y por consiguiente de L_k para cada uno de los cuatro tipos de apoyos vistos, se obtendrán comparando la fórmula general 10.5 para la carga crítica, con las obtenidas en cada uno de ellos. Los valores están indicados en las figuras correspondientes

Longitud de pandeo de barras canónicas: L_k					
Condiciones de extremo	biarticulada	biempotrada	empotrada articulada	empotrada libre	biempotrada desplazable
L_k	$1,0.L$	$0,5.L$	$0,7.L$	$2,0.L$	$1,0.L$

Concepto físico de la longitud de pandeo:

La longitud de pandeo de una barra es: “la longitud que debería tener una barra, articulada en ambos extremos, equivalente a la dada (mismo material y sección), para que tuviese la misma carga crítica N_{cr} , que la barra dada “

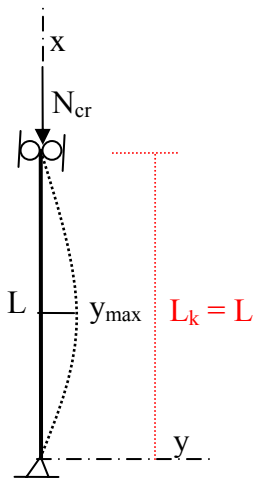


Fig. 10.11

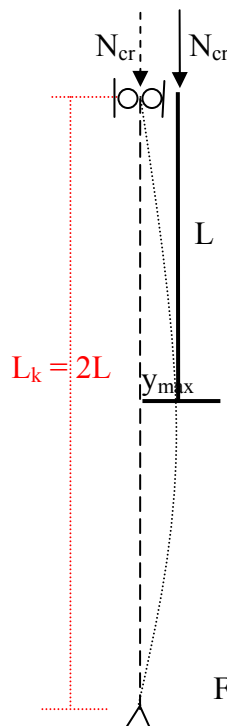


Fig.10.12

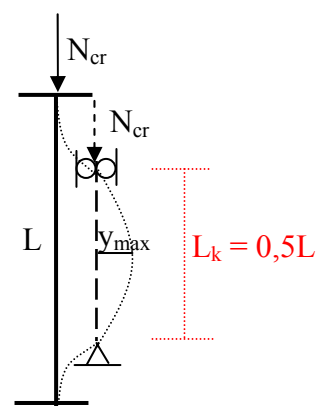


Fig. 10.13

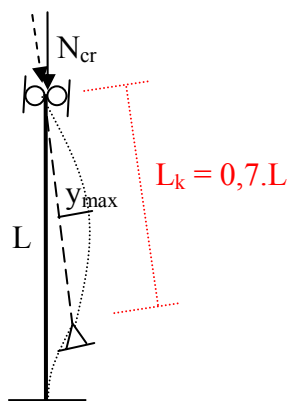


Fig.10.14

10.2.3.- TENSION CRÍTICA DE EULER. CONCEPTO DE ESBELTEZ

Se denomina **TENSION CRÍTICA** de Euler: “a la **tensión de compresión de una columna cuando sobre ella actúa la carga crítica N_{cr}** ”

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} \quad (10.7)$$

Sustituyendo F_C por su valor dado en 10.5, quedará:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L_k^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min} / A}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{L_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{L_k}{i_{\min}} \right)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (10.8)$$

siendo: $\lambda = \frac{L_k}{i_{\min}}$ "esbeltez de una columna" (10.9)

Representando gráficamente, en unos ejes coordenados, la ecuación 10.8 que da la tensión crítica de Euler en función de la esbeltez, se obtiene el siguiente diagrama:

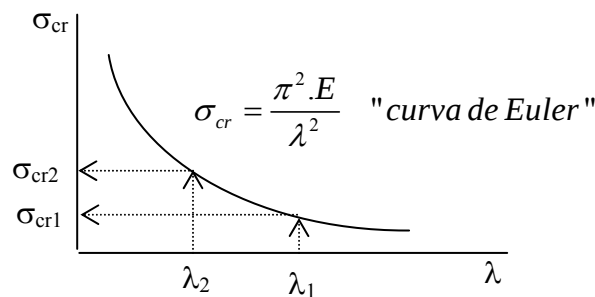


Fig.10.15

Del análisis del diagrama se deduce que a medida que disminuimos la esbeltez λ de la columna ($\lambda_2 < \lambda_1$) la tensión crítica σ_C aumenta ($\sigma_{cr2} > \sigma_{cr1}$), es decir aumenta la capacidad de la columna para resistir mas cargas sin que se produzca el Pandeo.

