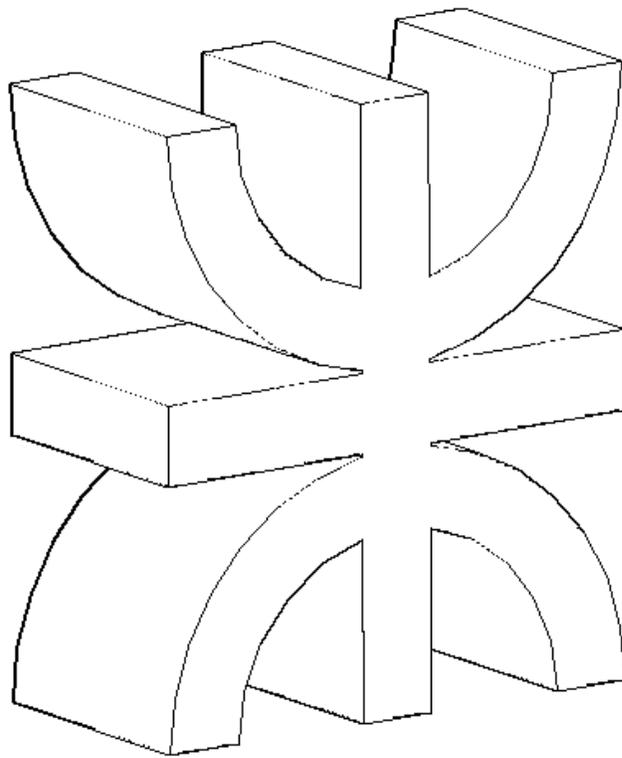


# Unidad N°5

## ESFUERZOS CARACTERISTICOS

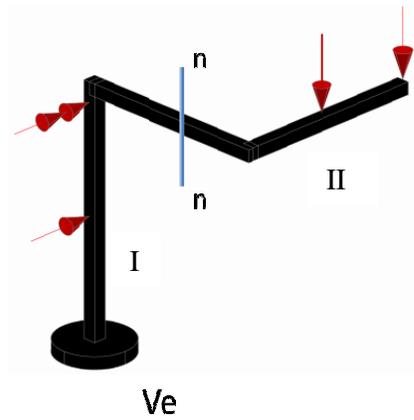
Estabilidad I – Universidad Tecnológica Nacional  
Facultad Regional Buenos Aires



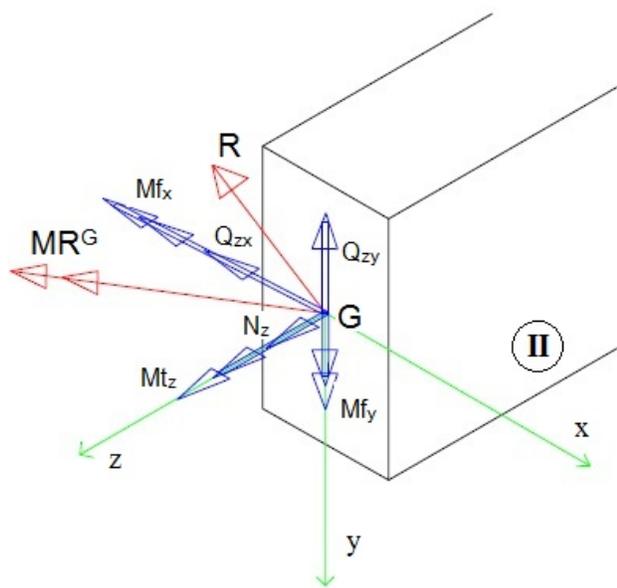
### ESFUERZOS INTERNOS EN SISTEMAS ESPACIALES

**Introducción**

Sea una estructura espacial como la mostrada en la figura, sometida a un conjunto de cargas o fuerzas espaciales activas exteriores que configuran un sistema Gauso (sistema general de fuerzas que no admite resultante única); estructura que además está en equilibrio a través de su vinculación física (sistema de cargas reactivas exteriores).



Si consideramos una sección genérica n-n que divide a la estructura en dos partes, la I y la II (algunos autores llaman izquierda y derecha), quedan también dos sistemas de fuerzas generalizados que incluyen las reacciones de vínculo externo Ve.



Si reducimos al baricentro de la sección genérica n-n los sistemas de fuerzas I y II, obtenemos dos binomios de reducción. Cada uno es equivalente al sistema que lo define y entre ambos constituyen un sistema nulo, ya que toda la estructura está en equilibrio.

Si consideramos sólo el binomio de reducción de la parte I y lo aplicamos en el baricentro G de la cara derecha de la parte II y proyectamos las componentes de cada vector (R y MR<sup>G</sup>) sobre la terna izquierda indicada, obtenemos las denominadas características, reacciones de vínculo internas o esfuerzos internos en la sección n-n:

$R_z$ será $\rightarrow N_z$	$MR_z^G$ será $\rightarrow Mt_z$
$R_x$ será $\rightarrow Q_{zx}$	$MR_x^G$ será $\rightarrow Mf_x$
$R_y$ será $\rightarrow Q_{zy}$	$MR_y^G$ será $\rightarrow Mf_y$

### ESFUERZOS INTERNOS EN SISTEMAS PLANOS

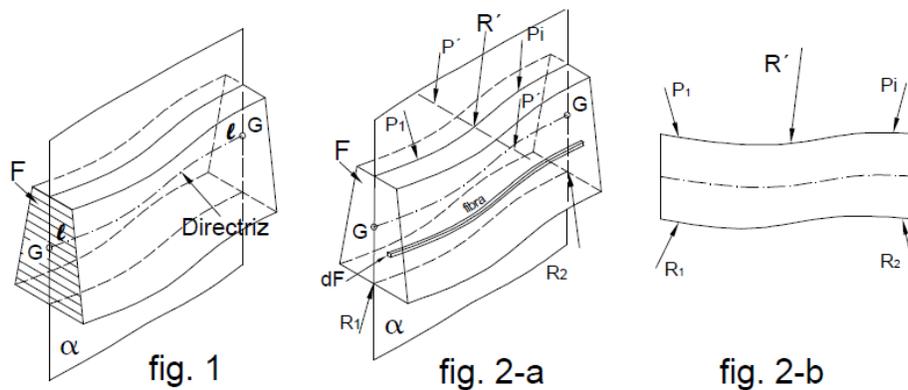
**Introducción**

Sea la línea I-I denominada curva directriz (contenida en un plano  $\alpha$ ) y la figura de área F perpendicular a dicha directriz, de modo que el baricentro G de la figura pertenezca a dicha línea como indica la figura 1.

