

CAPÍTULO 1

CORTE - FLEXIÓN VARIABLE

1.1 Introducción

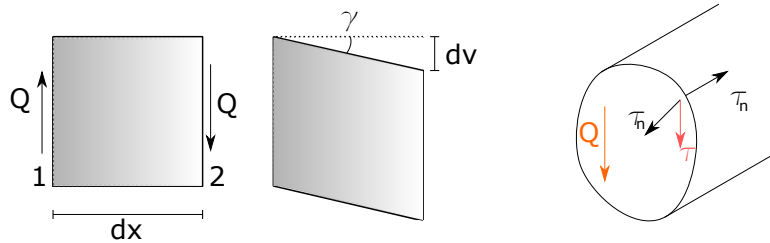


Fig. 1.1: Dirección de la tensión tangencial τ

Siguiendo la teoría de barras, considerando que no hay desplazamientos en la cara 1 los desplazamientos en 2 serán absolutos, y de valor dv en la dirección de Q . Si la sección plana permanece plana y tiene el mismo desplazamiento en todos sus fibras, entonces γ es constante en la sección. Adicionalmente, por ecuaciones de equivalencia, la resultante de tensiones debe ser igual a Q . La suma de estas dos cosas lleva a que $\tau = Q/A$. Esto no es admisible, ya que no cumple las condiciones de equilibrio internas del sólido. Por el teorema de Cauchy, sobre la superficie lateral deben existir tensiones iguales y opuestas a τ_n , pero dado que sobre el lateral no existen tensiones, entonces $\tau_n = 0$.

Por lo tanto la teoría elemental de corte se basa en una hipótesis de deformación simplificada, y llega a resultados incompatibles con el equilibrio del sólido. Debido a esto requerimos de una teoría adicional.

Como para el desarrollo de la teoría de Jouravsky se utilizan las fórmulas deducidas para flexión, requerimos de todas las hipótesis que fueron necesarias en ese momento.

1.2 Teoría de Jouravsky

Si tenemos un esfuerzo de corte éste genera flexión variable, es decir el momento flexor varía a lo largo de la barra. Por lo tanto, si tomamos un diferencial de dicha barra, como muestra la Fig. 1.2, tendremos un momento flexor distinto a cada lado, y la diferencia

sería el diferencial de momento (dM) generado por el corte (Q).

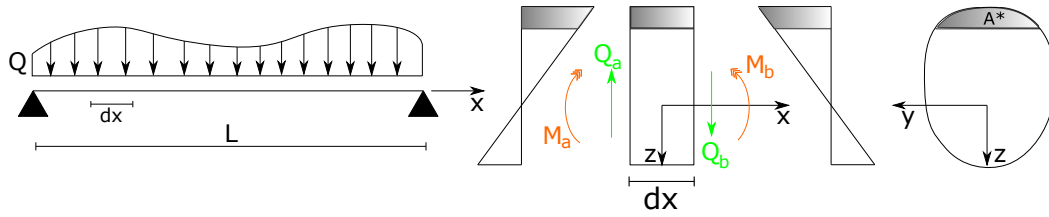


Fig. 1.2: Esfuerzos internos en un diferencial de longitud

Es decir, que

$$Q = \frac{dM}{dx} \wedge Q \neq 0 \longrightarrow M_B > M_A \longrightarrow M_B = M_A + dM$$

Por lo tanto $\sigma_B > \sigma_A$, lo cual aparenta generar un desequilibrio en la pieza. Para analizar como se logra el equilibrio aislamos un sector de la sección, como muestra la Fig. 1.3 y planteo el equilibrio.

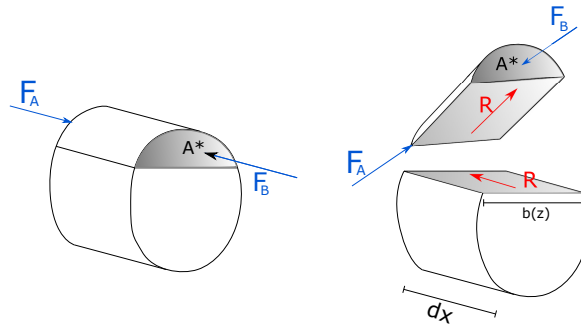


Fig. 1.3: Fuerza de resbalamiento en un diferencial de longitud

Si realizo la suma de la integral de las tensiones normales podemos notar que tenemos una fuerza residual:

$$\sum F = 0 = F_A + R - F_B = 0 \longrightarrow R = F_B - F_A$$

Utilizando las ecuaciones vistas para flexión podemos deducir que

$$R = \int_{A^*} \sigma_B dA - \int_{A^*} \sigma_A dA \longrightarrow R = \int_{A^*} \frac{M_B \cdot v_{ln}}{J_{ln}} - \frac{M_A \cdot v_{ln}}{J_{ln}} dA$$

$$R = \int_{A^*} \frac{dM \cdot v_{ln}}{J_{ln}} dA \longrightarrow R = \frac{dM \cdot S_{ln}^{A^*}}{J_{ln}}$$

Si lo podemos en función del corte

$$R = \frac{Q \cdot S_{ln}^{A^*}}{J_{ln}} \cdot dx$$

Donde J_{ln} es el momento de inercia respecto a la línea neutra, y $S_{ln}^{A^*}$ es el momento estático de A^* respecto a la línea neutra.

Esta fuerza residual es equilibrada por las tensiones tangenciales en la cara transversal de la barra, la cara gris claro de la Fig. 1.3. Por lo tanto es igual a la integral en ese área, que es igual a la integral en el ancho por dx .

$$R = \int_b \tau \, db \, dx \quad (1.1)$$

Igualando estas dos expresiones, sacando factor común dx

$$\int_b \tau \, db = \frac{Q \cdot S_{ln}^{A^*}}{J_{ln}} \quad (1.2)$$

τ es la acción de las tensiones tangenciales, tensiones longitudinales de resbalamiento. Finalmente, si consideramos que las tensiones son constante en el área:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{ln}^{A^*}}{J_{ln} \cdot b} \quad (1.3)$$

La obtenida fórmula de Jouravsky (1.3) no nos da el valor de la tensión en un punto concreto sino el valor medio a lo largo del ancho. Se trata de una aproximación que será similar a la verdadera ley de variación solo en algunos casos. En el caso particular en que el espesor que se analice fuera pequeño nos dará una buena aproximación.

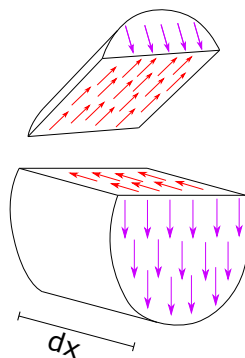


Fig. 1.4: Tensiones tangenciales medias

Viendo la Fig. 1.4, podemos notar que las tensiones τ calculadas (en rojo en la figura) dan origen a las tensiones tangenciales en el plano de la sección (en violeta en la figura) por el teorema de Cauchy.

1.3 Caso de Ejemplo

Veremos el caso de una sección doble T para analizar la distribución de tensiones tangenciales sobre ella.

Inicialmente notamos que en la cara de la sección, tanto el valor del corte Q , y el momento de inercia J_{ln} son escalares. El espesor b permanece constante dentro de cada sector (ala o alma). Por lo tanto sólo hace falta analizar la variación de S_{ln}^{A*} para determinar la variación de las tensiones tangenciales.

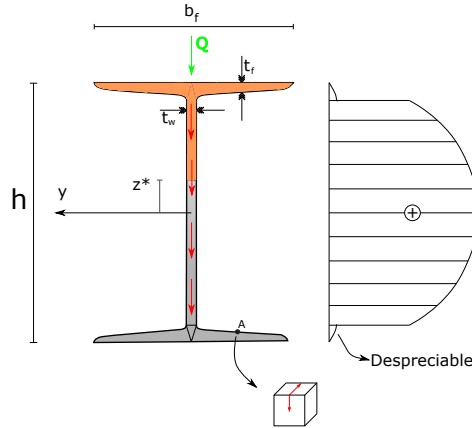


Fig. 1.5: Diagrama de tensiones y flujo de tensiones τ_{xz}

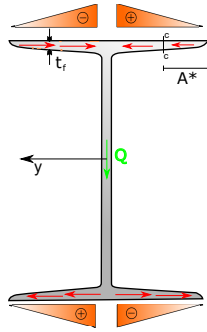
Calcularemos en primer lugar las tensiones τ_{xz} generadas por un corte vertical, como muestra la Fig. 1.5. Si quisiéramos calcular dichas tensiones para el ala superior tendríamos que usar un ancho $b = b_f$, y al ser un ancho grande el valor que calcularíamos estaría muy lejano a distribución real de tensiones. Es decir, calcularíamos un promedio que analíticamente es correcto, pero ese promedio dista de la compleja distribución que tendría ese ancho.