Conclusión: Para mejorar el comportamiento de una columna, de longitud dada, frente al Pandeo, será preciso disminuir su esbeltez λ . ¿Cómo?. Si la longitud L nos viene impuesta, en función de la ecuación 10.9 que da la esbeltez, habrá que aumentar el radio de inercia mínimo $i_{\min}$.

$$\lambda = \frac{L_k}{i_{\min}} \quad \text{si} \quad i_{\min} \uparrow \Rightarrow \lambda \downarrow$$

El aumento de $i_{\min}$ sin modificar el área A , se consigue aumentando el momento de inercia $I_{\min}$, osea alejando el material todo lo posible del centro de gravedad de la sección

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \quad \text{si } I_{\min} \uparrow \Rightarrow i_{\min} \uparrow$$

Esta es la razón, por ejemplo, por la que las columnas de sección hueca son mejores, a efectos de pandeo, que las macizas del mismo área

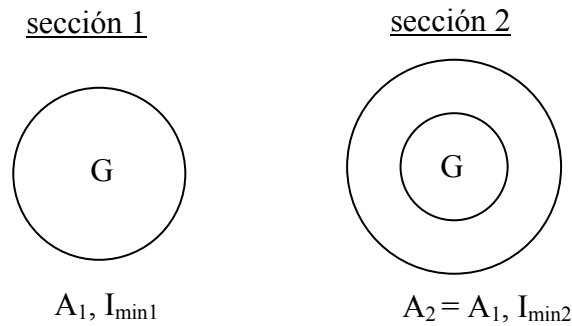


Fig.10.16

$$I_{\min 2} > I_{\min 1} \rightarrow i_{\min 2} > i_{\min 1} \rightarrow \lambda_2 < \lambda_1 \rightarrow \sigma_{c2} > \sigma_{c1} \rightarrow F_{c2} > F_{c1}$$

$\Rightarrow$ la sección 2 se comportará mejor al pandeo que la sección 1

10.2.4.- LÍMITES DE APLICACIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER

El diagrama de la fig.10.15, que representa la curva de la tensión crítica de Euler, sólo va a ser válida hasta un cierto punto P, que corresponde a una esbeltez λ_{lim} , que es la esbeltez para la cual: σ_{cr} (tensión crítica) = f_y (tensión del límite elástico).

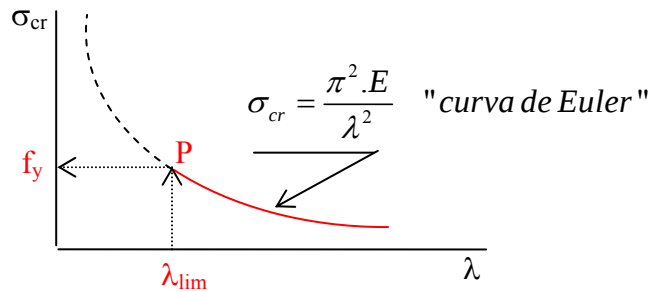


Fig.10.17

Ello es debido a que en la deducción de la fórmula para la obtención de la carga crítica N_{cr} , se utiliza la ecuación diferencial de la elástica y ésta sólo es aplicable para los casos en que $E = \text{cte}$ o lo que es lo mismo cuando $\sigma \leq f_y$ (sección 3.5. diagrama tensiones-deformaciones). Además, al alcanzarse la tensión del límite elástico, el fallo se produciría por haberse alcanzado la resistencia a la compresión de la sección.