Si la figura de área F se desplaza por la directriz, entonces se generará un sólido denominado usualmente "barra". El largo suele ser mucho mayor que la mayor dimensión de la sección (la figura 1 no está en las proporciones reales).

Si la figura F es simétrica con respecto al plano  $\alpha$ , el sólido generado, también será simétrico respecto de  $\alpha$ .

Si se considera además un área elemental dF que pertenezca a F, si éste se desplaza paralelamente a la directriz, generará un sólido elemental al que se denominará "fibra", como muestra la figura 2-a.



Cuando actúan fuerzas transversales y/o cuplas que encorvan a la barra, ella adquiere el nombre de viga.

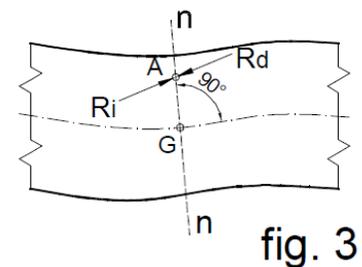
Si todas las fuerzas (o sus resultantes) - tanto activas como reactivas - que actúan sobre el sólido están contenidas en el plano  $\alpha$ , entonces, para realizar el estudio del equilibrio, se puede reemplazar al sólido por una chapa (materialización del plano de simetría) denominada de "alma llena", solicitada por las cargas contenidas en el plano  $\alpha$ , figura 2-b.

**MÉTODO DE LAS SECCIONES PARA LOS ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS:**

Sea la chapa (que reemplaza al sólido) representada en la figura 3 y una sección cualquiera como la n-n perpendicular a la directriz en ese punto.

La chapa está solicitada por un sistema de fuerzas en equilibrio que se han reemplazado por un sistema equivalente ( $R_i$  y  $R_d$ ).

La  $R_i$  es la resultante (sistema equivalente) de todas las fuerzas exteriores (activas y reactivas) que actúan en la porción de sólido ubicado a la izquierda (o a uno de los lados) de la sección n-n y  $R_d$  es la resultante de las que actúan en la otra porción (en este caso la porción de la derecha).

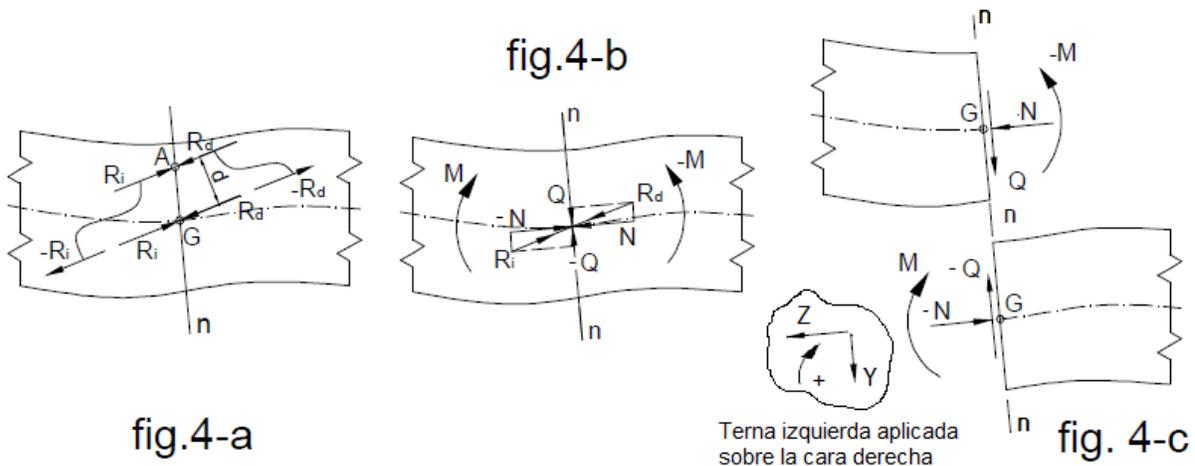


En adelante y para simplificar se dirá simplemente "las fuerzas que actúan a la izquierda" o "las que actúan a la derecha".

Por razones de equilibrio ambas resultantes son colineales, tienen igual módulo y sentido contrario e interceptan a la recta n-n en el punto A, el que puede o no pertenecer a la sección. Alternativamente y como caso particular, podría ocurrir que las fuerzas a uno u otro lado de la sección n-n se hubieran reducido a sólo un par de momento M.

Si las resultantes izquierda y derecha se trasladan al baricentro G de la sección, se obtienen dos sistemas equivalentes a las fuerzas  $R_i$  y  $R_d$ , constituidos cada uno de ellos por una fuerza cuya recta de acción contiene al baricentro G, y un "par" de momento M, de valor igual al producto de la respectiva resultante por la distancia "d" que separa a ambas rectas de acción, siendo:

$$M = R_i \times d, \text{ figuras 4a y 4b.}$$



A las fuerzas  $R_i$  y  $R_d$  aplicadas en  $G$  se las puede a la vez reemplazar por sus componentes  $N$  (normal al plano de traza  $n-n$ ) y  $Q$  (contenida en dicho plano) como se indica en la figura 4b. Nótese en la figura 4c que, si se toma por separado a cada una de las partes en que puedo suponer dividida a mi viga (izquierda o derecha), para restituir el equilibrio de cada tramo debo aplicar, en el baricentro de la sección considerada, el binomio de reducción (resultante de reducción + momento resultante de reducción) de la parte eliminada. Es por ello que, para aplicar correctamente los signos según la terna en la resolución de problemas, si se considera el binomio de reducción de la parte izquierda, debo considerar los signos que me determina la terna considerada aplicada sobre la cara derecha, para mantener el equilibrio.

