Lección 11

Flexión compuesta y flexión compuesta desviada

Contenidos

11.1 Distribución de tensiones normales estáticamente equivalentes a la combinación de esfuerzos axiles y momentos flectores

Una barra trabaja a flexión compuesta cuando está sometida a un estado de cargas tal que al deformarse se originan tensiones estáticamente equivalentes en cada sección a un esfuerzo axil y a un momento flector ($M_y(x)$ o $M_z(x)$). Trabaja a flexión compuesta desviada si junto al axil actúan sendos momentos flectores ($M_y(x)$ y $M_z(x)$). En estos casos el eje neutro no pasa por el centro de gravedad, pudiendo localizarse dentro o fuera de la sección, dependiendo de los valores de las solicitaciones.

11.2 Flexión compuesta

Las distribuciones de tensiones normales para el momento actuando según el eje y o el eje z son, respectivamente

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N(x)}{S} + \frac{I_z\, z - I_{yz}\, y}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y(x) \tag{11.1}$$

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N(x)}{S} + \frac{I_y\, y - I_{yz}\, z}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z(x) \tag{11.2}$$

En la Figura 11.1 se muestra la distribución de tensiones en una sección sometida a flexión compuesta según el eje y.

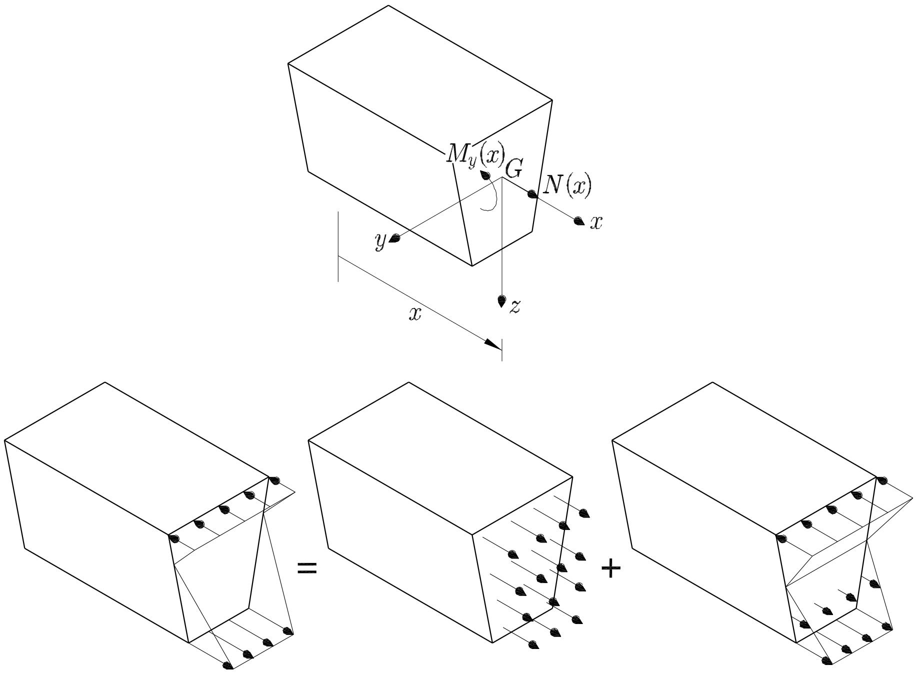

Figura 11.1 Distribución de tensiones en una sección sometida a flexión compuesta según el eje y

Si los ejes son principales de inercia, las expresiones 11.1 y 11.2 se simplifican:

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N(x)}{S} + \frac{M_y(x)}{I_y} z \qquad (11.3)$$

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N(x)}{S} + \frac{M_z(x)}{I_z} y \qquad (11.4)$$

11.3 Flexión compuesta desviada

Si junto al axil actúan sendos momentos $M_y(x)$ y $M_z(x)$,
la distribución de tensiones normales es

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N(x)}{S} + \frac{I_z\, z - I_{yz}\, y}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y(x) + \frac{I_y\, y - I_{yz}\, z}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z(x) \qquad (11.5)$$

Si los ejes son principales de inercia, $I_{yz} = 0$, por tanto

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N(x)}{S} + \frac{M_y(x)}{I_y} z + \frac{M_z(x)}{I_z} y \qquad (11.6)$$

En la Figura 11.2 se muestra la distribución de tensiones resultante de sumar las tensiones debidas a un axil y las tensiones debidas a sendos momentos $M_y(x)$ y $M_z(x)$.