En la Fig. 10.18 se representa la curva de pandeo de Euler y los modos de fallo

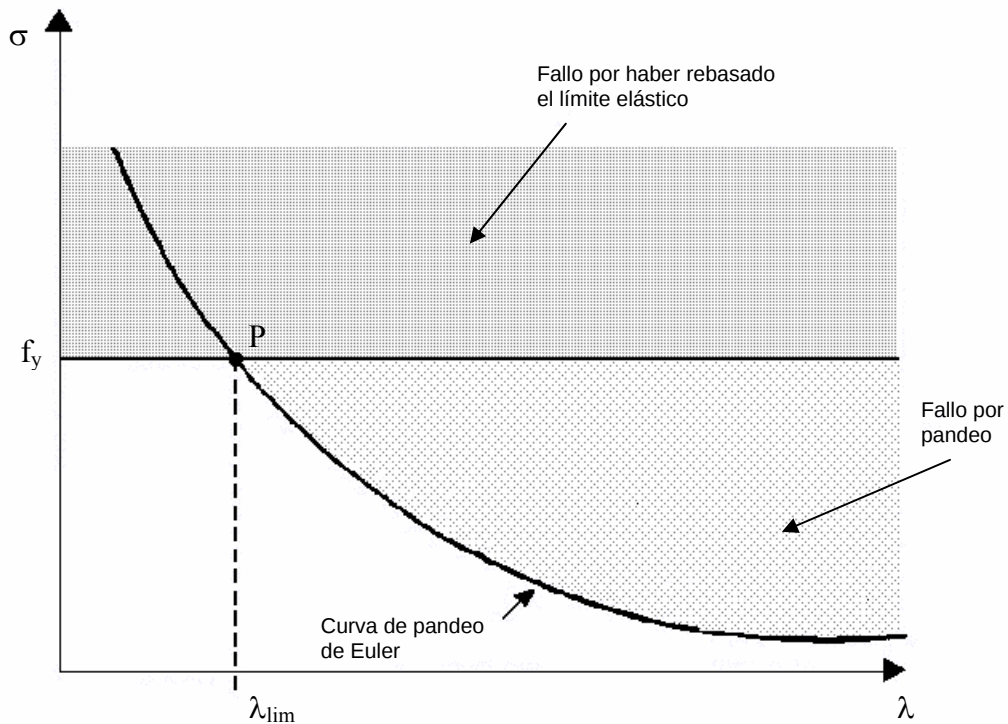


Figura 10.18

Así pues tendremos que para poder utilizar la curva de Euler se habrá de verificar:

$$\sigma_{cr} \leq f_y \rightarrow \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq f_y \rightarrow \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{f_y}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{lim} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{f_y}}} \quad (10.10)$$

- para esbelteces: $\lambda \geq \lambda_{lim} \rightarrow$ **SI** se podrá aplicar la curva de Euler
- para esbelteces: $\lambda \leq \lambda_{lim} \rightarrow$ **NO** se podrá aplicar la curva de Euler

Los valores de λ_{lim} para los aceros más utilizados en la construcción son:

Acero	f_y (N/mm ²)	λ_{lim}
S235	235	93,9
S275	275	86,8
S355	355	76,4

La curva de pandeo expresada en la fig.10.18 puede ser redibujada de forma adimensional, dividiendo la tensión crítica de Euler entre el límite elástico: (σ / f_y) y la esbeltez entre la esbeltez límite: $(\lambda / \lambda_{lim})$, dando lugar a la siguiente curva de Pandeo adimensional

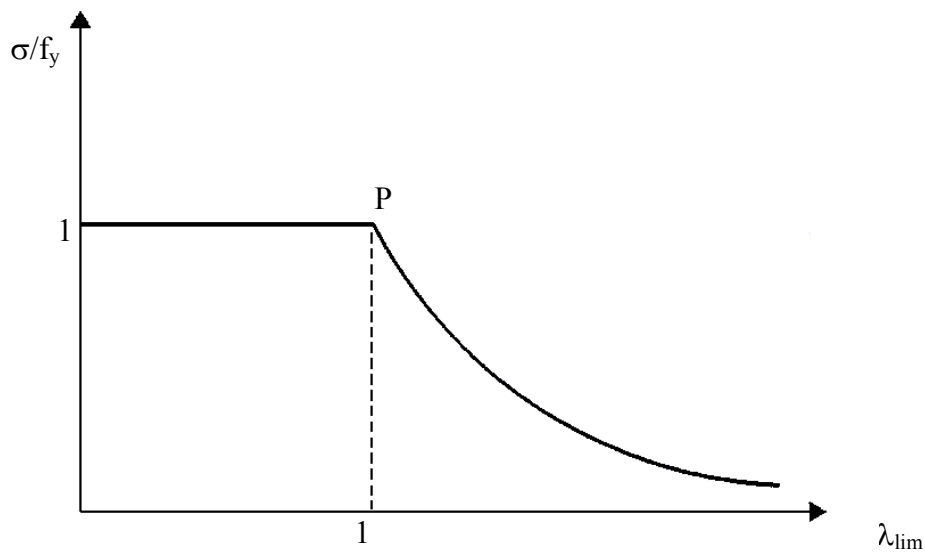


Figura 10.19

La ventaja de este gráfico es que puede aplicarse a barras de diferentes esbelteces y resistencias

10.3.- PANDEO REAL: ESTUDIO PRÁCTICO DEL PANDEO EN PIEZAS DE ACERO SOMETIDAS A COMPRESIÓN

10.3.1.- INTRODUCCIÓN

El comportamiento real de los pilares difiere del estudio teórico e ideal que acabamos de hacer. Ello es debido a las diversas imperfecciones del pandeo “real” que no se han tenido en cuenta en el estudio teórico, tales como:

- Falta de rectitud inicial del eje del pilar
- Cargas axiales no aplicadas exactamente en el centro de gravedad de la sección transversal del pilar
- Tensiones residuales producidas en la fabricación del pilar, bien por el proceso de laminación o por las soldaduras
- Otras

Así estudios experimentales de pilares reales proporcionan los resultados que se muestran en la siguiente figura:

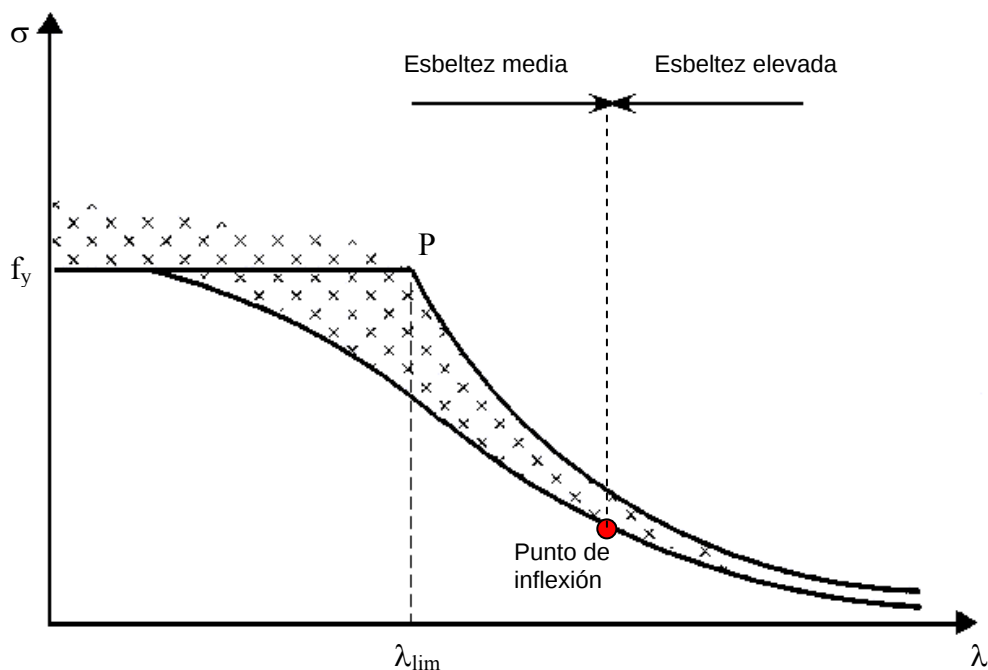


Figura 10.20

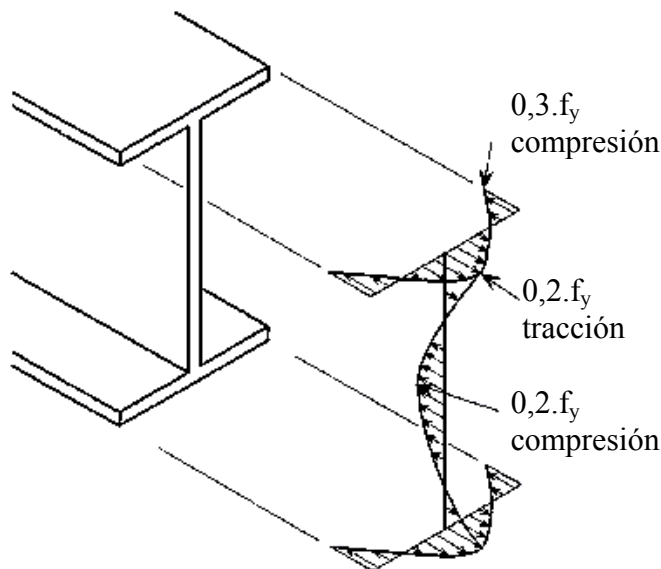
Comparado con las curvas teóricas, el comportamiento real muestra mayores dispersiones en el intervalo de esbelteces medias que en el intervalo de esbelteces elevadas. En la zona de esbelteces medias (que representa a la mayoría de los pilares), el efecto de las imperfecciones es significativo y debe de ser tenido en cuenta. La mayor reducción en el valor teórico se produce en la región de la esbeltez límite λ_{lim} . La curva límite inferior se ha obtenido de un análisis estadístico de los resultados de los ensayos y representa el límite seguro para la carga.

