

CONTENIDOS

Concepto de Reticulado. Definición. Aplicaciones. Composición. Nudos o uniones.

Punto de aplicación de las Cargas. Forma de trabajar las barras.

Reticulados planos. Generación de una chapa rígida de reticulado. Reticulado simple. Reticulado compuesto. Reticulado complejo.

Condición “necesaria” de rigidez para un reticulado. Hiperestaticidad interna.

Esfuerzos en barras. Resolución de reticulados planos. Hipótesis admitidas. Incógnitas.

Método de los nudos o uniones. Comentario sobre el procedimiento gráfico (conceptual). Procedimiento analítico. Análisis nudo por nudo. Simplificación de las ecuaciones en cálculo manual. Barras que no trabajan. Resolución analítica general planteando un sistema único de ecuaciones. Alternativa que incluye las reacciones de vínculo.

Método de las secciones. Procedimiento gráfico (para formación conceptual solamente). Procedimiento analítico. Caso de cálculo de una sola barra.

Concepto de Reticulado.

Definición

En ingeniería estructural, un reticulado es una estructura compuesta por barras rectas interconectadas entre sí en nudos, formando un conjunto rígido y resistente.

A las estructuras de "reticulado" también se las suele denominar: "de alma calada", "celosía", "armadura", "cercha", etc.

La imagen extraída de Internet muestra un puente para un antiguo ferrocarril, que actualmente es peatonal.



Aplicaciones

Los reticulados constituyen uno de los principales tipos de estructura, que proporcionan una solución práctica, liviana y económica para la construcción de puentes, edificios, torres para soporte de líneas de transporte de energía eléctrica, etc.

Formas

La disposición de las barras de una estructura reticulada dependerá principalmente de las necesidades constructivas y arquitectónicas de la obra. Existen diversas formas notables, algunas con los nombres de sus creadores, las que se muestran en la fig. 1.

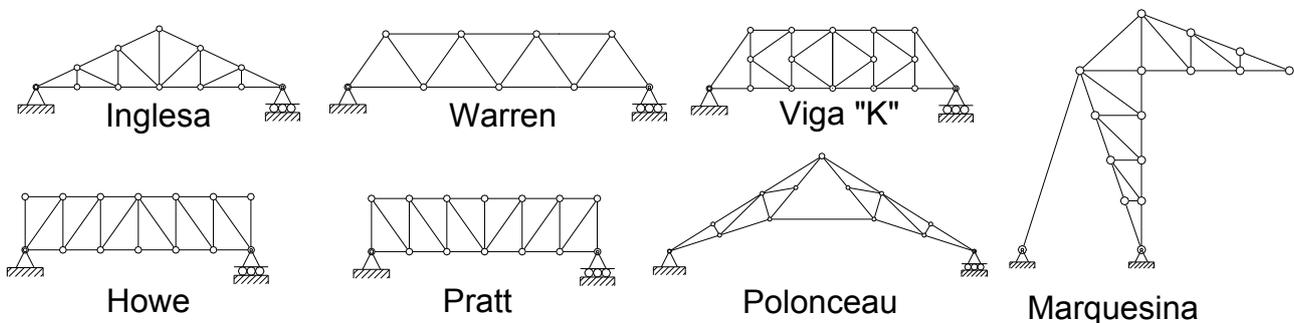


fig. 1

Materiales

Según sea la aplicación pueden ser de acero, aluminio, madera, hormigón, etc.

Composición

Las barras que constituyen el contorno de la estructura reticulada se llaman cordones (superior e inferior, si de vigas se trata), y pueden ser rectos (paralelos o no) o también poligonales.

Las demás barras se llaman genéricamente transversales: con la denominación de montantes las que son verticales o perpendiculares a los cordones y diagonales a las oblicuas.

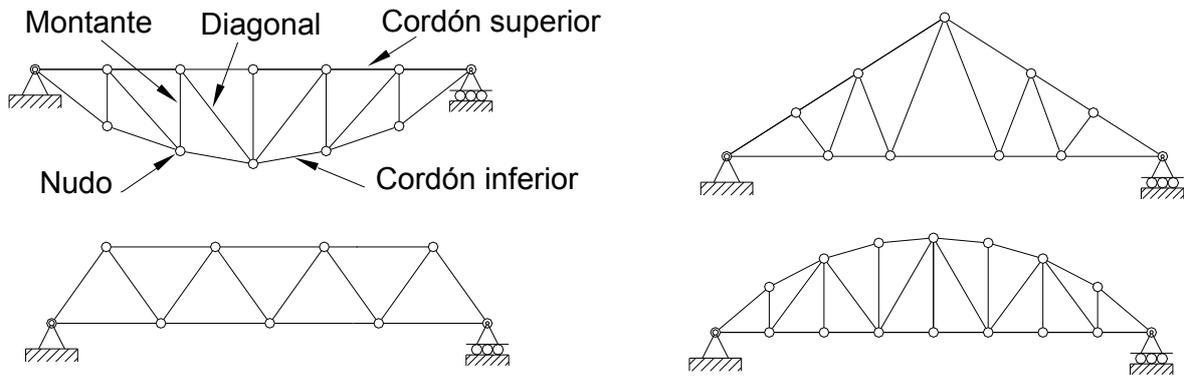


fig. 2

Nudos o uniones

El lugar al que concurren y se conectan las barras se denomina nudo o unión. En los reticulados metálicos está constituido por una chapa metálica a la que se sueldan, remachan o abulonon las mismas, aunque también puede conseguirse la unión sin utilizar la chapa metálica, soldando las barras entre sí. En las de madera la unión se consigue por medio de clavadura o con bulones, con o sin piezas metálicas especiales. En las de hormigón existe continuidad y son muy rígidas.

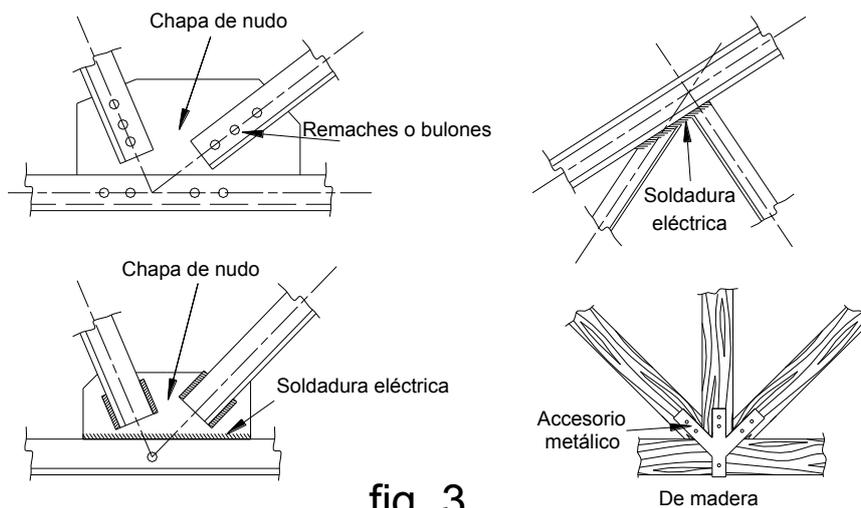


fig. 3

Punto de aplicación de las cargas

En general las barras que componen una estructura reticulada son delgadas y en consecuencia incapaces de soportar cargas transversales a su eje, por lo que todas las cargas deben ser aplicadas en las uniones (nudos) y no en las propias barras. Asimismo el peso de la barra (si se lo tiene en cuenta) se aplica por mitades en cada uno de los nudos a los que concurre.

