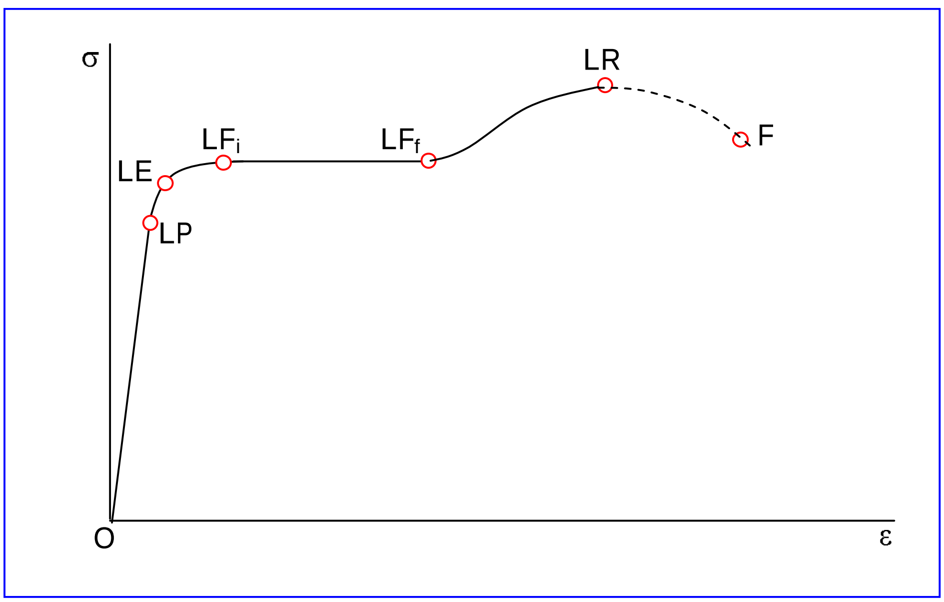
Tema 3 : CUERPO ELÁSTICO



3.1.- INTRODUCCIÓN

La experiencia nos enseña que todo cuerpo bajo la acción de las fuerzas aplicadas, se deforma y que al suprimir éstas, el cuerpo tiende a recuperar su forma inicial. Esta propiedad que poseen todos los cuerpos, en mayor o menor grado, se denomina **ELASTICIDAD.**

Dependiendo del material del que estén hechos los cuerpos, se tendrá que unos cuerpos se comportarán más elásticos que otros y a su vez, para un cuerpo de un material determinado, dependiendo de la magnitud de las fuerzas aplicadas, se comportará total o parcialmente elástico. Se dirá que se comporta "totalmente elástico" si al retirar la fuerza a la que está sometido recupera totalmente su forma inicial y "parcialmente elástico" en caso contrario, es decir que al retirar la fuerza aplicada no recupera totalmente la forma inicial, dejando en él una deformación permanente.

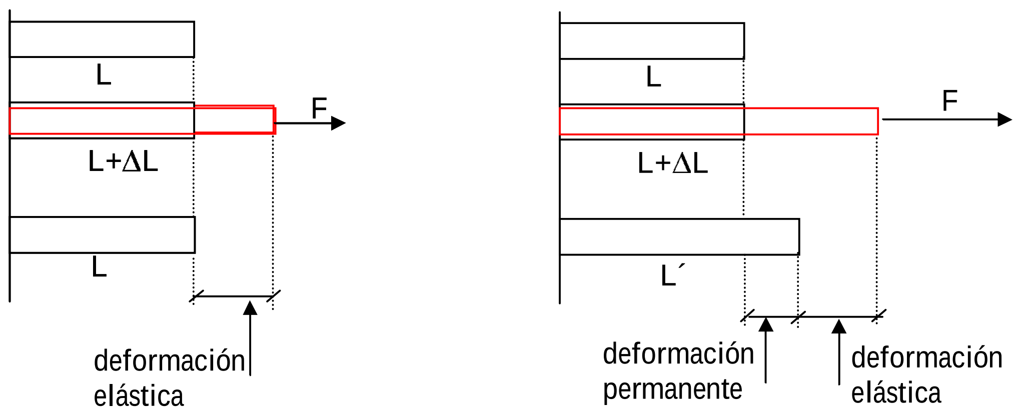


Fig.3.1

Así mismo, en nuestro análisis, admitiremos que los cuerpos son **ISÓTROPOS**, es decir, que sus propiedades elásticas son iguales en cualquier dirección. Esto no ocurre exactamente por ejemplo en materiales fibrosos como la madera, ni en materiales formados por laminación. En estos materiales habrá que hacer un estudio específico de los mismos, aunque en muchos casos, los resultados que se obtienen con esta hipótesis son satisfactorios.

