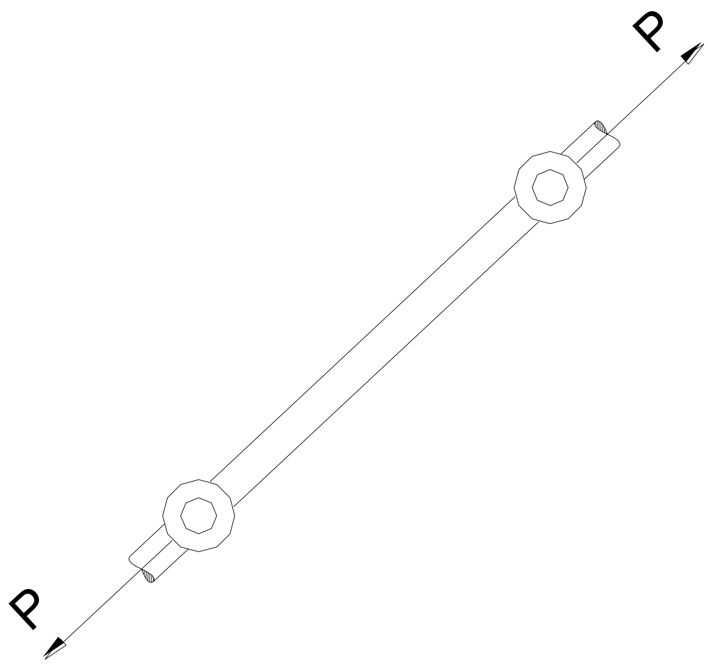
Universidad
Tecnológica
Nacional
Facultad
Regional
Santa Fe

Ing. CIVIL

RESISTENCIA DE MATERIALES

TEORÍA 2

Solicitación AXIAL



Profesor Titular:
Ing. Hugo Tosone

JTP:
Mg. Alejandro Carrere

Marzo de 2012

SOLICITACIÓN AXIAL

CONTENIDOS

Tracción y compresión. Hipótesis a utilizar. Fuerzas interiores y tensiones que se desarrollan en las secciones transversales.

Deformaciones longitudinales y transversales de la barra. Coeficiente de Poissón.

Ensayo de materiales a tracción o compresión. Diagrama de tracción para el acero. Características mecánicas del material. Diagrama de tensión-deformación para diferentes materiales. Módulo de elasticidad longitudinal o de Young. Propiedades mecánicas. Diagramas ideales.

Concepto de coeficiente de seguridad, criterios para su fijación. Método de las tensiones. Tensión admisible, criterios para su fijación. Fórmulas de dimensionado y verificación.

Barras de sección variable. Acción del peso propio. Sólido de igual resistencia axial. Tensiones originadas por cambios térmicos.

Tubos de pared delgada sometidos a presión. Limitaciones. Deformación radial y circunferencial. Tensiones longitudinales en recipientes. Breve comentario sobre tubos de pared gruesa.

Esfuerzos producidos por la variación de temperatura.

Energía potencial de deformación en tracción o compresión.

Casos estáticamente indeterminados.

BIBLIOGRAFÍA

- Fliess, Enrique. – “ESTABILIDAD II”
- Feodosiev V. I. – “Resistencia de Materiales”
- Timoshenko S. – “Resistencia de Materiales” Tomo I
- Stiopin P. A. – “Resistencia de Materiales”
- Fitgerald, R. – “Mecánica de Materiales”
- Beer F., Russell J. – “Mecánica de Materiales”

TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

Existe tracción o compresión (solicitación axial) cuando la resultante de las fuerzas exteriores que actúa a un lado de la sección en estudio (método de las secciones) se reduce a una sola fuerza $N \neq 0$, normal, aplicada en el centroide G.

Hipótesis a utilizar

a) Barra de eje recto y sección constante.

b) Idealizantes del material.

c) Elasticidad perfecta y se cumple la Ley de Hooke.

d) Mantenimiento de las secciones planas: hipótesis de Bernoulli.

e) Principio de Saint Venant.

Fuerzas interiores o tensiones en las secciones transversales.

Sea la barra representada en la fig. 1, solicitada axialmente por una fuerza de intensidad P. Cualquiera sea la forma de sujeción en sus extremos, por el principio de Saint Venant, el esquema de cálculo en la porción de barra suficientemente alejada de los puntos de sujeción es siempre el mismo con N=P.

Por el principio de Bernoulli, las secciones planas y perpendiculares al eje de la barra se mantienen planas, y como el eje se mantiene recto, ellas se mantendrán paralelas entres sí.

Entonces la deformación ΔL de todas las fibras será la misma (ver fig. 2), y como todas poseen la misma longitud inicial L, tendrán también la misma deformación específica:

$$\varepsilon_{\mathrm{m}} = \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = cte \qquad (valor\ uniforme)$$

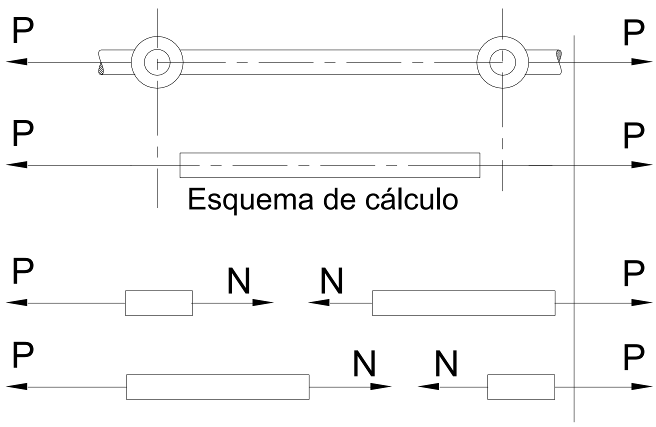


fig. 1

Por lo tanto y de acuerdo con la Ley de Hooke, la tensión en todos los puntos de la barra será la misma:

$$\sigma = E.\,\varepsilon$$

Esto equivale a suponer que las fuerzas interiores se distribuyen uniformemente en la sección transversal (σ=cte), como así también a lo largo de la barra. La resultante de las fuerzas internas en cada sección, de acuerdo con la ecuación de equivalencia será:

$$N = P = \int_F \sigma \cdot \mathrm{dF} = \sigma \cdot \int dF = \sigma \cdot F \qquad \text{y finalmente:} \qquad \boxed{\sigma = \frac{P}{F}} \quad \textbf{[1]}$$

En la [1], F es el área de la sección transversal.

Las fuerzas unitarias interiores denominadas usualmente “tensiones” se expresan en unidades de fuerza dividido por unidades de área: [N/m²] ó [Pa] (Pascal), [kgf/cm²], [kgf/mm²], etc.

Como el [Pa] es una cantidad muy pequeña, en las aplicaciones se acostumbra utilizar algún múltiplo, resultando cómodo el [MPa] (mega Pascal) para los metales.

Ejemplo: una tensión de 1400 [kgf/cm²] equivale aproximadamente a 140 [MPa].

Estrictamente representa: 1400 x 0,0981 = 137,34 [MPa]

Compresión: si bien se ha considerado el caso de solicitación de tracción, las conclusiones son válidas si la solicitación es de compresión. Sin embargo, en ese caso se debe tener en cuenta el riesgo de inestabilidad del equilibrio elástico del componente (pandeo), si su longitud es grande comparada con las dimensiones de la sección.

DEFORMACIONES LONGITUDINALES Y TRANSVERSALES DE LA BARRA

Deformación longitudinal:

En el caso de una barra homogénea de sección constante solicitada axialmente, las tensiones permanecen uniformes tanto en toda la sección transversal como a lo largo de la barra, es decir, son constantes en todos los puntos del sólido. A este estado se lo denomina “estado tensional homogéneo”.

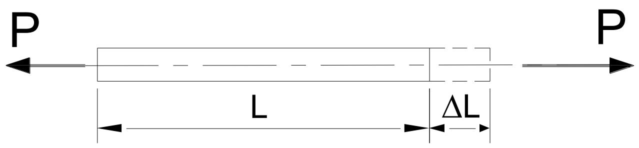


fig. 2

Si la longitud inicial de la barra descargada es “L” y después de aplicar la carga es (L+ΔL), el cambio ΔL se denomina “deformación total” o “deformación absoluta”.

Como el estado tensional es homogéneo todos los puntos del componente se encuentran en las mismas condiciones: la deformación específica ε a lo largo del eje de la barra será uniforme e igual al valor promedio en la longitud “L”:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$ siendo ε: “deformación unitaria” o “deformación específica”

Con esta expresión y aceptando la validez de la Ley de Hooke: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, se puede calcular la deformación total ΔL haciendo:

$$\Delta L = \varepsilon \,.\, L = \frac{\sigma}{E}.L$$ y siendo $$\sigma = \frac{P}{F}$$

Resulta: $$\boxed{\Delta L = \frac{P.L}{F.E}}$$ **[2]**

En la que E es una constante elástica del material que se denomina “módulo de elasticidad longitudinal” (o de Young) el que se determina experimentalmente y se mide en [Pa] (Pascal), [kgf/cm^2]. [kgf/mm^2], etc.

El acero posee un módulo E de aproximadamente 2.100.000 [kgf/cm²], que se puede expresar sin mayor error como 210.000 [MPa] ó 210 [GPa].

Al producto F.E se lo denomina “rigidez axial de la barra”.

Deformaciones transversales. Coeficiente de Poissón

Experimentalmente se comprueba que en todos los materiales las deformaciones longitudinales por tracción o compresión van acompañadas por un cambio de las dimensiones transversales.

En las barras traccionadas las secciones transversales se contraen y en las comprimidas se dilatan. Es decir que las deformaciones unitarias o específicas transversales son negativas cuando hay tracción longitudinal y positivas en el caso de compresión longitudinal.

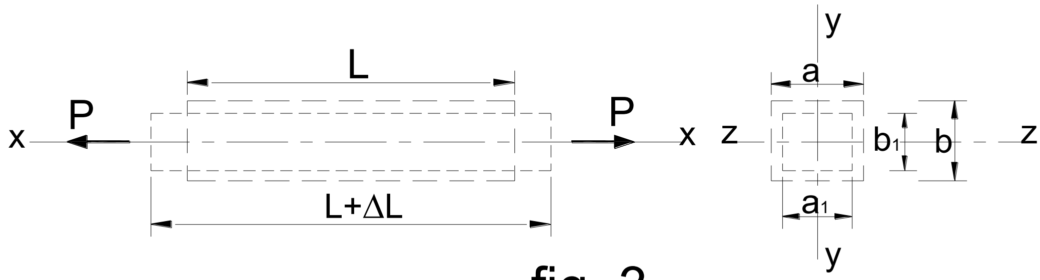


fig. 3

Significa que las deformaciones transversales son de signo contrario a las deforma-ciones longitudinales.

Además la magnitud de las deformaciones específicas transversales, es una fracción de la deformación longitudinal por lo que se puede escribir:

$$\boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu.\varepsilon_x} \quad \textbf{[3]} \quad \text{en la fig. 3 es: } \varepsilon_z = \frac{a - a_1}{a} \quad \varepsilon_y = \frac{b - b_1}{b} \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$$

A μ se lo conoce con el nombre de “coeficiente de Poissón”.

Dicho coeficiente es adimensional y para los materiales isótropos está acotado entre 0 y 0,5 sin adquirir estrictamente ninguno de dichos valores en los sólidos reales.

Para la mayoría de los <u>metales</u> estructurales μ varía entre 0,25 y 0,35. Para los aceros en general se puede adoptar con suficiente aproximación el valor μ = 0,3. Para el mármol vale aproximadamente 0,1 mientras que para la goma o la parafina oscila alrededor de 0,45. Para los líquidos (incompresibles) es 0,5 y para el hormigón usualmente es 0,17.

ENSAYO DE MATERIALES A TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

La determinación de las constantes elásticas de los materiales se efectúa experimentalmente por medio de ensayos de laboratorio, los que también permiten conocer su comportamiento bajo carga hasta alcanzar la rotura.

Los ensayos mas difundidos por su sencillez y economía son los de tracción y de compresión. Con ellos se pueden obtener las principales características mecánicas del material, que son de directa aplicación a los cálculos de ingeniería.

El ensayo de tracción es habitualmente el que se utiliza para la determinación de las características me-cánicas de los materiales.