Forma de trabajar las barras

Dado que en la realidad los nudos están constituidos por uniones soldadas, remachadas, abulonadas, clavadas, etc., la flexión del conjunto de la estructura origina también flexión en las barras, debido a la restricción a la rotación que ejercen las uniones.

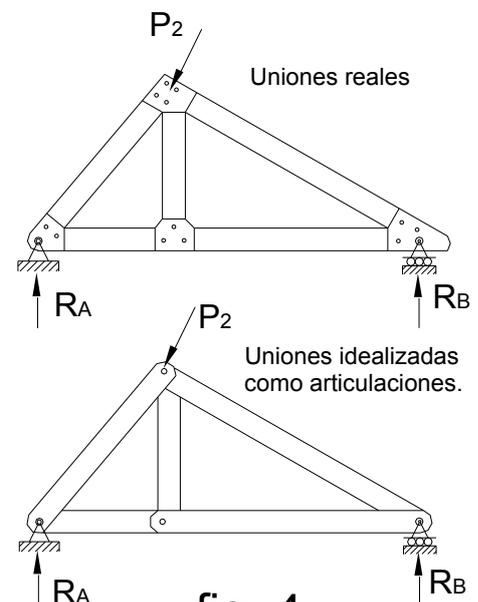


fig. 4

Sin embargo, si las barras están convenientemente dispuestas de modo que sus ejes concurren a un único punto en cada nudo, la influencia de la rigidez del mismo no afecta prácticamente la magnitud de las fuerzas en las barras, por lo que para calcular, puede prescindirse de la rigidez de los nudos y suponer que las barras están articuladas. Se supone entonces, que están unidas por medio de pasadores (articulaciones), lo que simplifica el cálculo en gran medida, ya que de ese modo las barras soportarán solamente tracción o compresión (solicitud axial).

Reticulados planos y espaciales (dirección de las fuerzas en cada caso)

Las estructuras reticuladas pueden ser espaciales o planas. Los reticulados planos están constituidos por barras contenidas en un mismo plano, estando las fuerzas situadas en ese mismo plano. Los reticulados espaciales están constituidos por barras unidas entre sí, formando una configuración en tres dimensiones. Además, las fuerzas que lo solicitan están situadas en cualquier posición en el espacio.

Reticulados planos

En el presente curso se tratarán prioritariamente las estructuras reticuladas planas.

Generación de una chapa rígida de reticulado

Sea la cadena cinemática abierta, constituida por tres chapas rígidas unidas por medio de dos articulaciones que muestra la fig. 5, la que posee 5 grados de libertad de acuerdo al siguiente cálculo:

$3 \times 3 - 2 \times 2 = 5$, el que se interpreta del siguiente modo:

3 chapas x 3 grados de libertad cada chapa – 2 nudos x 2 restricciones cada nudo = 5.

Si se hace rotar a la chapa S_1 alrededor de la articulación 1, a la chapa S_3 alrededor de la articulación 2, y luego se las conecta entre sí en la articulación 3, se habrán quitado al conjunto dos grados de libertad, quedándole en consecuencia sólo 3.

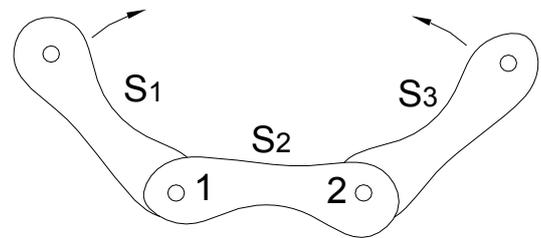


fig. 5

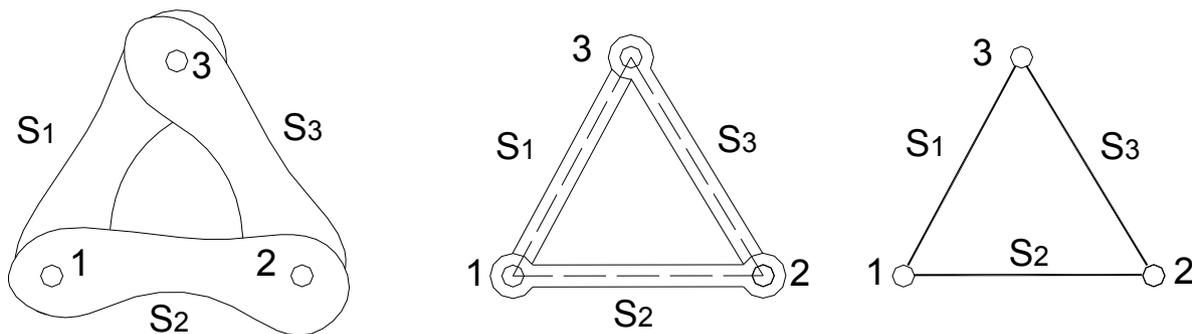


fig. 6

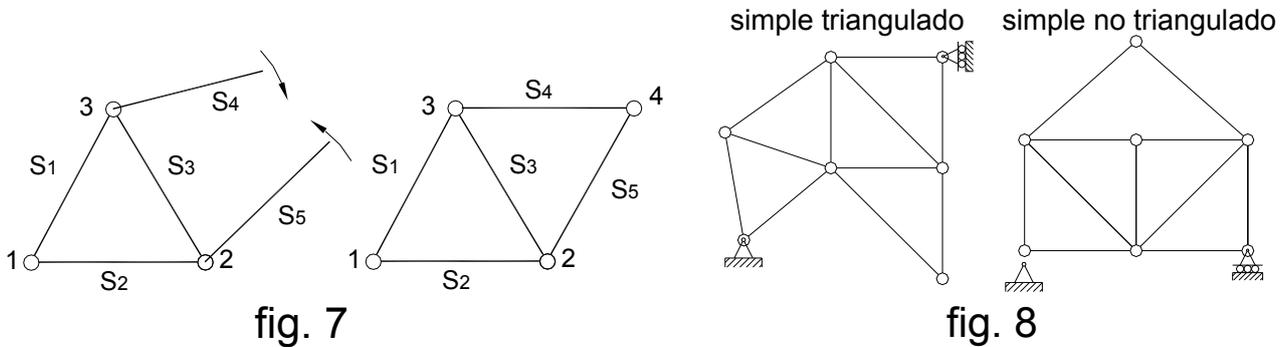
Si en lugar de considerar chapas de forma cualquiera se considera un sistema de tres barras rectilíneas articuladas en sus extremos se obtiene la estructura simple (triángulo) del centro de la fig. 6.

Si se representa sólo a los ejes de cada barra con una línea y las articulaciones por una pequeña circunferencia, se puede simbolizar un triángulo estrictamente indeformable que se comportará como una chapa rígida única con tres grados de libertad.

