

9.3.- FLEXIÓN Y TRACCIÓN-COMPRESIÓN COMBINADAS

Sea el caso de un elemento estructural sometido, a las vez, a las solicitaciones: N , V_y , V_z , M_y , M_z

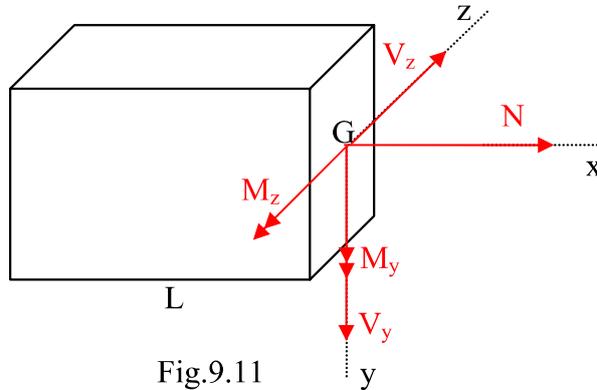


Fig.9.11

Cálculo de Tensiones:

Se calcularán aplicando el Principio de Superposición:

TRACCIÓN-COMPRESIÓN: (N) $\rightarrow \sigma_x$ (ver sección 4.2)

FLEXIÓN SIMPLE: (V_y , V_z) $\rightarrow \tau$ (ver secciones: 5.4.2, 5.4.3 y 5.4.4)
 (M_y , M_z) $\rightarrow \sigma$ (ver sección: 5.4.1)

$$\sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_y, M_z)$$

$$\tau = \tau(V_y, V_z)$$

Cálculo del Eje Neutro:

La ecuación del eje neutro, será: $\sigma_x = 0 \rightarrow \sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_y, M_z) = 0$

Observación: El eje neutro ya no pasará por G y el punto de σ_{\max} será el más alejado del mismo.

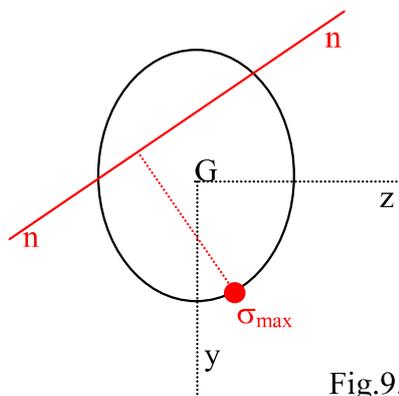


Fig.9.12

Cálculo de Deformaciones:

Se podrán calcular aplicando igualmente el Principio de Superposición, empleando para ello las fórmulas obtenidas para el cálculo de las deformaciones en los capítulos correspondientes:

TRACCIÓN-COMPRESIÓN: (N) → ΔL (ver sección: 4.3)

FLEXIÓN SIMPLE: (V_y, V_z, M_y, M_z) → Giros: θ_y, θ_z, Flechas: y, z (ver secciones: 6.2, 6.3, 6.4)

o bien a través del Teorema de Castigliano o el de los Trabajos Virtuales:

A- Por el Teorema de Castigliano:

$$U = U(N) + U(V_y) + U(V_z) + U(M_y) + U(M_z)$$

y despreciando los términos debidos a las fuerzas cortantes V_y y V_z, quedará:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} = \int_0^L \frac{N \cdot \frac{\partial N}{\partial F_i}}{E \cdot A} \cdot dx + \int_0^L \frac{M_y \cdot \frac{\partial M_y}{\partial F_i}}{E \cdot I_y} \cdot dx + \int_0^L \frac{M_z \cdot \frac{\partial M_z}{\partial F_i}}{E \cdot I_z} \cdot dx$$

B- Por el teorema de los Trabajos Virtuales:

despreciando igualmente los términos debidos a las fuerzas cortantes V_y y V_z, quedará:

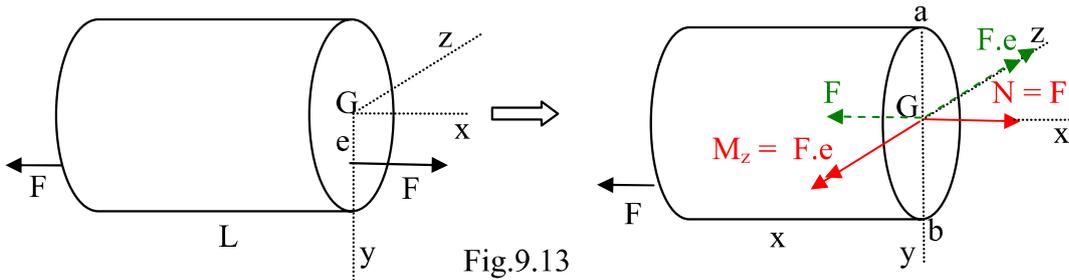
$$\sum F_i \cdot \delta'_i + \sum R_i \cdot \Delta'_i = \int_0^L \frac{N \cdot N'}{E \cdot A} \cdot dx + \int_0^L \frac{M_y \cdot M'_y}{E \cdot I_y} \cdot dx + \int_0^L \frac{M_z \cdot M'_z}{E \cdot I_z} \cdot dx$$

9.3.1- CASO PARTICULAR: TRACCIÓN-COMPRESIÓN EXCÉNTRICA

La Tracción-Compresión excéntrica es un caso particular de la Flexión + Tracción-Compresión combinadas visto en el apartado anterior.

Caso particular 1º:

Barra sometida a Tracción-Compresión excéntrica, actuando sobre uno de los ejes principales de inercia de la sección transversal ($I_{zy} = 0$):

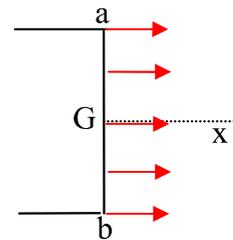


los ejes y, z son ejes principales de inercia $\rightarrow I_{zy} = 0$

Cálculo de las tensiones:

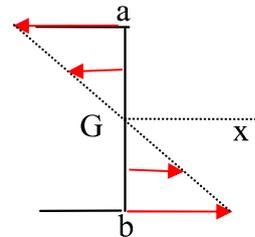
TRACCIÓN (N):

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}$$



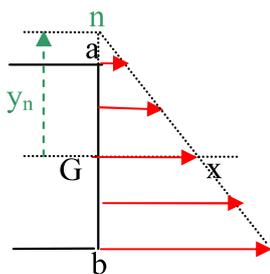
FLEXIÓN (M_z):

$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{I_z} = \frac{F \cdot e \cdot y}{I_z}$$

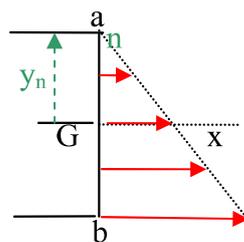


Aplicando el Principio de Superposición , la tensión total será:

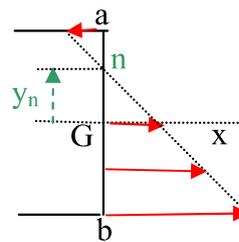
$$\sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_z) = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e \cdot y}{I_z}$$



si $\sigma_a(N) > \sigma_a(M_z)$



si $\sigma_a(N) = \sigma_a(M_z)$



si $\sigma_a(N) < \sigma_a(M_z)$

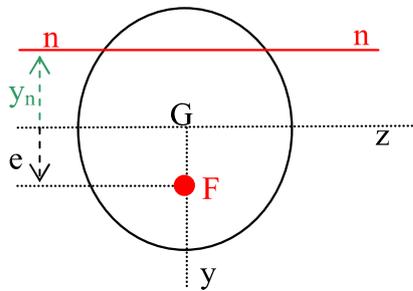
Cálculo del eje neutro:

$$\sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_z) = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e \cdot y_n}{I_z} = 0 \rightarrow y_n = -\frac{I_z}{A \cdot e} = -\frac{i_z^2}{e}$$

siendo $i_z^2 = \frac{I_z}{A}$ "radio de inercia"

Observaciones:

- La posición del eje neutro no depende del valor de la carga F aplicada
- La posición del eje neutro depende de la excentricidad "e" con la que se aplique la carga F y ocurrirá que:
 si: $e \uparrow$ (aumenta) $\Rightarrow y_n \downarrow$ (disminuye) y viceversa:
 si: $e \downarrow$ (disminuye) $\Rightarrow y_n \uparrow$ (aumenta)
- El eje neutro estará del lado opuesto al punto de aplicación de la carga (ello es debido al signo menos de la fórmula obtenida)



Caso particular 2º:

Barra sometida a Tracción-Compresión excéntrica, actuando fuera de los ejes principales de inercia de la sección transversal ($I_{zy} = 0$):