Máquina de ensayo: la prueba se efectúa en máquinas especiales de ensayo. Estas máquinas aplican una carga con incremento gradual, a una barra del material a ensayar denominada “probeta”.

La máquina registra tanto el valor de la fuerza que actúa sobre la probeta como también el cambio de longitud total que se va produciendo durante el proceso de carga (o descarga).

Probetas: pueden ser cilíndricas o laminares (plan-chuelas) como ilustra la fig. 4; generalmente poseen sección uniforme en un tramo central (<u>longitud calibrada</u>). Los extremos de las probetas son más gruesos que el tramo central con el fin de disminuir las tensiones y deformaciones en esos lugares.

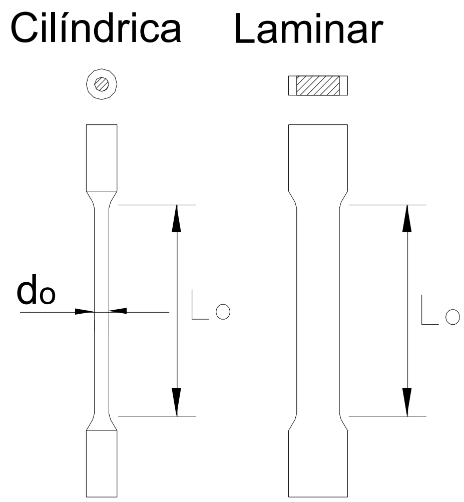


fig. 4

Fijación: la fijación a las mordazas de la máquina de ensayo se consigue mediante cuñas o casquillos partidos de respaldo liso y oblicuo, y de superficie rugosa para el contacto con los cabezales de la probeta de modo de asegurar la fijación por medio de fricción.

Normas**:** La geometría de las probetas y las condiciones bajo las cuales debe realizarse el ensayo se encuentran normalizadas, por ejemplo, la norma IRAM 102 "Método de ensayo de tracción de materiales metálicos" establece esas cuestiones.

Tipos de máquinas: La máquina de ensayo es la que genera la fuerza necesaria para traccionar la probeta. Las muy antiguas lo hacían por medios mecánicos del tipo de palanca y las más modernas por medio de accionamiento hidráulico. En las hidráulicas la magnitud de la carga se establece por medio de una escala en el manómetro que mide la presión del circuito hidráulico, la que, teniendo en cuenta el diámetro del pistón de la máquina, está graduada directamente en unidades de fuerza.

Medición del alargamiento: La medición del alargamiento se realiza por dispositivos que registran el desplazamiento de las mordazas de la máquina que toman a ambos extremos de la probeta. Para mediciones más exactas se utilizan extensómetros fijados a dos puntos establecidos sobre la probeta, los que definen la longitud calibrada "Lo" (normalizada). De ese modo se puede medir el aumento de longitud que ocurre entre dichas secciones, lo que representará el alargamiento ΔL (ó "δ") de esa longitud calibrada Lo.

Graficador: Las máquinas de ensayo usuales están provistas de un dispositivo que permite obtener un diagrama cartesiano del ensayo, que registra en cierta escala la deformación total de la probeta en abscisas y la carga aplicada en ordenadas.

Diagrama Real: dicha gráfica se denomina "diagrama real" (de tracción) y representa la relación entre "P" y "δ" (diagrama P-δ, fig. 5a)

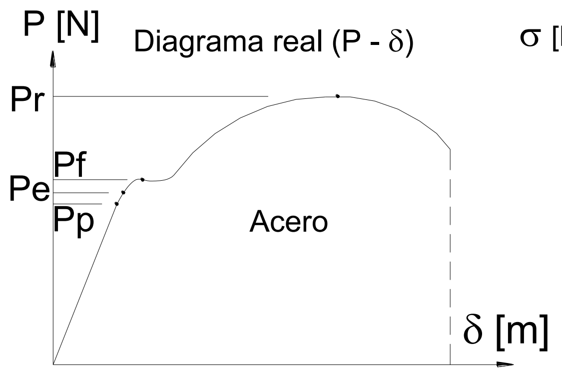


fig. 5a

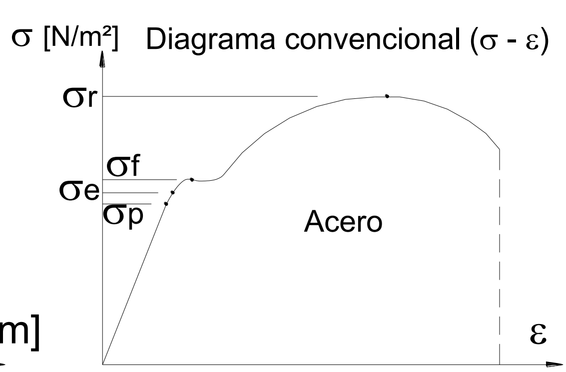


fig. 5b

Diagrama Convencional: para que sean comparables los resultados de ensayo que se realizan con probetas del mismo material pero de distintas dimensiones, se lo representa en un sistema de coordenadas σ - ε:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\delta}{L_o}} \quad \text{y} \quad \boxed{\sigma = \frac{P}{F_o}}$$

donde: F_o: sección transversal (inicial) de la probeta, antes de la carga.

L_o : longitud calibrada (inicial) de la probeta.

Al diagrama así obtenido se lo denomina "Diagrama Convencional" o "Diagrama de Tensiones", como el mostrado en la fig. 5b.

DIAGRAMA DE TRACCIÓN PARA EL ACERO "SAE 1010"

Se analizará el "diagrama convencional" de tracción o "diagrama de tensiones" para un acero de bajo contenido de carbono, del tipo St 37 o SAE 1010 (acero al carbono, con 0,10 % C aproximadamente) al que las normas CIRSOC denominan "F24".

Observando el diagrama de la fig. 6, se distinguen cuatro zonas claramente definidas:

a) **Zona de elasticidad:** la gráfica es prácticamente recta y el material se comporta elásticamente.

b) **Zona de fluencia general:** tiene lugar un aumento considerable de la deformación sin apreciable aumento de tensión. La fluencia ocurre en la zona calibrada L_o de la probeta.

c) **Zona de endurecimiento:** en este período el alargamiento de la probeta va acompañado del correspondiente aumento de tensión, solo que los alargamientos, para iguales incrementos de tensión, son mucho mayores que en el período elástico (la curva posee mucho menos pendiente).

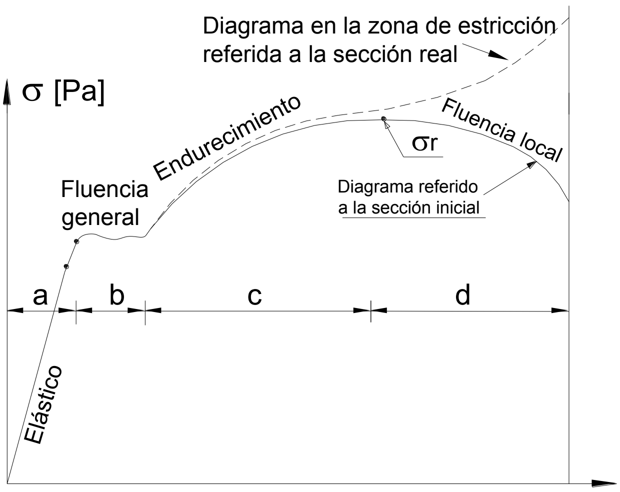


fig. 6

d) **Zona de fluencia local:** en este período el aumento de las deformaciones se produce acompañado de una disminución de la carga y se manifiesta una marcada disminución localizada de la sección transversal de la probeta, fenómeno que se lo conoce como estricción, fig. 7.

A la zona de estrechamiento local se la suele denominar "cuello". Este fenómeno se hace más evidente después que se ha alcanzado la tensión **σ_r**.

Cuello

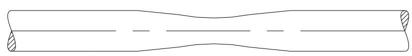


fig. 7

A partir de este momento la sección disminuye más rápidamente que la carga aplicada y en consecuencia la tensión en la zona del cuello sigue creciendo.

Pero ello no se refleja en el diagrama convencional porque la tensión se calcula en todo momento con la sección inicial F_o, a pesar que en el cuello la sección disminuye mucho. El alargamiento tiene un carácter local y por tal motivo a esa zona del diagrama se la denomina "de fluencia local".

Si en cada momento se midiera la sección transversal real en la zona del cuello y con ella se calculase la tensión real, el diagrama que se obtendría sería el indicado con línea de trazos.

Características mecánicas

El diagrama de tensiones para el acero con bajo contenido de carbono (fig. 8), presenta puntos característicos que son:

$\sigma_p = \dfrac{P_p}{F_o}$ (límite de proporcionalidad) $\sigma_e = \dfrac{P_e}{F_o}$ (límite de elasticidad)

$\sigma_f = \dfrac{P_f}{F_o}$ (límite de fluencia) $\sigma_r = \dfrac{P_{máx}}{F_o}$ (lím. de rotura ó de resistencia)

1 - Límite de proporcionalidad σ_p: es la tensión máxima hasta la cual el material cumple con la ley de Hooke (el diagrama es una línea recta).

2 - Límite de elasticidad σ_e: es la tensión máxima hasta la cual el material se comporta elásticamente, o sea que al descargarlo no quedan deformaciones permanentes. Los límites de proporcionalidad σ_p y de elasticidad σ_e difieren muy poco entre sí y prácticamente se confunden.

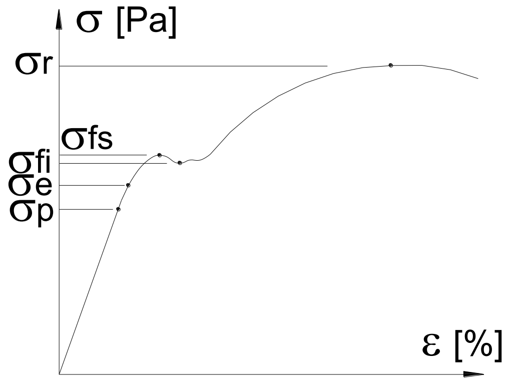


fig. 8

3 - Límite de fluencia σ_f : es la tensión a la cual comienza la fluencia del material. El valor oscila entre dos límites muy próximos, uno superior y otro inferior, siendo <u>el inferior</u> el que generalmente <u>se consigna</u>, por ser el menos afectado por las condiciones del ensayo.

4 - Límite de rotura σ_r: es la máxima tensión capaz de soportar la probeta; punto más alto del diagrama convencional.

En el diagrama de la fig.9, se observa que la constante E de la ley de Hooke $\boxed{\sigma = E.\varepsilon}$ es la tangente del ángulo α, que el tramo recto del diagrama forma con el eje de abscisas:

$$\boxed{E = tg\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$

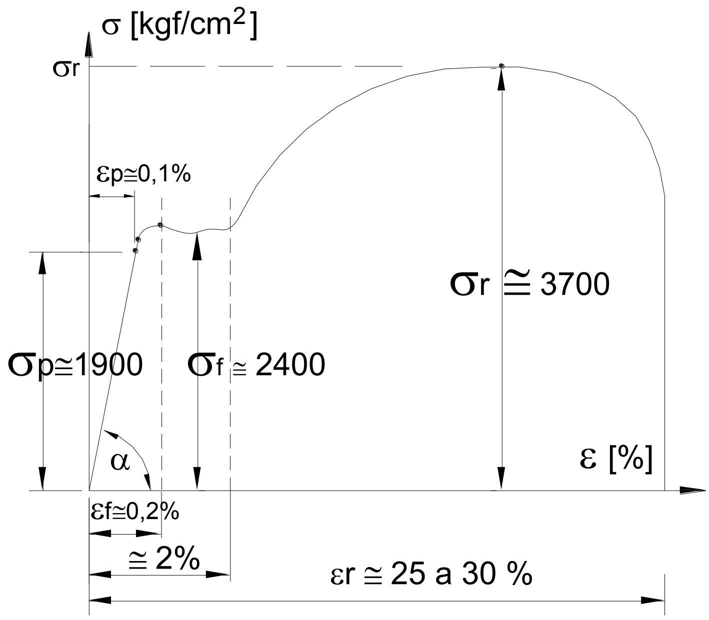


fig. 9

A “E” se lo denomina módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young y tiene un valor promedio de 2.100.000 [kgf/cm^2] ó 210 [GPa] para los aceros.

