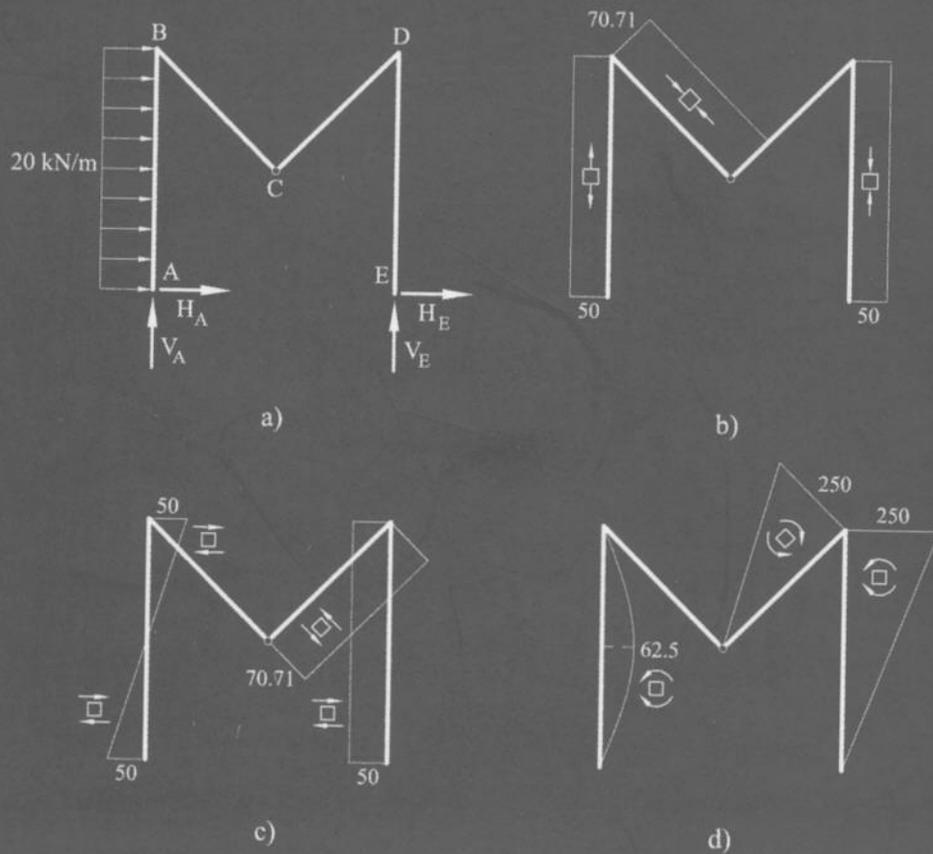


Estática de Estructuras

Problemas Resueltos

M. Chiumenti y M. Cervera



Michele Chiumenti es Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos (UPC, 1999), Profesor Titular de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona (UPC) e investigador en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE).

Ha publicado numerosos trabajos y comunicaciones de investigación en el campo de la mecánica computacional no lineal de sólidos y, en particular, en tecnología de simulación numérica de procesos de producción, fabricación y construcción.

Miguel Cervera Ruiz es Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, Doctor of Philosophy in Civil Engineering, Catedrático de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras en la E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona (UPC). Ha publicado más de 100 trabajos de investigación en libros, revistas y actas de congresos nacionales e internacionales sobre la aplicación de los métodos numéricos para la resolución de problemas de mecánica de los medios continuos, análisis de estructuras, simulación de procesos industriales, etc.

Estática de Estructuras
Problemas Resueltos

Estática de Estructuras Problemas Resueltos

M. Chiumenti
M. Cervera

Publicado por:
Centro Internacional de Métodos
Numéricos en Ingeniería (CIMNE)
Barcelona

Estática de Estructuras Problemas Resueltos

M. Chiumenti
M. Cervera

Publicado por
**Centro Internacional de Métodos
Numéricos en Ingeniería (CIMNE)**
Barcelona



Estática de Estructuras
Problemas Resueltos

M. Chiumenti
M. Cervera

Estática de Estructuras. Problemas Resueltos
M. Chiumenti y M. Cervera

Junio 2007

© Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España
www.cimne.upc.es

Impreso por: Zorram, Pamplona 96-104, local 14, 08018 Barcelona, España

Depósito legal: B-32644-2007

ISBN: 978-84-96736-20-7

Este libro es el resultado de un curso de posgrado de la asignatura "Análisis de Estructuras" que se imparte en el Máster de Ingeniería de Estructuras de la Universidad de Cantabria, España. El curso fue impartido por el profesor de Ingeniería de Estructuras, M. Chiumenti, en el curso 2005-2006. El curso se impartió en el aula de Estructuras de la Universidad de Cantabria, España. El curso se impartió en el aula de Estructuras de la Universidad de Cantabria, España.

El libro está basado en los apuntes de clase de la asignatura "Análisis de Estructuras" que se imparte en el curso de posgrado de la asignatura "Análisis de Estructuras" de la Universidad de Cantabria, España. El libro está basado en los apuntes de clase de la asignatura "Análisis de Estructuras" que se imparte en el curso de posgrado de la asignatura "Análisis de Estructuras" de la Universidad de Cantabria, España.

El libro está basado en los apuntes de clase de la asignatura "Análisis de Estructuras" que se imparte en el curso de posgrado de la asignatura "Análisis de Estructuras" de la Universidad de Cantabria, España. El libro está basado en los apuntes de clase de la asignatura "Análisis de Estructuras" que se imparte en el curso de posgrado de la asignatura "Análisis de Estructuras" de la Universidad de Cantabria, España.

A Valentina

Miguel Chiumenti y Miguel Cervera
Barcelona, Junio de 2007

Prólogo

Esta obra recoge parte del programa docente de la asignatura "Mecánica", que se imparte en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, dentro de las titulaciones de Ingeniería de Obras Públicas. Su contenido abarca los temas de Estática, Análisis de Estructuras de Barras y Teoría de la Elasticidad siguiendo un planteamiento válido para diferentes titulaciones españolas de Ingeniería.

La obra repasa los principios fundamentales de la estática presentando una colección de problemas resueltos. El objetivo final es el cálculo de los diagramas de esfuerzo en estructuras articuladas y reticuladas isostáticas. Se resuelven paso a paso numerosos ejemplos provenientes de las clases prácticas de la asignatura.

Los autores agradecen a los profesores del Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña su colaboración en la compilación y redacción de este libro. Apreciamos, de modo particular, la ayuda del profesor Dr. Roberto Flores, que revisó la versión final del manuscrito. Asimismo, agradecemos el Sr. Raúl Giménez por la delineación de las figuras y esquemas que se incluyen y al Dr. Roberto Clemente por su ayuda en las tareas de edición. Por último, se agradece el apoyo de la E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, a través de su programa de incentivación para la elaboración de material docente.

Michele Chiumenti y Miguel Cervera

Barcelona, Enero de 2007

Prólogo

Este libro surge parte del programa docente de la asignatura "Materiales", que se imparte en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Valencia. El contenido de este libro se ha elaborado a partir de las asignaturas de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Valencia, y de la asignatura de Materiales de la Universidad Politécnica de Valencia.

Los autores agradecen a los profesores del Departamento de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Valencia su colaboración en la compilación y redacción de este libro. Asimismo, agradecemos a los señores Dr. Roberto Pérez, que revisó la versión final del manuscrito, y a los señores Dr. Juan Antonio Martínez y Dr. Roberto Chamorro por su ayuda en las tareas de edición.

Por último, se agradece el apoyo de la E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Valencia, a través de su programa de investigación para la elaboración de este libro.

Miguel Cervera y Miguel Cervera

Barcelona, Mayo de 2017

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Estructuras continuas y estructuras de barras	1
1.2	Estructuras articuladas y reticuladas	3
2	Diagramas de esfuerzos en vigas	7
2.1	Introducción	7
2.2	Ejemplo 1	9
2.2.1	Reacciones externas:	9
2.2.2	Cálculo de esfuerzos:	10
2.2.3	Diagramas de esfuerzos:	12
2.3	Ejemplo 2	13
2.3.1	Reacciones externas:	13
2.3.2	Cálculo de esfuerzos:	14
2.3.3	Diagramas de esfuerzos:	16
2.4	Ejemplo 3	19
2.4.1	Reacciones externas:	19
2.4.2	Cálculo de esfuerzos:	20
2.4.3	Diagramas de esfuerzos:	22
2.5	Ejemplo 4	24
2.5.1	Reacciones externas:	24
2.5.2	Cálculo de esfuerzos:	25
2.5.3	Diagramas de esfuerzos:	27
2.6	Ejemplo 5	29
2.6.1	Reacciones externas:	29
2.6.2	Cálculo de esfuerzos:	30
2.6.3	Diagramas de esfuerzos:	32

3 Diagramas de esfuerzos en estructuras reticuladas	35
3.1 Introducción	35
3.2 Ejemplo 1	36
3.2.1 Reacciones externas:	36
3.2.2 Cálculo de esfuerzos:	38
3.2.3 Diagramas de esfuerzos:	40
3.3 Ejemplo 2	41
3.3.1 Reacciones externas:	41
3.3.2 Cálculo de esfuerzos:	43
3.3.3 Diagramas de esfuerzos:	45
3.4 Ejemplo 3	46
3.4.1 Reacciones externas:	46
3.4.2 Cálculo de esfuerzos:	47
3.4.3 Diagramas de esfuerzos:	49
3.5 Ejemplo 4	50
3.5.1 Reacciones externas:	50
3.5.2 Cálculo de esfuerzos:	51
3.5.3 Diagramas de esfuerzos:	54
3.6 Ejemplo 5	56
3.6.1 Reacciones externas:	56
3.6.2 Cálculo de esfuerzos:	57
3.6.3 Diagramas de esfuerzos:	59
3.7 Ejemplo 6	60
3.7.1 Reacciones externas:	60
3.7.2 Cálculo de esfuerzos:	62
3.7.3 Diagramas de esfuerzos:	64
3.8 Ejercicios propuestos	66
3.8.1 Ejercicio 1	66
3.8.2 Ejercicio 2	68
3.8.3 Ejercicio 3	70
3.8.4 Ejercicio 4	72
3.8.5 Ejercicio 5	74
3.8.6 Ejercicio 6	76