Si queremos calcular las tensiones τ_{xz} del alma, primero debemos calcular el momento estático para cualquier coordenada del alma. Siendo $b = t_w$:

$$S_{ln}^{A*} = b_f \cdot t_f \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right) + t_w \cdot \left(\frac{h}{2} - t_f - z^* \right) \cdot \left[z^* + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t_f - z^* \right) \right]$$

S_{ln}^{A*} varía de forma cuadrática con z^* , eso conlleva a que τ describa una parábola.

Podemos notar que si nos paramos en las alas del perfil (punto A), no resulta coherente que tengan esa dirección, ya que significaría que existen tensiones en la cara exterior. Es por ello que en las alas aparecerán en otro sentido. Para determinar la variación del flujo, simplemente analizo un “pedazo” del ala como se muestra la Fig. 1.6:

Fig. 1.6: Diagrama de tensiones y flujo de tensiones τ_{xy}

Estas tensiones son entonces τ_{xy} , y para calcularlas debemos primero calcular el momento estático de ese sector:

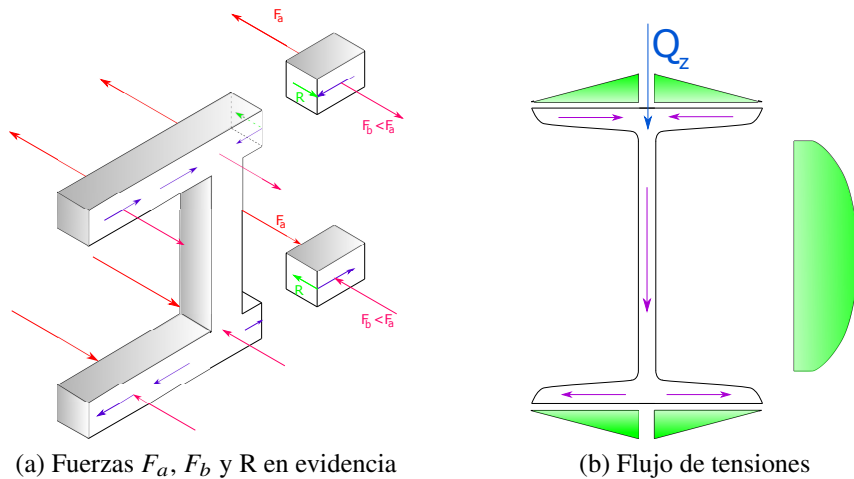
$$S_w = t_f \cdot y \cdot \left(\frac{h - t_f}{2} \right) \rightarrow \text{Variación Lineal}$$

En síntesis, para calcular las tensiones tangenciales de los perfiles normalizados, como el IPN, debemos analizar la sección realizando 'cortes' perpendiculares a la línea media del perfil. Esto es independiente de cual es la dirección del corte Q , y se debe a que las tensiones tangenciales siempre toman la dirección de la línea media.

Podemos notar adicionalmente que, en este caso, las tensiones corresponden a funciones lineales en sentido ortogonal a Q , y cuadráticas en sentido paralelo al de Q . Esto se debió a que en el caso lineal al ir avanzando cambia el área pero la distancia al baricentro se mantiene constante, y por lo tanto el momento estático varía linealmente. En cambio, en el caso cuadrático al ir avanzando cambia el área y la distancia al baricentro, y por lo tanto el momento estático varía cuadráticamente.

Ahora ahora analizamos el valor en módulo de las tensiones tangenciales, pero nos falta conocer el sentido de estas tensiones. El esquema de la dirección de las tensiones tangenciales, se suele llamar flujo de tensiones. Para conocer el sentido del flujo de tensiones, debemos aislar un diferencial de longitud de barra y analizar qué sucede con las fuerzas resultantes debidas a los momentos flexores.