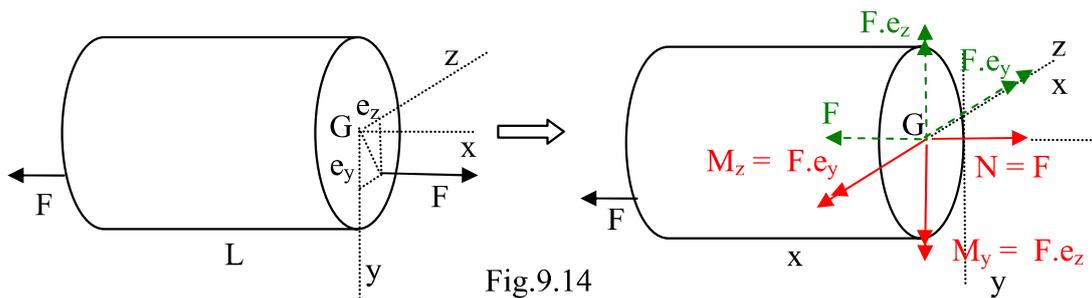


Fig.9.14

Cálculo de las tensiones:

TRACCIÓN (N):
$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}$$

FLEXIÓN (M_z, M_y):
$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} = \frac{F \cdot e_y \cdot y}{I_z} + \frac{F \cdot e_z \cdot z}{I_y}$$

Aplicando el Principio de Superposición , la tensión total será:

$$\sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_z, M_y) = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e_y \cdot y}{I_z} + \frac{F \cdot e_z \cdot z}{I_y} \quad (9.21)$$

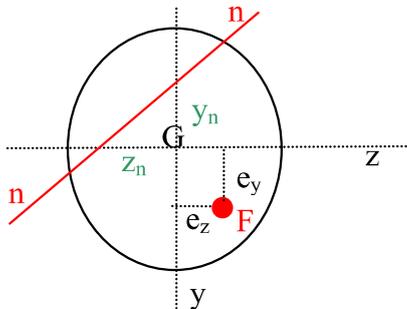
Cálculo del eje neutro:

$$\sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_z, M_y) = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e_y \cdot y_n}{I_z} + \frac{F \cdot e_z \cdot z_n}{I_y} = 0 \quad (\text{dividiendo por } F)$$

$$\frac{1}{A} + \frac{e_y \cdot y_n}{I_z} + \frac{e_z \cdot z_n}{I_y} = 0 \quad (\text{dividiendo el denominador por } A)$$

$$\frac{1}{A/A} + \frac{e_y \cdot y_n}{I_z/A} + \frac{e_z \cdot z_n}{I_y/A} = 0 \rightarrow 1 + \frac{e_y \cdot y_n}{i_z^2} + \frac{e_z \cdot z_n}{i_y^2} = 0$$

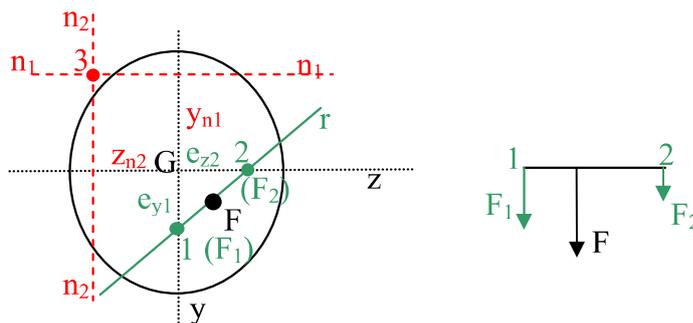
Para dibujar el eje neutro se hallarán sus puntos de intersección con los ejes coordenados



$$\begin{aligned} z_n = 0 &\rightarrow y_n = -\frac{i_z^2}{e_y} \\ y_n = 0 &\rightarrow z_n = -\frac{i_y^2}{e_z} \end{aligned} \quad (9.22)$$

Observaciones:

- La posición del eje neutro no depende del valor de la carga F aplicada, pero sí depende de la excentricidad con la que actúe dicha carga.
- Si la carga F se aplica en el punto 1, de excentricidad e_{y1} , el eje neutro será el n_1n_1 , siendo por lo visto anteriormente: $y_{n1} = -i_z^2 / e_{y1}$.
Si la carga F se aplica en el punto 2, de excentricidad e_{z2} , el eje neutro será el n_2n_2 , siendo por lo visto anteriormente: $z_{n2} = -i_y^2 / e_{z2}$.
Si la carga F se aplica en un punto cualquiera de la recta r, que une los puntos 1 y 2, se podrá descomponer en sus dos componentes: F_1 y F_2 , aplicadas en los puntos 1 y 2 respectivamente y según el Principio de Superposición, su efecto será la suma de los efectos que producirán, actuando por separado, las cargas componentes F_1 y F_2 . Según ello la línea neutra pasará necesariamente por el punto 3, intersección de los ejes neutros n_1n_1 y n_2n_2