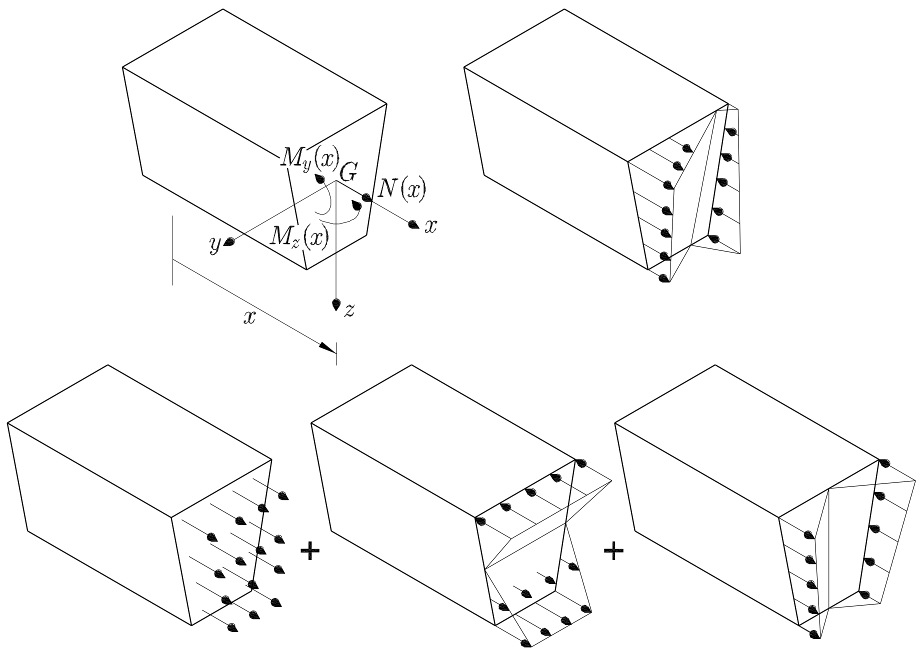

Figura 11.2 Distribución de tensiones en una sección sometida a una solicitación de flexión compuesta desviada

11.4 Núcleo central

Existen materiales que trabajan muy bien a compresión y tienen un mal comportamiento a tracción, lo que los hace ideales para su uso en elementos estructurales que trabajen fundamentalmente a compresión. No obstante, las cargas axiles siempre actúan con cierta excentricidad. Por tanto, interesa delimitar *la zona de la sección transversal en la que la acción de un axil de compresión no provoca tracciones.* Esta zona se denomina *núcleo central.*

Ya se ha comentado anteriormente que el eje neutro en flexión compuesta o flexión compuesta desviada no pasa por el centro de gravedad de la sección. Esto implica que la sección y el eje neutro pueden intersecarse o no. Si la sección y el eje neutro se cortan, este dividirá a la sección en dos partes: una trabajará a tracción y otra a compresión. Si la sección y el eje neutro no se intersecan, toda la sección trabajará a tracción o a compresión según el sentido del axil. Teniendo en cuenta esto, se puede definir el núcleo central de una sección como *el lugar geométrico de los puntos en los que la aplicación de un axil de compresión implica líneas neutras tangentes al contorno de la sección sin intersecarla.*

Las líneas L_1 y L_2 de la sección de la Figura 11.3 se corresponden con los ejes neutros al aplicar un axil en los puntos 1 y 2, respectivamente. La línea L_3 corresponde al eje neutro para un axil aplicado en el punto 3; en los tres casos, toda la sección estaría comprimida o traccionada dependiendo del sentido del axil. La línea L_4 corresponde al eje neutro para un axil aplicado en el punto 4; en este caso se producen tracciones y compresiones en la sección.