Reticulado simple

Si desde dos vértices cualquiera del triángulo "1-2-3" (fig. 7), se agregan dos nuevas barras S_4 y S_5 , a las que se conecta entre sí en la unión 4, se obtiene un nuevo conjunto que sigue comportándose como una chapa rígida única, con 3 grados de libertad.

Así por medio del agregado sucesivo de dos barras por vez, se puede generar una chapa rígida de reticulado estrictamente indeformable que cuente con el número necesario de barras de acuerdo al diseño que se necesite y posea tres grados de libertad.



El agregado de cada par de barras puede hacerse desde dos nudos que sean extremos de una misma barra o desde nudos que sean extremos de distintas barras.

En el primer caso se obtiene un reticulado simple triangulado y en el segundo caso un reticulado simple no triangulado como muestra la fig. 8.

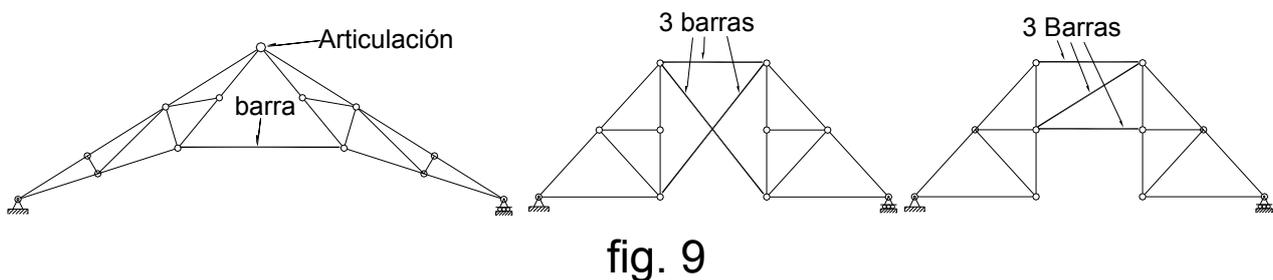
Reticulado compuesto

Se denomina así al reticulado que se genera al vincular dos reticulados simples de modo que una vez unidos conformen un nuevo reticulado estrictamente indeformable.

Para ello se deben agregar 3 condiciones de vinculación interna entre ambos reticulados simples, lo que se puede lograr de dos maneras por medio de:

- a) una articulación y una barra.
- b) tres barras cuyos ejes no concurren un mismo punto.

Se muestran ambos casos en las dos primeras imágenes de la fig. 9.



En esos ejemplos no se podría generar el reticulado comenzando desde un triángulo y agregando sucesivamente pares de barras que se articulen en un nuevo nudo cada vez.

Observación: vinculando de otros modos podrían resultar reticulados simples como se puede observar en la tercera imagen de la fig. 9.

Reticulado complejo

Existen reticulados como el que muestra en la fig.10, que no se puede generar de la forma descrita para el reticulado simple o el compuesto.

Como se puede observar es imposible ubicar una figura triangular. No se puede generar como reticulado simple ni como reticulado compuesto.

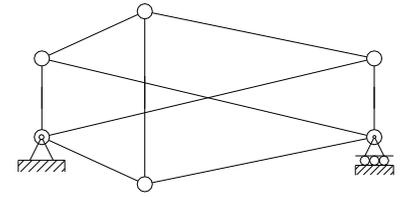


fig. 10

Condición “necesaria” de rigidez para un reticulado

Sea la estructura triangular indeformable como la que se muestra en la fig. 11. Se designa con "b" al número total de barras, siendo para este caso particular $b=3$. Luego, a partir de los vértices 1 y 2 se agregan dos nuevas barras que a su vez se unen entre sí en el nudo 4 como se aprecia en la fig. 7 (que se repite). Se designa con la letra "p" al par de barras agregadas por cada nuevo nudo, en este caso $p=1$. Según la fig. 7, el número total de barras es $b=5$ y el número de nudos es 4.

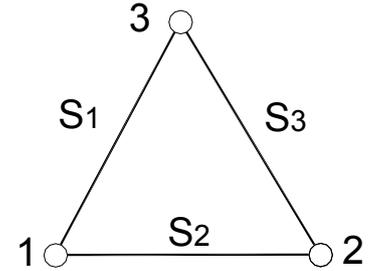


fig. 11

Por lo tanto, para evaluar el número total de barras en un reticulado, en función del número de pares de barras "p" agregados se puede usar la siguiente expresión:

$$b = 3 + 2 \cdot p \quad [1]$$

Para el caso de la fig. 7 es: $b = 3 \text{ barras originales} + 2 \cdot (1 \text{ par de barras agregadas}) = 5$

Por otra parte, el número total de nudos que se representa con "n", es igual a:

$$n = 3 + p \quad [2]$$

que se interpreta del siguiente modo:

$$n = 3(\text{nudos originales}) + p(\text{pares de barras agregados})$$

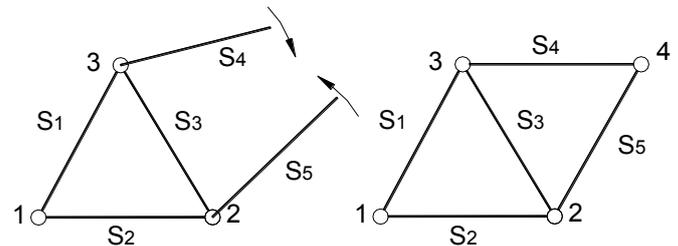


fig. 7

ya que cada par de barras "p" implica el agregado de un nuevo nudo "n".

Despejando "p" de las [1] y [2] e igualando se obtiene:

$$\frac{b-3}{2} = n-3 \quad \Rightarrow \quad b-3 = 2n-6 \quad \Rightarrow \quad b = 2n-3$$

El número total de barras "b" y el número total de nudos "n" quedan relacionados así:

$$\boxed{b = 2 \cdot n - 3} \quad [3]$$

La [3] es una condición necesaria de rigidez interna, que indica que para lograr un reticulado estrictamente indeformable, el número de barras no podrá ser inferior a: $2 \cdot n - 3$.

Para el caso de 3 nudos de la fig. 11, el cálculo es: $2 \times 3 - 3 = 3$, como el número de barras es 3, ello implica que se cumple la condición. Para el caso de 4 nudos de la fig.7 corresponde: $2 \times 4 - 3 = 5$ y el número de barras es 5, ello implica que se cumple la condición. Para el reticulado complejo de 6 nudos de la fig. 10, resulta: $2 \times 6 - 3 = 9$, coincidente con el número de barras.

Si se analizan los reticulados simples, compuestos y complejos ya vistos, haciendo el cálculo se puede comprobar que en todos los casos se cumple dicha condición necesaria.

Se dice que esta condición es necesaria puesto que si se cumple que $b=2n-3$, entonces el reticulado podría ser rígido.

Puede ocurrir que la condición se cumpla pero que el reticulado no sea rígido, debido a una ubicación incorrecta de las barras.

La fig. 12 muestra ese caso: el número de barras es $b = 11$ y el de nudos $n = 7$. La comprobación es: $2n - 3 = 2 \times 7 - 3 = 11$ (se cumple) pero el reticulado no es rígido ya que no lo es el rectángulo "2, 3, 4, 5".