NÚCLEO CENTRAL:

Dependiendo de la posición del punto de aplicación de la carga F, el eje neutro podrá cortar o no a la sección transversal. En función de ello se define como **Núcleo Central:** “la zona de la sección transversal donde podrá aplicarse la carga F para que el eje neutro no corte a la sección”

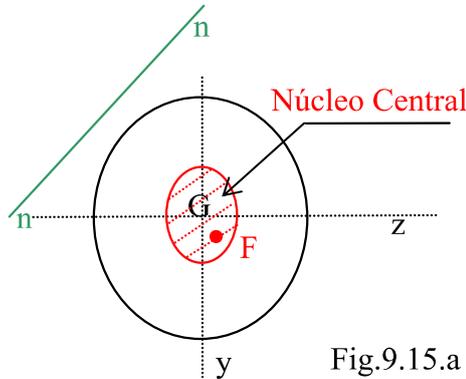


Fig.9.15.a

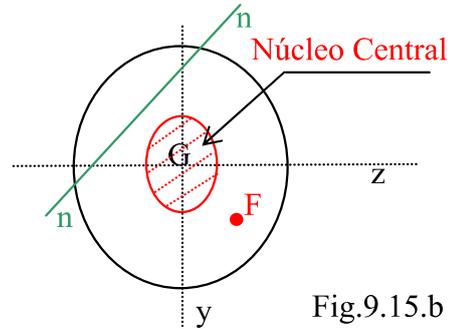


Fig.9.15.b

Primer caso: F se aplica dentro del Núcleo Central \Rightarrow El eje neutro no corta a la sección \Rightarrow Todos los puntos de la sección trabajan a Tracción ($\sigma_x > 0$) o a Compresión ($\sigma_x < 0$)

Segundo caso: F se aplica fuera del Núcleo Central \Rightarrow El eje neutro corta a la sección \Rightarrow Hay parte de la sección que trabaja a Tracción ($\sigma_x > 0$) y otra parte a Compresión ($\sigma_x < 0$).

Se calculará a continuación el Núcleo Central para dos casos frecuentes de secciones transversales:

A.-SECCIÓN CIRCULAR

Se sitúa el eje neutro n-n tangente al círculo, es decir haciendo: $y_n = R$. Para que ello ocurra, la excentricidad e_y , con la que habrá que aplicar la carga será:

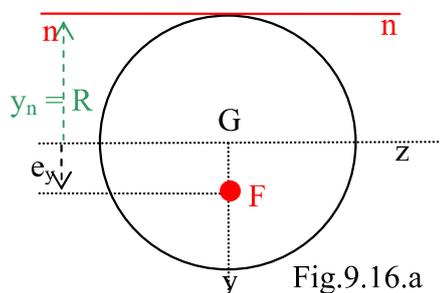


Fig.9.16.a

$$y_n = -\frac{i_z^2}{e_y} \quad (\text{ver 9.22})$$

$$\text{de donde: } e_y = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{I_z/A}{y_n} = -\frac{\frac{\pi \cdot R^4}{4}}{\pi \cdot R^2 \cdot (-R)} = \frac{R}{4}$$

Y por simetría de la figura se podrá concluir diciendo que: “el Núcleo Central de una sección circular es un círculo, con el mismo centro y con radio $R/4$ ”

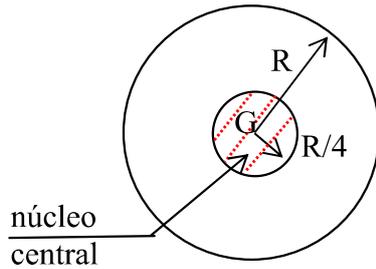


Fig.9.16.b

B.-SECCIÓN RECTANGULAR

Se sitúa el eje neutro n_1-n_1 en el borde superior del rectángulo, es decir haciendo: $y_n = -h/2$. Para que ello ocurra, la excentricidad e_{y1} , con la que habrá que aplicar la carga será:

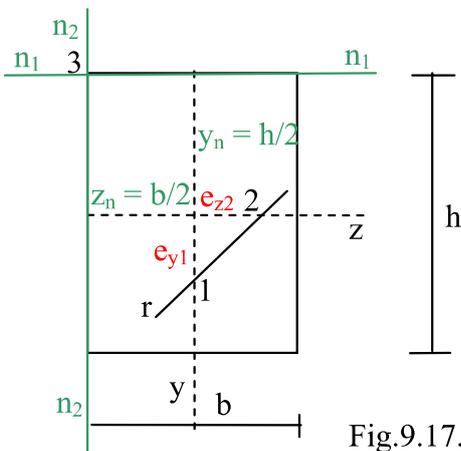


Fig.9.17.a

$$y_n = -\frac{i_z^2}{e_{y1}} \quad (\text{ver 9.22})$$

$$\text{de donde: } e_{y1} = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{I_z/A}{y_n} = -\frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{b \cdot h} / \frac{-h/2}{} = \frac{h}{6}$$

Se sitúa ahora el eje neutro n_2-n_2 en el borde izquierdo del rectángulo, es decir haciendo: $z_n = -b/2$. Para que ello ocurra, la excentricidad e_{z2} , con la que habrá que aplicar la carga será:

$$z_n = -\frac{i_y^2}{e_{z2}} \quad (\text{ver 9.19}) \quad \rightarrow \quad \text{de donde: } e_{z2} = -\frac{i_y^2}{z_n} = -\frac{I_y/A}{z_n} = -\frac{\frac{h \cdot b^3}{12}}{h \cdot b} / \frac{-b/2}{} = \frac{b}{6}$$

Si se traza ahora la recta r que pasa por los puntos 1 y 2 y por lo visto anteriormente: “si la carga externa F se aplica sobre la recta r , entre dichos puntos, el eje neutro pasará por el punto 3 de intersección de los ejes neutros: n_1-n_1 y n_2-n_2 , sin cortar al interior del rectángulo. Repitiendo este procedimiento a los otros bordes del rectángulo resultará que: “el Núcleo Central de una sección rectangular es un rombo, con el mismo centro y de semidiagonales $h/6$ y $b/6$ ”

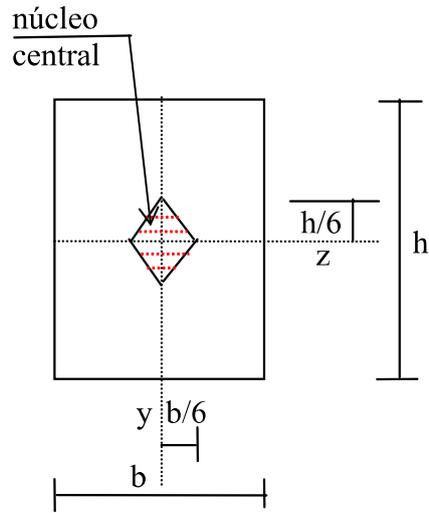


Fig.9.17.b

9.4- FLEXIÓN Y TORSIÓN COMBINADAS

Sea el caso de un elemento estructural sometido, a las vez, a las sollicitaciones: N , V_y , V_z , T , M_y , M_z

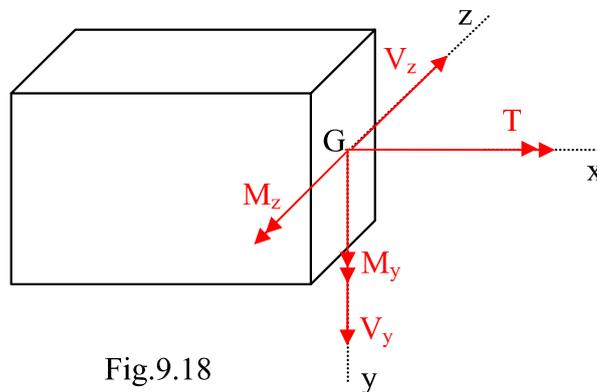


Fig.9.18

Cálculo de Tensiones:

Se calcularán aplicando el Principio de Superposición:

TORSIÓN: (T) \rightarrow τ (ver secciones: 8.2, 8.3, 8.4 y 8.5)

FLEXIÓN SIMPLE: (V_y , V_z) \rightarrow τ (ver secciones: 5.4.2, 5.4.3 y 5.4.4)
 (M_y , M_z) \rightarrow σ (ver sección: 5.4.1)

$$\sigma_x = \sigma_x(M_y, M_z)$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(V_y, V_z) + \vec{\tau}(T)$$

Observación: en la mayoría de los casos $\tau(V_y, V_z) \ll \tau(T)$ y se suelen despreciar, teniendo en cuenta sólo entonces: $\tau(T)$