Un pilar puede ser considerado de esbeltez elevada si su esbeltez es mayor que la correspondiente al punto de inflexión de la curva límite inferior, mostrada en la fig.10.20. Para la carga última en dichos pilares, de esbeltez elevada, se puede tomar pues la carga crítica de Euler: N_{cr}

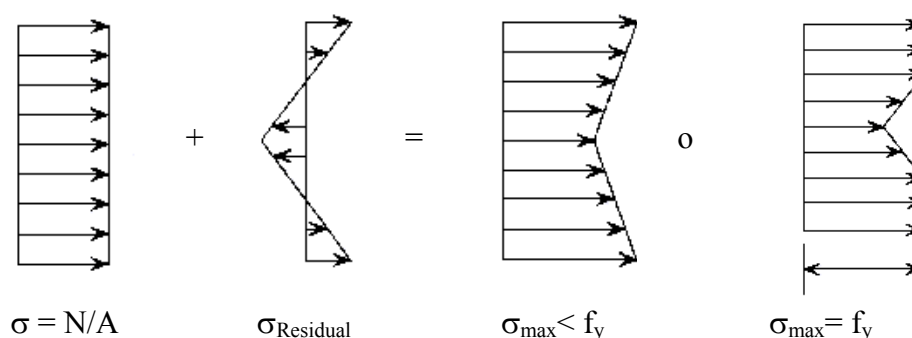
Son los pilares de esbelteces medias aquellos cuyo comportamiento, tal y como se observa en la fig.10.20, se desvía más de la teoría de Euler. Es pues en ellos donde se observa que más influye la presencia de las imperfecciones, las cuales dan lugar a tensiones adicionales que se añadirán a las obtenidas en el comportamiento teórico, lo que explica que las cargas últimas que serán capaces de resistir los pilares en el pandeo real sean inferiores a las obtenidas en el pandeo teórico.

Son la falta de rectitud del eje del pilar y la presencia de tensiones residuales, las imperfecciones que presentan un efecto más significativo en el comportamiento de este tipo de pilares.

Ejemplo de tensiones adicionales debidas al efecto de las tensiones residuales debidas a la laminación en caliente en la fabricación del pilar:



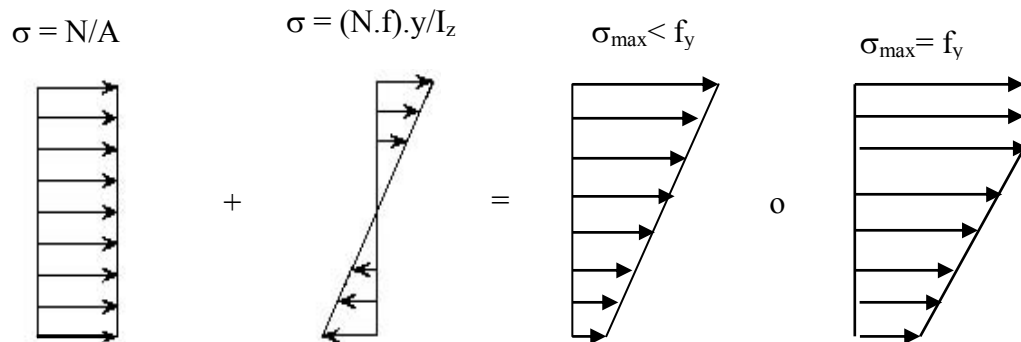
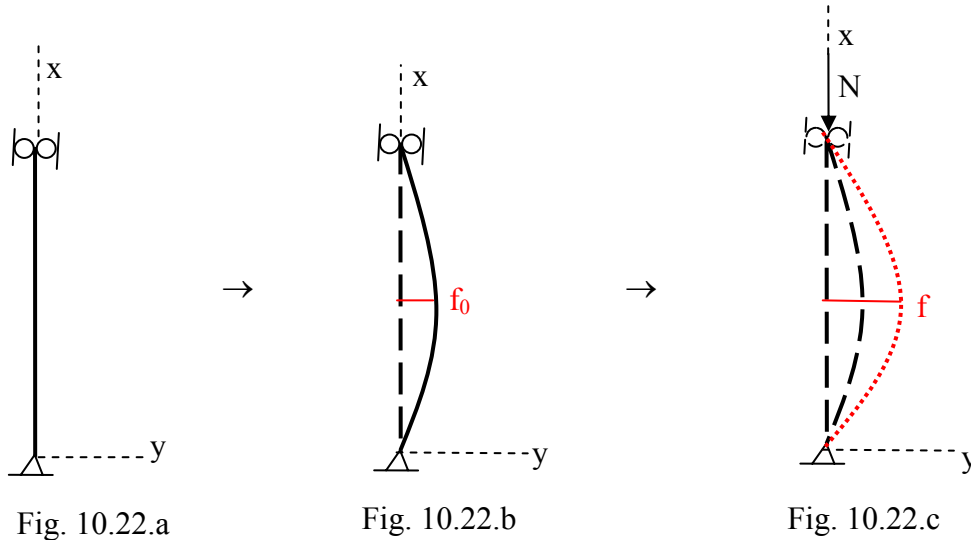
Ejemplo de tensiones residuales debidas a laminación en caliente



Ejemplo de tensiones adicionales debidas a la falta de rectitud del eje del pilar:

Esta imperfección es debida a los defectos inherentes al propio material, tales como la falta de homogeneidad del material, las imperfecciones geométricas de las piezas, etc....