4 Diagramas de esfuerzos en estructuras articuladas	79
4.1 Introducción	79
4.2 Ejemplo 1	80
4.2.1 Reacciones externas:	80
4.2.2 Cálculo de esfuerzos:	82
4.3 Ejemplo 2	84
4.3.1 Reacciones externas:	84
4.3.2 Cálculo de esfuerzos:	85
4.4 Ejemplo 3	87
4.4.1 Reacciones externas:	87
4.4.2 Cálculo de esfuerzos:	88
4.5 Ejemplo 4	89
4.5.1 Reacciones externas:	89
4.5.2 Cálculo de esfuerzos:	90
4.6 Ejemplo 5	92
4.6.1 Reacciones externas:	92
4.6.2 Cálculo de esfuerzos:	93
4.7 Ejemplo 6	94
4.7.1 Reacciones externas:	94
4.7.2 Cálculo de esfuerzos:	95
4.8 Ejercicios propuestos	97
4.8.1 Ejercicio 1	97
4.8.2 Ejercicio 2	98
4.8.3 Ejercicio 3	98
4.8.4 Ejercicio 4	99
4.8.5 Ejercicio 5	99
4.8.6 Ejercicio 6	100
4.8.7 Ejercicio 7	100
4.9 Respuestas a los Problemas Propuestos	101
5 Identificación cualitativa de los diagramas de esfuerzos	103
5.1 Introducción	103
5.2 Ejemplo 1	104
5.2.1 Solución:	104
5.3 Ejemplo 2	106
5.3.1 Solución:	106
5.4 Ejemplo 3	109
5.4.1 Solución:	109

1 Introducción

1.1 Estructuras continuas y estructuras de barras

Las estructuras pueden adoptar tipologías muy diversas, de acuerdo a su geometría y a su forma de trabajar. Así, podemos hablar de *estructuras continuas*, cuando no es posible diferenciar los distintos “elementos” que las forman, y *estructuras de barras*, cuando están formadas por piezas prismáticas enlazadas entre sí. Entre las estructuras continuas podemos distinguir aquellas en las que es posible identificar un “espesor” y hablar de *estructuras superficiales*, tales como placas, membranas, láminas, etc., de aquellas *estructuras sólidas o masivas* (ver Figura 1.2).

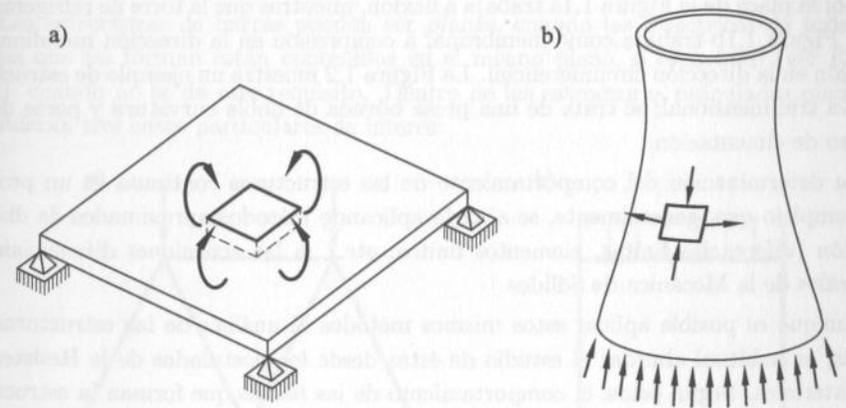


Fig. 1.1: Estructuras superficiales sometidas a peso propio: (a) placa trabajando a flexión, (b) membrana trabajando a tensión y compresión

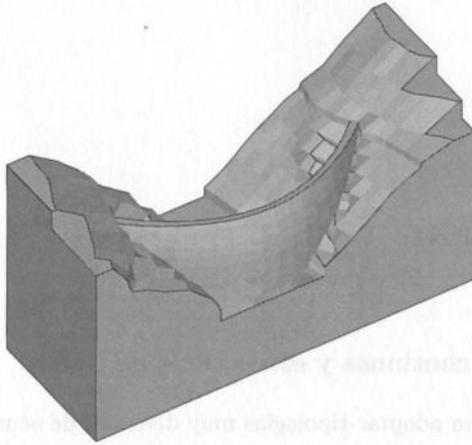


Fig. 1.2: Ejemplo de estructura masiva: presa bóveda con su cimentación

Así, en la Figura 1.1 se muestran dos estructuras superficiales sometidas a su peso propio; la placa de la Figura 1.1a trabaja a flexión, mientras que la torre de refrigeración de la Figura 1.1b trabaja como membrana, a compresión en la dirección meridional y tracción en la dirección circunferencial. La Figura 1.2 muestra un ejemplo de estructura masiva tridimensional; se trata de una presa bóveda de doble curvatura y parte de su macizo de cimentación.

La determinación del comportamiento de las estructuras continuas es un problema complejo que, generalmente, se aborda aplicando métodos aproximados de discretización (diferencias finitas, elementos finitos, etc.) a las ecuaciones diferenciales o integrales de la Mecánica de Sólidos.

Aunque es posible aplicar estos mismos métodos al análisis de las estructuras de barras, es habitual abordar el estudio de éstas desde los postulados de la Resistencia de Materiales. Según éstos, el comportamiento de las barras que forman la estructura se determina a partir del principio de Saint-Venant, que establece que, bajo ciertas condiciones, las tensiones (y deformaciones) sobre una sección normal de una pieza se pueden determinar, exclusivamente, a partir de los valores de los esfuerzos que actúan sobre dicha sección. El principio de Saint-Venant permite reducir el análisis de estructuras de barras al problema de determinar las *leyes de esfuerzos* que actúan sobre las diversas piezas que forman la estructura.

1.2 Estructuras articuladas y reticuladas

Las diferentes piezas que forman una estructura de barras pueden estar unidas entre sí mediante nudos *articulados*, que impiden los desplazamientos relativos entre las distintas barras concurrentes en él, pero permiten el giro relativo, o nudos *rígidos*, que no permiten ni los desplazamientos ni el giro relativos.

Se llama *estructura articulada* a una estructura formada por piezas prismáticas unidas entre sí mediante articulaciones (ver Figura 1.3a). Dado que los enlaces articulados no permiten transmitir momentos flectores de unas piezas a otras, es fácil deducir que las barras de una estructura articulada trabajan básicamente a esfuerzo axial, ya que la única flexión a la que pueden estar sometidas es la debida a las cargas transversales que actúan directamente sobre ellas. Resolver una estructura articulada implica, pues, determinar el valor de los esfuerzos axiales que actúan sobre las diferentes barras.

Se llama *estructura reticulada* a una estructura formada por piezas prismáticas unidas entre sí mediante nudos rígidos (ver Figura 1.3b). Puesto que los nudos rígidos sí transmiten los momentos de una barra a otra, las piezas de una estructura reticulada trabajan fundamentalmente a flexión y, en su caso, también a torsión. Resolver una estructura reticulada implica, por tanto, determinar las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes, esfuerzos axiales y, en su caso, momentos torsores que actúan sobre las diferentes barras.

Las estructuras de barras pueden ser *planas*, cuando las directrices de todas las piezas que las forman están contenidas en el mismo plano, o *espaciales* (ver Figura 1.4c), cuando no se da este requisito. Dentro de las estructuras reticuladas planas se consideran tres casos particulares de interés:

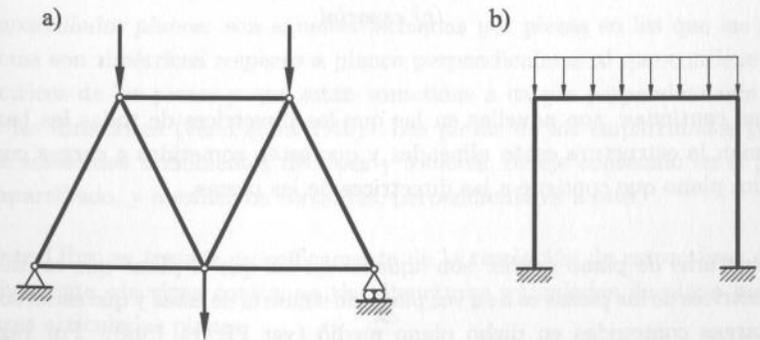


Fig. 1.3: (a) Estructura articulada, (b) estructura reticulada

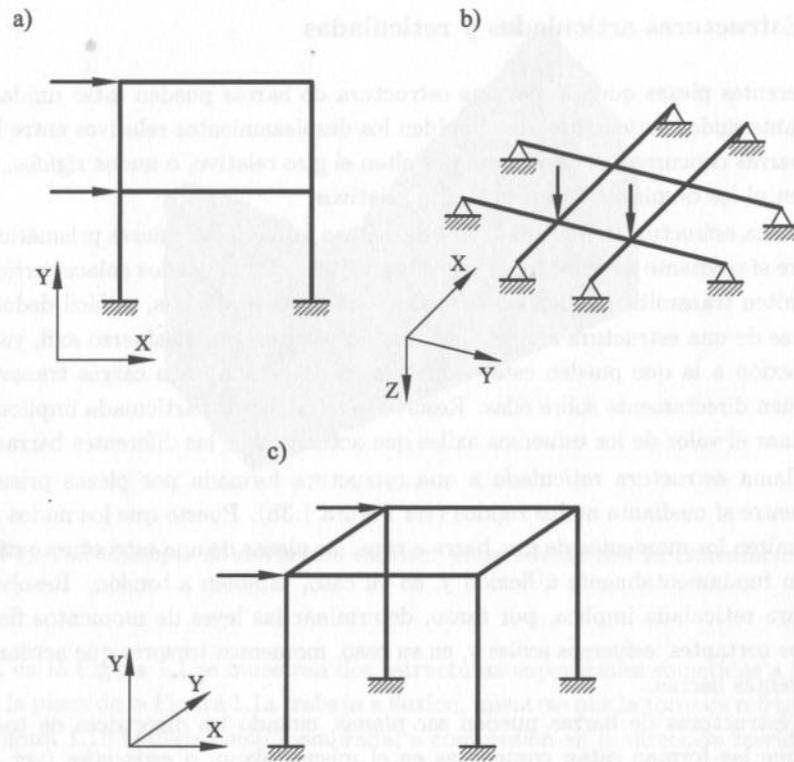


Fig. 1.4: Estructuras reticuladas: (a) de plano medio, (b) emparrillado plano, (c) espacial