Si al cargar la probeta, no se supera el límite de elasticidad y luego se procede a descargarla hasta la tensión σ=0, el diagrama de descarga sigue una ley muy similar a la de la etapa de carga, quedando finalmente una deformación residual nula, es decir ε = 0.

En cambio si durante el proceso de carga se alcanzan tensiones superiores al límite de elasticidad y luego se procede a la descarga como muestra la fig. 10a, el diagrama de descarga no coincide estrictamente con el de carga, estando representado por una recta (línea de trazos) aproximadamente paralela a la recta del período elástico, quedando finalmente deformaciones permanentes.

Si se aplica de nuevo la carga, la gráfica es nuevamente una recta <u>sensiblemente paralela</u> a la del <u>período elástico</u> con pendiente tg α como muestra la fig. 10b. El módulo de elasticidad longitudinal E = tg α no varía y el material mantiene su elasticidad.

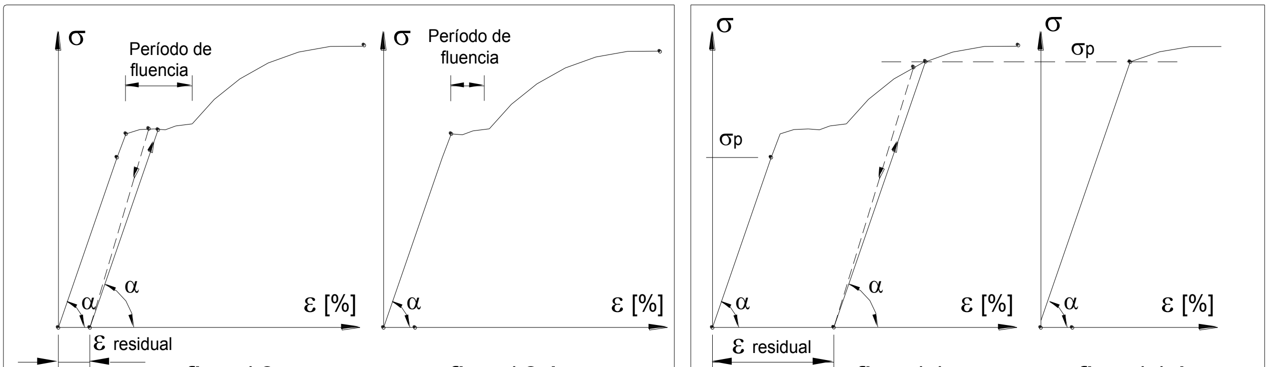


fig. 10 a fig. 10 b fig. 11 a fig. 11 b

El resultado será distinto según que la primera carga haya superado el final del período de fluencia o no.

En el caso en que la primera carga no haya superado el período de fluencia se habrá conseguido un material con un período de fluencia menor, figs. 10a y 10b.

En cambio, si las deformaciones superan el período de fluencia en la primera carga, se obtiene un acero que no presentará el fenómeno de la fluencia general en futuras cargas, aumentado a la vez el valor del límite de proporcionalidad, fig. 11a y 11b. Se dice que el acero se ha endurecido por trabajo en frío.

Ese procedimiento se denomina endurecimiento mecánico. Se puede conseguir por laminación en frío (planchuelas, flejes, perfiles), por trefilado o estirado (alambres, barras finas) o por torsión (hierros redondos para hormigón armado).

Si al acero se lo calienta demasiado se pierde la propiedad del endurecimiento en frío.

PLASTICIDAD (MALEABILIDAD, DUCTILIDAD) - FRAGILIDAD

La plasticidad de un material es la propiedad opuesta a la elasticidad e involucra alguna de las dos propiedades siguientes: maleabilidad y ductilidad.

Maleabilidad

Es la capacidad de un material de aplastarse deformándose de modo permanente, es decir, de formar láminas.

Ductilidad

Es la capacidad marcada de un material de estirarse, deformándose de modo permanente, es decir de formar alambres, sin romperse.

Una medida de la ductilidad es el alargamiento máximo en la rotura y el porcentaje de reducción de la sección transversal (estricción) en el ensayo a tracción.

Ambas propiedades tienen importancia decisiva en operaciones tales como el estampado, el estirado, trefilado, doblado, etc.

Son materiales netamente dúctiles: el acero de bajo contenido de carbono, el cobre, el aluminio, el latón. De menor ductilidad: el bronce y el duraluminio.

Fragilidad

Es la propiedad de un material de destruirse sin deformaciones plásticas apreciables, siendo la propiedad opuesta a la ductilidad.

Características de los materiales frágiles:

- No poseen límite de fluencia definido

- La deformación de rotura es muy reducida, no superando en general el 5 %, y en muchos materiales es aún menor.
- La rotura se produce bruscamente sin grandes deformaciones y no presentan zona de estricción.

Son materiales frágiles: acero con alto contenido de carbono, hierro fundido, vidrio, piedra, hormigón, etc.

MATERIALES SIN LÍMITE DE FLUENCIA DEFINIDO
Límite convencional de fluencia.

Para aquellos materiales que no presentan un límite de fluencia definido, en especial los frágiles y los relativamente frágiles se ha establecido un límite convencional de fluencia, que equivale al límite de fluencia de los materiales dúctiles en relación a la deformación residual ε que resulta al alcanzarse dicho límite.

Para los aceros se ha adoptado como límite convencional de fluencia a la tensión que produce una deformación residual del 0,2 %.

Este límite convencional de fluencia se obtiene del diagrama de ensayo, ver fig. 12, trazando por la abscisa correspondiente a la deformación 0,2% (deformación unitaria residual de los aceros dúctiles en la fluencia), una paralela al tramo recto del diagrama hasta interceptarlo.

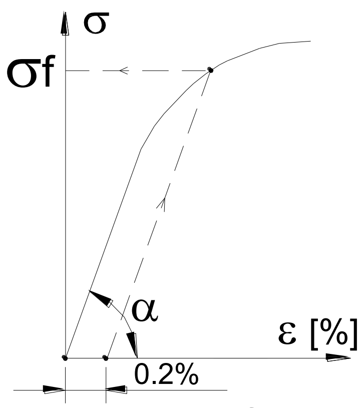


fig. 12

Materiales distintos del acero
Módulo de elasticidad

Los diagramas (σ - ε) para hormigón, fundición gris, aleaciones de aluminio, aleaciones de magnesio, bronce, cobre, acero inoxidable, etc. son curvados o ligeramente curvados, como muestra la fig 13.

Sin embargo puede suponerse sin cometer grave error, que la primera parte de ellos (que corresponde usualmente a tensiones utilizadas en los diseños) es una línea recta.

Esto da origen a tres módulos de elasticidad distintos según sea la recta elegida:

Módulo al origen: es la tangente del ángulo que forma la tangente a la curva σ - ε en el origen de coordenadas.

Módulo secante: es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la secante que une el origen de coordenadas con la intersección, con la curva σ - ε, en el punto correspondiente a la tensión $\boldsymbol{\sigma_1}$.

Módulo tangente: es la tangente trigonométrica del ángulo que forma con el eje de abscisas, la tangente a la curva σ - ε en el punto correspondiente a la tensión $\boldsymbol{\sigma_i}$ para la cual se quiere conocer E.

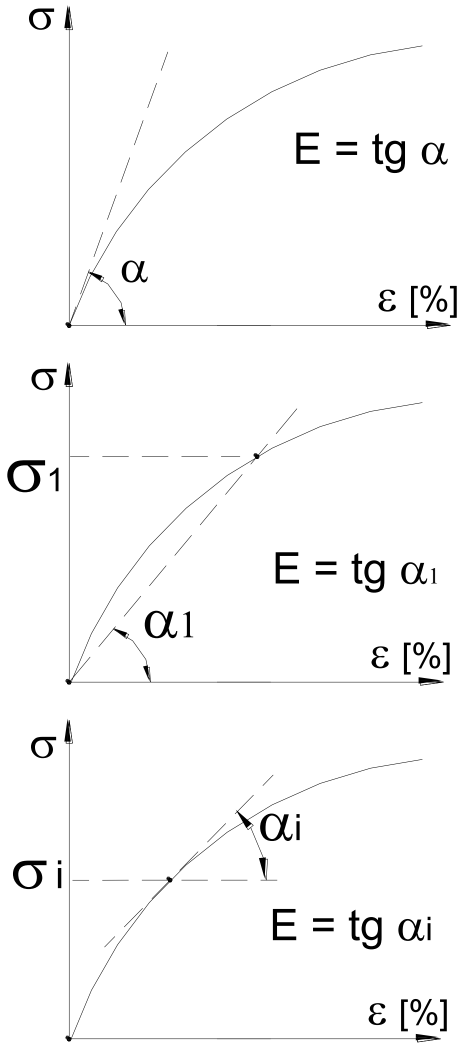


fig. 13

Ley exponencial de Bach

Para materiales con diagrama curvo la expresión de la curva es del tipo:

$$\boxed{\sigma^{\alpha} = \mathrm{k} \cdot \varepsilon} \qquad \textbf{[4]}$$

Algunos valores promedio son: para el hormigón α=1,15, hierro fundido α=1,07, cobre α=1,1, siendo cada diagrama, del tipo al mostrado en la fig. 14 con α > 1.

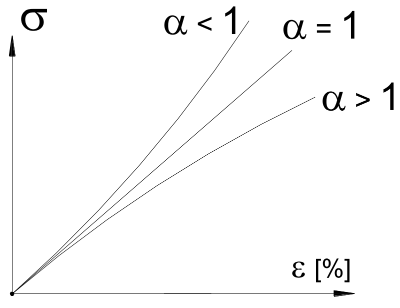


fig. 14

Diagramas ideales de PRANDTL

Los diagramas "tensión–deformación" vistos hasta aquí no resultan prácticos, cuando se analiza el problema de dimensionado de secciones en régimen plástico (o inelástico).

Es por ello que se los remplaza por diagramas idealizados, debidos a Prandtl, que resumen las características fundamentales de cada uno de los tres tipos de materiales.

Material dúctil: en la fig. 15 se representa un diagrama ideal correspondiente a un acero dúctil. Se compone de dos tramos rectos: uno inclinado, corresponde al período elástico del material, en el que su pendiente nos da el valor del correspondiente módulo de elasticidad, y el otro, horizontal, representa el período de escurrimiento o fluencia. Se prescinde del tercer período (el de las grandes deformaciones) por no interesar a los efectos prácticos.

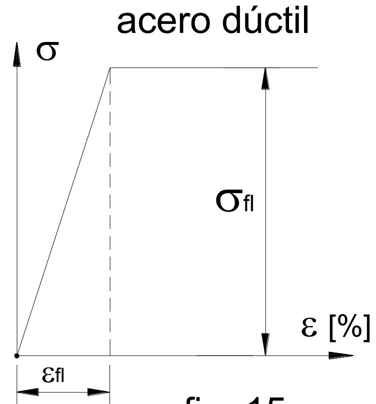


fig. 15

Para un material dúctil la deformación que corresponde a la iniciación de la fluencia ε_{fl} es muy pequeña en comparación con la que corresponde al final de la misma, de modo que, cuando el material se encuentra dentro de este período, las deformaciones que experimenta el componente o parte de la estructura a la que pertenece, son de tal magnitud que la hace inadecuada para la función para la que ha sido proyectada.

Al evento comentado se lo denomina "rotura funcional" o "falla funcional", que no coincide con la rotura física, para la cual debe existir separación de las partes.

Material frágil: en un material frágil la tensión de rotura es de un valor muy cercano al límite de proporcionalidad, siendo muy pequeña la deformación de rotura. La fig.16a ilustra esos conceptos.

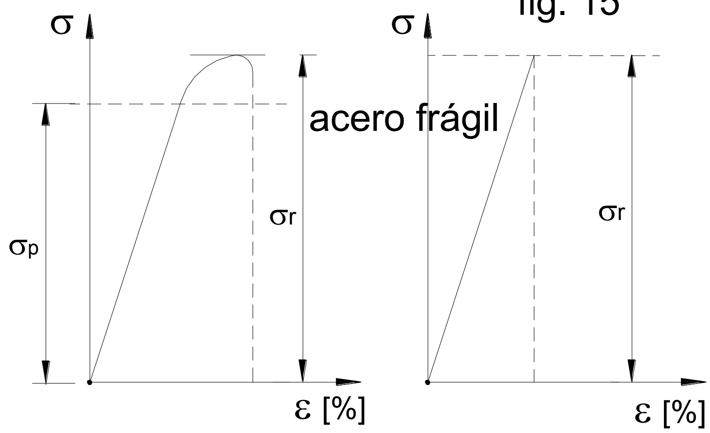


fig. 16 a fig. 16 b

El diagrama ideal que corresponde a esas características se aprecia en la fig. 16b: consiste en un tramo recto de pendiente igual al módulo de elasticidad, el que se extiende hasta alcanzar el límite de rotura σ_R y donde se prescinde del tramo curvo previo a la misma.