La forma de introducir estas imperfecciones es a través de dar una curvatura inicial a la barra (Fig.10.22.b). Al aplicar ahora sobre ella la carga N de compresión, hará trabajar a la barra a FLEXIÓN-COMPRESIÓN, con lo cual se curvará más (Fig.10.22.c)



Naturalmente si se dan varias imperfecciones a la vez, los efectos finales serán la suma de los obtenidos en cada una de ellas.

Así pues en el pandeo real tendremos que, en general, a las tensiones producidas por la carga de compresión, les tendremos que sumar las debidas a las tensiones residuales y las debidas a la flexión, dada la falta de rectitud del eje del pilar, con lo cual la tensión total final máxima será:

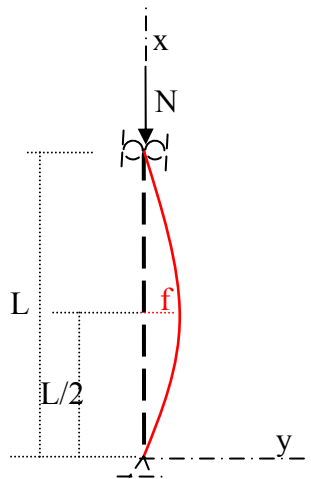


Fig. 10.24

La tensión máxima se dará en la sección $x = L/2$ y valdrá:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W} + \sigma_{\text{residuales}} = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot f}{W} + \sigma_{\text{residuales}} =$$

$$\sigma + \frac{(\sigma \cdot A) \cdot f}{W} + \sigma_{\text{residuales}} = k_1 \cdot \sigma$$

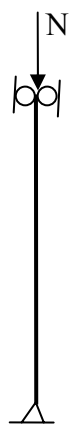
$$\boxed{\sigma_{\max} = k_1 \cdot \sigma} \quad (10.11)$$

siendo : k_1 = "coeficiente de amplificación de la tensión de compresión $\sigma = \frac{N}{A}$ "

Conclusión

:

PANDEO TEÓRICO: Euler



sólo COMPRESIÓN

$$\sigma_{\max} = \sigma(N) = \frac{N}{A} =$$

$$= \frac{N}{A} = \sigma = cte$$

PANDEO REAL



COMPRESIÓN + FLEXIÓN + T.residuales

$$\sigma_{\max} = \sigma(N) + \sigma(M_z) + \sigma_{\text{residuales}} =$$

$$\frac{N}{A} + \frac{M_z}{W} + \sigma_{\text{residuales}} = k_1 \cdot \sigma$$

Fig. 10.25

10.3.2.- INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE CÁLCULO A PANDEO CON LA NUEVA NORMATIVA ESPAÑOLA: DB-SE-A (2007)

Comprobación a Pandeo de piezas sometidas a compresión centrada por el Método de la nueva Normativa española: DB-SE-A: Caso de barras rectas de sección constante y axil constante

La ecuación 10.11 nos da la tensión máxima en el pandeo real, en el que se tiene en cuenta, tal y como indicamos anteriormente, las tensiones debidas a la compresión junto con las tensiones que producen las imperfecciones del pilar (falta de rectitud del eje y las tensiones residuales).

La fórmula propuesta por la Normativa para la comprobación a pandeo es:

$$\sigma_{\max}^* = k_1 \cdot \sigma^* = k_1 \cdot \frac{N^*}{A} \leq f_{yd} \rightarrow N^* \leq \frac{1}{k_1} \cdot A \cdot f_{yd} \rightarrow N^* \leq \chi \cdot A \cdot f_{yd}$$

denominando : $N_{b,Rd}$ = "resistencia última de la barra a pandeo" = $\chi \cdot A \cdot f_{yd}$ (10.12)

$$\chi = \frac{1}{k_1} = \text{"coeficiente de reducción por pandeo"}$$

Así pues la fórmula final para la comprobación a pandeo de una barra de sección constante sometida a una compresión centrada constante será:

$$N^* \leq N_{b,Rd} = \chi \cdot A \cdot f_{yd} \quad (10.13)$$

Los valores del coeficiente de reducción por pandeo χ , que como se ve, es el inverso del coeficiente de amplificación de tensiones k_1 , se pueden obtener a partir de las curvas de pandeo, como veremos a continuación