- **vigas continuas:** son aquellas en las que las directrices de todas las barras que forman la estructura están alineadas y que están sometidas a cargas contenidas en un plano que contiene a las directrices de las piezas.
- **estructuras de plano medio:** son aquellas en las que el plano que contiene a las directrices de las piezas es a su vez plano de simetría de éstas y que están sometidas a cargas contenidas en dicho plano medio (ver Figura 1.4a). Por razones de simetría, las piezas que forman las estructuras de plano medio están sometidas a momentos flectores, de eje perpendicular al plano medio, y a esfuerzos cortantes y axiales, contenidos en dicho plano. Se les llama también **pórticos** (ver Figura

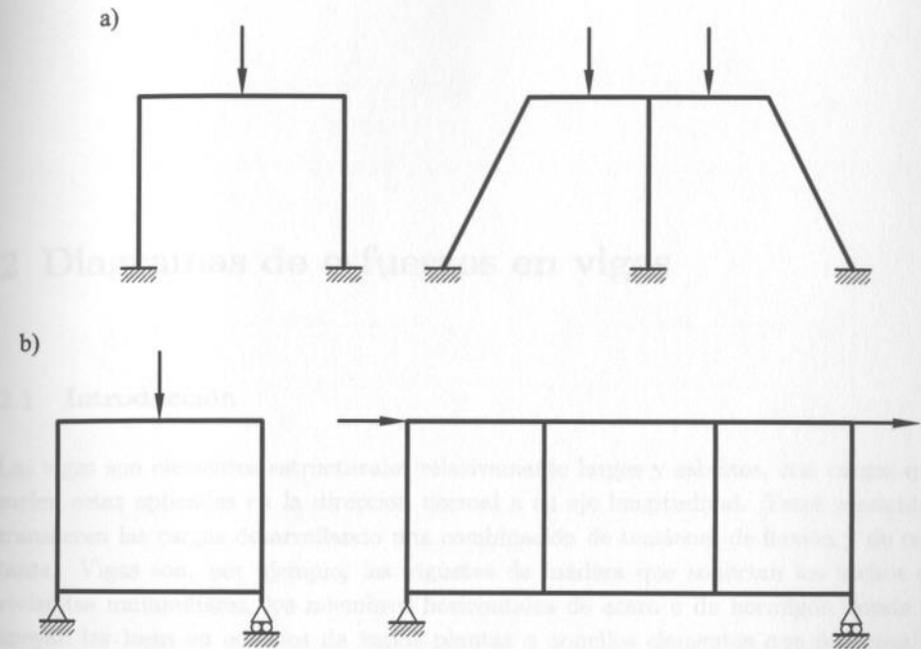


Fig. 1.5: Estructuras reticuladas de plano medio: (a) pórticos, (b) marcos

1.5a) cuando están formadas a base de soportes y dinteles, y **marcos** (ver Figura 1.5b) cuando las piezas están unidas formando células cerradas.

- **emparrillados planos:** son aquellas formadas por piezas en las que las secciones rectas son simétricas respecto a planos perpendiculares al que contiene a las directrices de las piezas y que están sometidas a cargas perpendiculares al plano de las directrices (ver Figura 1.4b). Las piezas de los emparrillados planos están sometidas a momentos flectores y torsiones, de eje contenido en el plano del emparrillado, y a esfuerzos cortantes, perpendiculares a éste.

En este Libro se tratará específicamente de la resolución de estructuras de barras y, sucesivamente, de vigas continuas, de estructuras reticuladas de plano medio y de estructuras articuladas planas.

2 Diagramas de esfuerzos en vigas

2.1 Introducción

Las vigas son elementos estructurales relativamente largos y esbeltos, con cargas que suelen estar aplicadas en la dirección normal a su eje longitudinal. Estos elementos transfieren las cargas desarrollando una combinación de tensiones de flexión y de cortante. Vigas son, por ejemplo, las viguetas de madera que soportan los techos de viviendas unifamiliares, los miembros horizontales de acero o de hormigón donde se apoyan las losas en edificios de varias plantas o aquellos elementos que soportan la calzada en puentes de carreteras de pequeña luz. Las vigas se pueden usar para abarcar luces desde algunos centímetros hasta aproximadamente unos 60 m. Para luces muy grandes dejan de ser una opción económica y por tanto se suelen emplear otras soluciones estructurales.

Generalmente, las vigas se clasifican de acuerdo a la manera en que están soportadas. Entre los tipos más comunes encontramos la viga *simplemente apoyada* (ver figura 2.1a), soportada por una rótula en un extremo y un rodillo en el otro; así como la viga *en voladizo* (fig. 2.1b) empotrada en un extremo y libre en el otro. Si ambos extremos están empotrados, la viga se denomina *biempotrada* (fig. 2.1c). También existe el caso de una viga que, además de apoyarse en sus extremos, posee soportes en puntos intermedios (fig. 2.1d). En este caso, si el elemento es continuo en todos los apoyos internos, se denomina viga *continua*. Las vigas, como cualquier estructura, pueden ser *estáticamente determinadas* (isostáticas) o *indeterminadas* (hiperestáticas) dependiendo de si existen o no suficiente ecuaciones de equilibrio para calcular las reacciones incógnitas. Por ejemplo, las vigas de las figuras 2.1a y 2.1b son isostáticas, ya que en cada una hay tres reacciones incógnita y tres ecuaciones de equilibrio estático disponibles para calcularlas. Por el contrario, las vigas de las figuras 2.1c y 2.1d son hiperestáticas, porque en cada una hay más de tres reacciones desconocidas pero sigue habiendo sólo tres ecuaciones de equilibrio para determinarlas.

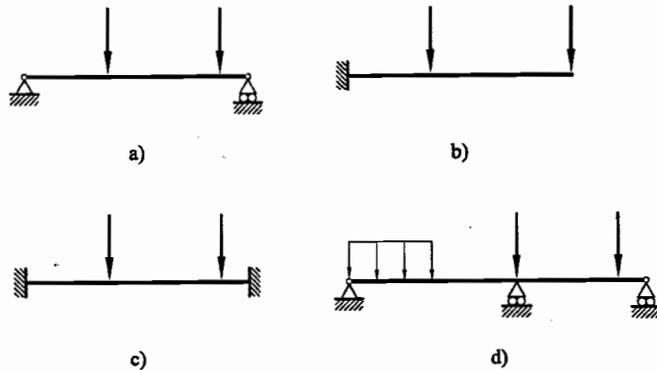


Fig. 2.1: Tipos de vigas: a) simplemente apoyada b) empotrada c) biempotrada d) continua

Una viga sometida a cargas contenidas en un plano que, a su vez, contiene la directriz (eje) de la viga trabaja fundamentalmente a flexión. Su resolución, por tanto, consiste en determinar las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes. En su caso, puede estar sometida también a esfuerzos axiales.

2.2 Ejemplo 1

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momento flector de la viga de la figura 2.2.

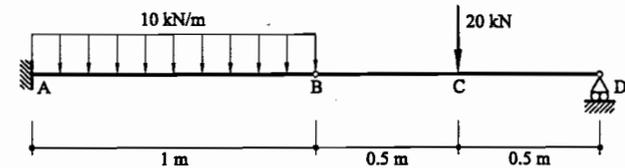


Fig. 2.2: Estructura del ejemplo 1

2.2.1 Reacciones externas:

Las reacciones externas de la estructura (figura 2.4a) se obtienen planteando ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momento flector nulo en la rotula intermedia, lo que origina un sistema de ecuaciones lineales de fácil resolución. Sin embargo, en este caso, el cálculo se puede hacer de una manera más directa, planteando las ecuaciones en un orden óptimo que permita obtener los valores sobre la marcha. Los sentidos positivos de las reacciones se muestran en la figura 2.4a.

$$\begin{aligned} \text{Momento flector en el punto B, en el tramo B-D:} & \quad M_{(B)}^{BD} = 0 \\ V_D \cdot 1 - 20 \cdot 0,5 = 0 & \quad \boxed{V_D = 10 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de fuerzas verticales:} & \quad R_y = 0 \\ V_A + V_D - (10 \cdot 1) - 20 = 0 & \quad \boxed{V_A = 20 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de momentos en el punto A:} & \quad M_{(A)} = 0 \\ M_A + V_D \cdot 2 - (10 \cdot 1) \cdot 0,5 - 20 \cdot 1,5 = 0 & \quad \boxed{M_A = 15 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

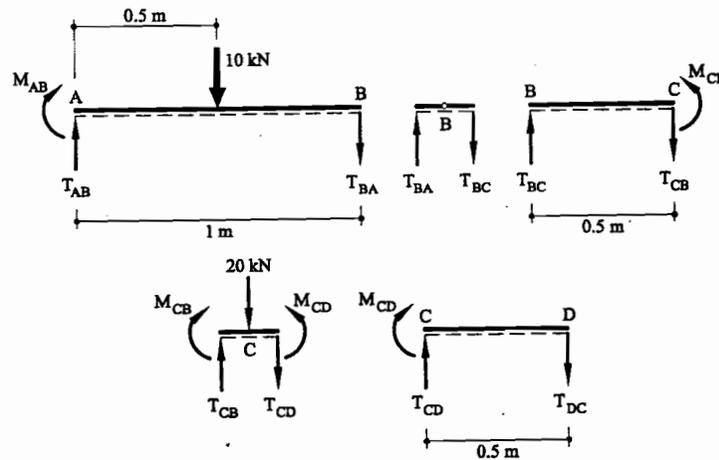


Fig. 2.3: Despiece de la estructura del ejemplo 1

2.2.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura, tal como se muestra en la figura 2.3.