Material plástico: éste tipo de material se caracteriza por su muy pequeña o despreciable elasticidad, y por mostrar grandes deformaciones permanentes.

Se considera plástico a materiales como plomo, arcilla, asfaltos, etc.

El diagrama ideal correspondiente a este tipo de material puede observarse en la fig. 17.

Es una recta paralela al eje de las deformaciones cuyo significado es el siguiente: si a un material absolutamente plástico se lo somete a una carga (tensión) determinada, se deforma indefinidamente sin que el incremento de deformación exija un aumento de carga.

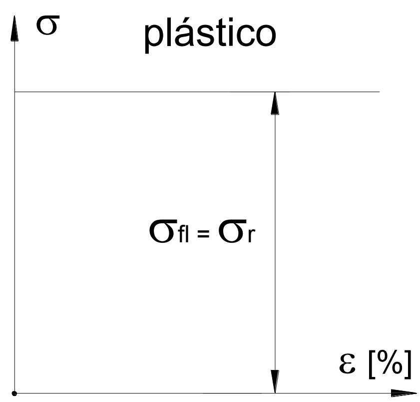


fig. 17

ENSAYO DE COMPRESIÓN (COMENTARIOS)

Materiales dúctiles

El diagrama en su origen es análogo al de tracción y presenta también escalón de fluencia previo a la consolidación, pero es menor que el de tracción, como muestra la fig. 18.

Luego la carga aumenta rápidamente, como resultado del aumento de la sección transversal de la probeta. La probeta no se destruye sino que se aplasta.

El límite de fluencia a compresión es práctica-mente igual al de tracción:

$$\boxed{\sigma_{f compresión} \cong \sigma_{f tracción}}$$

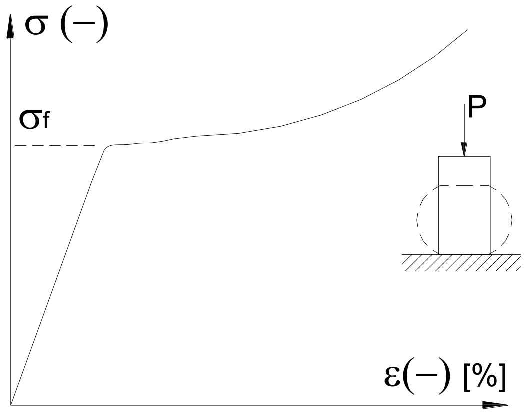


fig. 18

Materiales frágiles

El diagrama tiene forma similar al de tracción.

La rotura se produce con deformaciones muy pequeñas. Aparecen grietas en planos inclinados o longitudinales.

En general poseen mayor resistencia a compre-sión que a tracción por lo que:

$$\boxed{\sigma_{r_C} > \sigma_{r_T}}$$

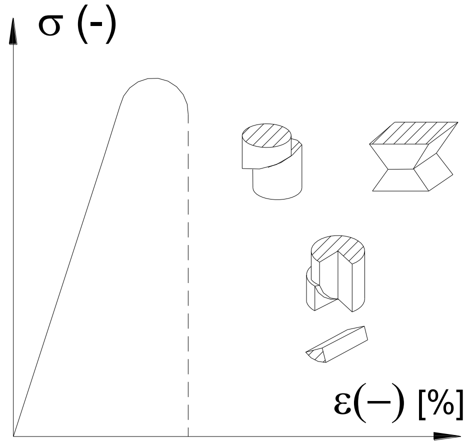


fig. 19

COEFICIENTE DE SEGURIDAD, CONCEPTO. Método de las tensiones

Mediante ensayos de laboratorio es posible obtener las características o propiedades mecánicas de los materiales. Con el ensayo de tracción se determinan los límites de proporcionalidad, de elasticidad, de fluencia, de rotura, etc.

La información obtenida de los ensayos se utiliza en el diseño y cálculo de los componentes. El método de cálculo más difundido es el basado en las tensiones.

Se verá como utilizar esta información en el diseño y cálculo de un componente estructural. El método de cálculo más difundido es el basado en las tensiones.

Según este método de cálculo, las dimensiones de la sección transversal de un componente estructural, se calcula de manera que en ningún lugar las tensiones normales, las de corte o también la “tensión equivalente” en un estado compuesto (se tratará en los últimos capítulos) superen la denominada “tensión admisible”, lo que se puede expresar como sigue:

$$\boxed{\sigma_{máx} \leq \sigma_{adm}} \quad \textbf{[5]} \qquad \text{con:} \qquad \boxed{\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_L}{\eta}} \quad \textbf{[6]}$$

$$\boxed{\tau_{máx} \leq \tau_{adm}} \quad \textbf{[7]} \qquad \text{con:} \qquad \boxed{\tau_{\text{adm}} = \frac{\tau_L}{\eta}} \quad \textbf{[8]}$$

Siendo, τ_L, σ_L: alguno de los valores límites de la tensión para el material a utilizar.

η: es el denominado “coeficiente de seguridad”, siendo $\eta > 1$.

Entonces, la tensión admisible resulta ser menor que la tensión límite del material y no posee un valor fijo, sino que debe ser determinado en cada caso por el calculista o en base a lo establecido por las normas de cálculo, en base a la correcta elección de σ_L y η.

Causas: La tensión admisible debe ser menor que la tensión límite debido a las siguientes causas:

- CARGAS: la incertidumbre respecto a la evaluación de las cargas que ha de resistir el sistema estructural, no sólo como un todo, sino también sus distintos componentes.
- PROPIEDADES DE MATERIAL: la incertidumbre respecto a las propiedades de los materiales a utilizar.
- MÉTODO DE CÁLCULO: la incertidumbre sobre la influencia de las hipótesis simplificadoras introducidas al desarrollar los métodos de cálculo de los esfuerzos.

Importancia de las incertidumbres: para decidir la importancia de estas incertidumbres y en consecuencia poder evaluar la magnitud del coeficiente de seguridad η, se deben tener en cuenta factores de origen diverso, como ser:

- CALIDAD Y HOMOGENEIDAD DEL MATERIAL: la uniformidad de la calidad de los materiales influye sobre las características mecánicas, las que son fijadas mediante un proceso estadístico a partir de la información provista por los ensayos de algunas muestras en laboratorio.

  La variación de la homogeneidad provoca dispersión de los resultados de los ensayos de calidad. Por ejemplo, el factor homogeneidad tendrá más importancia en la fijación del factor de seguridad si el material es hormigón que si es acero.
- CONTROLES DE CALIDAD: el cuidado y la frecuencia con que se efectúan los controles de calidad en la producción de materiales, como así también en los procesos para obtener los componentes estructurales.

- RIESGO DE VIDA: el daño que pudiera causar la falla de un componente estructural, no solo material, sino fundamentalmente si implica riesgo de pérdida de vidas.
- VIDA ÚTIL DE LA ESTRUCTURA: la probabilidad de ruina es menor en una estructura transitoria que en una estructura permanente.
- INSPECCIONES PERIÓDICAS: la existencia o no de inspecciones periódicas de la estructura en servicio.

En la medida que los factores comentados puedan ser evaluados con mayor precisión, se reducirán las incertidumbres, por consiguiente se reducirá coeficiente de seguridad "η" y podrá aumentarse la tensión admisible.

Coeficiente de utilización: de lo expuesto surge que el coeficiente de "η" pretende medir el grado de incertidumbre y hasta de ignorancia que se tiene con respecto de las variables que intervienen en el proceso de cálculo de un componente estructural. Por tal motivo pareciera más razonable que su denominación fuese "coeficiente de incertidumbre", en lugar de coeficiente de seguridad.

Con tal motivo Soderberg ha propuesto el denominado "coeficiente de utilización":

$$\boxed{\eta_u = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_L}} \quad \text{resultando:} \quad \boxed{\sigma_{adm} = \eta_u . \sigma_L} \quad \text{siendo:} \quad \eta_u < 1$$

Donde η_u es el inverso del coeficiente de seguridad e indica el uso real que se hace del material en relación con sus posibilidades.

TENSIÓN LÍMITE σ_L – CRITERIO PARA SU ELECCIÓN.

Al dimensionar componentes de máquinas o estructuras en general, se deben calcular sus dimensiones de manera que no se produzca la rotura de los mismos y que las deformaciones no alcancen valores importantes que desvirtúen o impidan su funcionalidad (falla estructural o funcional); ya que un componente puede quedar inutilizable aunque no se haya producido su rotura física por separación en partes.

En el denominado "**cálculo por resistencia"**, un componente llega a su estado límite cuando se produce su falla estructural. En consecuencia la elección de la tensión límite varía según sea el tipo de material a utilizar y el modo en que fallará el miembro.

Comúnmente, los modos de falla frente a la acción de cargas estáticas y a temperaturas ordinarias, son las siguientes:

1. Si el material es dúctil la falla estructural se produce por deformación excesiva; en este caso la tensión límite será la de fluencia σ_f, fig. 20a ó 20b. $\boxed{\sigma_{adm} = \frac{\sigma_f}{\eta_f}}$ **[9]**

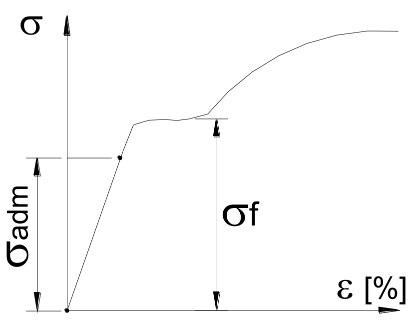


fig. 20 a

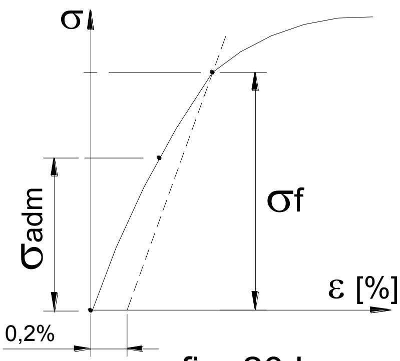


fig. 20 b

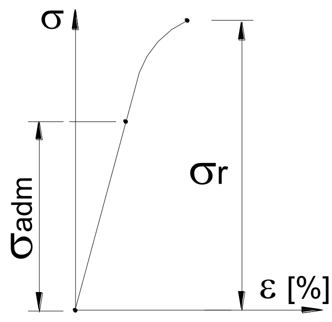


fig. 20 c

2. Si el material es frágil o quebradizo la falla estructural se produce por fractura; consecuentemente la tensión límite será la de rotura σ_r, fig. 20c. $\boxed{\sigma_{adm} = \frac{\sigma_r}{\eta_r}}$ **[10]**

Siendo: η_f el coeficiente de seguridad referido al límite de fluencia

η_r el coeficiente de seguridad referido al límite de rotura

Cálculo por rigidez (o deformación)

Existe otra manera de calcular, denominada "cálculo por rigidez". Se establece como condición que el componente estructural fallará en su función, si las deformaciones (alargamientos, flechas de vigas, rotación en las barras torsionadas, etc.) exceden a un cierto valor prefijado de acuerdo a la función que deben cumplir.

En la práctica es de uso corriente emplear el cálculo por rigidez, estableciendo como limitación el corrimiento que en cierto lugar experimente el componente estructural bajo carga.

Ejemplo: limitar la deformación de una viga de modo que la flecha máxima no supere 1/1000 de su "luz libre". Como la flecha depende de la rigidez a flexión $E.I_x$, de ese cálculo se puede establecer el tamaño de la sección a través de su momento de inercia I_x.

En el caso de una barra que transmite potencia por torsión (árbol de transmisión) se suele limitar la deformación torsional (ángulo de torsión) con miras a evitar problemas vibratorios, en los que la resonancia mecánica juega un papel dominante.

Consideraciones finales

En las reglamentaciones y manuales se encuentran fijados los coeficientes de seguridad y tensiones admisibles para distintos materiales, tipo de componente y estados de solicitación. Ellos han sido establecidos en base a experiencias prácticas con gran cantidad de componentes construidos en el pasado.