Observaciones:

1.-Al coeficiente $\chi < 1$, se le denomina "coeficiente de reducción por pandeo" por lo siguiente:

Vimos que la resistencia última, plástica, de una sección a compresión era (ver ecuación 4.33):

$$N_{pl,d} = A \cdot f_{yd}$$

y la comprobación a resistencia de una sección trabajando a compresión se aplicaba la fórmula dada en la ecuación (4.34)

$$N^* \leq N_{pl,d} = A \cdot f_{yd}$$

Como en el caso del pandeo y tal como hemos visto, además de las tensiones debidas a la compresión, había que añadir las debidas a la flexión y las tensiones residuales, la resistencia última de la sección, será inferior a la de solamente debida a la compresión.

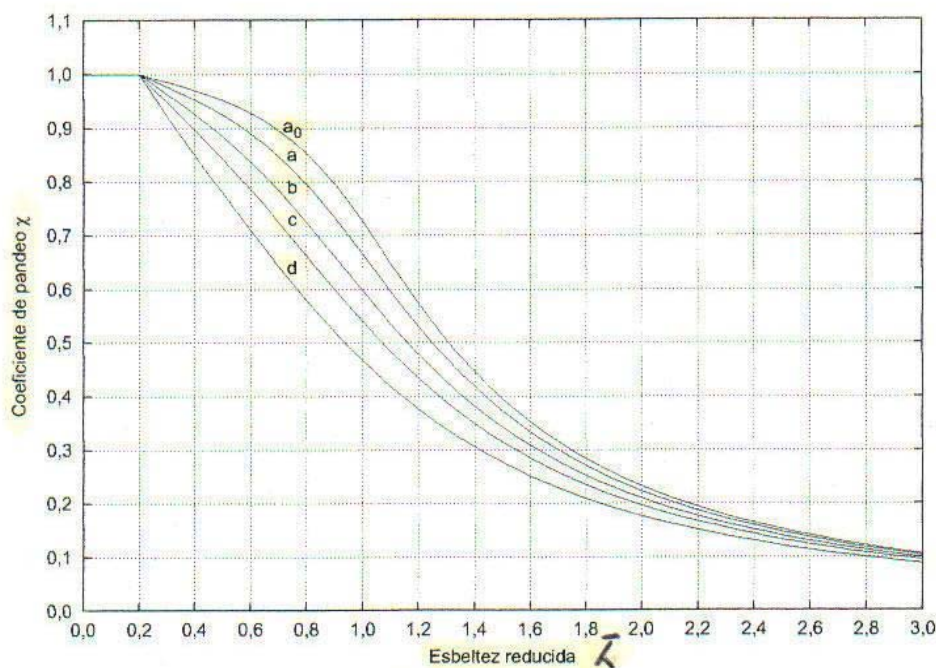
2.- Para los casos de barras de sección variable, de esfuerzos de compresión variables, de barras de sección compuesta o de elementos triangulados o de pilares de edificios, ver la Normativa indicada. Su estudio es objeto de otras asignaturas específicas.

10.3.3.- CURVAS EUROPEAS DE PANDEO

Las curvas de pandeo ECCS están basadas en los resultados de más de 1000 ensayos sobre varios tipos de piezas: I, H, T, [, L , ⊥ , [⊥ O, con diferentes valores de esbeltez (entre 55 y 160). Se han tenido en cuenta una imperfección geométrica de falta de rectitud del eje del pilar, tomando un eje semisinusoidal de magnitud $f = L/1000$, así como los efectos de tensiones residuales relativas a cada tipo de sección transversal.

Las curvas de pandeo ECCS: a_0 , a, b, c y d, se muestran en la siguiente tabla 10.1 y el utilizar unas u otras va a depender de la forma de la sección transversal del pilar considerado, de la dirección en la que pueda ocurrir el pandeo (eje y o eje z) y del proceso de fabricación utilizado en el pilar (laminación en caliente, soldado o conformado en frío). Ver la tabla siguiente 10.2