### ESFUERZOS INTERNOS Ó ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS en SISTEMAS PLANOS:

Se denominará:

- **Momento flector:** al conjunto de los pares  $M$  y  $-M$
- **Esfuerzo de corte:** al conjunto de las dos fuerzas  $Q$  y  $-Q$
- **Esfuerzo normal:** al conjunto de las dos fuerzas  $N$  y  $-N$

#### Momento flector:

Se denomina “momento flexor o flector” en una sección, a la acción producida por los dos pares que actúan sobre las partes del sólido ubicados a uno y otro lado de la sección, cuyos momentos  $M$  y  $-M$  corresponden a los momentos con respecto al baricentro  $G$ , de las resultantes izquierda y derecha respectivamente.

Signo: será positivo si el momento de la resultante de la parte izquierda aplicada en el baricentro  $G$  de la cara derecha es positivo para la terna considerada, o alternativamente el signo opuesto del momento de la resultante derecha.

#### Esfuerzo de corte:

Se denomina “esfuerzo de corte” en una sección, a la acción del conjunto de las dos fuerzas  $Q$  y  $-Q$ , cuyas rectas de acción se encuentran contenidas en el plano de la sección y cuyas intensidades corresponden a las proyecciones de las resultantes izquierda y derecha sobre el plano de la sección.

Signo: se adoptará el signo correspondiente al de la proyección de la resultante izquierda sobre la terna aplicada en la cara derecha, o alternativamente el signo opuesto de la proyección de la resultante derecha.

**Esfuerzo normal:**

Se denomina "esfuerzo normal" en una sección (o esfuerzo axial) a la acción del conjunto de las dos fuerzas  $N$  y  $-N$  aplicadas en el baricentro  $G$  de la sección, cuyas rectas de acción son perpendiculares al plano de la misma y cuyas intensidades corresponden a las proyecciones de la resultante izquierda o derecha, sobre la dirección perpendicular a la sección.

Signo: el signo del esfuerzo normal se considerará positivo si la fuerza "tira" de la sección (tracción) y negativo si "empuja" contra la sección (compresión). Será positivo si la  $R_z$  de todas las fuerzas aplicadas en el lado izquierdo, aplicada sobre la terna considerada en la cara derecha da positiva, o alternativamente del signo opuesto para la  $R_z$  del lado derecho.

Al momento flector, al esfuerzo de corte y al esfuerzo normal se lo conoce con el nombre de "esfuerzos internos" o "**esfuerzos característicos**" en estos sistemas planos.

En consecuencia los tres esfuerzos característicos constituyen las reacciones internas en una sección, provocadas por las fuerzas exteriores (activas y reactivas).

**OPERATORIA:**

Con el fin de facilitar el cálculo, se establecen las siguientes definiciones operativas para los esfuerzos característicos en una sección, las que surgen de las definiciones anteriores.

Tomando como referencia la terna izquierda colocada sobre la cara derecha, se definen:

**Momento flector:** Está dado en valor y signo por la suma algebraica de los momentos (con respecto al baricentro  $G$ ) de todas las fuerzas que actúan sobre la porción del sólido ubicado a la izquierda de la sección considerada. Alternativamente se puede considerar la suma (con signo opuesto) de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la porción derecha.

**Esfuerzo de corte:** Está dado en valor y signo por la suma algebraica de las proyecciones sobre el plano de la sección considerada, de todas las fuerzas de la parte izquierda, o por la suma de las fuerzas de la parte derecha, pero con signo opuesto.

**Esfuerzo normal:** Está dado en magnitud por la suma algebraica de las proyecciones sobre la dirección perpendicular al plano de la sección, de todas las fuerzas ubicadas a la izquierda o a la derecha de la misma. El signo depende del efecto físico que produce: "+" si tracciona y "-" si comprime.

**DIAGRAMAS DE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS (o internos)**

Como los esfuerzos característicos  $M_f$ ,  $N$  y  $Q$  pueden variar en las distintas secciones que componen el sólido (viga por ejemplo), es conveniente poder visualizar su distribución.

A tal fin se los suele representar gráficamente y son los denominados "diagramas de esfuerzos internos", "diagramas de esfuerzos característicos" o simplemente "diagramas de características",

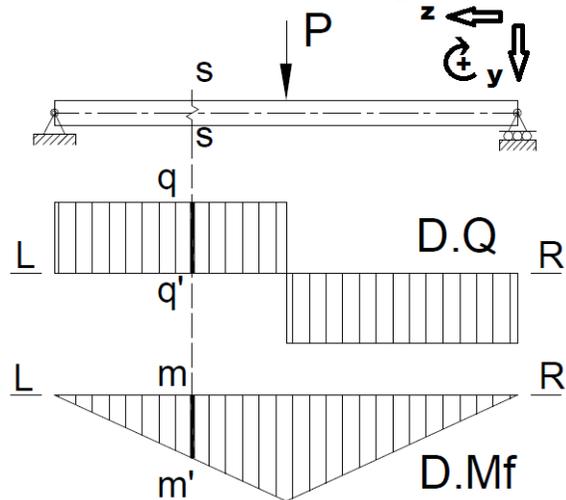
Los diagramas de momento flector ( $D.M_f$ ), de esfuerzo de corte ( $D.Q$ ) y de esfuerzo normal ( $D.N$ ), dibujados en una escala adecuada y convenientemente orientados, permiten visualizar cada esfuerzo característico en magnitud y signo, para cualquier sección del sólido.