En consecuencia servirán al calculista como elemento de orientación de gran valor; ya que la determinación del coeficiente de seguridad y de las tensiones admisibles es responsabilidad indelegable del ingeniero en cada caso, en base a las condiciones concretas de trabajo del componente estructural.

FÓRMULAS DE DIMENSIONADO Y VERIFICACIÓN

Planteo: conocida la carga axial N y la tensión admisible para el material a utilizar, se deben calcular las dimensiones de la sección transversal de la barra de manera que en ningún punto de la misma se supere el valor de la tensión admisible.

Los esfuerzos interiores o tensión de trabajo, de acuerdo con el método de las tensiones, deberán cumplir con:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq \sigma_{\text{adm}} \quad \textbf{[11]}$$

En base a la expresión [12] se pueden resolver tres problemas:

Dimensionar: calcular la sección necesaria con la condición de mayor economía posible.

siendo: $\frac{N}{F} \leq \sigma_{\text{adm}}$ entonces: $\boxed{F_{\text{nec}} = \frac{N}{\sigma_{\text{adm}}}}$ **[12]** F_{nec}: sección necesaria.

Verificar la resistencia de una barra: $\boxed{\frac{N}{F} \leq \sigma_{\text{adm}}}$ **[13]**

Obtener la Capacidad de carga: $\boxed{N_{adm} \leq F . \sigma_{\text{adm}}}$ **[14]**

BARRAS DE SECCIÓN VARIABLE

a) Barra escalonada compuesta por dos o más tramos, cada uno de sección uniforme.

Se analizará una barra compuesta por dos tramos, pero las conclusiones son aplicables a barras con más tramos.

De la fig. 22 y por el método de las secciones, se deduce que la fuerza normal interior N en cualquier sección es constante e igual a la carga P, por lo que: N = P.

En consecuencia las tensiones en el tramo 1 y 2 valen:

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{P}{F_1}} \quad \text{y} \quad \boxed{\sigma_2 = \frac{P}{F_2}}$$

y las deformaciones específicas serán:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{P}{E \cdot F_1} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{P}{E \cdot F_2}$$

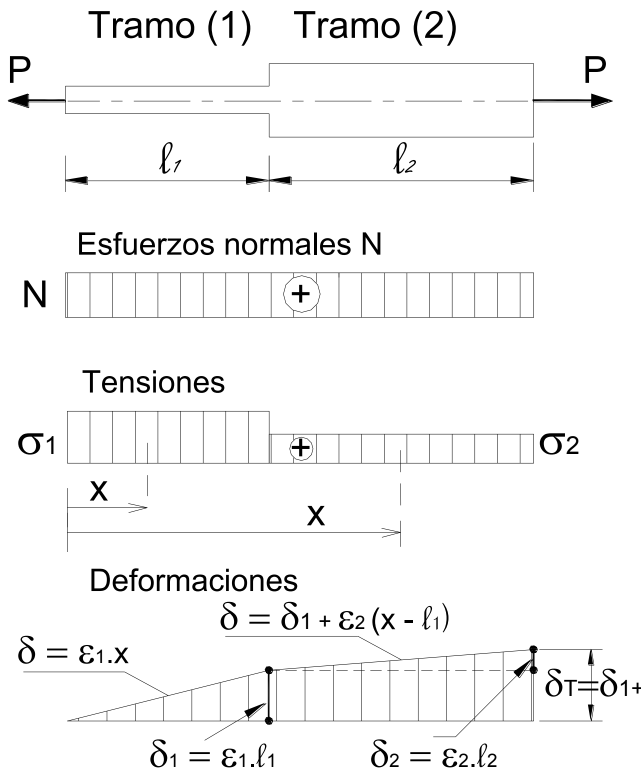


fig. 22

los alargamientos de cada tramo son:

$$\delta_1 = \varepsilon_1 \cdot \ell_1 = \frac{P \cdot \ell_1}{E \cdot F_1} \qquad\qquad \delta_2 = \varepsilon_2 \cdot \ell_2 = \frac{P \cdot \ell_2}{E \cdot F_2}$$

y el alargamiento total resulta:

$$\boxed{\delta_{total} = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P \cdot \ell_1}{E \cdot F_1} + \frac{P \cdot \ell_2}{E \cdot F_2}}$$

Si los tramos 1 y 2 fuesen de distintos materiales, se deben utilizar entonces sus respectivos módulos de elasticidad E_1 y E_2.

En el caso de "n" tramos soportando <u>todos la misma fuerza P</u> resulta:

$$\boxed{\delta_{total} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P \cdot \ell_i}{E_i \cdot F_i}} \qquad \textbf{[15]}$$

b) Barra con variación continua de la sección

Los resultados obtenidos en base a la hipótesis de sección uniforme, pueden ser aplicados con cuidado al caso de sección variable, teniendo en cuenta que habrá un error creciente con una mayor variación. En este caso la sección transversal será función de "x" y se la expresa como $F_{(x)}$

Entonces, para una abscisa cualquiera "x", la tensión será otra función de x:

$$\boxed{\sigma_{(x)} = \frac{P}{F_{(x)}}} \qquad \textbf{[16]}$$

La deformación de un elemento de longitud dx será:

$$d\delta = \varepsilon_{(x)} \cdot dx \quad \text{con:} \quad \varepsilon_{(x)} = \frac{\sigma_{(x)}}{E} = \frac{P}{F_{(x)} \cdot E}$$

La deformación total de la barra se calculará integrando en el largo "ℓ":

$$\boxed{\delta = \int_0^{\ell} \frac{P}{F_{(x)} \cdot E} \cdot dx} \qquad \textbf{[17]}$$

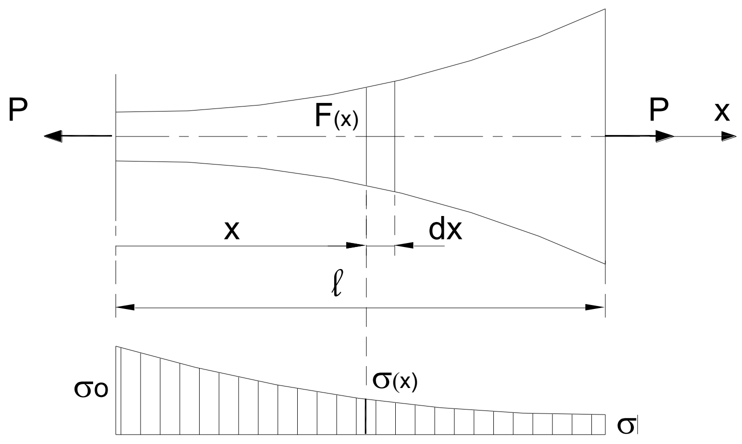


fig. 23

INFLUENCIA DEL PESO PROPIO (fuerza exterior de masa)

En los cálculos previos se ha considerado solamente a las <u>fuerzas externas de superficie</u> P, prescindiendo del <u>peso propio</u> de la barra (que es una <u>fuerza externa de volumen</u>), lo que es admisible mientras su influencia no sea significativa.

Si la magnitud del peso propio se torna importante, como es el caso de cables muy largos dispuestos verticalmente o de pilares de mucha altura, entonces debe ser considerado en base al siguiente razonamiento.

Sea la barra de sección F y de longitud importante " ℓ " sometida a la acción de la fuerza externa de superficie P, para la que se considerará además su propio peso, fig. 24.

Si γ es el peso específico del material (fuerza externa de volumen), en una sección cualquiera de coordenada "x" la fuerza normal evaluada por el método de las secciones resulta:

$$N = P + \gamma \cdot F \cdot x$$

por lo que la tensión en "x" resulta:

$$\sigma_{(x)} = \frac{N}{F} = \frac{P + \gamma \cdot F \cdot x}{F}$$

quedando: $\boxed{\sigma_{(x)} = \frac{P}{F} + \gamma \cdot x}$ **[18]**

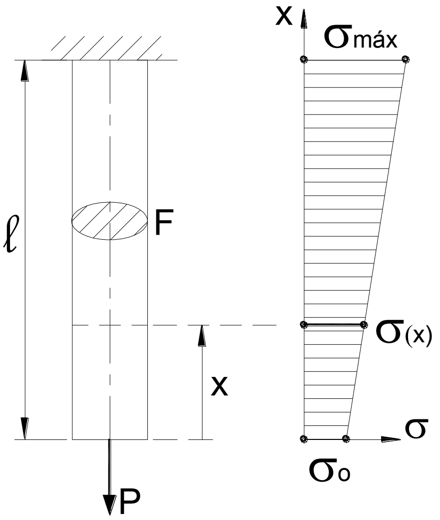


fig. 24

Para x = 0 resulta: $\sigma_o = \frac{P}{F}$

Para x = ℓ :

$\boxed{\sigma_\ell = \sigma_{máx} = \frac{P}{F} + \gamma \cdot \ell}$ **[18 ']**

de la expresión anterior, con $\sigma_{máx} = \sigma_{adm}$ resulta: $\boxed{F_{nec} = \frac{P}{\sigma_{adm} - \gamma \cdot \ell}}$ **[19]**

La deformación total se calcula por integración, ya que la tensión es variable con x:

$$\delta = \int_0^\ell \varepsilon_{(x)} \cdot dx = \int_0^\ell \frac{\sigma_{(x)}}{E} \cdot dx = \int_0^\ell \left(\frac{P}{F} + \gamma \cdot x \right) \cdot \frac{1}{E} \cdot dx = \frac{P \cdot \ell}{F \cdot E} + \frac{\gamma \cdot \ell}{E} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{F}{F} = \frac{P \cdot \ell}{F \cdot E} + \frac{\left(G/2 \right) \cdot \ell}{F \cdot E}$$

Finalmente queda: $\boxed{\delta = \frac{\left(P + \frac{G}{2} \right) . \ell}{F.E}}$ **[20]**

Donde $G = \gamma \cdot \ell \cdot F$ es el peso propio total de la barra.

SÓLIDO DE IGUAL RESISTENCIA AXIAL

Se denomina así al sólido de la fig. 25, que por la acción la acción de una fuerza exterior P (de superficie) y de su peso propio (de masa), experimenta tensiones de valor uniforme en todos sus puntos; podría inclusive no existir la carga P.

Sean dos secciones muy próximas 1–1 y 2-2. Si por hipótesis, las tensiones en ambas secciones son iguales, el incremento de área que experimenta la sección 2-2 (dF) respecto de la 1-1, multiplicado por la tensión, debe generar una fuerza capaz de equilibrar al peso propio del elemento 1-1-2-2.

Analizando el equilibrio del elemento resulta:

$$\sigma \cdot \left(F + dF\right) - \sigma \cdot F - \gamma \cdot F \cdot dx = 0$$

y simplificando se obtiene: $\boxed{\sigma \cdot dF = \gamma \cdot F \cdot dx}$ **[21]**

que confirma lo antes comentado.

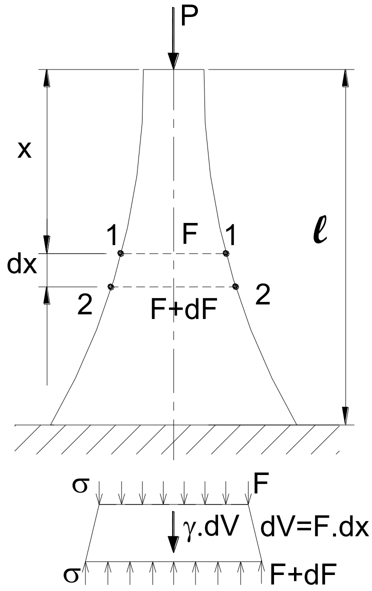


fig. 25

Separando variables se obtiene: $\dfrac{dF}{F} = \dfrac{\gamma}{\sigma} \cdot dx$

integrando: $\displaystyle\int \frac{dF}{F} = \int \frac{\gamma}{\sigma} \cdot dx$ resulta: $\ln F = \dfrac{\gamma}{\sigma} \cdot x + C$

por propiedad de los logaritmos: $F = e^{(\gamma/\sigma)\cdot x + C} = e^{C} \cdot e^{(\gamma/\sigma)\cdot x}$

pero: $e^{C} = K = cte.$

por lo que la expresión queda así: $F = K \cdot e^{(\gamma/\sigma)\cdot x}$

K es una constante que se puede calcular por condición de borde; por ejemplo:

para x = 0: $F = K \cdot e^{0} = F_o$ siendo: $F_o = \dfrac{P}{\sigma}$ ya que sólo actúa P.