Nudo A:

En el nudo A es posible identificar el valor del esfuerzo cortante, T_{AB} , con la reacción vertical, V_A , mientras el valor del momento flector, M_{AB} , tiene igual magnitud y signo contrario que el momento de empotramiento, M_A , calculado en el apartado anterior. Obsérvese que esto está de acuerdo con el convenio de signo adoptado y que se muestra con el despiece de la estructura de la figura 2.3.

$$\begin{aligned} T_{AB} &= V_A & T_{AB} &= 20 \text{ kN} \\ M_{AB} &= -M_A & M_{AB} &= -15 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo A-B:

En el extremo B de este tramo hay una rótula, por lo que el momento flector en ese punto es nulo y sólo existe esfuerzo cortante, T_{BA} . Éste se calcula haciendo equilibrio de fuerzas verticales en el tramo A-B:

$$-T_{BA} + T_{AB} - (10 \cdot 1) = 0 \quad T_{BA} = 10 \text{ kN}$$

Nudo B:

Por equilibrio de fuerzas verticales se tiene:

$$T_{BC} - T_{BA} = 0 \quad T_{BC} = 10 \text{ kN}$$

Tramo B-C:

Se hace equilibrio de fuerzas verticales para calcular el esfuerzo cortante, T_{CB} y equilibrio de momentos en el extremo C para calcular el valor del momento flector, M_{CB} . Nótese la inexistencia de fuerzas externas:

$$-T_{CB} + T_{BC} = 0 \quad T_{CB} = 10 \text{ kN}$$

$$M_{CB} - T_{BC} \cdot 0,5 = 0 \quad M_{CB} = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Nudo C:

En este nudo existe transmisión de momento flector y de esfuerzos cortantes. Para el cálculo de estos últimos se debe incluir la acción externa:

$$-T_{CD} + T_{CB} - 20 = 0 \quad T_{CD} = -10 \text{ kN}$$

$$M_{CD} - M_{CB} = 0 \quad M_{CD} = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Tramo C-D:

Finalmente, haciendo equilibrio de fuerzas verticales se obtiene el valor del esfuerzo cortante, T_{DC} , en el extremo D:

$$T_{DC} - T_{CD} = 0 \quad T_{DC} = -10 \text{ kN}$$

Nudo D:

El resultado anterior se confirma verificando que el valor del esfuerzo cortante obtenido coincide con la reacción externa (signo opuesto) calculada al inicio del ejemplo.

$$T_{DC} = -V_D \quad T_{DC} = -10 \text{ kN}$$

2.2.3 Diagramas de esfuerzos:

Una vez obtenidos los valores de esfuerzos en los puntos de interés, es posible dibujar los diagramas de los mismos a lo largo del eje de la viga, tal como se muestra en la figura 2.4. Observese que en el tramo A-B el diagrama del momento flector es parabólico con concavidad hacia arriba, mientras que en el tramo B-C el diagrama es lineal. El diagrama tiene continuidad de su derivada primera en el punto B, debido a que el diagrama de esfuerzos cortantes es continuo en este punto.

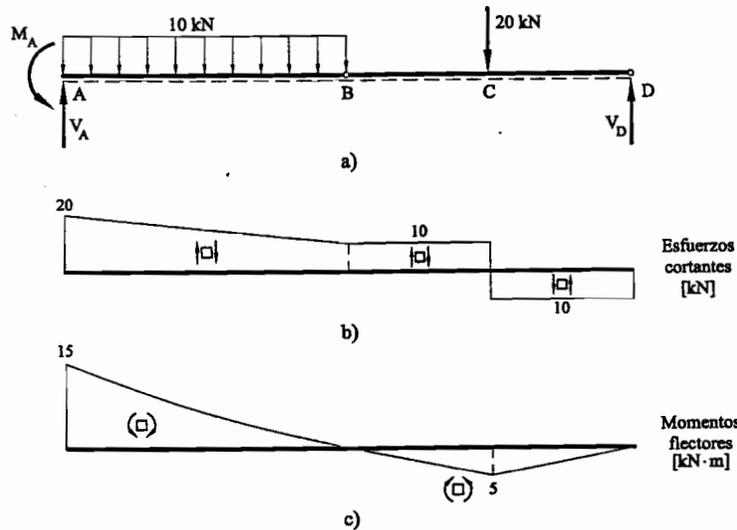


Fig. 2.4: Reacciones y leyes de esfuerzos del ejemplo 1

2.3 Ejemplo 2

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momento flector de la viga de la figura 2.5.

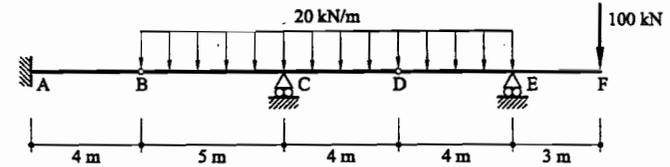


Fig. 2.5: Estructura del ejemplo 2

2.3.1 Reacciones externas:

Al igual que en el ejemplo anterior, se plantean las ecuaciones de equilibrio externo y de momento flector nulo en las rotulas intermedias, de manera que las reacciones (mostradas en la figura 2.8a) se puedan calcular planteando ecuaciones simples, en lugar de hacerlo considerando un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} \text{Momento flector en el punto D, en el tramo D-F: } & M_{(D)}^{DF} = 0 \\ V_E \cdot 4 - (20 \cdot 4) \cdot 2 - 100 \cdot 7 = 0 & \quad \boxed{V_E = 215 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Momento flector en el punto B, en el tramo B-F: } & M_{(B)}^{BF} = 0 \\ V_C \cdot 5 + V_E \cdot 13 - (20 \cdot 13) \cdot 6,5 - 100 \cdot 16 = 0 & \quad \boxed{V_C = 99 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de fuerzas verticales: } & R_y = 0 \\ V_A + V_C + V_E - 20 \cdot 13 - 100 = 0 & \quad \boxed{V_A = 46 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Momento flector en el punto B, en el tramo A-B: } & M_{(B)}^{AB} = 0 \\ M_A - V_A \cdot 4 = 0 & \quad \boxed{M_A = 184 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

2.3.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura, tal como se muestra en la figura 2.6.

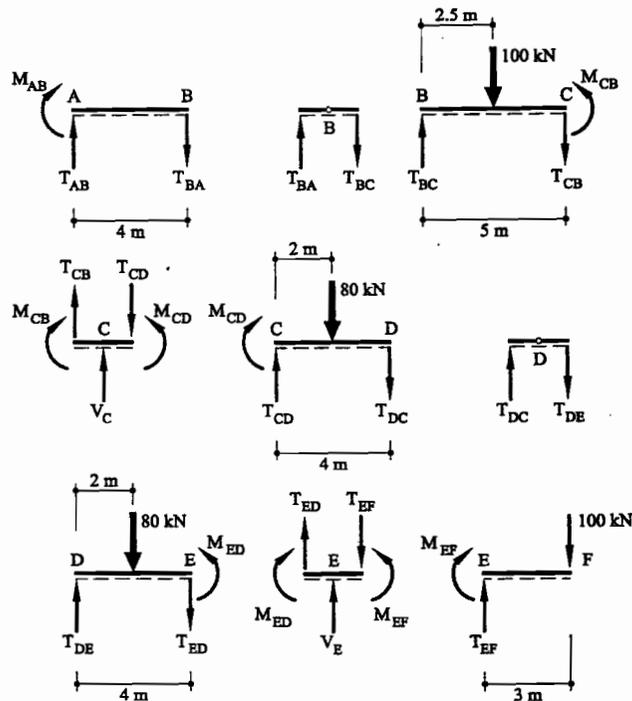


Fig. 2.6: Despiece de la estructura del ejemplo 2

Nudo A:

En el nudo A los valores del esfuerzo cortante, T_{AB} y de momento flector, M_{AB} , se obtienen a partir de la reacción vertical, V_A y del momento de empotramiento, M_A , respectivamente, calculados en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} T_{AB} &= V_A & T_{AB} &= 46 \text{ kN} \\ M_{AB} &= -M_A & M_{AB} &= -184 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo A-B:

En el extremo B de este tramo hay una rótula, por lo que el momento en ese punto es nulo y sólo existe el esfuerzo cortante. Éste se calcula haciendo equilibrio de fuerzas verticales:

$$-T_{BA} + T_{AB} = 0 \quad T_{BA} = 46 \text{ kN}$$

Nudo B:

Al tratarse de una rótula el valor del momento flector es nulo, solamente se transmite el esfuerzo cortante. Por equilibrio se tiene:

$$-T_{BC} + T_{BA} = 0 \quad T_{BC} = 46 \text{ kN}$$

Tramo B-C:

Se hace equilibrio de fuerzas para calcular el esfuerzo cortante y el momento flector en el extremo C:

$$\begin{aligned} -T_{CB} + T_{BC} - 20 \cdot 5 &= 0 & T_{CB} &= -54 \text{ kN} \\ M_{CB} - T_{BC} \cdot 5 + (20 \cdot 5) \cdot 2,5 &= 0 & M_{CB} &= -20 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo C:

En este nudo existe transmisión de momentos flectores y de esfuerzos cortantes. Para el cálculo de estos últimos se debe incluir la reacción externa, V_C :

$$\begin{aligned} -T_{CD} + T_{CB} + V_C &= 0 & T_{CD} &= 45 \text{ kN} \\ M_{CD} - M_{CB} &= 0 & M_{CD} &= -20 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo C-D:

Haciendo equilibrio de fuerzas verticales se obtienen el valor del esfuerzo cortante en el extremo D. El momento flector es nulo en ese punto, debido a su condición de rótula:

$$-T_{DC} + T_{CD} - 20 \cdot 4 = 0 \quad T_{DC} = -35 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Nudo D:

En la rótula solamente se transmiten esfuerzos cortantes.

$$-T_{DE} + T_{DC} = 0 \quad \boxed{T_{DE} = -35 \text{ kN}}$$

Tramo D-E:

Se plantea el equilibrio de fuerzas verticales y de momentos el extremo E:

$$\begin{aligned} -T_{ED} + T_{DE} - 20 \cdot 4 &= 0 & \boxed{T_{ED} = -115 \text{ kN}} \\ M_{ED} - T_{DE} \cdot 4 + (20 \cdot 4) \cdot 2 &= 0 & \boxed{M_{ED} = -300 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Nudo E:

Se plantea el equilibrio de fuerzas verticales (incluyendo la reacción externa, V_E) y de momentos flectores en el nodo E:

$$\begin{aligned} -T_{EF} + T_{ED} + V_E &= 0 & \boxed{T_{EF} = 100 \text{ kN}} \\ M_{EF} - M_{ED} &= 0 & \boxed{M_{EF} = -300 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Nudo F:

No hace falta estudiar el equilibrio del ultimo tramo E-F ya que conocemos el valor de los esfuerzos identificandolos con las acciones externas en el nodo F. El nodo es un extremo libre cargado con una fuerza puntual y de acuerdo con el convenio de signos tenemos:

$$\begin{aligned} \boxed{T_{FE} = 100 \text{ kN}} \\ \boxed{M_{FE} = 0} \end{aligned}$$

2.3.3 Diagramas de esfuerzos:

Una vez obtenidos los valores de esfuerzos en los puntos de interés, es posible dibujar los diagramas de los mismos a lo largo del eje de la viga (ver figura 2.8). Sin embargo, aún falta obtener los puntos máximos del diagrama de momentos flectores, que están ubicados en la sección de la viga donde el diagrama de cortantes se hace nulo. Al construir el diagrama de cortantes, se observa que existen dos puntos donde se anula el valor del cortante: uno en el tramo B-C, que denotaremos, B' y otro en el tramo C-D, que llamamos, C'.

Las ubicaciones de estos puntos se obtienen mediante las ecuaciones de equilibrio vertical de los despieces A-B' y C-C' (ver figura 2.7). Los valores de momento flector máximo se obtienen planteando ecuaciones de equilibrio de momento flector en A y en C para los mismos despieces.

Tramo A-B':

$$\begin{aligned} T_{AB} - 20 \cdot x_B &= 0 & \boxed{x_B = 2,3 \text{ m}} \\ M_{B'} - M_{AB} - (20 \cdot x_B) \left(4 + \frac{x_B}{2}\right) &= 0 & \boxed{M_{B'} = 52,9 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Tramo C-C':

$$\begin{aligned} T_{CD} - 20 \cdot x_C &= 0 & \boxed{x_C = 2,25 \text{ m}} \\ M_{C'} - M_{CD} - (20 \cdot x_C) \cdot \frac{x_C}{2} &= 0 & \boxed{M_{C'} = 30,625 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

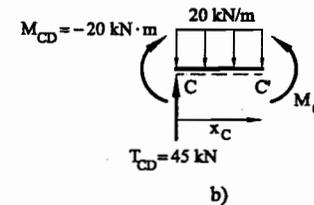
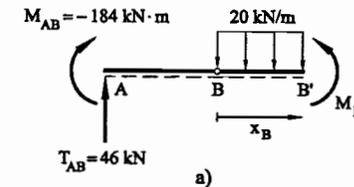


Fig. 2.7: Cálculo de la ubicación y de la magnitud de los momentos máximos en el ejemplo 2

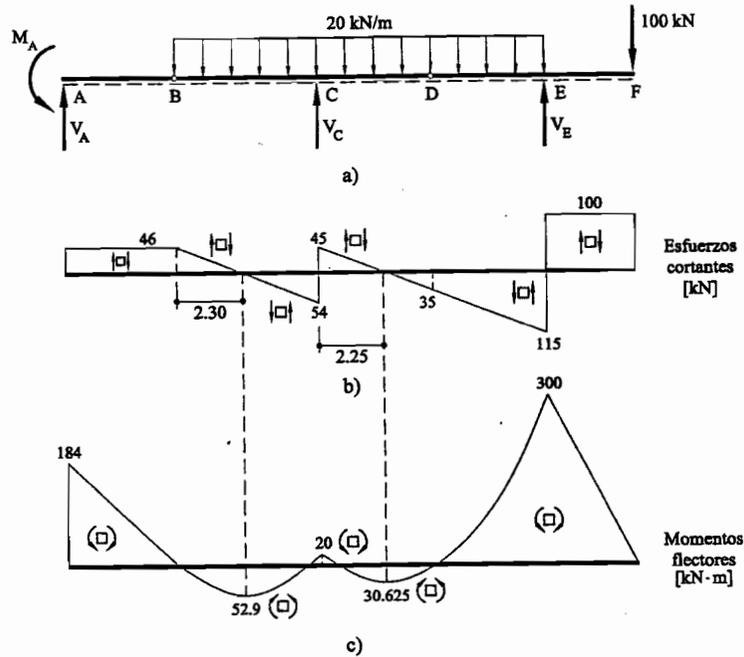


Fig. 2.8: Reacciones y leyes de esfuerzos del ejemplo 2

2.4 Ejemplo 3

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momento flector de la viga de la figura 2.9.

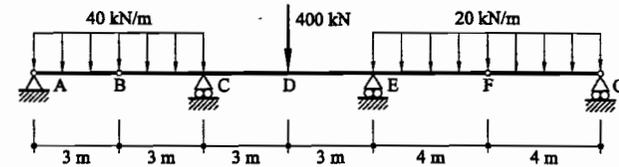


Fig. 2.9: Estructura del ejemplo 3

2.4.1 Reacciones externas:

Las reacciones verticales (ver figura 2.12a) en los apoyos A, C, E y G se calculan de acuerdo a las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \text{Momento flector nulo en la rótula F, en el tramo F-G:} & M_{(F)}^{FG} = 0 \\ V_G \cdot 4 - (20 \cdot 4) \cdot 2 = 0 & \boxed{V_G = 40 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Momento flector nulo en la rótula B, en el tramo A-B:} & M_{(B)}^{AB} = 0 \\ -V_A \cdot 3 + (40 \cdot 3) \cdot 1,5 = 0 & \boxed{V_A = 60 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de momentos en el punto C:} & M_{(C)} = 0 \\ -V_A \cdot 6 + (40 \cdot 6) \cdot 3 - 400 \cdot 3 + V_E \cdot 6 - (20 \cdot 8) \cdot 10 + V_G \cdot 14 = 0 & \boxed{V_E = 313,33 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de fuerzas verticales:} & R_y = 0 \\ V_A + V_C + V_E + V_G - 40 \cdot 6 - 400 - 20 \cdot 8 = 0 & \boxed{V_C = 386,67 \text{ kN}} \end{aligned}$$

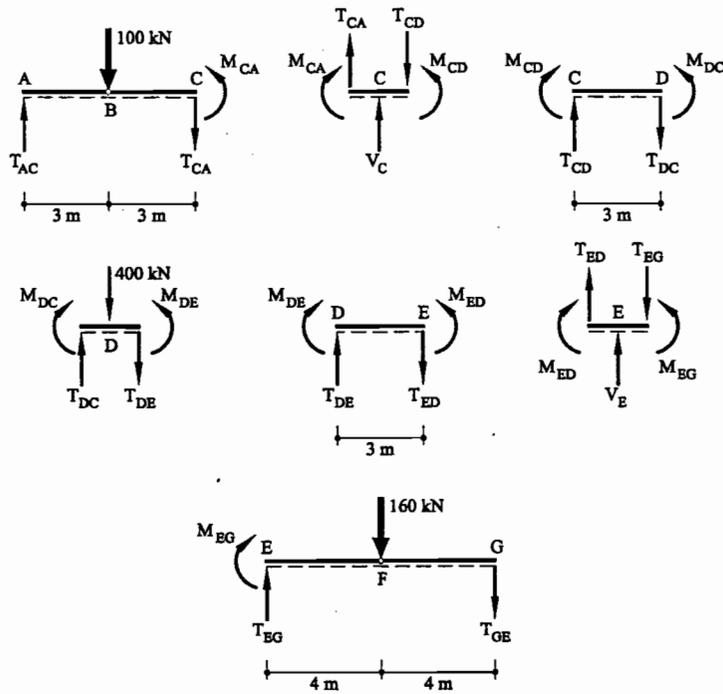


Fig. 2.10: Despiece de la estructura del ejemplo 3

2.4.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura tal como se muestra en la figura 2.10

Nudo A:

En el nudo A el esfuerzo cortante es igual a la reacción vertical calculada en el apartado anterior:

$$T_{AC} = V_A \quad \boxed{T_{AC} = 60 \text{ kN}}$$

Tramo A-C:

Se puede estudiar el tramo A-C directamente, sin dividir en B, ya que en ese punto los valores de cortante y momento flector se transmiten de forma continua. La rótula

presente en B se tomará en cuenta al momento de graficar los diagramas de momento, como punto de valor nulo. A continuación se calcula el esfuerzo cortante y el momento flector en el punto C:

$$\begin{aligned} -T_{CA} + T_{AC} - 40 \cdot 6 &= 0 & \boxed{T_{CA} = -180 \text{ kN}} \\ M_{CA} + (40 \cdot 6) \cdot 3 - 60 \cdot 6 &= 0 & \boxed{M_{CA} = -360 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Nudo C:

En este nudo existe transmisión de momentos flectores y de esfuerzos cortantes. Para el cálculo de estos últimos se debe incluir la reacción externa, V_C :

$$\begin{aligned} -T_{CD} + T_{CA} + V_C &= 0 & \boxed{T_{CD} = 206,67 \text{ kN}} \\ M_{CD} - M_{CA} &= 0 & \boxed{M_{CD} = -360 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Tramo C-D:

Equilibrio de fuerzas verticales y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} -T_{DC} + T_{CD} &= 0 & \boxed{T_{DC} = 206,67 \text{ kN}\cdot\text{m}} \\ M_{DC} - M_{CD} - T_{CD} \cdot 3 &= 0 & \boxed{M_{DC} = 260 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Nudo D:

Equilibrio de fuerzas verticales y momentos en el nudo:

$$\begin{aligned} -T_{DE} + T_{DC} - 400 &= 0 & \boxed{T_{DE} = -193,33 \text{ kN}} \\ M_{DE} - M_{DC} &= 0 & \boxed{M_{DE} = 260 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Tramo D-E:

Equilibrio de fuerzas verticales y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} -T_{ED} + T_{DE} &= 0 & \boxed{T_{ED} = -193,33 \text{ kN}} \\ M_{ED} - M_{DE} - T_{DE} \cdot 3 &= 0 & \boxed{M_{ED} = -320 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Nudo E:

Equilibrio de fuerzas verticales y momentos en el nudo:

$$\begin{aligned} -T_{EG} + T_{ED} + V_E &= 0 & \boxed{T_{EG} = 120 \text{ kN}} \\ M_{EG} - M_{ED} &= 0 & \boxed{M_{EG} = -320 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Nudo G:

Finalmente, en el punto G el valor del esfuerzo cortante se identifica con la reacción externa de acuerdo a sus respectivos convenios de signos:

$$T_{GE} = -V_G \quad \boxed{T_{GE} = -40 \text{ kN}}$$

2.4.3 Diagramas de esfuerzos:

Una vez obtenidos los valores de esfuerzos en los puntos de interés, es posible dibujar los diagramas de los mismos a lo largo del eje de la viga (ver figura 2.12). Sin embargo, aún falta obtener los puntos máximos del diagrama de momentos, que están ubicados en la sección de la viga donde el diagrama de cortante se hace nulo. Al construir el diagrama de cortantes, se observa que existen dos puntos donde esto ocurre: uno en el tramo A-B, que denotaremos A' y otro en el tramo E-G, que llamaremos G'. Las ubicaciones de estos puntos se obtienen mediante las ecuaciones de equilibrio vertical de los despieces A-A' y G'-G (ver figura ??). Los valores de momento flector máximo se obtienen planteando ecuaciones de equilibrio de momento en A y en G para los mismos despieces.

Tramo A-A':

$$T_{AC} - 40 \cdot x_A = 0$$

$$x_A = 1,5 \text{ m}$$

$$M_{A'} - (40 \cdot x_A) \cdot \frac{x_A}{2} = 0$$

$$M_{A'} = 45 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Tramo G'-G:

$$-T_{GE} - 20 \cdot x_G = 0$$

$$x_G = 2 \text{ m}$$

$$-M_{G'} + (20 \cdot x_G) \cdot \frac{x_G}{2} = 0$$

$$M_{G'} = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

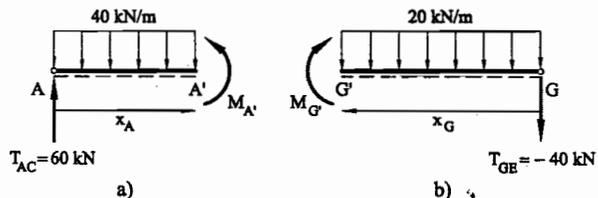


Fig. 2.11: Cálculo de la ubicación y de la magnitud de los momentos máximos en el ejemplo 3

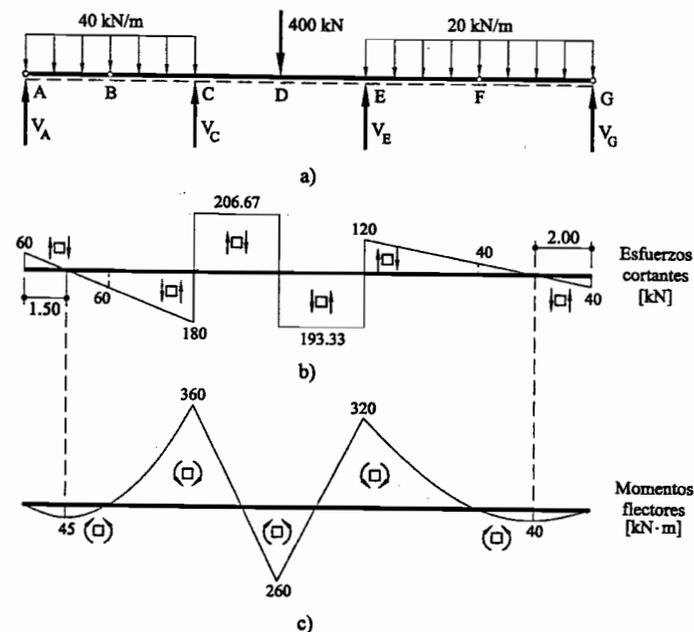


Fig. 2.12: Reacciones y leyes de esfuerzos del ejemplo 3

2.5 Ejemplo 4

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momento flector de la viga de la figura 2.13.

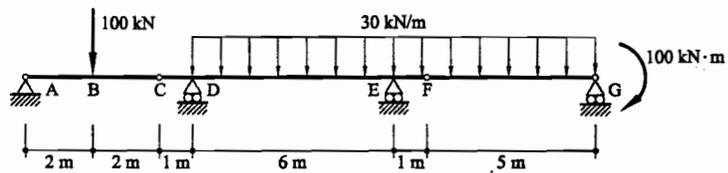


Fig. 2.13: Estructura del ejemplo 4

2.5.1 Reacciones externas:

Las reacciones verticales (ver figura 2.16a) en los apoyos A, D, E y G se calculan de acuerdo a las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \text{Momento flector nulo en el la rótula } F, \text{ en el tramo } F-G: & M_{(F)}^{FG} = 0 \\ V_G \cdot 5 - 100 - (30 \cdot 5) \cdot 2,5 = 0 & \boxed{V_G = 95 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Momento flector nulo en el la rótula } C, \text{ en el tramo } A-C: & M_{(F)}^{AC} = 0 \\ -V_A \cdot 4 - 100 \cdot 2 = 0 & \boxed{V_A = 50 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de momentos en el punto } D: & M_{(D)} = 0 \\ -V_A \cdot 5 + 100 \cdot 3 + V_E \cdot 6 + V_G \cdot 12 - (30 \cdot 12) \cdot 6 - 100 = 0 & \boxed{V_E = 178,33 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de fuerzas verticales:} & R_v = 0 \\ V_A + V_D + V_E + V_G - 100 - 30 \cdot 12 = 0 & \boxed{V_D = 136,67 \text{ kN}} \end{aligned}$$

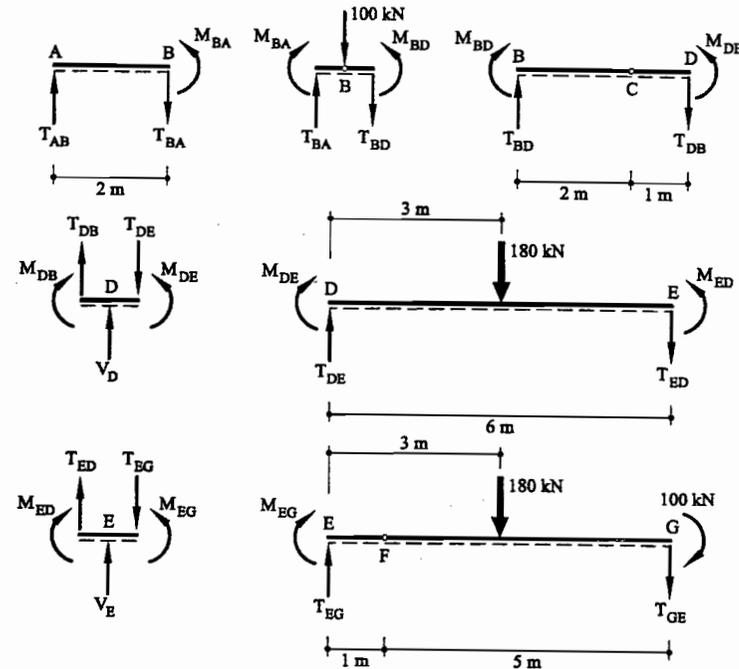


Fig. 2.14: Despiece de la estructura del ejemplo 4

2.5.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura tal como se muestra en la figura 2.14

Nudo A:

En el nudo A el esfuerzo cortante es igual a la reacción vertical calculada en el apartado anterior:

$$T_{AB} = V_A \quad \boxed{T_{AB} = 50 \text{ kN}}$$

Tramo A-B:

Equilibrio de fuerzas verticales y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} -T_{BA} + T_{AB} &= 0 & T_{BA} &= 50 \text{ kN} \\ M_{BA} - T_{AB} \cdot 2 &= 0 & M_{BA} &= 100 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo B:

En este nudo existe transmisión de momentos y de esfuerzos cortantes. Para el cálculo de estos últimos se debe incluir la acción externa:

$$\begin{aligned} -T_{BD} + T_{BA} - 100 &= 0 & T_{BD} &= -50 \text{ kN} \\ M_{BD} - M_{BA} &= 0 & M_{BD} &= 100 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo B-D:

Se puede estudiar el tramo B-D directamente, sin dividir en C, ya que en ese punto los valores de cortante y momento flector se transmiten de forma continua. La rótula presente en C se tomará en cuenta como punto de valor nulo en el diagrama de momento flector. A continuación se calcula el momento flector y el esfuerzo cortante en el extremo D:

$$\begin{aligned} T_{DB} - T_{BD} &= 0 & T_{DB} &= -50 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{DB} - T_{BD} \cdot 3 - M_{BD} &= 0 & M_{DB} &= -50 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo D:

En este nudo existe transmisión de momentos y de esfuerzos cortantes. Para el cálculo de estos últimos se debe incluir la reacción externa:

$$\begin{aligned} -T_{DE} + T_{DB} + V_D &= 0 & T_{DE} &= 86,67 \text{ kN} \\ M_{DE} - M_{DB} &= 0 & M_{DE} &= -50 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo D-E:

Equilibrio de fuerzas verticales y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} -T_{ED} + T_{DE} - 30 \cdot 6 &= 0 & T_{ED} &= -93,33 \text{ kN} \\ M_{ED} + (30 \cdot 6) \cdot 3 - T_{DE} \cdot 6 &= 0 & M_{ED} &= -70 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo E:

Equilibrio de fuerzas verticales y momentos en el nudo:

$$\begin{aligned} -T_{EG} + T_{ED} + V_E &= 0 & T_{EG} &= 85 \text{ kN} \\ M_{EG} - M_{ED} &= 0 & M_{EG} &= -70 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo G:

Finalmente, el valor de los esfuerzos se identifica con las acciones externas en el punto G, de acuerdo a sus respectivos convenios de signos:

$$\begin{aligned} T_{GE} &= -V_G & T_{GE} &= -95 \text{ kN} \\ M_{GE} &= -100 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

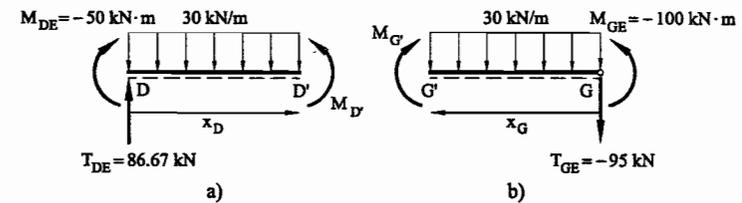


Fig. 2.15: Cálculo de la ubicación y de la magnitud de los momentos máximos en el ejemplo 4

2.5.3 Diagramas de esfuerzos:

Una vez obtenidos los valores de esfuerzos en los puntos de interés, es posible dibujar los diagramas de los mismos a lo largo del eje de la viga (ver figura 2.16). Sin embargo, aún falta obtener los puntos máximos del diagrama de momentos, que están ubicados en la sección de la viga donde el diagrama de cortante se hace nulo. Al construir el diagrama de cortantes, se observa que existen dos puntos donde esto ocurre: uno en el tramo D-E, que denotaremos D' y otro en el tramo E-G, que llamaremos G'.

Las ubicaciones de estos puntos se obtienen mediante las ecuaciones de equilibrio vertical de los despieces D-D' y G'-G (ver figura 2.15). Los valores de momento flector máximo se obtienen planteando ecuaciones de equilibrio de momento en D y en G para los mismos despieces.

Tramo D-D':

$$T_{DE} - 30 \cdot x_D = 0$$

$$x_D = 2,88 \text{ m}$$

$$M_{D'} - M_{DE} - (30 \cdot x_D) \cdot \frac{x_D}{2} = 0$$

$$M_{D'} = 75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Tramo G'-G:

$$T_{GE} - 30 \cdot x_G = 0$$

$$x_G = 3,17 \text{ m}$$

$$-M_{G'} + M_{GE} + (30 \cdot x_G) \cdot \frac{x_G}{2} = 0$$

$$M_{G'} = 50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

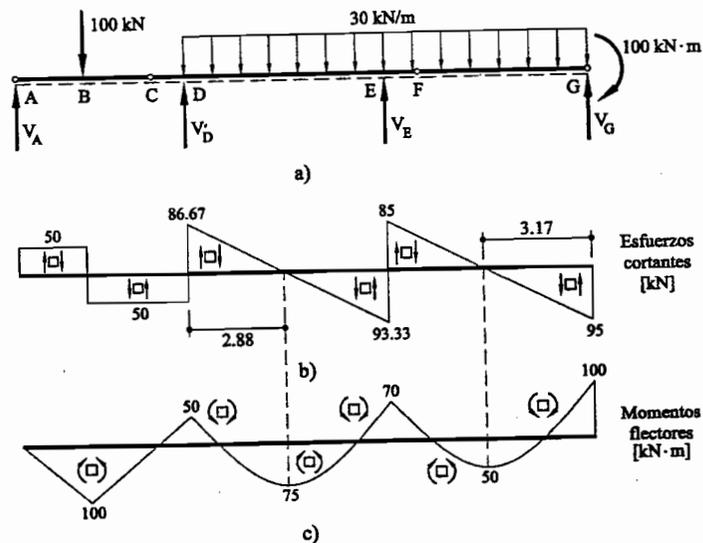


Fig. 2.16: Reacciones y leyes de esfuerzos del ejemplo 4

2.6 Ejemplo 5

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momento flector de la viga de la figura 2.17.

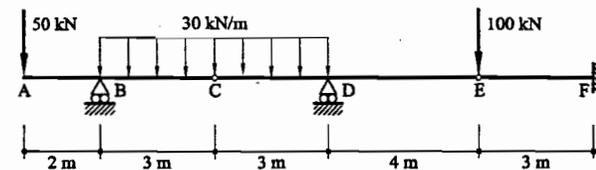


Fig. 2.17: Estructura del ejemplo 5

2.6.1 Reacciones externas:

Las reacciones verticales en los apoyos B y D y las reacciones de vínculo en el empotramiento F (ver figura 2.19a) se calculan de acuerdo a las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \text{Momento flector nulo en la rótula C, en el tramo A-C: } & M_{(C)}^{AC} = 0 \\ 50 \cdot 5 + 30 \cdot 3 \cdot 1,5 - V_B \cdot 3 = 0 & \quad V_B = 128,33 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Momento flector nulo en la rótula E, en el tramo A-E: } & M_{(E)}^{AE} = 0 \\ 50 \cdot 12 + (30 \cdot 6) \cdot 7 - V_B \cdot 10 - V_D \cdot 4 = 0 & \quad V_D = 144,17 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de fuerzas verticales: } & R_y = 0 \\ V_F + V_B + V_D - 50 - 30 \cdot 6 - 100 = 0 & \quad V_F = 57,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Momento flector nulo en la rótula E, en el tramo E-F: } & M_{(E)}^{der} = 0 \\ M_F + V_F \cdot 3 = 0 & \quad M_F = -172,5 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

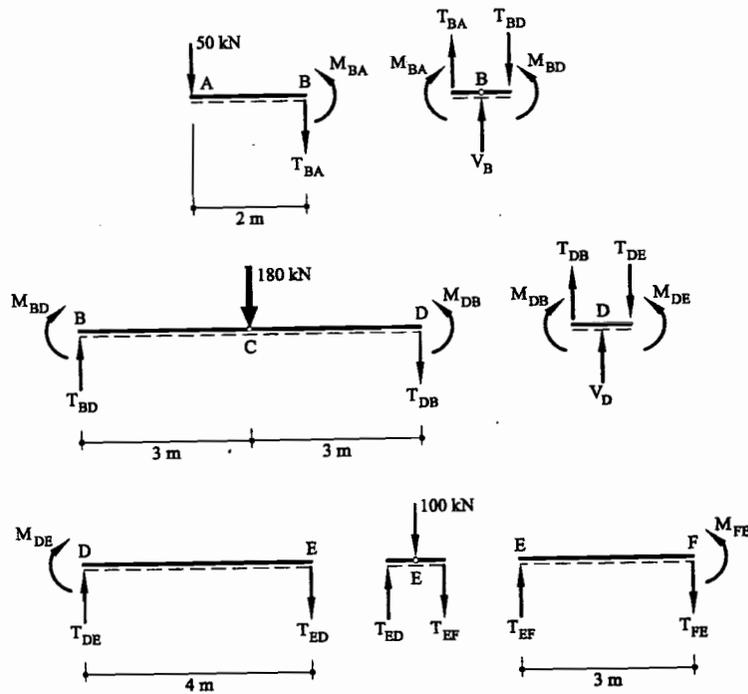


Fig. 2.18: Despiece de la estructura del ejemplo 5

2.6.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura tal como se muestra en la figura 2.18

Nudo A:

El valor del cortante se identifica con la acción externa en el punto A, de acuerdo a sus respectivos convenios de signos:

$$T_{AB} = -50 \text{ kN}$$

Tramo A-B:

Equilibrio de fuerzas verticales y momentos en el tramo:

$$T_{BA} - T_{AB} = 0 \quad T_{BA} = -50 \text{ kN}$$

$$M_{BA} + 50 \cdot 2 = 0 \quad M_{BA} = -100 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Nudo B:

En este nudo existe transmisión de momentos y de esfuerzos cortantes. Para el cálculo de estos últimos se debe incluir la reacción del apoyo:

$$-T_{BD} + T_{BA} + V_B = 0 \quad T_{BD} = 78,33 \text{ kN}$$

$$M_{BD} - M_{BA} = 0 \quad M_{BD} = -100 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Tramo B-D:

Equilibrio de fuerzas verticales y momentos en el tramo:

$$-T_{DB} + T_{BD} - 30 \cdot 6 = 0 \quad T_{DB} = -101,67 \text{ kN}$$

$$M_{DB} - M_{BD} - T_{DB} \cdot 6 + (30 \cdot 6) \cdot 3 = 0 \quad M_{DB} = -170 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Nudo D:

Equilibrio de fuerzas verticales y momentos en el nudo:

$$-T_{DE} + T_{DB} + V_D = 0 \quad T_{DE} = 42,5 \text{ kN}$$

$$M_{DE} - M_{DB} = 0 \quad M_{DE} = -170 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Tramo D-E:

Equilibrio de fuerzas verticales (el extremo E es una rotula):

$$-T_{ED} + T_{DE} = 0 \quad T_{ED} = 42,5 \text{ kN}$$

Nudo E:

Equilibrio de fuerzas verticales (este nudo es una rotula):

$$-T_{EF} + T_{ED} - 100 = 0 \quad T_{EF} = -57,5 \text{ kN}$$

Nudo F:

Finalmente, los esfuerzos internos en el nudo F se identifican con las respectivas reacciones de empotramiento:

$$T_{FE} = -V_F \quad T_{FE} = -57,5 \text{ kN}$$

$$M_{FE} = M_F \quad M_{FE} = -172,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

2.6.3 Diagramas de esfuerzos:

Una vez obtenidos los valores de esfuerzos en los puntos de interés, es posible dibujar los diagramas de los mismos a lo largo del eje de la viga (ver figura 2.19). Sin embargo, aún falta obtener los puntos máximos del diagrama de momentos, que están ubicados en la sección de la viga donde el diagrama de cortante se hace nulo. Al construir el diagrama de cortantes, se observa que existe un punto en el tramo B-D, que denotaremos B', donde esto ocurre. La ubicación de este punto se obtiene mediante la ecuación de equilibrio vertical del despiece B-B' (ver figura 2.20). Finalmente, el valor del momento flector máximo se obtiene planteando la ecuación de equilibrio de momento en B para el despiece.