Como se vio previamente en la deducción de Jouravsky, al "cortar" un pedazo de la sección y poner en evidencia las fuerzas notamos que aparecían tensiones tangenciales que equilibraban las tensiones normales generadas por el diferencial de momento. Entonces, para pensar la dirección de las tensiones tangenciales debemos analizar la dirección de las tensiones normales asociadas al diferencial de momento. Pero cuidado, no las tensiones normales de la flexión, sino las del diferencial de momento. Luego, por Cauchy aparecerá otra alejándose de la arista en la cara ortogonal, es decir, sobre la cara de la sección, lo que me da como resultado la dirección del flujo de tensiones en la sección.



Entonces, para una sección IPN donde se aplica un corte en sentido vertical y hacia abajo (en este caso positivo), se genera un diferencial de momento que comprime arriba y tracciona abajo. Las tensiones tangenciales deben tener un sentido tal que equilibre estas tensiones, como muestra la Fig. 1.7a.

Otra forma de ver el flujo es utilizar la analogía hidrodinámica, y pensar como fluiría la fuerza Q a lo largo del perfil. Las tensiones tangenciales viajan “entrando” por el ala superior, siguen bajando por el alma, y “salen” por el ala inferior.

1.4 Centro de corte

Veamos que sucede si aplico las ecuaciones de equivalencia a las tensiones de corte para una sección cuadrada donde sólo tenemos corte en la dirección de Z .

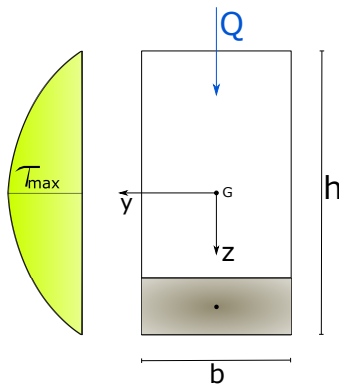


Fig. 1.7: Sección cuadrada con corte Q_z

Usando una variable auxiliar z' , que tiene sentido contrario a z y origen en el punto inferior

$$\tau = \frac{Q \cdot (b \cdot z') \cdot \left(\frac{h - z'}{2} \right)}{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot b}$$

Y por lo tanto el valor máximo es cuando $z' = \frac{h}{2}$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h}$$

Verifiquemos si las ecuaciones de equivalencia se satisfacen:

$$Q_z = \int_A \tau \, dA = \int_0^h \tau_{xz} \, dz' \cdot b = Q \quad (1.4)$$

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} \, dA = 0 \quad (1.5)$$

$$M_t = \int_A -\tau_{xy} \cdot z \, dA + \int_A \tau_{xz} \cdot y \, dA = 0 \quad (1.6)$$

Las primeras dos ecuaciones se satisfacen siempre, pero la tercera no. En este caso, podemos notar que el baricentro de las tensiones pasan por el baricentro G de la sección, y por lo tanto la ecuación del momento torsor da nula.

Analicemos el caso de un perfil sin doble simetría, como lo son los perfiles UPN.

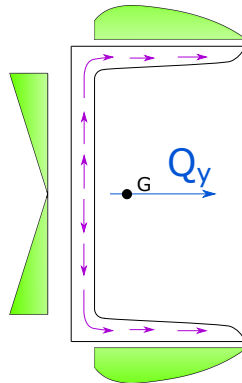


Fig. 1.8: Perfil C con corte en la dirección Y

Llamando H a la resultante en las alas y V a la resultante de la distribución de tensiones en el alma. Para el caso de un corte en dirección de Y (es decir, dirección al eje de simetría de la sección), notamos que sucede algo similar al caso del IPN. Los momentos de las resultantes H se compensan, mientras que las fuerzas V se cancelan entre sí, y por lo tanto $M_t = 0$.