Por lo tanto la expresión queda así: $\boxed{F = \dfrac{P}{\sigma} \cdot e^{\,(\gamma/\sigma)\cdot x}}$ **[22]**

Sección máxima, para x = ℓ: $\boxed{F_{máx} = F_o \cdot e^{\,(\gamma/\sigma)\cdot \ell}}$ **[23]**

Volumen del sólido de igual resistencia

Se puede calcular considerando el equilibrio de todo el sólido, adecuando la expresión [21] a la fig. 26 del siguiente modo:

$$\sigma \cdot (F_{máx} - F_o) = \gamma \cdot V_{total}$$

Resultando: $\boxed{V_{total} = \dfrac{\sigma \cdot (F_{máx} - F_o)}{\gamma}}$ **[24]**

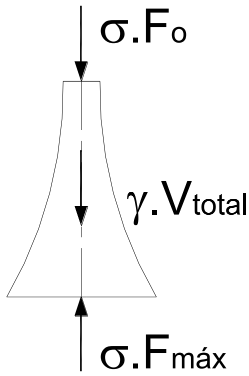


fig. 26

Deformación del sólido de igual resistencia

Siendo las tensiones de valor uniforme, por la ley de Hooke también lo serán las deformaciones específicas "**ε**", y en consecuencia la deformación total se obtiene con:

$$\boxed{\delta = \varepsilon \cdot \ell = \frac{\sigma \cdot \ell}{E}} \quad \textbf{[25]}$$

TENSIONES GENERADAS POR CAMBIOS TÉRMICOS

Cuando un componente estructural está impedido parcial o totalmente de cambiar de forma al ocurrir cambios térmicos, se generan tensiones que son el motivo de este breve análisis.

Un ejemplo de tensiones generadas por cambios térmicos es el que se produce en una barra que es calentada y que está impedida de dilatarse, fig. 27.

El esquema de cálculo consiste en una barra sujeta en ambos extremos con articulaciones fijas como muestra la fig. 27.

Cuando se incrementa la temperatura una cantidad Δt grados, en los apoyos se genera una fuerza X en oposición al cambio.

Para evaluar dicha fuerza se puede utilizar el principio de superposición de efectos:

1. Se libera un apoyo, por ejemplo el B. El calentamiento hace que la barra se dilate una cantidad δ, que se puede evaluar con la expresión:

$$\delta = \ell \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

siendo α es el coeficiente de dilatación térmica y Δt la variación de temperatura.

2. Se aplica luego una fuerza X que produce una deformación igual y contraria a δ y la longitud queda igual a la original. La deformación δ' es:

$$\delta' = \frac{X \cdot \ell}{F \cdot E}$$

3. Igualando δ y δ' se obtiene: $\ell \cdot \alpha \cdot \Delta t = \dfrac{X \cdot \ell}{F \cdot E}$

de donde: $X = F \cdot E \cdot \alpha \cdot \Delta t$

dividiendo ambos miembros por F queda:

$$\boxed{\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta t = E \cdot \varepsilon_t} \quad \textbf{[26]}$$

siendo: $\varepsilon_t = \alpha \cdot \Delta t$

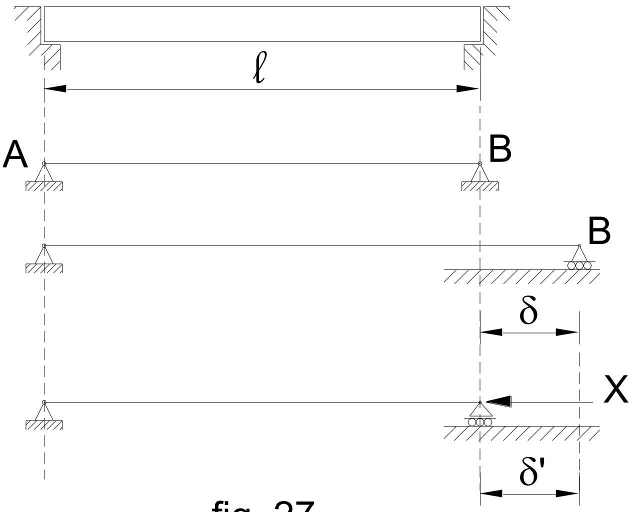


fig. 27

ε_t: deformación unitaria por temperatura.

CILINDROS DE PARED DELGADA SOMETIDOS A PRESIÓN INTERIOR

Un cilindro (caño o recipiente) se considera de <u>pared delgada</u> cuando el <u>espesor</u> “t” de la pared es muy <u>pequeño</u> en <u>relación al diámetro</u> interior del cilindro, fig. 28.

Estos cilindros se distinguen como de “pared delgada” debido a que la teoría que se aplicará para obtener las tensiones, hace uso de hipótesis que sólo son admisibles para este tipo de cilindros.

Las expresiones que se obtengan serán inaceptables si se las aplica a tubos de pared gruesa (en relación al diámetro). Los tubos de pared gruesa requieren de una teoría distinta para ser resueltos, cuestión que se resuelve con el “método de la teoría de la elasticidad”. Al final hay una breve reseña para los tubos de pared gruesa.

No existe una frontera rígidamente definida para la aplicación de una u otra teoría, pero con el objeto establecer algún limite, se puede considerar de pared delgada a aquellos tubos en los que el espesor de pared es inferior a la décima parte del diámetro interior. No obstante, las normas de cálculo establecen dicho límite en cada caso.

En el análisis de los cilindros de pared delgada sometidos a presión interior, se establecen las siguientes hipótesis para el esquema de cálculo:

a) El espesor es muy pequeño en relación al diámetro.
b) El cilindro es de extremos abiertos y longitud indefinida.
c) Está sometido solamente a presión interior.
d) Se desprecia el peso propio.

En un punto del interior de la pared, el estado tensional es plano (**σ_t , σ_r**) ya que al tener los extremos abiertos no existen solicitaciones en el sentido longitudinal.

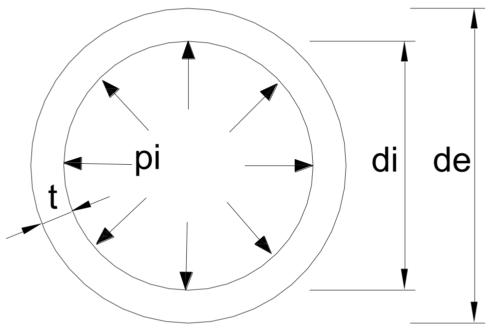


fig. 28

La tensión σ_r de dirección radial, variará desde el valor pi en la cara interior, hasta cero en la cara externa. Como se verá más adelante, el valor de σ_t es muy grande con relación a pi pudiéndose despreciar a σ_r sin cometer un error de importancia.

La <u>tensión circunferencial</u> σ_t (tangente a las circunferencias de la sección transversal del cilindro) se considerará <u>distribuida uniformemente</u> en todo el espesor de la pared, lo que implica aceptar que la deformación $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ en la dirección circunferencial es igual para todo el espesor de la pared. Esto solo puede admitirse si el espesor es pequeño en relación con el diámetro.

De esta forma, al suponer que solamente existen tensiones circunferenciales uniformemente distribuidas en el espesor de la pared, resulta un problema de solicitación uniaxial.

Cálculo de las tensiones circunferenciales

Se separa como cuerpo libre un trozo de cilindro por medio de dos planos perpendiculares al eje, distanciados una cantidad L=1, y por una sección producida con un plano diametral, fig. 29.

Se considerará la mitad superior bajo la acción de las fuerzas de superficie producidas por la presión pi.

En cada uno de los cortes de espesor “t” aparecerán tensiones uniformemente distribuidas **σ_t**, cuya resultante deberá equilibrar a la resultante de las fuerzas ocasionadas por la presión interior p_i.

Sobre una superficie interior elemental **ds.1** actuará una fuerza diferencial generada por la presión **p_i** de dirección radial, que vale $dP = pi \cdot ds \cdot 1$, la que puede reemplazarse por su componente vertical y su componente horizontal, fig. 30.

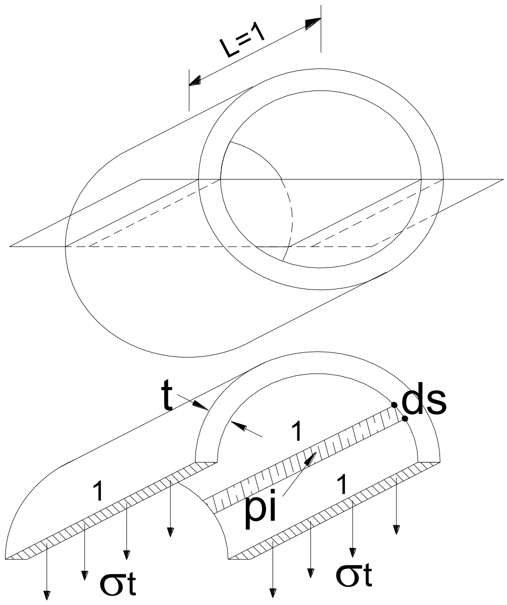


fig. 29

Por razones de simetría, las componentes horizontales de dP se anularán mutuamente.

Las componentes verticales de dP tendrán como resultante a una fuerza R vertical, la que se puede calcular por integración del siguiente modo:

$$R = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} pi \cdot \frac{di}{2} \cdot d\alpha \cdot 1 \cdot \cos\alpha = \frac{pi \cdot di}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\alpha \cdot d\alpha$$

$$R = \frac{pi \cdot di}{2} \cdot sen\alpha \Big[_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{pi \cdot di}{2} \cdot \left[1 - (-1)\right] = pi \cdot di$$

Finalmente: $R = pi \cdot di$

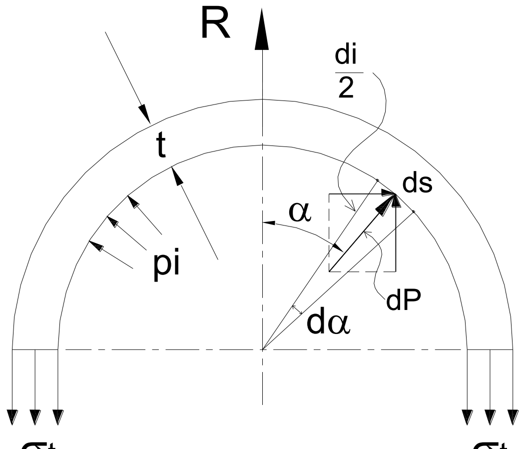


fig. 30

R debe ser equilibrada por la resultante de las fuerzas provocadas por las tensiones σ_t, entonces:

$p_i \cdot d_i = 2 \cdot \left[\sigma_t \cdot (t \cdot 1)\right]$ de donde: $\sigma_t = \dfrac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot t}$

En consecuencia debe ser:

Para verificar: $\boxed{\sigma_t = \dfrac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot t} \leq \sigma_{adm}}$ **[27]**

Para dimensionar: $\boxed{t \geq \dfrac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot \sigma_{adm}}}$ **[28]**

Deformaciones radiales y circunferenciales

La deformación específica circunferencial será: $\varepsilon_t = \dfrac{\sigma_t}{E}$

Como el perímetro es una función lineal del radio (o del diámetro) ya que **perímetro=π.d**, entonces ambos se modificarán en la misma proporción al cambiar el tamaño por efecto de la pi, consecuentemente la deformación unitaria radial $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ es la misma que la deformación unitaria circunferencial $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ resultando entonces:

$$\boxed{\varepsilon_t = \varepsilon_r = \varepsilon_d} \quad \textbf{[29]}$$

CILINDROS <u>CERRADOS</u> EN SUS EXTREMOS (RECIPIENTES CILINDRICOS)

Si un cilindro sometido a presión interior tiene sus extremos cerrados (fondos), en las proximidades de dichos extremos se originan perturbaciones en la distribución de las tensiones circunferenciales por estar impedida la libre deformación radial del cilindro.

Por tal motivo las fórmulas obtenidas <u>no son de aplicación</u> en las proximidades de los extremos.