Tabla 10.1 Curvas de pandeo

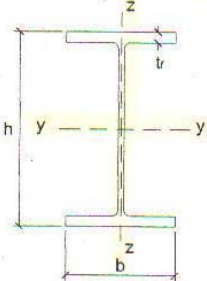
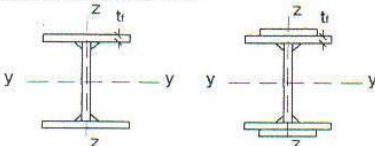
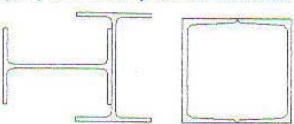
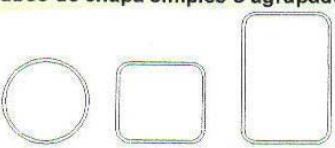
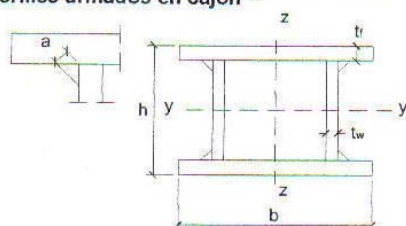


Éstas curvas nos proporcionan el valor para el coeficiente de reducción por pandeo χ , en función de la curva de pandeo apropiada al caso y de la esbeltez reducida $\bar{\lambda}$:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} \quad \text{"esbeltez reducida"} \quad (10.14)$$

$$\text{siendo: } N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_k^2} \quad (\text{carga crítica de Euler})$$

Tabla 10.2 Curva de pandeo en función de la sección transversal

Tipo de sección	Tipo de acero		S235 a S355		S450	
	Eje de pandeo ⁽¹⁾		y	z	y	z
Perfiles laminados en I						
	$h/b > 1,2$	$t \leq 40 \text{ mm}$	a	b	a ₀	a ₀
		$40 \text{ mm} < t \leq 100 \text{ mm}$	b	c	a	a
	$h/b \leq 1,2$	$t \leq 100 \text{ mm}$	b	c	a	a
		$t > 100 \text{ mm}$	d	d	c	c
Perfiles armados en I						
		$t \leq 40 \text{ mm}$	b	c	b	c
		$t > 40 \text{ mm}$	c	d	c	d
Agrupación de perfiles laminados soldados						
			c	c	c	c
Tubos de chapa simples o agrupados						
		laminados en caliente	a	a	a ₀	a ₀
		conformados en frío	c	c	c	c
Perfiles armados en cajón ⁽²⁾						
	soldadura gruesa: $a/t > 0,5$ $b/t < 30$ $h/t_w < 30$		c	c	c	c
	en otro caso		b	b	b	b

Los datos de la tabla 10.3 que se indica a continuación, que dan también los valores del coeficiente χ de reducción del pandeo, se obtienen de la tabla 10.1 (curvas de pandeo), pero son más operativas a la hora de tomar datos de las mismas.

Tabla 10.3 Valores del coeficiente de pandeo χ

Esbeltez reducida $\bar{\lambda}$	Curva de pandeo				
	a_0	a	b	c	d
Coeficiente (α) de imperfección	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76
$\leq 0,20$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,30	0,99	0,98	0,96	0,95	0,92
0,40	0,97	0,95	0,93	0,90	0,85
0,50	0,95	0,92	0,88	0,84	0,78
0,60	0,93	0,89	0,84	0,79	0,71
0,70	0,90	0,85	0,78	0,72	0,64
0,80	0,85	0,80	0,72	0,66	0,58
0,90	0,80	0,73	0,66	0,60	0,52
1,00	0,73	0,67	0,60	0,54	0,47
1,10	0,65	0,60	0,54	0,48	0,42
1,20	0,57	0,53	0,48	0,43	0,38
1,30	0,51	0,47	0,43	0,39	0,34
1,40	0,45	0,42	0,38	0,35	0,31
1,50	0,40	0,37	0,34	0,31	0,28
1,60	0,35	0,32	0,31	0,28	0,25
1,80	0,28	0,27	0,25	0,23	0,21
2,00 ⁽¹⁾	0,23	0,22	0,21	0,20	0,18
2,20 ⁽¹⁾	0,19	0,19	0,18	0,17	0,15
2,40 ⁽¹⁾	0,16	0,16	0,15	0,14	0,13
2,70 ⁽²⁾	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11
3,00 ⁽²⁾	0,11	0,10	0,10	0,10	0,09

⁽¹⁾ esbeltez intolerable en los elementos principales
⁽²⁾ esbeltez intolerable incluso en elementos de arriostramiento

10.3.4.- PANDEO EN PIEZAS SOMETIDAS A FLEXIÓN-COMPRESIÓN

La Comprobación a Pandeo debido a la Flexión–Compresión se estudiará en asignaturas específicas. (Ver normativa DB-SE-A)