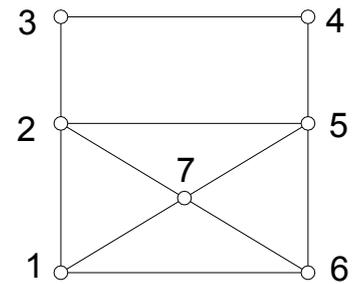


fig. 12

Ocurre que la barra 5-6 (por ejemplo) podría sacarse y agregar una barra que vincule los nudos 3 y 5 (o 2 y 4), haciendo rígida esa parte del reticulado.

Significa entonces que la condición es necesaria pero no suficiente.

Hiperestaticidad interna

Si el número de barras "b" es tal que $b > 2n - 3$ y además las barras están bien organizadas, entonces el reticulado será rígido pero además será hiperestático internamente y las fuerzas en las barras no se podrían calcular con las ecuaciones de equilibrio estático.

En ciertos casos como el que muestra la fig. 13, cuando hay tensores delgados (alambres o cables) que no poseen resistencia a la compresión porque se doblan, el reticulado se puede calcular como isostático.

Para resolver un reticulado hiperestático se debe recurrir a condiciones de deformación (cambios de longitud de las barras por la acción de las fuerzas), caso que no se trata en este curso.

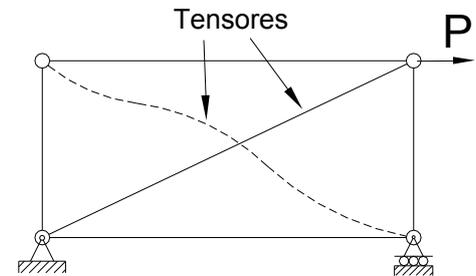


fig. 13

Importante: aunque el reticulado sea hiperestático interno, si está isoestáticamente vinculado a tierra, entonces se podrán calcular las reacciones de apoyo con las ecuaciones de equilibrio estático aplicadas a las fuerzas exteriores.

Esfuerzos en barras

Las barras están en realidad conectadas por medio de remachadura, soldadura u otros medios de unión, pero por lo ya expuesto se supondrá que las conexiones se efectúan por medio de pasadores (articulaciones) sin frotamiento.

Entonces, para el análisis de la estructura se reemplaza al reticulado físico real por uno ideal que consiste en un sistema de barras contenidas en un plano y unidas por sus extremos mediante pasadores sin fricción (nudos) en los que se aplican las fuerzas exteriores (tanto activas como reactivas) estando todas ellas en el mismo plano del reticulado.

En estas condiciones ideales, cada barra está sometida a un esfuerzo de tracción o compresión (la barra trata de alargarse o acortarse) sin flexión (sin encorvarse), y en consecuencia a cada barra se le colocará una fuerza en cada extremo.

Estas fuerzas tienen la misma recta de acción (coincidente con el eje de la barra), la misma intensidad y sentidos opuestos como muestra la fig. 14.



fig. 14

Por el principio de acción y reacción, las acciones mutuas entre las barras y el pasador estarán constituidas por fuerzas iguales y contrarias.

Por lo tanto, a una estructura de reticulado se la puede suponer como constituida por:

- Un conjunto de barras solicitadas por fuerzas iguales, colineales y opuestas.
- Un conjunto de pasadores (pernos de las uniones) cada uno sometido a un sistema de fuerzas concurrentes, coplanares y de direcciones conocidas.

En la fig. 15 se ilustra dicho detalle.

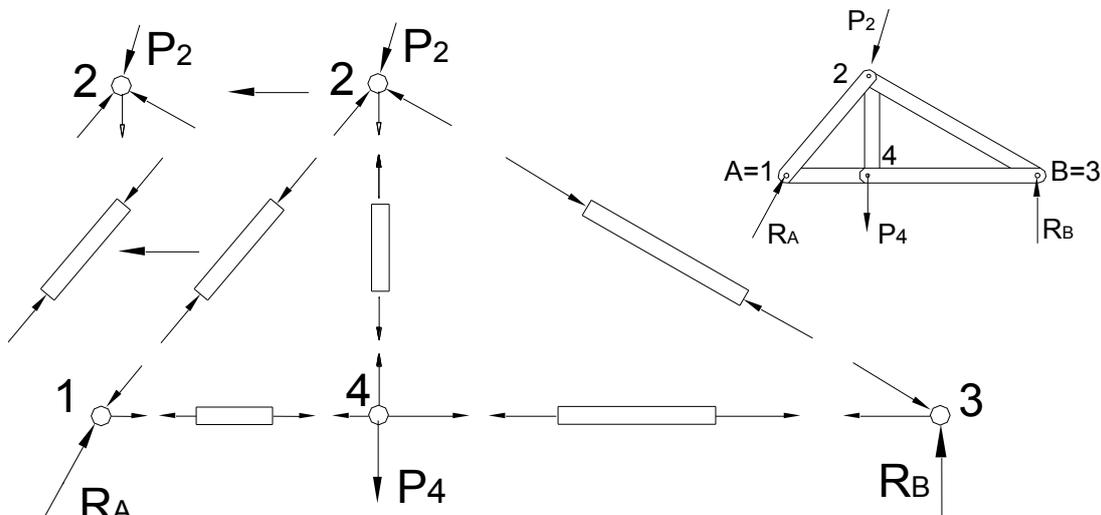


fig. 15

Resolución de sistemas reticulados planos

Hipótesis admitidas:

- Las barras son de eje recto y están contenidas en un único plano.
- Los nudos son articulaciones sin frotamiento.
- Las fuerzas activas y reactivas están contenidas en el mismo plano de la estructura y aplicadas exclusivamente en las uniones.
- Las barras se suponen sometidas únicamente a esfuerzos axiales de tracción o de compresión.

Incógnitas

Debido a que la geometría del reticulado es un dato del problema, se conocen entonces las rectas de acción de todas las fuerzas (ejes de las barras).

Se supone que previamente se calculan las reacciones de vínculo de la estructura.

La resolución consiste entonces en el cálculo de la intensidad de las fuerzas en las barras y en determinar si las mismas están traccionadas o comprimidas.

Métodos

Se utilizan básicamente dos:

- Método de los nudos que analiza el equilibrio de cada pasador.
- Método de las secciones que analiza el equilibrio de una parte de la estructura.

Método de los nudos o uniones

Como la estructura reticulada está en equilibrio en su plano, cada pasador como el nudo 2 de la fig. 16 debe también encontrarse en equilibrio. En consecuencia, el método consiste en establecer el equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre cada pasador, teniendo en cuenta que son todas concurrentes a un mismo punto.

Esto puede concretarse descomponiendo al reticulado (cargado con todas las fuerzas exteriores, tanto activas como reactivas) y haciendo el diagrama de cuerpo libre para cada pasador (nudo).

Entonces, en cada pasador actuará un sistema de fuerzas coplanares concurrentes, algunas de las cuales serán conocidas, pero habrá otras de las que sólo se conocerá su recta de acción.