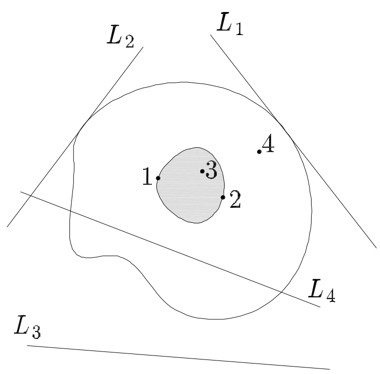

Figura 11.3 Concepto de núcleo central

En una sección sometida a flexión compuesta desviada, como se muestra en la Figura 11.4, los momentos pueden expresarse en función del esfuerzo axil y sus excentricidades como

$$M_z(x) = N(x)\, e_y \qquad M_y(x) = N(x)\, e_z \tag{11.7}$$

Sustituyendo (11.7) en (11.5) y reordenando, se obtiene

$$\sigma_x(x,y,z) = N(x)\left(\frac{1}{S} + \frac{e_y I_y - e_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{e_z I_z - e_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z\right) \tag{11.8}$$

siendo la ecuación del eje neutro

$$\frac{1}{S} + \frac{e_y I_y - e_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{e_z I_z - e_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z = 0 \tag{11.9}$$

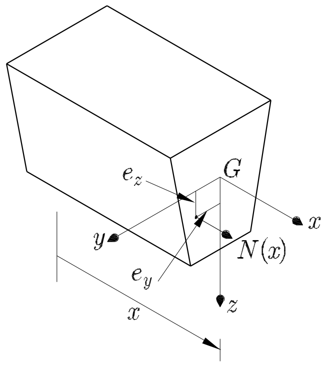

Figura 11.4 Axil actuando excéntricamente sobre una sección

El proceso para la determinación del contorno del núcleo central consiste en tomar como eje neutro las tangentes al contorno de la sección (de ecuación $ay + bz + 1 = 0$) e identificar coeficientes con la ecuación (11.9). Se puede comprobar que las coordenadas (e_y , e_z) de un axil de compresión al que corresponde un determinado eje neutro, son

$$\begin{aligned} e_y &= \frac{1}{S}\left(a\ I_z + b\ I_{yz}\right) \\ e_z &= \frac{1}{S}\left(a\ I_{yz} + b\ I_y\right) \end{aligned} \tag{11.10}$$

Si los ejes y y z son principales de inercia, las ecuaciones (11.10) se simplifican

$$\begin{aligned} e_y &= \frac{a\ I_z}{S} = a\ i_z^2 \\ e_z &= \frac{b\ I_y}{S} = b\ i_y^2 \end{aligned} \tag{11.11}$$

siendo i_y e i_z los radios de giro de la sección respecto a los eje y y z, respectivamente:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{S}} \tag{11.12}$$

Para definir el contorno del núcleo central, es necesario estudiar las tangentes a la sección en un número suficiente de puntos. Si la sección esta formada por tramos rectilíneos, la obtención del contorno se puede simplificar. Para ello se hará uso de la siguiente propiedad: *si la línea neutra correspondiente a un axil aplicado con excentricidad* e_y^A *y* e_z^A *pasa por el punto de coordenadas* $\left(e_y^B, e_z^B\right)$*, se cumple que la línea neutra correspondiente al axil aplicado en* e_y^B *y* e_z^B *pasa por el punto de coordenadas* $\left(e_y^A, e_z^A\right)$.

En la Figura 11.5, L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 son los ejes neutros correspondientes a la aplicación de un axil en los puntos 1, 2, 3, 4 y 5, respectivamente. Haciendo uso de la propiedad mencionada en el párrafo anterior, se puede afirmar que en la sección de la

Figura 11.5, el segmento $\overline{12}$ contiene los puntos del núcleo central correspondientes a los ejes neutros que giran alrededor de O. Esto es, como L_1 pasa por O, el eje neutro de O pasará por 1 y como L_2 pasa por O, el eje neutro de O pasará por 2. Por tanto, el segmento $\overline{12}$ es parte de la línea neutra correspondiente al axil aplicado en O. De acuerdo con la propiedad citada anteriormente, mientras el axil recorra el segmento $\overline{12}$ las líneas neutras girarán alrededor de O desde L_1 hasta L_2. Por este motivo, en las secciones con el contorno definido por tramos rectilíneos, el contorno del núcleo puede ser calculado uniendo mediante rectas los puntos de aplicación del axil de compresión a los que corresponden los ejes neutros que son tangentes al contorno de la sección sin intersecarla.