De ese modo se pueden rápidamente localizar las secciones donde los mismos presentan máximos, mínimos o inclusive los lugares donde se anulan.

Es por ello que el dibujo de los diagramas, aún realizado a mano alzada, es de suma utilidad para un análisis cualitativo que luego permite calcularlos numéricamente en los lugares de interés. Primeramente consideremos una barra simplemente apoyada con una carga puntual en el medio de la luz.

Para dibujar cada diagrama, se adopta primeramente una línea de referencia, L-R, paralela al eje de la viga (eje z), tal y como se indica en la figura; dibujando además, la terna local adoptada.

Luego, en correspondencia con algunas secciones (llamados puntos singulares: puntos donde existe un cambio en la geometría del eje de la viga o cambio en las cargas) y en dirección **perpendicular** al eje de la viga (nuestra viga en estudio es de eje recto y sección constante por lo que hay un número infinito de secciones perpendiculares al eje de la viga), se representan segmentos proporcionales al valor de la correspondiente característica en esa sección.



Los puntos obtenidos pueden ser unidos con determinados tipos de líneas, que como más adelante se verá, dependen de las cargas que actúan en cada tramo en que se divida al sólido (viga).

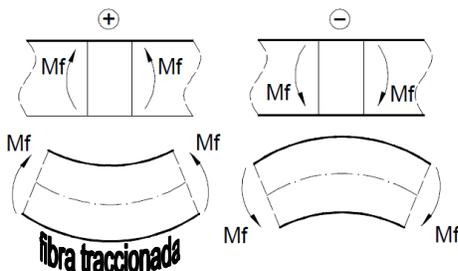
Las líneas así obtenidas representarán cada diagrama de esfuerzo característico.

Se acostumbra rayar los diagramas como indica la figura, con líneas perpendiculares a la línea de referencia (el rayado perpendicular a la barra simboliza los infinitos valores de la característica en cuestión, para las infinitas secciones en que se puede cortar a la barra).

Trazando por una sección cualquiera s-s de la viga, una recta perpendicular a su eje, se obtienen los puntos q, q', m y m'.

Cada segmento comprendido entre esos puntos, interpretado en la escala correspondiente, brinda la magnitud y el signo del esfuerzo característico en esa sección.

Como se aprecia en la figura, el segmento qq' representa al esfuerzo de corte en correspondencia con la sección s-s de la viga y el segmento mm' representa al momento flector  $M_f$ . No existe diagrama de esfuerzo normal por no existir fuerzas en la dirección del eje de la viga en el ejemplo.



**Signos y representación del Momento Flector ( $M_f$ )**

El momento flector se considera positivo cuando las fuerzas de la parte izquierda producen un momento que tiende a girar en el sentido de las agujas del reloj.

Si el momento flector resulta positivo, las fibras que se "estiran" o traccionadas se encuentran en la parte inferior

de la viga. Esto se analizará más adelante en sollicitación por flexión, sin embargo resulta fácil de imaginar.

Lo opuesto ocurre si el momento flector es negativo; la figura anterior ilustra esta convención.

Para representar el diagrama pueden adoptarse dos criterios que, si bien son opuestos, ambos son de uso corriente. Es importante notar que el subíndice “x” de  $MF_x$  señala la dirección del vector representativo de la cupla actuante en el plano de cargas “yz”

Un criterio consiste en dibujar el diagrama de momento flector del lado de la “fibra traccionada”. Tiene la ventaja de que no depende de la orientación horizontal, vertical o inclinada que tenga la viga y se utiliza ventajosamente para los pórticos. Este criterio es el utilizado en la cátedra cuando tomamos en cuenta la terna local asignada a cada tramo de viga, haciendo coincidir siempre el eje z con el eje de la barra.

Otro criterio es el de dibujarlo hacia arriba cuando  $M_f$  es positivo y hacia abajo cuando es negativo, de sencilla aplicación cuando la viga está dispuesta horizontalmente.

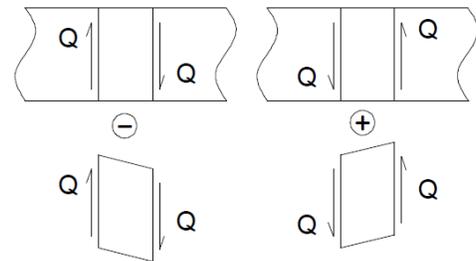
**Signos y representación del Esfuerzo de Corte ( $Q_{zy}$ )**

Tal como ya se había establecido, el esfuerzo de corte en una sección es positivo cuando la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección resulta positiva para la terna elegida, caso contrario el esfuerzo de corte será negativo.

Se conviene además que serán positivas las fuerzas que se dirigen hacia abajo (de acuerdo a la terna local adoptada, donde las “y” positivas se dirigen hacia abajo) y negativas a las que se dirigen hacia arriba.

Puede considerarse alternativamente la suma de las proyecciones de las fuerzas que actúan a la derecha de la sección, pero tomando el signo opuesto (que en realidad significa tomar la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas que actúan a la derecha de la sección consideradas en la terna opuesta aplicada sobre la cara izquierda).

Representación: si el diagrama es positivo se dibuja hacia abajo; caso contrario se dibuja hacia arriba.