Para que un sistema de fuerzas concurrentes se encuentre en equilibrio es necesario y suficiente que su resultante "R" sea nula ($R = 0$), lo que puede expresarse analíticamente con la condición de que la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre ambos ejes coordenados sea nula: ($\sum X_i = 0$) y ($\sum Y_i = 0$).

Entonces en cada pasador (nudo o unión) sólo se pueden plantear dos ecuaciones (lo que permitirá determinar sólo dos incógnitas). Por lo tanto para resolver el reticulado se deben considerar uno a uno los nudos a los que concurren no más de dos barras con esfuerzos desconocidos, no obstante, algunas excepciones se verán en la práctica.

En resumen, el "Método de los nudos" consiste en considerar que en cada pasador del reticulado actúa un sistema de fuerzas coplanares concurrentes y en equilibrio, cuyas rectas de acción son conocidas, pudiendo ser incógnitas las intensidades de no más de dos de ellas.

Esas incógnitas serán calculadas mediante la utilización de las condiciones de equilibrio de sistemas de fuerzas coplanares concurrentes.

Procedimiento gráfico (para formación conceptual solamente)

Ya en desuso, el procedimiento gráfico es una forma alternativa de calcular los esfuerzos en las barras mediante la utilización del polígono de las fuerzas, el que deriva de la regla del paralelogramo y que no se utilizará por ser mucho más práctico el método analítico.

No obstante el siguiente ejemplo ilustra dicho método para el reticulado de la fig. 17.

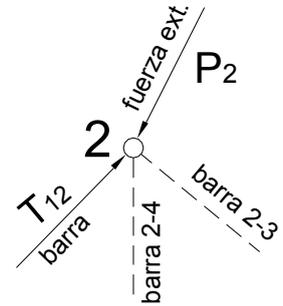


fig. 16

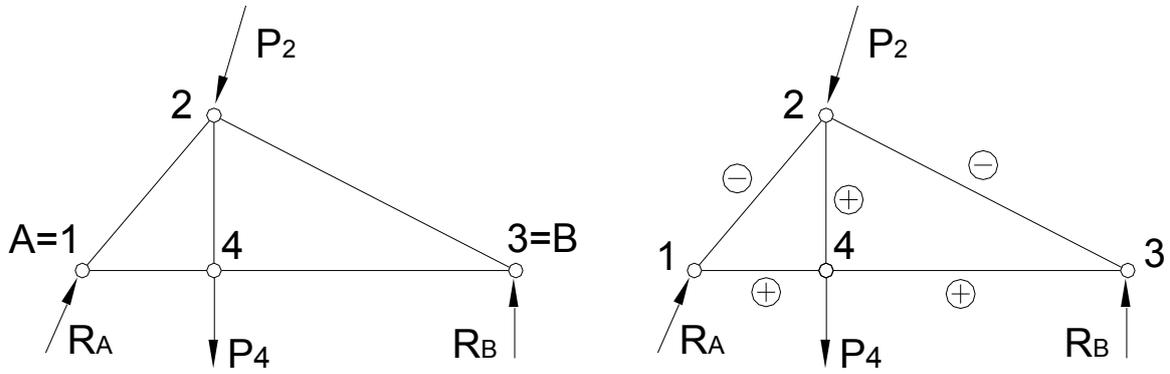


fig. 17

NUDOS	DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE	POLÍGONO DE FUERZAS	ACCIÓN SOBRE EL NUDO	ACCIÓN SOBRE LA BARRA
A=1				
4				
2				
3=B				<p>Este último polígono no es necesario pues son conocidas todas las fuerzas. Sin embargo sirve para comprobación.</p> <p>Convención de signos: TRACCIÓN: (+) COMPRESIÓN: (-)</p>

Procedimiento gráfico de Cremona: como la resolución de los nudos en forma aislada y sin un ordenamiento no resultaba muy conveniente, se idearon procedimientos como el de Cremona con el cual resultaba una sola construcción en la que quedaban reunidos todos los polígonos de fuerzas parciales mostrados en el cuadro anterior, logrando una figura mucho más condensada, en la que cada fuerza se representaba una sola vez. Dicho procedimiento se puede consultar en la mayoría de los libros clásicos de estática.

Procedimiento analítico

Como en cada nudo actúa un sistema de fuerzas concurrentes, al igual que para el método gráfico es necesario previamente resolver las reacciones de vínculos y representar el diagrama de cuerpo libre eliminando dichos vínculos y colocando reacciones en su lugar.

Como para un sistema concurrente en el plano, sólo se pueden plantear dos ecuaciones de equilibrio, entonces no podrá haber más de dos incógnitas. Ello implica que para cada nudo que se analice no podrán concurrir más de dos barras cuyos esfuerzos sean desconocidos.

Análisis de los nudos

Se debe calcular la resultante de las fuerzas conocidas que concurren al nudo, tanto exteriores como de otras barras previamente resueltas (fig. 19).

Dichas fuerzas tendrán una resultante $R = \sum F_i$ cuyas componentes cartesianas son $X = \sum F_i \cdot \cos \alpha_i$; $Y = \sum F_i \cdot \sin \alpha_i$. Las F_i podrían ser cargas P_i o fuerzas de barras T_i .

Luego a R se la debe equilibrar con las fuerzas desconocidas T_1 y T_2 . Es conveniente suponer que los sentidos de T_1 y T_2 son tales que producen tracción en las respectivas barras, por lo que se dibujan "saliendo del nudo". Si al resolver se obtienen valores negativos para T_1 y/o T_2 , entonces significará que la correspondiente barra se encuentra comprimida.

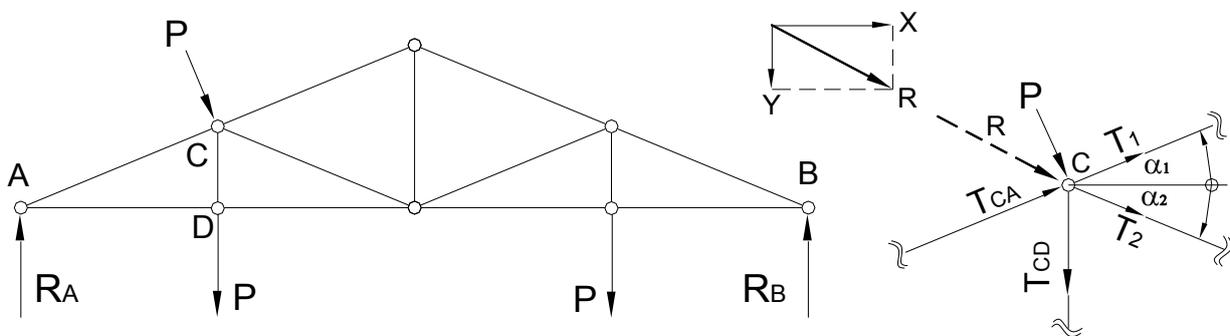


fig. 19

Resulta entonces:

$$\cos \alpha_1 \cdot T_1 + \cos \alpha_2 \cdot T_2 + X = 0 \quad [1]$$

$$\sin \alpha_1 \cdot T_1 + \sin \alpha_2 \cdot T_2 + Y = 0$$

Donde X e Y son las componentes de R. Las expresiones [1] se pueden escribir así:

$$\cos \alpha_1 \cdot T_1 + \cos \alpha_2 \cdot T_2 = -X \quad [2]$$

$$\sin \alpha_1 \cdot T_1 + \sin \alpha_2 \cdot T_2 = -Y \quad (*) \text{ tener en cuenta que } \alpha_2 \text{ es negativo en la fig. 19.}$$

De este sistema de dos ecuaciones se pueden obtener las dos incógnitas T_1 y T_2 que son las intensidades de las fuerzas en las barras. Si un valor resulta positivo la barra correspondiente se encuentra traccionada, caso contrario está comprimida.