Sin embargo, cuando se hace el mismo análisis para un corte en la dirección de Z, notamos lo siguiente:

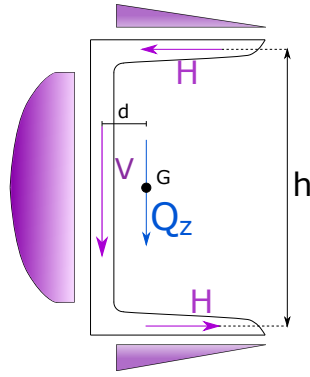


Fig. 1.9: Perfil C con corte en la dirección Z

$$V = \frac{1}{2} \cdot \tau_{Max_{xy}} \cdot A_1$$

$$H = \left[\tau_{Min_{xz}} + \frac{2}{3} \cdot (\tau_{Max_{xz}} - \tau_{Min_{xz}}) \right] \cdot A_2$$

$$Q_z = V \simeq 0.96 \cdot Q_z$$

$$M_t = H \cdot h + V \cdot d \neq 0$$

Por lo tanto, parece que no se satisfacen las ecuaciones de equivalencia. Para intentar salvar este error, debemos agregar un M_t en sentido opuesto, que provocará tensiones tangenciales de torsión en la sección. La suma de ambos estados logran volver a satisfacer las ecuaciones de equivalencia.

El problema no radica en que la teoría de Jouravsky es incorrecta, sino que debemos recordar que estamos calculando tensiones medias. Al calcular tensiones medias no logramos capturar la variación de las tensiones en el espesor. Si recordamos las tensiones generadas por torsión en los perfiles abiertos, recordamos que estas variaban linealmente, y si les calculamos el promedio da cero. Es decir, al calcular un promedio no logramos ver las tensiones generadas por la torsión.

La realidad es que la teoría de Jouravsky captura correctamente el flujo y valor de las tensiones tangenciales solo para el caso en que el corte esté aplicado en el **centro de corte** de la sección. Éste es el punto en el plano de la sección a donde debemos reducir a las tensiones para que la torsión producida por las τ de Jouravsky sea nula. Dicho punto es propio de la sección y no depende de la carga aplicada. El centro de corte también tiene la propiedad de ubicarse sobre el o los ejes de simetría de la sección, de forma tal que los momentos causados por H y V , resultado de integrar las tensiones, se anulan de un lado y del otro de dicho eje.

Veamos como podemos hallar el centro de corte (C_c) para una sección UPN. Para

ello, idealizamos al perfil con espesores constantes tanto en el ala como en el alma. Por otro lado, como queremos que se anulen los momentos causados por H y V , notamos que el par de V debería tener sentido contrario al par de H para que se igualen. Dado esto, el C_c debe estar ubicado del lado izquierdo de la sección, como muestra la Fig. 1.10.

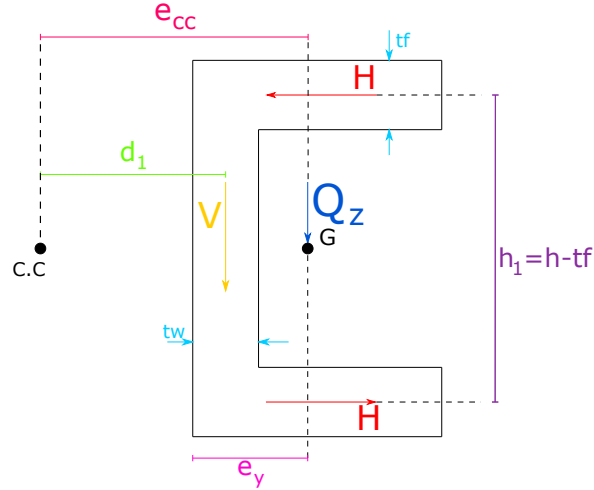


Fig. 1.10: Perfil C con centro de corte a la izquierda de la sección

Plantemos entonces que el momento torsor respecto al centro de corte es nulo:

$$Mt_{C_c} = H \cdot h_1 - V \cdot d_1 = 0$$

$$\rightarrow d_1 = \frac{H}{V} \cdot (h - t_f)$$

$$\text{y como } Q_z \simeq V \rightarrow d_1 = \frac{H}{Q_z} \cdot (h - t_f)$$

Desde el dibujo podemos determinar geométricamente la distancia al centro de corte:

$$e_{c_c} = \left(e_y - \frac{t_f}{2} \right) + d_1 = \left(e_y - \frac{t_f}{2} \right) + \left[\frac{H}{Q_z} \cdot (h - t_f) \right] \quad (1.7)$$

Integrando las tensiones sobre el ala, resulta H :

$$H = \frac{1}{2} \cdot \tau_{Max_{xy}} \cdot t_f = \frac{1}{2} \cdot \tau_{Max_{xy}} \cdot (b - t_w) \cdot t_f \quad (1.8)$$