No obstante en zonas suficientemente alejadas de los extremos y de acuerdo al principio de Saint-Venant, desaparece el efecto de dicha perturbación y se pueden calcular las tensiones circunferenciales en base a la expresión [27]:

$$\sigma_t = \frac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot t}$$

Pero debido a la acción de la presión interior p_i , se originan tensiones longitudinales $\boldsymbol{\sigma_\ell}$ que se pueden suponer uniformemente distribuidas en la sección transversal (corona circular), las que deben equilibrar a la fuerza resultante R que actúa en los fondos, fig. 31.

La fuerza R es la resultante de las componentes de dirección paralela al eje del cilindro, generadas por **pi**.

Por un procedimiento análogo al efectuado para calcular la R para el semicilindro de la fig. 30, es posible calcular R para cualquier forma que posean los fondos. En todos los casos la expresión es la misma y depende solamente del diámetro de la parte cilíndrica:

$$R = p_i \cdot \frac{\pi \cdot d_i^2}{4}$$

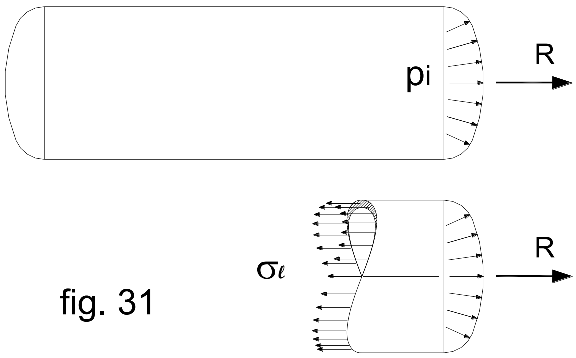


fig. 31

El equilibrio entre dicha fuerza R y las fuerzas que generan las tensiones $\boldsymbol{\sigma_\ell}$ en el espesor "**t**" del metal (ver fig. 31) se puede expresar así:

$$p_i \cdot \frac{\pi \cdot d_i^2}{4} = \pi \cdot d_i \cdot t \cdot \sigma_\ell \qquad \text{de donde:} \qquad \boxed{\sigma_\ell = \frac{p_i \cdot d_i}{4 \cdot t}} \quad \textbf{[30]}$$

Comparando las expresiones [30] y [27], se observa que la tensión circunferencial es de valor doble al de la tensión longitudinal: $\boxed{\sigma_t = 2 \cdot \sigma_\ell}$

Como consecuencia de ello, las tensiones circunferenciales son las que determinan el cálculo del espesor de la chapa, debiéndose utilizar entonces la expresión [28].

RECIPIENTES ESFÉRICOS

En el caso de un depósito de forma esférica y de pared delgada (para gas por ejemplo), procediendo de modo similar al que permitió calcular R para el semicilindro de la fig. 30, es posible calcular R para un casquete semiesférico, fig. 32. En este caso la expresión es la misma y depende solamente del diámetro:

$$R = p_i \cdot \frac{\pi \cdot d_i^2}{4}$$

con lo que la tensión resulta igual que para las tensiones longitudinales del recipiente cilíndrico, siendo de valor uniforme en cualquier dirección tangencial:

$$\boxed{\sigma = \frac{p_i \cdot d_i}{4 \cdot t}} \quad \textbf{[31]}$$

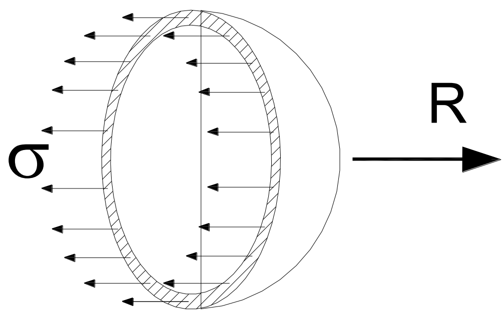


fig. 32

TUBOS DE PARED GRUESA

DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES SEGÚN LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

Tal como se comentó al principio, la teoría aproximada para los cilindros de pared delgada, no es aplicable cuando el espesor adquiere valor importante frente al diámetro como es el caso del tubo de la fig. 33.

La "Teoría de la elasticidad" permite analizar las tensiones que ocurren en este caso y los resultados son los que se detallan a continuación.

Las gráficas de la fig. 34 permiten apreciar la variación de las tensiones circunferenciales de tracción (de dirección tangente a la circunferencia), como así también las tensiones radiales.

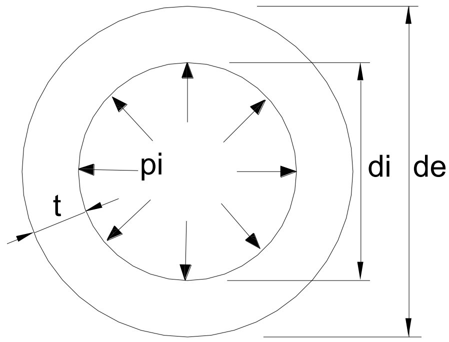


fig. 33

Las tensiones circunferenciales σ_t son de tracción y adquieren el valor máximo en la cara interna. La expresión para calcular es tensión es:

$$\boxed{\sigma_{t\,máx} = p_i \cdot \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}} \quad \textbf{[32]}$$

en la que es: r_e el radio exterior y r_i el radio interior.

Las tensiones radiales σ_r son de compresión y adquieren valor máximo en la cara interna, disminuyendo hasta anularse en la cara externa, siendo:

$$\boxed{\sigma_{r\,máx} = -p_i} \quad \textbf{[33]}$$

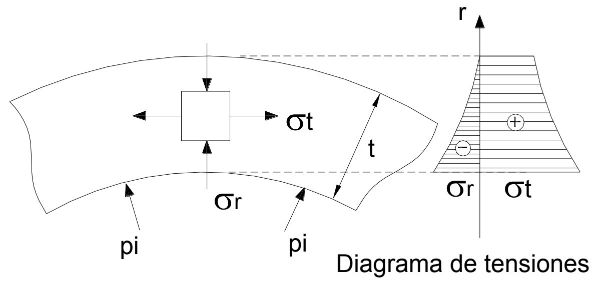


fig. 34

ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACIÓN

Cuando un componente estructural está sometido a carga estática que lo deforma, los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores se desplazan y en consecuencia las fuerzas realizan un trabajo disminuyendo en igual medida la energía potencial del sistema de cargas exteriores.

Si se trata de un cuerpo elástico, la energía entregada por las fuerzas exteriores, se almacena en el cuerpo cargado mientras estén presentes dichas fuerzas, y puede recuperarse totalmente (despreciado pequeñas pérdidas, principalmente en forma de calor) al realizar la descarga.

A la energía almacenada por el sólido se la denomina **energía potencial de deformación elástica**.

Esa energía permite al cuerpo recuperar sus dimensiones originales al descargarlo. Ocurre entonces que el incremento de la energía potencial U del cuerpo deformado es numéricamente igual a la disminución de la energía potencial de las cargas U_p, que es igual al trabajo A_p realizado por las fuerzas exteriores, por lo tanto:

$$\boxed{U = U_P = A_P}$$

En consecuencia la energía potencial de deformación es numéricamente igual al trabajo de las fuerzas exteriores transferido durante la deformación elástica del cuerpo:

Energía de deformación por carga axial

Si a un cuerpo elástico se lo somete gradualmente a carga axial hasta que ésta alcance el valor máximo P_m (por debajo del límite elástico), la deformación final será δ_m y el diagrama (carga–deformación) será lineal como muestra la fig. 35, en la que se ha exagerado la deformación.

Sea “P” un valor intermedio de la carga y “δ” la deformación correspondiente.

Un incremento **dP** de la carga origina un incremento **dδ** en la deformación.

El trabajo realizado por **P** al producirse la deformación **dδ** es:

$$P \cdot d\delta$$

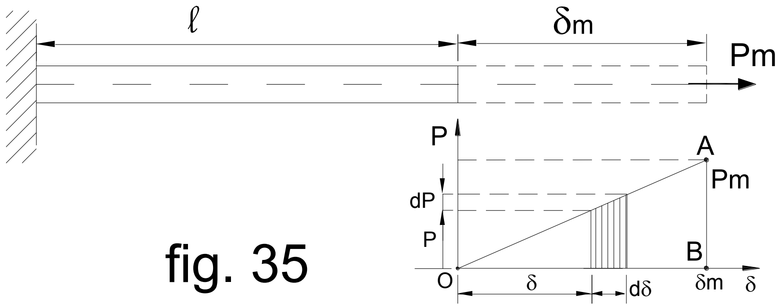


fig. 35

que está representado por el área rayada del diagrama.

El trabajo total realizado al aumentar la carga desde cero a su valor final **P**$_m$, ocasionando una deformación $\boldsymbol{\delta_m}$, se obtiene integrando dicho producto entre **0** y $\boldsymbol{\delta_m}$.

Sin embargo, por estar representado por el área del triangulo OAB, resulta simplemente:

$$\boxed{U = \frac{P_m \cdot \delta_m}{2}} \quad \textbf{[34]} \qquad \text{en la que: } \delta_m = \frac{P_m \cdot \ell}{F \cdot E} \quad \text{ó} \quad P_m = \frac{\delta_m \cdot F \cdot E}{\ell}$$

Reemplazando cada una de dichas expresiones en la (34) se obtiene:

$$U = \frac{P_m}{2} \cdot \frac{P_m \cdot \ell}{F \cdot E} = \frac{P_m^2 \cdot \ell}{2 \cdot F \cdot E} \qquad \boxed{U = \frac{P_m^2 \cdot \ell}{2 \cdot F \cdot E}} \quad \textbf{[35]}$$

$$U = \frac{.\delta_m}{2} \cdot \frac{\delta_m \cdot F \cdot E}{\ell} = \frac{\delta_m^2 \cdot F \cdot E}{2 \cdot \ell} \qquad \boxed{U = \frac{\delta_m^2 \cdot F \cdot E}{2 \cdot \ell}} \quad \textbf{[36]}$$

Las expresiones [35] y [36] representan la energía potencial de deformación elástica total almacenada por la barra.

Dividiendo cada una de las expresiones de U, por el volumen “**F.ℓ**” de la barra, se obtiene la energía almacenada por unidad de volumen:

$$w = \frac{P_m^2 \cdot \ell}{2 \cdot F \cdot E} \cdot \frac{1}{F \cdot \ell} = \frac{P_m^2}{2 \cdot F^2 \cdot E} = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \qquad \boxed{w = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}} \quad \textbf{[37]}$$

$$w = \frac{\delta_m^2 \cdot F \cdot E}{2 \cdot \ell} \cdot \frac{1}{F \cdot \ell} = \frac{\delta_m^2 \cdot E}{2 \cdot \ell^2} = \frac{\varepsilon^2 \cdot E}{2} \qquad \boxed{w = \frac{\varepsilon^2 \cdot E}{2}} \quad \textbf{[38]}$$

La energía de deformación por unidad de volumen que puede almacenar un material sin sufrir deformaciones permanentes (es decir, cuando la tensión alcanza como máximo el límite elástico $\boldsymbol{\sigma}_E$) se denomina módulo de resiliencia que se lo identifica como $\mathbf{w_R}$.

Los valores promedio de $\mathbf{w_R}$ para acero y goma son los mostrados en la siguiente tabla:

Acero común	**Goma**
E = 2.100.000 [kgf/cm^2]	E = 10 [kgf/cm^2]
σ_e = 2.100 [kgf/cm^2]	σ_e = 20 [kgf/cm^2]
ω_R = 1,05 [kgf.cm/cm^3]	ω_R = 20 [kgf.cm/cm^3]

CASOS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS ó HIPERESTÁTICOS

Concepto: son aquellos casos que no pueden ser resueltos con las ecuaciones de la estática, por no ser ellas suficientes debido al número de incógnitas. Se debe recurrir entonces a la deformación del componente o estructura, que permita el planteo de ecuaciones adicionales para poder resolver.

Grado de hiperestaticidad: se denomina así a la diferencia entre la cantidad de incógnitas existentes en el problema y la cantidad de ellas que se pueden resolver con las ecuaciones de la estática.

Tipo de hiperestaticidad: puede ser de carácter externo (en los vínculos) o interno (exceso de barras en un reticulado por ejemplo).

Ejemplo de hiperestaticidad externa: la viga representada en la fig. 36 está vinculada con dos articulaciones fijas que le imponen cuatro condiciones de vínculo (CV). Como en el plano existen tres grados de libertad (GL) que se podrían resolver con las 3 ecuaciones de la estática, entonces el grado de hiperestaticidad es GH=CV–3=4–3=1. El grado de hiperestaticidad podría ser mayor en el caso de haber más condiciones de vínculo.