Se puede plantear el sistema [2] en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Premultiplicando ambos miembros por la inversa de la matriz de las direcciones de las barras queda:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot (-1) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

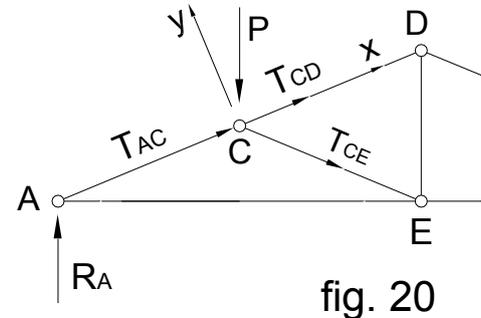


fig. 20

Simplificación de ecuaciones para cálculo manual

No utilizando tal solución matricial y con el fin de que no resulten dos ecuaciones con dos incógnitas simultáneas, en cada nudo se pueden “alinear” los ejes de referencia, de modo que al plantear una de las ecuaciones de proyección no intervenga una de las incógnitas.

Por ejemplo, en el caso del nudo “C” de la fig.20, si ya se conoce T_{AC} y se pretende calcular T_{CD} y T_{CE} , entonces conviene disponer los ejes (x, y) como se muestra de modo que al proyectar sobre el eje “y” no intervenga la incógnita T_{CD} , pudiendo resolverse T_{CE} independientemente. Luego, al proyectar sobre el eje “x” se podrá resolver T_{CD} ya que se conoce T_{CE} previamente calculada.

Barras que no trabajan

Previo a comenzar el procedimiento se debe prestar atención examinando primero si no hay barras que en forma evidente no soportan esfuerzo.

En el ejemplo de la fig. 18 se comprueba fácilmente que las barras AC y CD no pueden transmitir fuerzas, lo que se evidencia al pretender equilibrar el nudo “C”, ya que en la dirección horizontal sólo proyecta la fuerza T_{CA} lo que hace que $T_{CA} = 0$, y en la dirección vertical sólo proyecta la fuerza T_{CD} , por lo que $T_{CD} = 0$.

Por tal motivo se puede prescindir de dichas barras quedando los nudos A, B y D en condiciones de ser analizados ya que sólo concurren a cada uno de dichos nudos, dos barras con esfuerzos desconocidos.

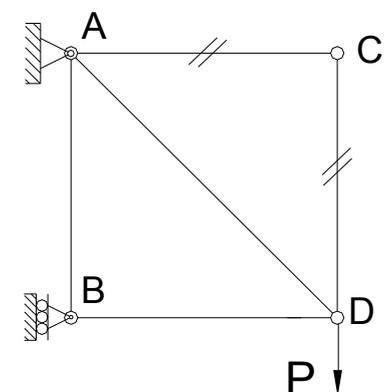


fig. 18

Resolución analítica general planteando un sistema único de ecuaciones

En ciertas situaciones puede ser conveniente recalcular las tensiones en las barras de un reticulado para distintos estados de carga. En tal caso, calcular los esfuerzos en todas las barras por los medios vistos hasta ahora puede ser muy laborioso.

Entonces si “b” es el número de barras del sistema, se puede plantear a partir del equilibrio de los nudos, un sistema de “b” ecuaciones con “b” incógnitas, que debido al gran número de barras que suelen poseer los reticulados, es conveniente resolverlo con medios electrónicos de cálculo, desde una calculadora programable hasta un equipo de computación de acuerdo a la magnitud del sistema de ecuaciones. Es suficiente que se puedan realizar las siguientes operaciones:

- a) Calcular la inversa de una matriz.
- b) Multiplicar dos matrices.

Como se pueden plantear dos ecuaciones de proyección por cada nudo y siendo:

$b = 2n - 3$ ó $2n = b + 3$, resulta entonces que sobrarán 3 ecuaciones. Por lo tanto sólo se plantearán las “b” ecuaciones necesarias, tomando los nudos de modo arbitrario.

Los pasos a seguir son tentativamente los siguientes (el procedimiento está indicado para utilizar una calculadora HP-48G).

- 1) Calcular reacciones de vínculo y esquematizar el diagrama de cuerpo libre, con las fuerzas externas activas y reactivas.

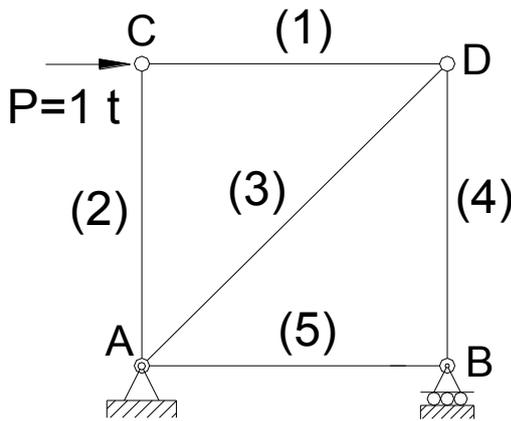


fig. 21

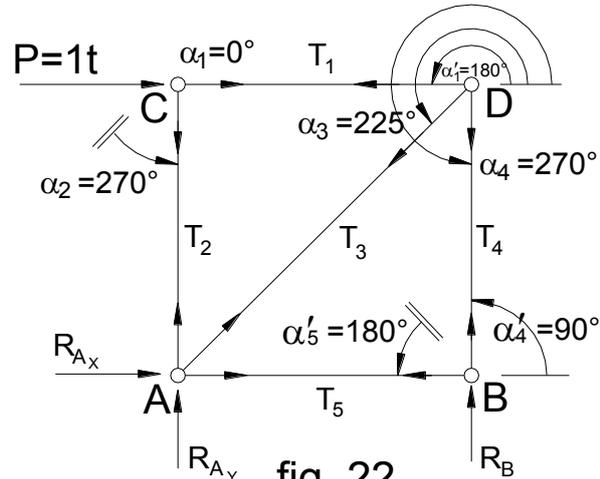


fig. 22

Se identifican los nudos con letras y las barras con números que guardan relación con el nombre de la fuerza que solicita a la barra. Por ejemplo: barra 1, Fuerza T_1 . Dicho subíndice o número será luego el número de la columna correspondiente a ese esfuerzo en la matriz de la estructura.