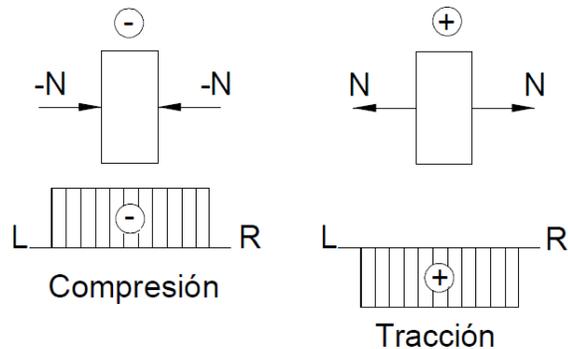
Notación usada para el Esfuerzo de Corte  $\rightarrow Q_{zy}$

1.  $Q \rightarrow$  corte;
2. 1er subíndice:  $z \rightarrow$  actuando en el plano cuyo versor asociado es  $\check{k}$  o dirección “z”;
3. 2do subíndice:  $y \rightarrow$  dirección del corte

**Signo y representación del Esfuerzo Normal ( $N_z$ )**

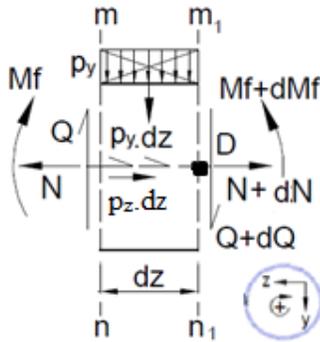
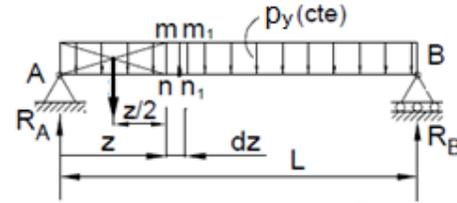
Se establece que el esfuerzo normal es positivo cuando produce tracción y es negativo cuando produce compresión.

En la cátedra dibujaremos el diagrama hacia abajo de la línea de referencia cuando el esfuerzo normal es positivo y hacia arriba cuando es negativo (si bien los esfuerzos normales son en el sentido del eje de la viga o eje “z”, la convención adoptada responde al criterio del dibujo del diagrama de esfuerzos de corte: positivos para abajo y negativos para arriba). En distinta bibliografía y distintos programas de cálculo específicos pueden verse distintos criterios para el sentido del dibujo de los diagramas, aunque siempre considerando los signos correctos de acuerdo a las ternas elegidas.



**RELACIONES DIFERENCIALES ENTRE LAS COMPONENTES DEL VECTOR CARGA ESPECÍFICA Y LOS ESFUERZOS CARACATERÍSTICOS**

Se utilizará una viga simplemente apoyada con carga distribuida  $p$  uniformemente distribuida en dirección vertical ( $p_y$ ) y con carga distribuida horizontal de variación lineal ( $p_z$ ).



Por medio de 2 secciones transversales muy próximas  $m-n$  y  $m_1-n_1$  se puede separar como cuerpo libre a un pequeño elemento de viga y aplicar las ecuaciones de equilibrio.

Proyecciones verticales:

Planteando  $\sum Y_i = 0$  resulta:  $-Q + p_y \cdot dz + (Q+dQ) = 0$

Operando se obtiene:  $p_y = -\frac{dQ}{dz}$  [1]

indicando que "la función carga  $p_y$  es la derivada (variación) de la función esfuerzo de corte  $Q$ ".

Recordar que la derivada de una función, para un determinado valor de la variable, es la tangente trigonométrica de la línea tangente a la curva representativa de la función, para ese valor de la variable.

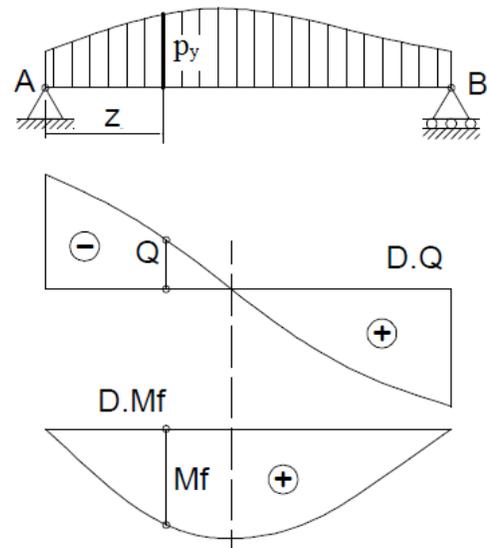
Ecuación de Momento:

Se considerará el momento estático con respecto a un punto cualquiera, en este caso el punto D.

Planteando  $\sum M_i = 0$  resulta:  $M_f + Q \cdot dz - p_y \cdot dz \cdot dz/2 - (M_f + dM_f) = 0$

despreciando el sumando  $p_y \cdot dz \cdot dz/2$  por ser un infinitésimo de orden superior, luego de simplificar se obtiene:  $Q = dM_f / dz$  [2]

Resulta entonces que la ordenada  $Q$  del diagrama de esfuerzo de corte para una determinada sección, representará el valor de la tangente trigonométrica al diagrama de momentos flectores para dicha sección, o sea: "La función esfuerzo de corte  $Q$  es la derivada de la función momento flector  $M_f$ ".



Proyecciones horizontales:

Planteando  $\sum Z_i = 0$  resulta:  $N - p_z \cdot dz - (N+dN) = 0$

Operando se obtiene:  $p_z = -\frac{dN}{dz}$  [3]

indicando que "la función carga  $p_z$  es la derivada (variación) de la función esfuerzo normal  $N$ ".

Las expresiones [1], [2] y [3] son las ecuaciones diferenciales de los esfuerzos característicos para elementos de eje recto, y relacionan a los mismos con las cargas exteriores (ecuaciones [1] y [3]), y a los esfuerzos entre sí (ecuación [2]).

Integrando las expresiones [1], [2] y [3] resulta:

$$Q_{zy} = \int -p_y \cdot dz + C_1 \quad [4]$$

$$Mf_x = \int Q \cdot dz + C_2 \quad [5]$$

$$N_z = \int -p_z \cdot dz + C_3 \quad [6]$$

Expresiones que indican lo siguiente:

- La función esfuerzo de corte  $Q_{zy}$  es la integral (función primitiva) de la función carga  $p_y$ .
- La función momento flector  $Mf_x$  es la integral (función primitiva) de la función esfuerzo de corte  $Q_{zy}$ .
- La función esfuerzo normal  $N_z$  es la integral (función primitiva) de la función carga  $p_z$ .