Y por Jouravsky:

$$\tau_{M_{xy}} = \frac{Q_z \cdot S^{A^*}}{J_y \cdot t_f} = \frac{Q_z}{J_y} \cdot \left(\frac{h - t_f}{2} \right) \cdot (b - t_w) \quad (1.9)$$

Reemplazando (1.9) en (1.8) nos queda:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_z}{J_y} \cdot \left(\frac{h - t_f}{2} \right) \cdot (b - t_w) \cdot (b - t_w) \cdot t_f = \frac{Q_z}{4 \cdot J_y} \cdot (h - t_f) \cdot (b - t_w)^2 \cdot t_f \quad (1.10)$$

Reemplazando (1.10) en (1.7):

$$e_{C_c} = \left(e_y - \frac{t_f}{2} \right) + \frac{(h - t_f)^2 \cdot (b - t_w)^2 \cdot t_f}{4 \cdot J_y}$$

Notamos que, como se dijo previamente, el C_c es una propiedad geométrica de la sección y no depende de la carga aplicada.

Si reducimos entonces nuestro sistema al centro de corte podemos analizar las tensiones descomponiendo en corte y momento torsor. El corte generará las tensiones que calculamos previamente mediante a la teoría de Jouravsky, y el momento torsor las tensiones del capítulo anterior según la teoría de Saint Venant.

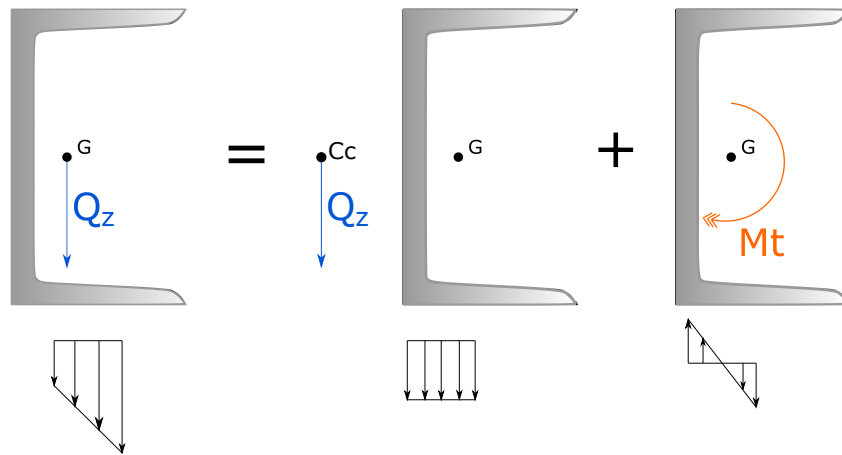


Fig. 1.11: Tensiones de corte más torsión

Para hallar el Centro de corte de una sección cualquiera los pasos a seguir son:

1. Hallar los ejes principales de inercia baricéntricos.
2. Descomponer el corte en dichos ejes.
3. Determinar el flujo de tensiones.
4. Mediante ecuaciones de equivalencia determinar M_t .
5. Calcular la distancia al C_c (si el perfil no tuviese ejes de simetría, debería hallar dos distancias al C_c).

1.5 Unión mediante bulones

Se tienen n perfiles empotrados sometidos a una carga P :

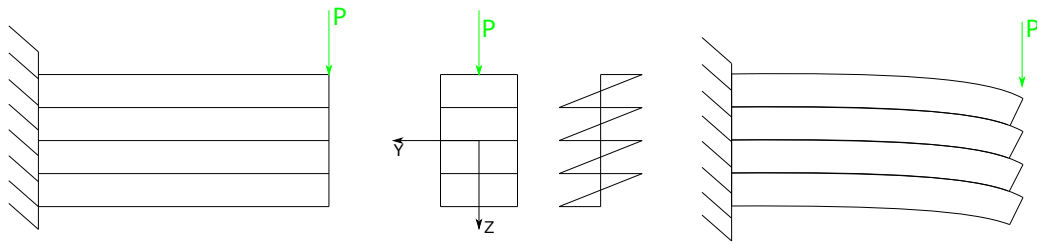


Fig. 1.12: Viga formada por n placas no vinculadas

Como vemos, cada perfil toma la misma carga y se deforman de igual forma. Si se unen estas n barras mediante bulones:

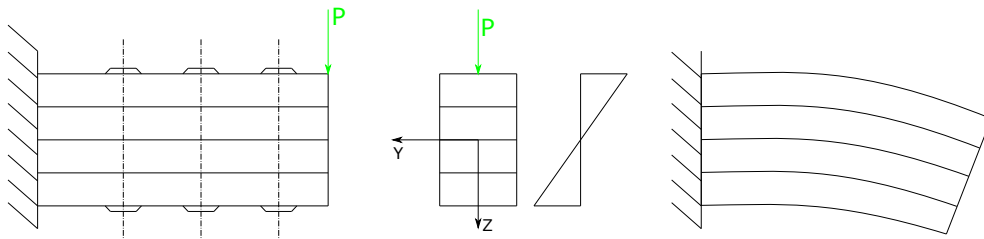


Fig. 1.13: Viga formada por n placas vinculadas con bulones

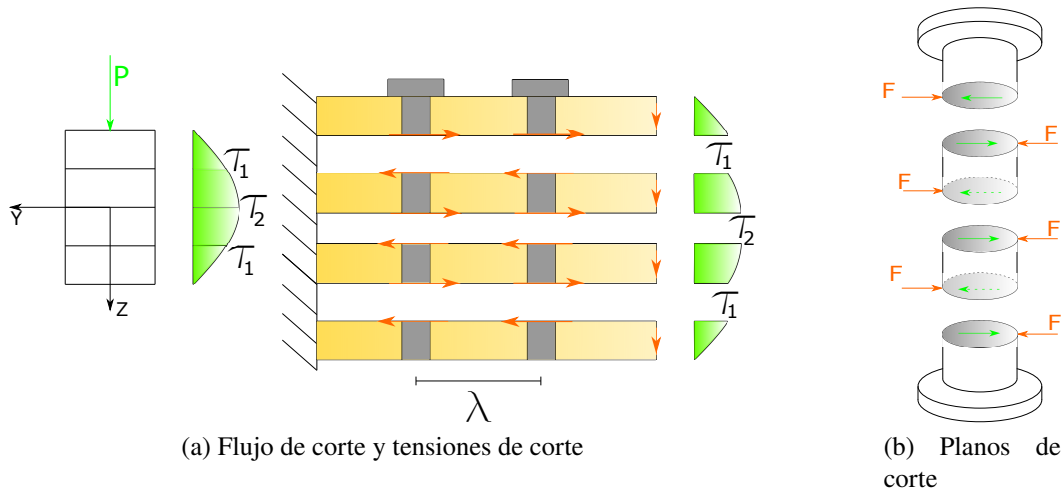
Al unirse las barras disminuye la tensión y la flecha, esto optimiza la capacidad de la estructura ante las solicitaciones. Esto se debe a que los pernos, ante una sollicitación por corte, puede transmitir los esfuerzos rasantes longitudinales, también conocido como **flujo de corte**.

El flujo de corte se define como la integral de las tensiones tangenciales en el ancho de la sección, que es de hecho el valor encontrado en la ec. 1.2:

$$q = \int \tau db = \frac{Q \cdot S^*}{J_y} \longrightarrow [q] = \left[\frac{\text{Fuerza}}{\text{Longitud}} \right] \quad \text{Es fuerza por unidad de longitud}$$

Recordemos que en esta etapa todavía no habíamos hecho la simplificación de tomar una tensión promedio, ya que todavía no integramos en el ancho. Por lo tanto esta fórmula no está limitada por 'el ancho de corte' porque de hecho no existe ancho alguno.

Los bulones están distanciados una distancia λ entre si. Cada bulón tiene una cierta "zona de influencia" para tomar esfuerzo, la cual se considera como media separación hacia cada lado. Entonces si se quisiera conocer la fuerza que absorbe cada uno, basta con multiplicar al flujo de corte por esta distancia (al ser media separación a cada lado, el