- 2) Convenimos en suponer a priori que todas las barras están traccionadas, lo que implica que todas las flechas tendrán “sentido saliente” del nudo. Si al resolver, algunas de las fuerzas resulta negativa, significará que la barra está comprimida. El esquema de flechas es el indicado en la figura.
- 3) Se plantean las “b” ecuaciones de proyección (equilibrio de nudos) teniendo en cuenta que para cada barra, los nudos de sus extremos tendrán ángulos α_i y $\alpha'_i = \alpha_i + 180^\circ$.
- 4) En cada nudo podría haber dos componentes de fuerza externa (X e Y) a las que consideraremos con el signo correspondiente. Éstas son las proyecciones de las fuerzas externas resultantes en dicho nudo (generalmente hay una o ninguna), incluidas las reacciones.
- 5) Recorriendo los nudos en el orden C, D y B (en este caso se decidió no considerar al nudo A) se obtiene el siguiente cuadro que sintetiza el sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas:

		BARRAS						
		<<						>>
Ec.	Nudo	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	Fza. ext.	
1	C	$\cos \alpha_1 T_1$	$\cos \alpha_2 T_2$				$X_C = 1$	
2	C	$\sin \alpha_1 T_1$	$\sin \alpha_2 T_2$				$Y_C = 0$	
3	D	$\cos \alpha'_1 T_1$		$\cos \alpha_3 T_3$	$\cos \alpha_4 T_4$		$X_D = 0$	
4	D	$\sin \alpha'_1 T_1$		$\sin \alpha_3 T_3$	$\sin \alpha_4 T_4$		$Y_D = 0$	
5	B				$\cos \alpha'_4 T_4$	$\cos \alpha'_5 T_5$	$X_B = 0$	

Nota: las reacciones no participaron por el hecho casual de no tomar el nudo "A" y no utilizar la ecuación de proyección vertical en el nudo "B".

El sistema de ecuaciones anterior puede ser escrito en forma de matriz, como se muestra a continuación:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha_1 & \operatorname{sen} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_1' & 0 & \cos \alpha_3 & \cos \alpha_4 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha_1' & 0 & \operatorname{sen} \alpha_3 & \operatorname{sen} \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_4' & \cos \alpha_5' \end{bmatrix}}_{[A]} \times \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}}_{[T]} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ X_D \\ Y_D \\ X_B \end{bmatrix}}_{[K]} \quad (-1)$$

Simbólicamente queda: $[A] \cdot [T] = [K] \quad \therefore [T] = [A]^{-1} [K]$

Reemplazando los valores se obtiene para este reticulado lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -0,707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,707 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-1) \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1,41 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observación: la matriz [A] describe la estructura reticulada propiamente dicha, mientras que la matriz [K] fija el estado de cargas externas incluidas las reacciones. Ello permite recalculer el reticulado con distintos estados de carga con relativa facilidad, ya que solo se debe modificar [K], recalculando las reacciones.

Alternativa

Si se pretende resolver las componentes reactivas dentro del sistema de ecuaciones, entonces se deben utilizar los "n" nudos para generar 2n ecuaciones con las que se resuelven b+3 incógnitas: las "b" barras más 3 incógnitas de los vínculos.

El planteo, en el que las filas 1ª y 2ª corresponden al nudo "C", las 3ª y 4ª al nudo "D", las 5ª y 6ª al nudo "B", y las 7ª y 8ª al nudo "A", es el siguiente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[A]} \times \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ R_{AX} \\ R_{AY} \\ R_B \end{bmatrix}}_{[T]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[K]} \quad (-1)$$

Las ecuaciones de las filas 6, 7 y 8 (3 últimas) corresponden a la proyección vertical (en B) de la reacción R_B y a ambas proyecciones en A, de la reacción R_A .

Si en los nudos A ó B (apoyos) existiesen cargas se debería incorporar en la matriz K.

Se observa que la matriz T (incógnitas) incluye tanto las tensiones en las barras como así también las componentes reactivas.

Luego se hace: $[T] = [A]^{-1} \cdot [K]$

y se obtienen: $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, R_{AX}, R_{AY}$ y R_B .

Ventaja: al cambiar las cargas no se recalculan reacciones las que se resuelven automáticamente al calcular [T].

Método de las secciones

Para calcular las fuerzas en las barras de un reticulado, puede emplearse el mismo principio general de equilibrio de fuerzas no concurrentes analizadas en el tema “Fuerzas”, siendo válidas cualquiera de las posibilidades que se plantearon para establecer el equilibrio.

El método consiste en “cortar” (hipotéticamente) al reticulado en dos partes con una sección n–n como muestra la fig. 23. Se supone que se conocen las fuerzas exteriores activas y que previamente se han calculado las reacciones en los vínculos (no en todos los casos la totalidad de ellas si no hiciese falta).

Una de las partes, por ejemplo la izquierda, deberá quedar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores que actúan sólo sobre ella, como así también de las fuerzas F_a , F_b y F_c que la parte derecha le transmite a través de las barras cortadas.

El problema podrá resolverse si la sección corta a un máximo de tres barras. Hay excepciones como por ejemplo en las vigas “K” que se analizarán en la práctica.

Además, los ejes de las tres barras no deben concurrir a un mismo punto ni tampoco ser paralelos, ya que en dicho caso solamente se podrían plantear dos ecuaciones que no podrían resolver las tres incógnitas, resultando entonces indeterminado.

Sobre la base de este principio se han desarrollado procedimientos gráficos y analíticos.

Ventaja: el método de las secciones presenta la ventaja que permite calcular solamente las fuerzas en algunas barras de una sección ubicada en cualquier lugar del reticulado. En cambio, con el método de los nudos se debe seguir un itinerario a partir de un lugar donde hay sólo dos barras (fuerzas) incógnitas hasta llegar a las barras de interés. El método de las secciones permite inclusive calcular aisladamente la fuerza en una sola barra.

Breve comentario sobre el procedimiento gráfico.

Dos procedimientos gráficos muy difundidos y que progresivamente han entrado en desuso, se denominan: “método de Culman” y “método de Ritter”.

El de Culmann es enteramente gráfico basado en equilibrar la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la parte aislada del reticulado, con las tres fuerzas desconocidas F_a , F_b y F_c (fig. 23) contenidas en los ejes de las respectivas barras cortadas. El procedimiento se concreta en dos pasos, haciendo uso de dos triángulos de fuerzas en forma

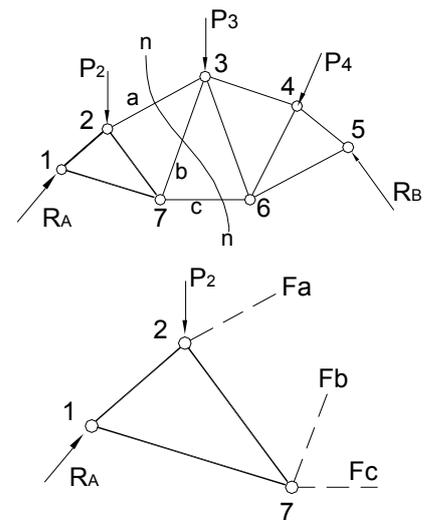


fig. 23

consecutiva. De los triángulos así generados, pueden obtenerse las intensidades de las fuerzas F_a , F_b y F_c . Los sentidos de dichas fuerzas serán los adecuados para equilibrar. Las 3 rectas de acción no deben ser concurrentes a un punto.