Obviamente los esfuerzos característicos en un tramo de una estructura plana de eje recto, con cargas en su plano, se halla por la integración arriba detallada de estas ecuaciones diferenciales [4], [5] y [6], con las adecuadas condiciones de borde, pero como se verá más adelante esto no resulta muy práctico porque en cada punto de aplicación de una carga concentrada hay una discontinuidad en la función y por lo tanto la integración debería realizarse por tramos entre puntos de aplicación de cargas, lo que resulta generalmente muy tedioso. En la siguiente hoja se ve la resolución analítica para una viga simplemente apoyada con carga distribuida constante ( $q_y$  ó  $p_y$  constante).

El uso más importante de estas tres ecuaciones diferenciales [1], [2] y [3] es el de control de los resultados obtenidos a la hora de evaluar los esfuerzos característicos porque observando los resultados de puede detectar fácilmente si se ha cometido un error en la determinación de los mismos, o si se trabaja con programas de resolución por computadora se puede visualizar si existe un error en la introducción de datos.

Así, observando las ecuaciones diferenciales [1], [2] y [3] se concluye:

1. Si no hay cargas distribuidas axiales o transversales, los respectivos esfuerzos característicos  $N_z$  y  $Q_{zy}$  son constantes en los tramos de integración.
2. Si en un tramo hay esfuerzo de corte  $Q_{zy}$  no nulo, entonces necesariamente hay variación del Momento flector  $Mf_x$ . Es decir que es el esfuerzo de corte el que al desplazarse paralelamente a sí mismo genera el momento flector.
3. La pendiente de la gráfica del momento flector  $Mf_x$  coincide en signo y valor con el esfuerzo de corte  $Q_{zy}$ . Es decir que es el esfuerzo de corte en su desplazamiento paralelo a sí mismo el que provoca la variación del momento flector  $Mf_x$ . Este concepto es el usado en el método de puntos y tangentes utilizado en la cátedra para el trazado de diagramas.
4. Donde el esfuerzo de corte  $Q_{zy}$  se anula, el momento flector  $Mf_x$  tiene un valor extremo (máximo o mínimo).

**Ejemplo de aplicación del método de las secciones (operatoria)**

**Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida q** ( $q_y$  para la terna izquierda adoptada).

Sea la viga simplemente apoyada representada en la figura, con carga uniforme de intensidad  $q$  [N/m], y la terna izquierda adoptada. Del cálculo de reacciones se obtiene para los apoyos A y B:  $R_A = R_B = q \cdot L/2$

Por definición operativa en una sección genérica cualquiera  $m-n$  de abscisa  $z$  resulta:

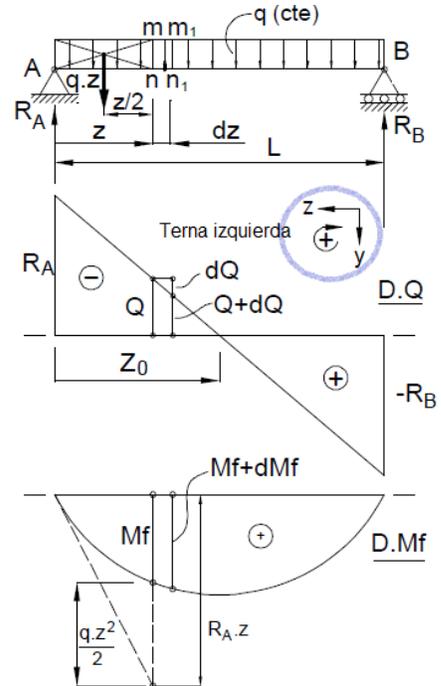
**Esfuerzo de corte:**  $Q_{zy} = -R_A + q \cdot z$ ; que representa una recta de ordenada “- $R_A$ ” inmediatamente a la derecha de la sección A y de ordenada “ $R_B$ ”, inmediatamente a la izquierda de la sección B.

Igualando a cero la expresión del esfuerzo de corte:

$Q_0 = -q \cdot L/2 + q \cdot z_0 = 0$ ; de donde  $z_0 = L/2$  y entonces la función esfuerzo de corte corta a la línea de referencia en  $z_0 = L/2$ .

**Momento flector:**  $M_{fx} = R_A \cdot z - q \cdot z \cdot z/2$

Que es la ecuación de una parábola de 2º grado que intercepta al eje de referencia en correspondencia con los apoyos de la viga.

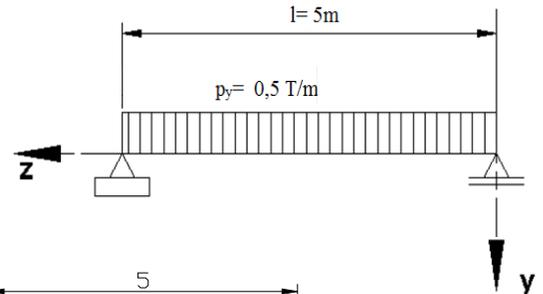


**Ejemplo de aplicación de cálculo analítico**

**Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida** ( $p_y$  para la terna izquierda adoptada).

Sea la viga simplemente apoyada representada en la figura, con carga uniforme de intensidad  $p_y = 0,5$  T/m, y luz entre apoyos de 5m.

Las reacciones verticales en los apoyos, dada la simetría de la estructura, serán  $V_a = V_b = P_y \cdot l/2 = 1,25T$ .