(a) Flujo de corte y tensiones de corte

(b) Planos de corte

total resulta una separación λ completa). La fuerza solicitante resulta:

$$F_s = q \cdot \lambda = \frac{Q \cdot S^*}{J_y} \cdot \lambda \quad (1.11)$$

Debemos dimensionar nuestros bulones para que resistan esta fuerza. La resistencia de un bulón es igual a la tensión máxima que soporta por su área. Si adicionalmente tenemos en cuenta que podemos tener más que un bulón, la fuerza resistente es la fuerza que resiste cada bulón por la cantidad de bulones N . Entonces, nuestra fuerza resistente es:

$$F_r = \tau_{adm} \cdot A_b \cdot N = \tau_{adm} \cdot \frac{\pi \cdot D_b^2}{4} \quad (1.12)$$

La fuerza que resisten los bulones debe ser mayor a la que solicita a la estructura, entonces:

$$\frac{Q \cdot S^*}{J_y} \cdot \lambda \leq \tau_{adm} \cdot \frac{\pi \cdot D_b^2}{4} \cdot N \quad (1.13)$$

Veamos esta expresión (1.13). Tenemos una ecuación y dos incógnitas: el diámetro del bulón (D_b) y su separación λ . Para resolver esto, sólo tengo que fijar una de las variables y despejar la otra. Usualmente se dan límites para la separación (como por ejemplo $5 \cdot D_b < \lambda < 20 \cdot D_b$), usando este criterio se podrían despejar ambas variables.

El valor S^* es el momento estático de la parte de la sección que resbala. En este caso, es el momento de la parte que une el bulón. La forma más fácil de pensar cual es el área a considerar es pensar que se separa cuando se remueve el bulón, eso que se separa es 'la sección que resbala'.

Por último debemos mencionar que el valor N en realidad no es simplemente el número de bulones. En realidad $N = m \cdot n$, donde m es el número de planos y n el número de bulones. Para explicar estos conceptos veamos unos ejemplos.

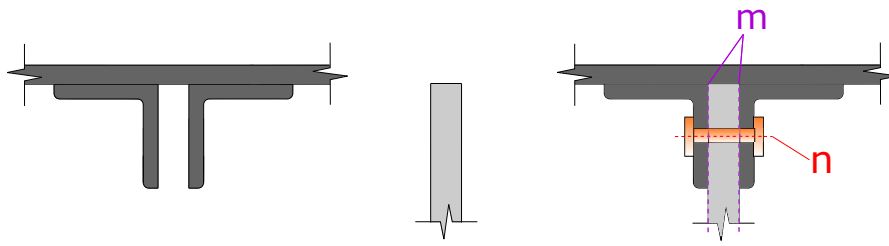
Ejemplo 1:

Fig. 1.14: Secciones a unir en un caso con múltiples planos de corte

En el ejemplo 1 (Fig. 1.14), tenemos dos chapas unidas mediante dos perfiles angulares mediante un bulón. Podemos notar que el bulón aunque es uno solo, une la chapa vertical en dos puntos. Es un solo bulón, pero que está actuando dos veces. En otras palabras, hay 2 planos de corte ($m = 2$), y solo un bulón ($n = 1$). Por otro lado, el momento estático lo vamos a pensar como “saco el bulón y veo qué se separa de qué”. Al retirarlo, notamos que la chapa gris claro se separa de la gris oscuro. Es por eso que el S^* será o de la chapa gris claro, o de la chapa gris oscuro junto a los dos perfiles L respecto del baricentro de toda la sección.

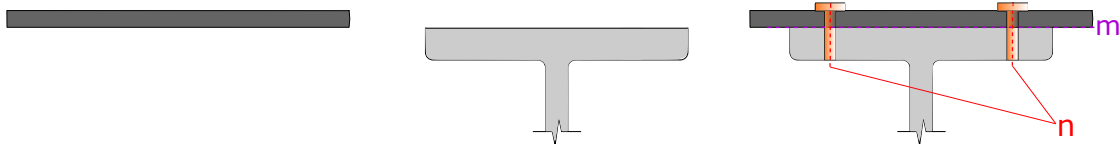
Ejemplo 2

Fig. 1.15: Secciones a unir en un caso con múltiples bulones

En el segundo ejemplo (Fig. 1.15), tenemos una configuración diferente, una chapa unida a un perfil IPE. En comparación con el caso anterior, la unión se da por los dos bulones ($n = 2$), pero cada uno actúa en un solo plano ($m = 1$). Y de la misma forma que antes, si quitamos los bulones y vemos el resbalamiento, notamos que la chapa se separa respecto del perfil IPE.