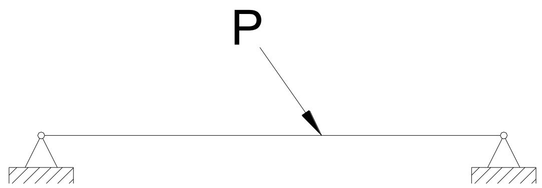


fig. 36

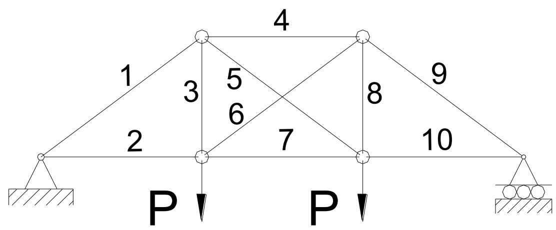


fig. 37

Ejemplo de hiperestaticidad interna:

El reticulado plano representado en la fig. 37 está vinculado isostáticamente. Posee 10 barras y 6 nudos. Las 10 barras implican 10 incógnitas (fuerzas en las barras) Si se verifica la condición necesaria de isostaticidad interna b=2n-3 resulta: 2n-3=2x6-3=9. El número de barras en exceso es 10-9=1. Entonces el grado de hiperestaticidad (interno) es 1. El grado de hiperestaticidad podría ser mayor en el caso de existir mayor número de barras.

Los métodos para resolver cualquiera de estas situaciones están basados en la posibilidad de deformación del sólido. En cálculo estructural se analizan métodos más elaborados para resolver problemas complejos y para cualquier tipo de solicitación.

En este apartado y en la correspondiente práctica, se analizarán casos sencillos referidos exclusivamente a solicitación axial y se utilizarán los corrimientos para establecer las ecuaciones complementarias necesarias para calcular las incógnitas en cada caso.

Ejemplo:

La estructura representada en la fig. 38a, está compuesta por dos tramos que poseen secciones diferentes F_1 y F_2, siendo E_1 y E_2 los módulos de elasticidad de sus materiales.

Está vinculada en ambos extremos y soporta la acción de una fuerza P como se muestra.

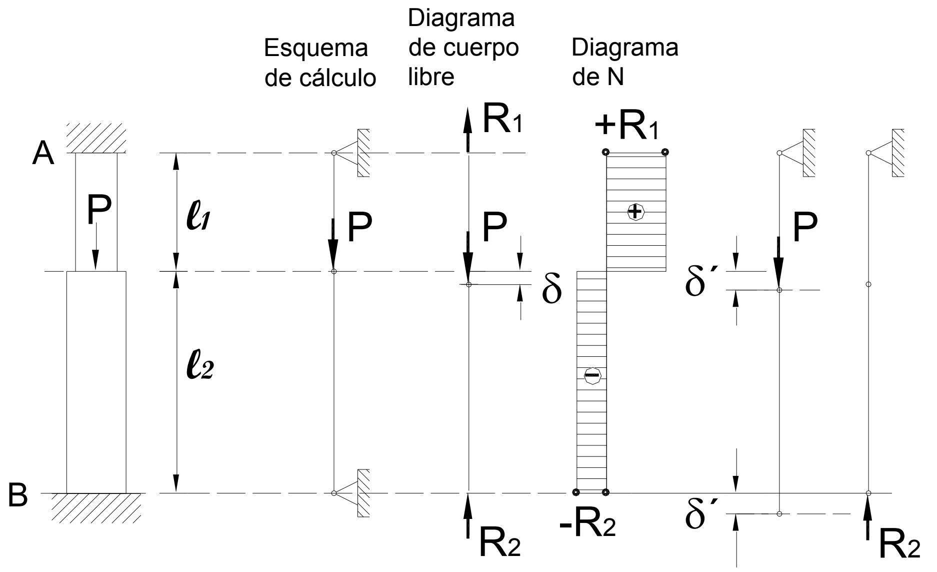


fig. 38a fig.38b fig.38c fig.38d fig.38e fig.38f

En los apoyos se generan reacciones R_1 y R_2 que son colineales con P, fig. 38c.

Si bien los empotramientos imponen 6 condiciones de vínculo, nuestro esquema de cálculo puede plantearse reemplazando los empotramientos por dos articulaciones fijas ya que las ecuaciones de proyección horizontal y de momento no aportarán nada por ser un sistema de fuerzas colineal, fig. 38b.

Por tal motivo el sistema es hiperestático externo de grado 1, ya que existen dos incógnitas (R_1 y R_2) y solamente se puede plantear una sola de las tres ecuaciones de "equilibrio estático": la de proyección en la dirección vertical, como sigue:

$$R_1 + R_2 - P = 0 \quad \textbf{[39]}$$

La ecuación complementaria se puede obtener de diferentes maneras. Una de ellas es planteando el corrimiento δ de la sección donde se aplica la carga.

Dicho corrimiento puede considerarse indistintamente como alargamiento δ_1 del tramo superior o como acortamiento δ_2 del tramo inferior.

Por el método de las secciones se puede representar el diagrama de fuerza normal N tal como se muestra en la fig. 38d. El tramo superior soporta esfuerzo de tracción y el inferior esfuerzo de compresión; entonces la ecuación denominada de "compatibilidad de deformaciones" será:

$$\delta_1 = \delta_2 \quad \text{ó} \quad \boxed{\frac{R_1 \cdot \ell_1}{F_1 \cdot E_1} = \frac{R_2 \cdot \ell_2}{F_2 \cdot E_2}} \quad \textbf{[40]}$$

Las [39] y [40] forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas simultáneas R_1 y R_2 que puede ser resuelto algebraicamente.

Alternativa: otra forma de plantear el corrimiento de modo que no se presenten dos ecuaciones con dos incógnitas simultáneas, es considerar el corrimiento de algún punto que evite la aparición de una de las incógnitas.

Por ejemplo, si se analiza el extremo B donde actúa la reacción incógnita R_2, dicho punto en realidad no se desplaza, pero aplicando el principio de superposición de efectos se puede considerar la "liberación" de dicho vínculo y estudiar los corrimientos $\boldsymbol{\delta'}$ que ocasionarían la carga P y la incógnita R_2 en forma independiente, los que sumados algebraicamente, obviamente deben anularse como muestran las figuras 38e y 38f. Se advierte que δ' es diferente a δ por no estar vinculado en el apoyo B.

Resulta entonces:

$$\boxed{-\frac{R_2 \cdot \ell_2}{F_2 \cdot E_2} - \frac{R_2 \cdot \ell_1}{F_1 \cdot E_1} + \frac{P \cdot \ell_1}{F_1 \cdot E_1} = 0} \qquad \textbf{[41]}$$

en la [41] solamente interviene la incógnita R_2, que puede ser resuelta independientemente. Luego con la [39] se puede resolver la incógnita R_1, si es necesario hacerlo, ya que podría inclusive no ser necesario obtenerla.

En la práctica se tratarán otros casos de hiperestaticidad con barras no alineadas ni siquiera paralelas, en donde se deberá estudiar una adecuada estrategia para el planteo de la ecuación de compatibilidad de las deformaciones.

Este material de apoyo didáctico, cuyos manuscritos originales fueran preparados por el ex-profesor de la Cátedra "Estabilidad", Ing. Guillermo Pons, fue adaptado, modificado y ampliado, y está destinado exclusivamente para el uso interno de las asignaturas "Estabilidad" de la carrera Ingeniería Eléctrica y "Resistencia de Materiales" de la Carrera Ingeniería Civil en la Facultad Regional Santa Fe de la U.T.N.

Profesor Titular : Ing. Hugo A. Tosone.
Auxiliares de TP: Dr. Federico Cavalieri – Mg. Alejandro Carrere.

Marzo de 2012

SOLICITACIÓN AXIAL: RESUMEN DE FÓRMULAS

$\boxed{\sigma = \frac{P}{F}}$ **[1]** $\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}} =$ $\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}}$ $\boxed{\Delta L = \frac{P.L}{F.E}}$ **[2]** $\boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu.\varepsilon_x}$ **[3]** Bach: $\boxed{\sigma^{\alpha} = k.\,\varepsilon}$ **[4]**

Método por tensiones: $\boxed{\sigma_{máx} \le \sigma_{adm}}$ **[5]** con: $\boxed{\sigma_{adm} = \frac{\sigma_L}{\eta}}$ **[6]** $\boxed{\tau_{máx} \le \tau_{adm}}$ **[7]**

con: $\boxed{\tau_{adm} = \frac{\tau_L}{\eta}}$ **[8]** $\boxed{\sigma_{adm} = \frac{\sigma_f}{\eta_f}}$ **[9]** $\boxed{\sigma_{adm} = \frac{\sigma_r}{\eta_r}}$ Dimensionado: $\boxed{\sigma = \frac{N}{F} \le \sigma_{adm}}$ **[11]**

Deform. serie: $\boxed{\delta_{total} = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P.\ell_1}{E.F_1} + \frac{P.\ell_2}{E.F_2}}$ generalizando: $\boxed{\delta_{total} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P.\ell_i}{E_i.F_i}}$ **[15]**

Sección variable $\boxed{\sigma_{(x)} = \frac{P}{F_{(x)}}}$ **[16]** $\boxed{\delta_t = \int_0^{\ell} \frac{P}{F_{(x)}.E}\,.\,d_x}$ **[17]**

Sección uniforme con peso propio:

$\boxed{\sigma_{(x)} = \frac{P}{F} + \gamma.x}$ **[18]** $\boxed{F_{nec} = \frac{P}{\sigma_{adm} - \gamma.\ell}}$ **[19]** $\boxed{\delta = \frac{\left(P + \frac{G}{2}\right).\ell}{F.E}}$ **[20]**

Sólido de igual resistencia:

$\boxed{F = \frac{P}{\sigma}.e^{(\gamma/\sigma).x}}$ **[22]** $\boxed{F_{máx} = F_{\ell} = F_o.e^{(\gamma/\sigma).\ell}}$ **[23]** $\boxed{V_{total} = \frac{\sigma.(F_{máx} - F_o)}{\gamma}}$ **[24]** $\boxed{\delta = \varepsilon.\ell = \frac{\sigma.\ell}{E}}$ **[25]**

Influencia dilatac. p/temperatura: $\boxed{\sigma = E.\alpha.\Delta t = E.\,\varepsilon_t}$ **[26]**

Recip. cilíndricos: $\boxed{\sigma_t = \frac{p_i.d_i}{2.t} \le \sigma_{adm}}$ $\boxed{\sigma_{\ell} = \frac{p_i.d_i}{4.t}}$ **[30]** Def.unit.circ.: $\boxed{\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E}}$ $\boxed{\varepsilon_t = \varepsilon_r = \varepsilon_d}$ **[29]**

Esféricos: $\boxed{\sigma = \frac{p_i.d_i}{4.t}}$ **[31]**

Pared gresa: $\boxed{\sigma_{t\,máx} = p_i.\frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}}$ **[32]** $\boxed{\sigma_{r\,máx} = -\,p_i}$ **[33]**

Energía externa: $\boxed{U = \frac{P_m.\delta_m}{2}}$ **[34]** $\boxed{U = \frac{P_m^2.\ell}{2 \cdot F \cdot E}}$ **[35]** $\boxed{U = \frac{\delta_m^2 \cdot F \cdot E}{2 \cdot \ell}}$ **[36]**

Energía interna: $\boxed{w = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}}$ **[37]** $\boxed{w = \frac{\varepsilon^2 \cdot E}{2}}$ **[38]**

Casos hiperestáticos de rigidez paralela: $\boxed{R_1 + R_2 - P = 0}$ **[39]**

$\boxed{\frac{R_1 \cdot \ell_1}{F_1 \cdot E_1} = \frac{R_2 \cdot \ell_2}{F_2 \cdot E_2}}$ **[40]** $\boxed{-\frac{R_2 \cdot \ell_2}{F_2 \cdot E_2} - \frac{R_2 \cdot \ell_1}{F_1 \cdot E_1} - \frac{P \cdot \ell_1}{F_1 \cdot E_1} = 0}$ **[41]**

Profesor Titular Ing. Hugo A. Tosone.
Auxiliares de TP: Dr. Federico Cavalieri – Mg. Alejandro Carrere
Marzo de 2012.