Cálculo de corte:

$$Q_{zy} = -\int P_y \cdot dz = -P_y \cdot z + C$$

$$z = 0 \Rightarrow \frac{P_y \cdot l}{2} = C$$

$$Q_{zy} = -P_y \cdot z + \frac{P_y \cdot l}{2}$$

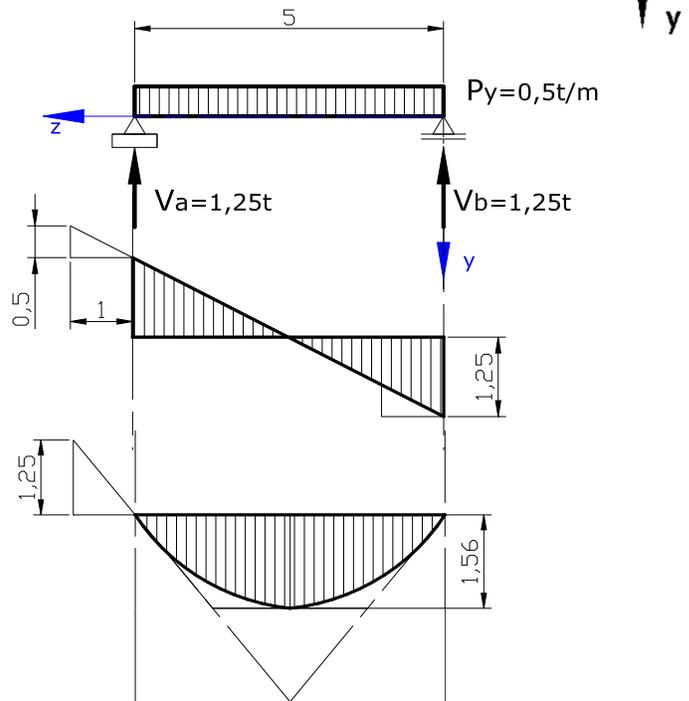
Cálculo de Momento flexor:

$$Mf_x = \int Q_{zy} \cdot dz = \int (-P_y \cdot z + \frac{P_y \cdot l}{2}) \cdot dz$$

$$Mf_x = -\frac{P_y \cdot z^2}{2} + \frac{P_y \cdot l}{2} \cdot z + C$$

$$z = 0 \Rightarrow M_x = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$Mf_x = -\frac{P_y \cdot z^2}{2} + \frac{P_y \cdot l}{2} \cdot z$$



**Trazado de diagramas de esfuerzos característicos por el método de puntos y tangentes:**

1º) Tomando en cuenta las relaciones diferenciales:

$$p_y = - \frac{d Q_{zy}}{dz} \quad \text{y} \quad Q_{zy} = \frac{d M_{f_x}}{dz}$$

2º) Para aplicar el método de puntos y tangentes hay que recordar que:

- Para curvas de 2º grado las tangentes extremas a un arco de la misma se cortan sobre la vertical del punto medio de la cuerda correspondiente, y definen, sobre dicha vertical un segmento cuya longitud, medida desde la cuerda, es igual al doble de la flecha de la parábola.
- Para curvas de 3º grado las tangentes extremas a un arco de la misma se cortan sobre la recta de acción de la resultante del diagrama de cargas.

3º) Secuencia correcta de pasos para los ejercicios:

a) Análisis CINEMÁTICO:

- i. Grados de libertad = nº de restricciones o vínculos (isostáticamente sustentado).
- ii. No debe existir configuración de Vínculo Aparente (cinemáticamente invariable)

b) Cálculo de Reacciones de vínculo:

- i. Se define y dibuja la terna global de referencia con el sentido de momentos positivos.
- ii. Se dibuja el Diagrama de Cuerpo Libre con sentidos arbitrarios de las incógnitas o reacciones.
- iii. Plantear las Ecuaciones generales de Equilibrio para hallar las reacciones en los vínculos.

c) Trazado de DIAGRAMAS:

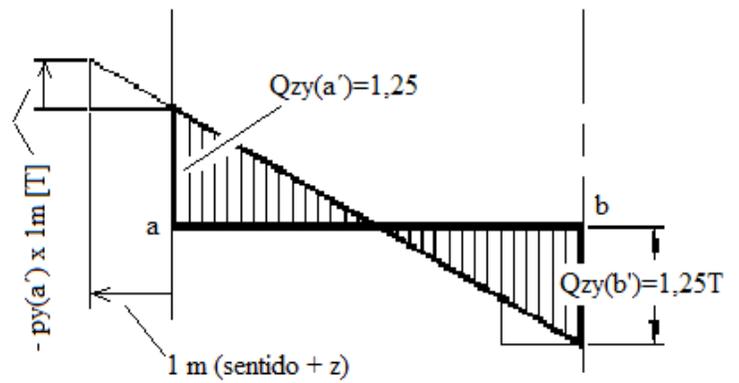
- i. Se vuelve a dibujar el diagrama de cuerpo libre con los sentidos correctos de las reacciones de vínculo.
- ii. Se dibujan las ternas locales para cada tramo de barra (recordar que la terna local es la asignada para la cara derecha del corte imaginario realizado a la estructura, donde se pondrán de manifiesto los esfuerzos o binomio de reducción del lado izquierdo).
- iii. Ingreso a cada tramo por el lado izquierdo y considero sólo lo que dejo detrás al recorrer la estructura:  
Para cada tramo en estudio se deben posicionar sobre la línea L-R, en su respectiva escala y con el signo correcto, los valores de la característica en estudio para los puntos singulares del tramo. Recordamos que serán puntos singulares de la viga aquellos donde existan:
  - Cambios de dirección
  - Cambios en las cargas puntuales (puntos de aplicación de cargas puntuales: fuerzas o cuplas).
  - Inicio o finalización de cargas distribuidas (puntos de inicio y finalización de diagramas de carga  $q_y$  ó  $q_z$ ).
- iv. Cálculo de Esfuerzos de corte en puntos singulares.
- v. Cálculo de Momentos flectores en puntos singulares
- vi. Cálculo de Esfuerzos normales en puntos singulares
- vii. Se asignan Escalas para: longitudes, para  $N_z$ ,  $Q_{zy}$  y  $M_{f_x}$
- viii. Se trazan los DIAGRAMAS de acuerdo a lo indicado más abajo, y/o trazando las pendientes tomando en cuenta las relaciones diferenciales explicitadas más arriba.