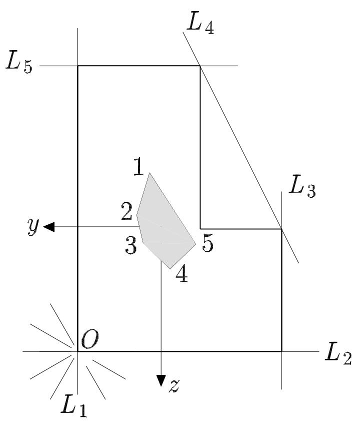

Figura 11.5 Determinación del núcleo central

11.5 Secciones sin zona de tracción

Hay materiales cuya resistencia a tracción es tan pequeña que no es considerada en los cálculos. Para el caso de elementos construidos con estos materiales y que van a estar sometidos a un axil excéntrico, es necesario conocer la posición del eje neutro que separa la zona de la sección que *trabaja* (zona comprimida) de la que *no trabaja* (zona traccionada).

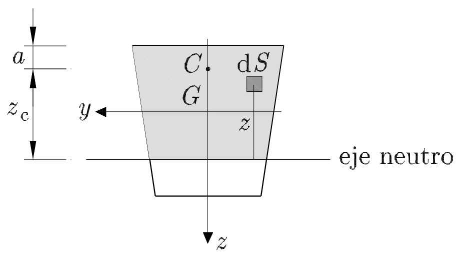

Figura 11.6 Secciones sin zona de tracción

Sea una sección genérica, con eje de simetría coincidente con el eje z. Se supondrá que el esfuerzo axil N actúa en el punto C, sobre el eje de simetría, a una distancia a del borde y fuera del núcleo central, como se muestra en la Figura 11.6.

La sección está sometida a flexión compuesta según el eje y. Por tanto, el eje neutro es perpendicular al eje z. Como se ha visto en apartados anteriores, las tensiones normales son proporcionales a su distancia al eje neutro. Así, un elemento diferencial dS, a una distancia z del eje neutro, tendrá como tensión $\sigma = kz$.

Para determinar la distancia del punto de actuación del axil al eje neutro, z_c, se establecen las condiciones de equilibrio de fuerzas y de momentos. Así, la resultante de las tensiones que actúan en la zona activa (sombreada en la figura) ha de ser igual al esfuerzo axil $N(x)$:

$$N(x) = \int_S \sigma_x \, \mathrm{d}S = \int_S k\, z \, \mathrm{d}S = k \int_S z \, \mathrm{d}S = k\, Q_{en} \tag{11.13}$$

siendo Q_{en} el momento estático de la zona comprimida respecto al eje neutro.

Además ha de verificarse que el momento de la resultante de las tensiones de compresión respecto al eje neutro ha de ser igual al momento del axil respecto a dicho eje.

$$N(x)\ z_c = \int_S z\, \sigma_x \, \mathrm{d}S = \int_S k\, z^2 \, \mathrm{d}S = k \int_S z^2 \, \mathrm{d}S = k\, I_{en} \tag{11.14}$$

siendo I_{en} el momento de inercia de la zona comprimida respecto al eje neutro. Dividiendo (11.14) por (11.13) se obtiene z_c

$$z_c = \frac{I_{en}}{Q_{en}} \tag{11.15}$$

Los valores de Q_{en} e I_{en} son función de la incógnita z_c. Por tanto, resolviendo la ecuación resultante, se determina la posición del eje neutro referida al punto de aplicación del axil.

11.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio 11.1

La sección transversal de la viga en T que se muestra en la Figura 11.7, está sometida a flexión compuesta desviada.