3.2.- RELACIONES ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES. LEY DE HOOKE GENERALIZADA

Se ha visto en los temas 1º y 2º que en un cuerpo sometido a fuerzas exteriores, a cada punto del mismo, le corresponde un "**estado de tensiones**" y un "**estado de deformaciones**". Siendo unas, consecuencia de las otras, es evidente que ha de existir una relación entre ambos estados. Fue Hooke el que dedujo dichas relaciones.

LEY DE HOOKE

"Existe proporcionalidad entre las componentes del estado de tensiones y las componentes del estado de deformaciones".

Los coeficientes que regulan dicha proporcionalidad dependen de las constantes físicas del material y no de las particularidades geométricas del cuerpo.

Para estudiar la deformación del paralelepípedo elemental debida a la acción de las tensiones, utilizaremos el Principio de Superposición.

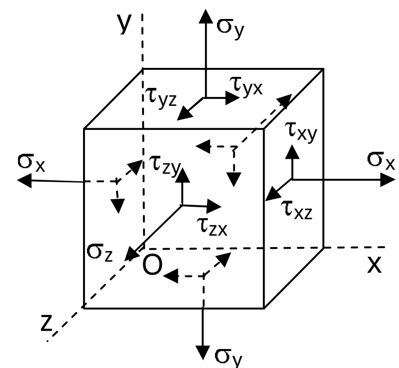


Fig.3.2

Deformaciones debidas a σ_x:

Experimentalmente se ha demostrado que las tensiones normales $\boldsymbol{\sigma}$, actuando sobre las caras opuestas del paralelepípedo sólo originan deformaciones longitudinales $\boldsymbol{\varepsilon}$ según las aristas del paralelepípedo y no producen ninguna deformación angular.

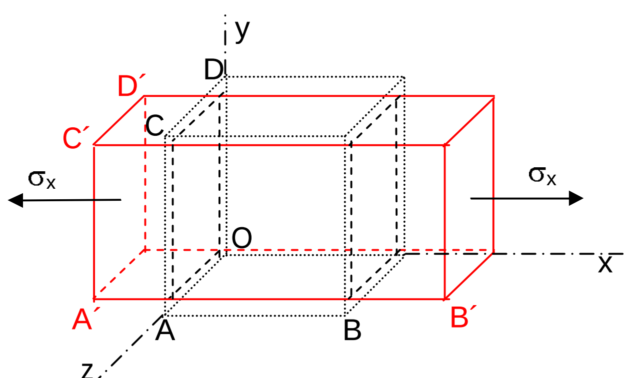


Fig.3.3

Según la Ley de Hooke: las deformaciones longitudinales ε, son proporcionales a las tensiones normales σ que las producen:

$$\varepsilon_{1x} = \frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{A^{'}B^{'} - AB}{AB} = \frac{1}{E}.\sigma_x \qquad \rightarrow \quad \text{Cte proporcionalidad} = \frac{1}{E}$$

Siendo E = MÓDULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL. Es una constante física de cada material y se obtiene experimentalmente. Sus dimensiones son: N/mm^2
Según se observa en la figura (3.3), el alargamiento longitudinal ε_{1x} debido a la tensión normal σ_x, va acompañado de acortamientos longitudinales en dirección de los ejes y y z, que según la ley de Hooke vienen dados por:

$$\varepsilon_{1y} = \frac{\Delta L_y}{L_y} = \frac{A'C' - AC}{AC} = -\nu.\varepsilon_{1x} = -\nu.\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_{1z} = \frac{\Delta L_z}{L_z} = \frac{A'D' - AD}{AD} = -\nu.\varepsilon_{1x} = -\nu.\frac{\sigma_x}{E}$$

siendo υ = COEFICIENTE DE POISSON. Es también una constante física de cada material y es adimensional.