El de Ritter hace una combinación. Se miden en el dibujo (de la estructura a escala) las dimensiones de los brazos de palanca de cada fuerza, para luego plantear y resolver simples ecuaciones de momento con respecto a oportunos "centros de momento" que permitan eliminar a dos incógnitas en cada cálculo.

Procedimiento analítico.

Recordar que para plantear el equilibrio de un sistema coplanar de fuerzas no concurrentes, eran válidas cualquiera de las cuatro alternativas, referidas a un sistema coordenado (x,y) en el que se eligen tres puntos A, B y C. Para más detalles consultar el apunte "Fuerzas".

Se debe optar por alguno de los siguientes esquemas de equilibrio, de acuerdo a la conveniencia que se presente para el caso a resolver.

- 1) $\Sigma X_i=0$ $\Sigma Y_i=0$ $\Sigma M_A=0$ (sin condiciones)
- 2) $\Sigma X_i=0$ $\Sigma M_A=0$ $\Sigma M_B=0$ ó
 $\Sigma Y_i=0$ $\Sigma M_A=0$ $\Sigma M_B=0$ (ambas con condiciones)
- 3) $\Sigma M_A=0$ $\Sigma M_B=0$ $\Sigma M_C=0$ (con una condición)

que permite resolver las tres incógnitas F_a , F_b y F_c .

Por ejemplo, si hay dos barras de dirección paralela forzosamente se debe recurrir a un esquema que incluya una ecuación de proyección, ubicando a uno de los ejes (x o y) paralelo a las dos barras paralelas, de modo que al proyectar sobre el otro eje, no intervengan las incógnitas de dichas barras. La fig. 24 muestra ese caso al calcular F_b .

Se puede usar: $\Sigma Y_i=0$ $\Sigma M_3=0$ $\Sigma M_7=0$. Con la primera se resuelve F_b , mientras que con las dos ecuaciones de momento se resuelven F_a y F_c (tener en cuenta que se conocen las coordenadas de las articulaciones "3" y "7").

En cambio si se quieren resolver las barras seccionadas en la fig. 23 (repetida de pág.15), se puede utilizar el esquema "1":

$$\Sigma X_i=0 \quad \Sigma Y_i=0 \quad \Sigma M_7=0.$$

Con la tercera ecuación (de momento) con respecto a la articulación "7" se calcula F_a sin que intervengan F_b y F_c . Con la segunda se obtiene F_b sin que intervenga F_c (horizontal en este ejemplo) y con la primera se podrá obtener F_c , teniendo en cuenta que F_a y F_b ya estarían calculadas.

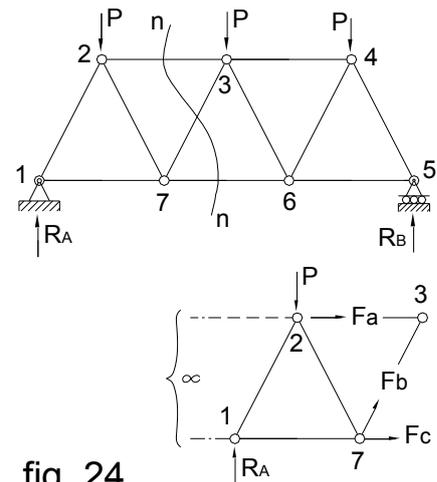


fig. 24

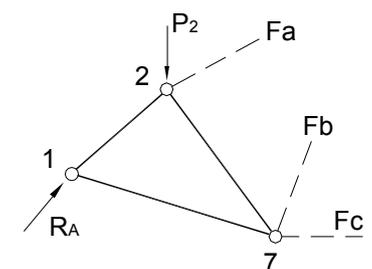


fig. 23 (repetida)

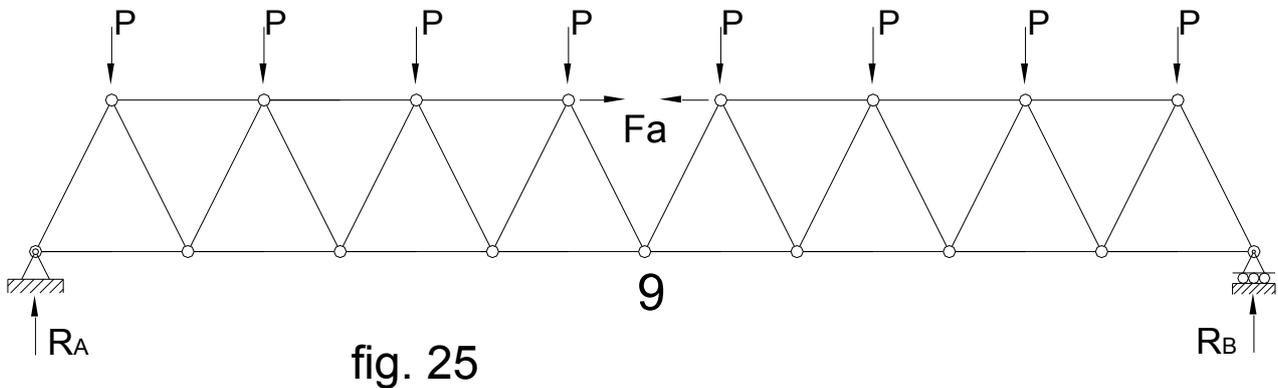
Caso de cálculo de una sola barra:

Suponiendo que para el reticulado de la fig. 25 se requiera calcular solamente la barra mostrada (que es la más comprimida del cordón superior) para verificarla a pandeo (ver tema correspondiente). Por el método de los nudos deberían hacerse muchos cálculos hasta llegar a la barra en cuestión.

Entonces se puede cortar solamente dicha barra, con lo que las dos partes del reticulado quedarán articuladas en el nudo "9" y el reticulado se transformará en una cadena de dos chapas articuladas en "9".

Para restituir el equilibrio se debe incorporar una fuerza F_a con la dirección de la barra cortada, a la que se le asigna por convención el sentido “saliendo del nudo”.

Para calcular F_a se puede usar una ecuación de momento con respecto al nudo 9. En la ecuación intervendrán todas las fuerzas que actúan sobre la parte izquierda del reticulado, incluyendo a la fuerza incógnita F_a . En este caso seguramente se obtendrá un valor (-) para F_a lo que implicará que es opuesta al sentido supuesto, con lo que la barra estará comprimida; recordar que se trata de la fuerza que la barra ejerce sobre el nudo.



Este material de apoyo didáctico, cuya versión original fuera realizada por el ex-profesor de la cátedra “Estabilidad”, Ing. Guillermo Pons, fue actualizado y adaptado para uso interno y exclusivo de la asignatura, en la carrera Ingeniería Eléctrica de la Facultad Regional Santa Fe de la U.T.N.

Colaboraron en la digitalización del presente trabajo, los alumnos Colombo P. y Villata D. del curso 2005.

Profesor: Ing. Hugo A. Tosone.
 Ayudante de TP: Dr. Federico Cavalieri.
 Ayudante no graduado: Alumno Ariel S. Loyarte.

Marzo de 2012.