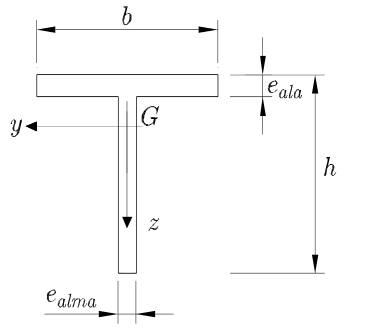

Figura 11.7 Sección en T sometida a flexión compuesta desviada

Obtener:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área S e inercias principales I_{y_G}, I_{z_G}

2. La expresión analítica de la distribución de tensiones normales
3. La ecuación del eje neutro
4. La representación gráfica de la distribución de tensiones normales

Datos:

$$\begin{aligned} h &= 90 \text{ mm} \ , \ b = 82 \text{ mm} \ , \ e_{ala} = 10 \text{ mm} \ , \ e_{alma} = 7 \text{ mm} \\ N &= -300 \text{ kN} \ , \ M_y = 50 \text{ kN·m} \ , \ M_z = 30 \text{ kN·m} \end{aligned}$$

Solución:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área S e inercias principales I_{y_G}, I_{z_G}

$$\begin{aligned} S &= 1380 \text{ mm}^2 \\ I_{y_G} &= 979 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \\ I_{z_G} &= 462 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

2. La expresión analítica de la distribución de tensiones normales

   $\sigma_x(y,z) = -10,869 + 4,329y + 1,021z$ (Fuerzas en N y longitudes en mm)

3. La ecuación del eje neutro

   $y = 2,511 - 0,236z$

4. La representación gráfica del eje neutro y de la distribución de tensiones normales

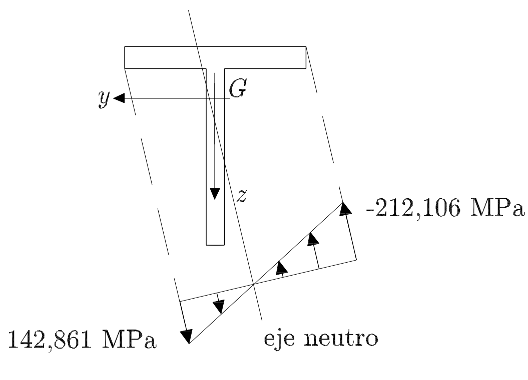

Figura 11.8 Sección en T sometida a flexión compuesta desviada. Distribución de tensiones normales

Ejercicio 11.2

Para la sección transversal de la Figura 11.9

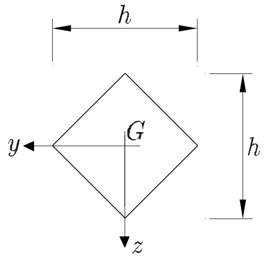

Figura 11.9 Sección romboidal

Obtener:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área S e inercias principales I_{y_G}, I_{z_G}
2. El núcleo central de la sección

Solución:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área S e inercias principales I_{y_G}, I_{z_G}

$$S = \frac{h^2}{2}$$
$$I_{y_G} = I_{z_G} = \frac{h^4}{48}$$

2. El núcleo central de la sección

Tabla 11.1 Coordenadas de los vértices del núcleo central de la sección

Vértice	Coordenadas e_y	Coordenadas e_z
1	$\frac{h}{12}$	$\frac{h}{12}$
2	$-\frac{h}{12}$	$\frac{h}{12}$
3	$-\frac{h}{12}$	$-\frac{h}{12}$
4	$\frac{h}{12}$	$-\frac{h}{12}$

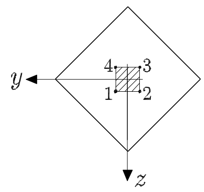

Figura 11.10 Sección romboidal. Núcleo central

Ejercicio 11.3

En la Figura 11.11 se muestra una sección transversal rectangular, sometida a un axil de compresión excéntrico. Se admitirá que la resistencia del material a tracción es nula.

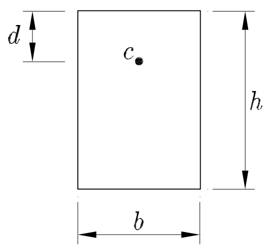

Figura 11.11 Sección rectangular sometida a un axil de compresión excéntrico

Obtener:

1. La distancia d del punto C de aplicación del axil a la cara superior de la sección para que esta esté comprimida $\frac{3}{4}$ del canto h

Solución:

1. La distancia d del punto C de aplicación del axil a la cara superior de la sección para que esta esté comprimida $\frac{3}{4}$ del canto h

$$d = \frac{h}{4}$$