De igual forma que hemos obtenidos las deformaciones debidas a la tensión normal σ_x, se obtendrían las deformaciones debidas a las tensiones normales σ_y y σ_z:

<u>Deformaciones debidas a σ_y:</u>

$$\varepsilon_{2y} = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_{2x} = \varepsilon_{2z} = -\nu.\varepsilon_{2y} = -\nu.\frac{\sigma_y}{E}$$

<u>Deformaciones debidas a σ_z:</u>

$$\varepsilon_{3z} = \frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_{3x} = \varepsilon_{3y} = -\nu.\varepsilon_{3z} = -\nu.\frac{\sigma_z}{E}$$

y aplicando el Principio de Superposición, las deformaciones debidas a las tensiones normales: σ_x, σ_y y σ_z, serán:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_{1x} + \varepsilon_{2x} + \varepsilon_{3x} = \frac{\sigma_x}{E} - \nu.\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right) \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_{1y} + \varepsilon_{2y} + \varepsilon_{3y} = \frac{\sigma_y}{E} - \nu.\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right) \qquad (3.1) \\
\varepsilon_z &= \varepsilon_{1z} + \varepsilon_{2z} + \varepsilon_{3z} = \frac{\sigma_z}{E} - \nu.\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}\right)
\end{aligned}$$

Ecuaciones que nos relacionan las deformaciones longitudinales ε, con las tensiones normales σ.

Deformaciones debidas a τ_{xy}:

También se ha demostrado experimentalmente que las tensiones cortantes τ, actuando sobre las caras del paralelepípedo, originan deformaciones angulares γ.

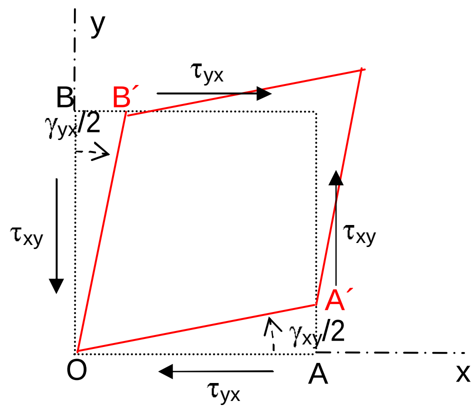


Fig.3.4

Según la ley de Hooke: las deformaciones angulares γ son proporcionales a las tensiones cortantes τ:

$$\gamma_{xy} \cong tag\gamma_{xy} = \frac{AA'}{OA} = \frac{1}{G}.\tau_{xy} \qquad \rightarrow \quad Cte\ proporcionalidad = \frac{1}{G}$$

siendo G = MÓDULO DE ELASTICIDAD ANGULAR. Es una constante física de cada material y se obtiene experimentalmente. Sus dimensiones son: N/mm^2.

De igual forma que hemos obtenidos las deformaciones debidas a la tensión cortante τ_{xy}, se obtendrían las deformaciones debidas a las tensiones cortantes τ_{yx} y τ_{zx}:

Deformaciones debidas a τ_{xy} y a τ_{zx} : $\quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$

y aplicando el Principio de Superposición, las deformaciones debidas a las tensiones cortantes: τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx}, serán:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \qquad (3.2)$$

Ecuaciones que nos relacionan las deformaciones angulares γ, con las tensiones cortantes τ.

Así pues el resumen de ecuaciones que relacionan las tensiones y deformaciones obtenidas en (3.1) y (3.2), y dadas por la Ley de Hooke generalizada son:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu.\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right) \qquad & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu.\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right) \qquad & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\
\varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu.\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}\right) \qquad & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Las relaciones inversas son:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda.e_3 + 2.G.\varepsilon_x \qquad & \tau_{xy} &= \gamma_{xy}.G \\
\sigma_y &= \lambda.e_3 + 2.G.\varepsilon_y \qquad & \tau_{yz} &= \gamma_{yz}.G \\
\sigma_z &= \lambda.e_3 + 2.G.\varepsilon_z \qquad & \tau_{zx} &= \gamma_{zx}.G
\end{aligned} \qquad (3.4)$$

siendo:

$$e_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (3.5) \qquad\qquad \lambda = \frac{E.\nu}{(1+\nu).(1-2.\nu)} \qquad (3.6)$$

<u>Observación</u>: Las constantes físicas: E, G y υ, están relacionadas entre ellas mediante la siguiente ecuación:

$$G = \frac{E}{2.(1+\nu)} \qquad (3.7)$$

<u>Valores de E, G y υ, para diversos materiales:</u>

MATERIAL	E (N/mm^2)	G (N/mm^2)	υ
acero	$2,1.10^5$	81000	0,3
aluminio (aleacción)	$0,73.10^5$	28000	0,33
Madera laminada	$1,2.10^4$		0,45
cobre	$1,2.10^5$	47000	0,36