Por ejemplo, para encontrar las tangentes o pendientes extremas del corte  $Q_{zy}$  del tramo en estudio se procede dibujando un tramo de 1 metro (en el sentido de las "z" positivas de la terna local) a partir del valor calculado de la característica en estudio del punto singular.

Considerando la relación diferencial existente entre  $Q_{zy}$  y  $p_y$  podemos escribir:

$$p_y = - \frac{d Q_{zy}}{dz} \quad \text{ó} \quad \Delta Q_{zy} = - \Delta z \times p_y$$

A partir del metro trazado, con la escala y con el signo correspondiente (de acuerdo a la relación arriba recuadrada, el corte  $Q_{zy}$  cambia de signo respecto de la carga distribuida  $p_y$ ) se dibuja verticalmente el valor de  $p_y$  multiplicado por 1 metro (que es el valor de  $\Delta Q_{zy}$  para un desplazamiento  $\Delta z = 1$ m).

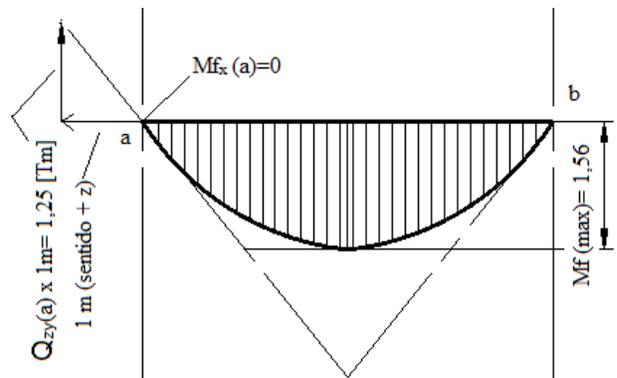


De igual manera, para encontrar las tangentes o pendientes extremas del momento flexor  $Mf_x$  del tramo en estudio se procede dibujando un tramo de 1 metro (en el sentido de las "z" positivas de la terna local) a partir del valor calculado de la característica en estudio del punto singular.

Considerando la relación diferencial existente entre  $Mf_x$  y  $Q_{zy}$  podemos escribir:

$$Q_{zy} = \frac{d Mf_x}{dz} \quad \text{ó} \quad \Delta Mf_x = \Delta z \times Q_{zy}$$

A partir del metro trazado, con la escala y con el signo correspondiente (de acuerdo a la relación arriba recuadrada, el momento flexor  $Mf_x$  no cambia de signo respecto del valor del corte  $Q_{zy}$ ) se dibuja verticalmente el valor de  $Q_{zy}$  multiplicado por 1 metro (que es el valor de  $\Delta Mf_x$  para un desplazamiento  $\Delta z = 1$ m).



**Cuadro resumen**

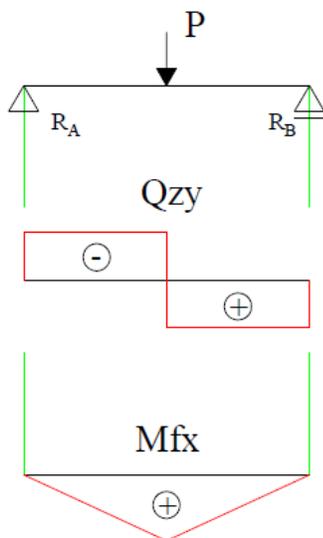
**DIAGRAMAS DE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS**

RECORDANDO las relaciones diferenciales:

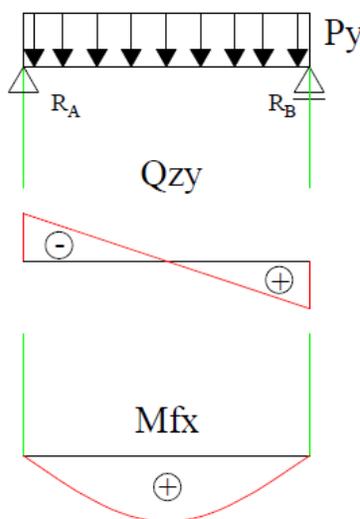
$$P_y = - \frac{d Q_{zy}}{dz} \quad \text{y} \quad Q_{zy} = \frac{d M_{fx}}{dz}$$

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
Tipo de carga	P = carga puntual	$P_y$ = carga distribuida Constante	$P_y$ = carga con variación lineal
Esfuerzo de corte $Q_{zy}$	$Q_{zy}$ = constante	$Q_{zy}$ = variación lineal	$Q_{zy}$ = curva cuadrática
Momento flector $M_{fx}$	$M_{fx}$ = variación lineal	$M_{fx}$ = curva cuadrática	$M_{fx}$ = curva cúbica

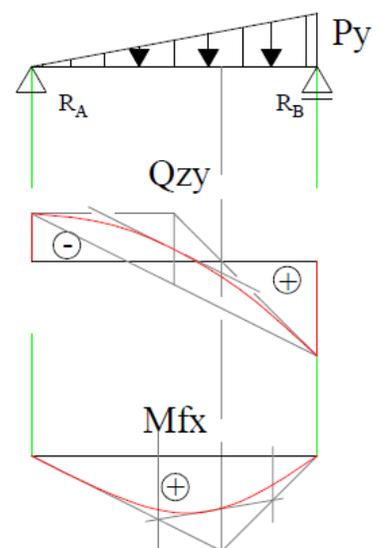
**A: Carga puntual**



**B: Carga Distribuida cte.**



**C: Carga Var. Lineal**



Ejemplo de carga C (carga distribuida  $P_y$  triangular o de variación lineal)