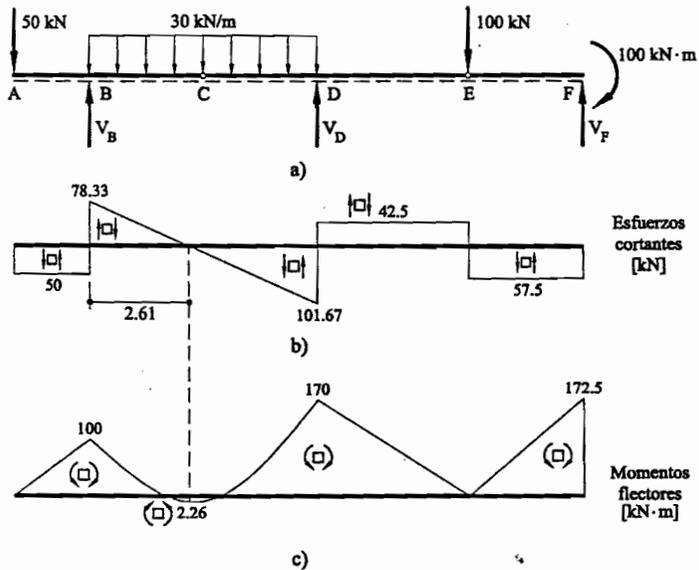


Fig. 2.19: Reacciones y leyes de esfuerzos del ejemplo 5

Tramo B-B':

$$T_{BD} - 30 \cdot x_B = 0 \quad \boxed{x_B = 2,61 \text{ m}}$$

$$M_{B'} - M_{BD} - (30 \cdot x_B) \cdot \frac{x_B}{2} = 0 \quad \boxed{M_{B'} = 2,26 \text{ kN}\cdot\text{m}}$$

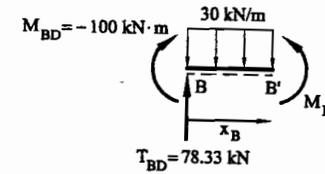


Fig. 2.20: Cálculo de la ubicación y de la magnitud del momento máximo en el ejemplo 5

3 Diagramas de esfuerzos en estructuras reticuladas

3.1 Introducción

El comportamiento a flexión no se da exclusivamente en vigas aisladas. A menudo estos elementos están conectados entre sí, formando una viga continua o una estructura. Una de las tipologías estructurales más habitual es la *estructura reticulada*, que está formada por piezas sometidas a flexión, conectadas de tal manera que no existe giro relativo entre ellas en los enlaces entre pieza y pieza. Como consecuencia, tanto momentos como fuerzas se transfieren de una pieza a otra a través del nudo de conexión (a diferencia de las estructuras articuladas, en las que las piezas están enlazadas entre sí por una rótula, que sí permite el giro relativo entre ellas, e impide, por tanto, la transmisión de momentos en los nudos de conexión).

Si todas las piezas que forman la estructura reticulada están en un mismo plano y las cargas que soporta están contenidas también en dicho plano, la estructura trabaja fundamentalmente a flexión. Su resolución, por tanto, consiste en determinar los diagramas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiales en todas las piezas que forman la estructura.

Obviamente, existen estructuras reticuladas estáticamente determinadas (isostáticas) y estáticamente indeterminadas (hiperestáticas). Las leyes de esfuerzos de las estructuras isostáticas se pueden determinar utilizando únicamente las ecuaciones de equilibrio estático. Las de las estructuras hiperestáticas, no.

En este capítulo se presentan ejemplos de resolución de estructuras reticuladas planas e isostáticas. En ellos se pone de manifiesto que el procedimiento de solución se ve a menudo facilitado considerando las condiciones de equilibrio estático para cada "elemento" (barras y nudos) de los que se compone la estructura.

3.2 Ejemplo 1

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos axiles, cortantes y de momento flector de la estructura de la figura 3.1.

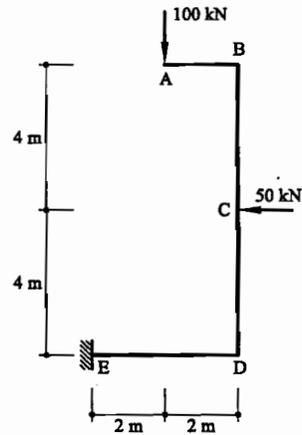


Fig. 3.1: Estructura del ejemplo 1

3.2.1 Reacciones externas:

Las reacciones en el empotramiento E se calculan imponiendo el equilibrio de fuerzas y momentos al conjunto de la estructura, considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 3.3a.

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de fuerzas verticales: } R_y &= 0 \\ V_E - 100 &= 0 \end{aligned} \quad \boxed{V_E = 100 \text{ kN}}$$

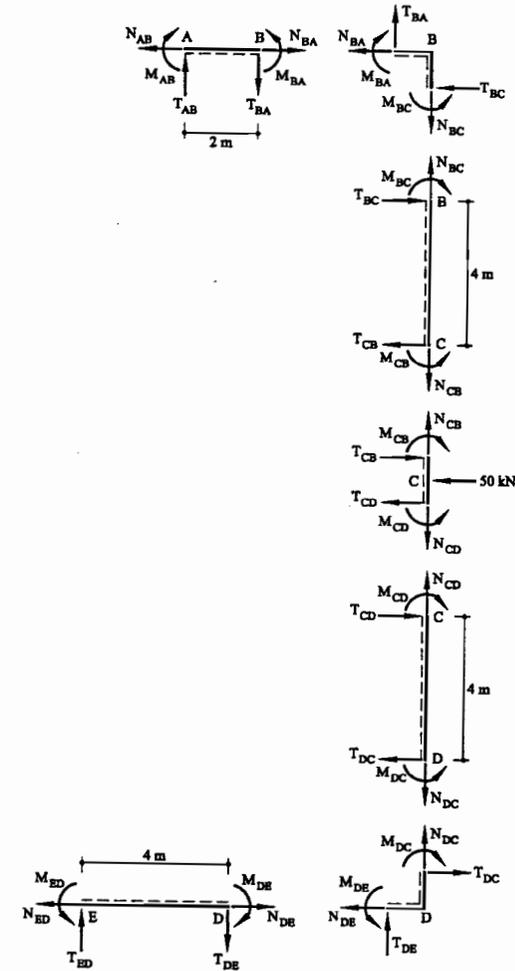


Fig. 3.2: Despiece de la estructura del ejemplo 1

Equilibrio de fuerzas horizontales: $R_x = 0$
 $H_E - 50 = 0$ $H_E = 50 \text{ kN}$

Equilibrio de momentos en el punto E: $M_{(E)} = 0$
 $M_E + 50 \cdot 4 - 10 \cdot 2 = 0$ $M_E = 0$

3.2.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura, tal como se muestra en la figura 3.2.

Nudo A:

Empezando por el extremo A, podemos identificar los esfuerzos con las acciones externas en el nudo. Teniendo en cuenta los respectivos convenio de signos, tenemos:

$$\boxed{N_{AB} = 0 \text{ kN}} \quad \boxed{T_{AB} = -100 \text{ kN}} \quad \boxed{M_{AB} = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}}$$

Tramo A-B:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} N_{BA} - N_{AB} &= 0 & \boxed{N_{BA} = 0 \text{ kN}} \\ -T_{BA} + T_{AB} &= 0 & \boxed{T_{BA} = -100 \text{ kN}} \\ M_{BA} - M_{AB} - T_{BA} \cdot 2 &= 0 & \boxed{M_{BA} = -200 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Nudo B:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el nudo:

$$\begin{aligned} -N_{BC} + T_{BA} &= 0 & \boxed{N_{BC} = -100 \text{ kN}} \\ -T_{BC} - N_{BA} &= 0 & \boxed{T_{BC} = 0 \text{ kN}} \\ M_{BC} - M_{BA} &= 0 & \boxed{M_{BC} = -200 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Tramo B-C:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} -N_{CB} + N_{BC} &= 0 & \boxed{N_{CB} = -100 \text{ kN}} \\ -T_{CB} + T_{BC} &= 0 & \boxed{T_{CB} = 0 \text{ kN}} \\ M_{CB} - M_{BC} - T_{BC} \cdot 4 &= 0 & \boxed{M_{CB} = -200 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Nudo C:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el nudo teniendo en cuenta la fuerza exterior:

$$\begin{aligned} -N_{CD} + N_{CB} &= 0 & \boxed{N_{CD} = -100 \text{ kN}} \\ -T_{CD} + T_{CB} - 50 &= 0 & \boxed{T_{CD} = -50 \text{ kN}} \\ M_{CD} - M_{CB} &= 0 & \boxed{M_{CD} = -200 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Tramo C-D:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} -N_{DC} + N_{CD} &= 0 & \boxed{N_{DC} = -100 \text{ kN}} \\ -T_{DC} + M_{CD} &= 0 & \boxed{T_{DC} = -50 \text{ kN}} \\ M_{DC} - M_{CD} - T_{CD} \cdot 4 &= 0 & \boxed{M_{DC} = -400 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Nudo D:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el nudo:

$$\begin{aligned} -N_{DE} + T_{DC} &= 0 & \boxed{N_{DE} = -50 \text{ kN}} \\ T_{DE} + N_{DC} &= 0 & \boxed{T_{DE} = 100 \text{ kN}} \\ M_{DE} - M_{DC} &= 0 & \boxed{M_{DE} = -400 \text{ kN}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Tramo D-E:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} -N_{ED} + N_{DE} &= 0 & \boxed{N_{ED} = -50 \text{ kN}} \\ T_{ED} - T_{DE} &= 0 & \boxed{T_{ED} = 100 \text{ kN}} \\ M_{ED} - M_{DE} - T_{DE} \cdot 4 &= 0 & \boxed{M_{ED} = 0} \end{aligned}$$

Nudo E:

Los resultados anteriores se confirman si los comparamos con las reacciones externas calculadas al inicio del problema.

3.2.3 Diagramas de esfuerzos:

Una vez obtenidos los valores de esfuerzos en los puntos de interés, es posible dibujar los diagramas de los mismos en cada tramo de la estructura.

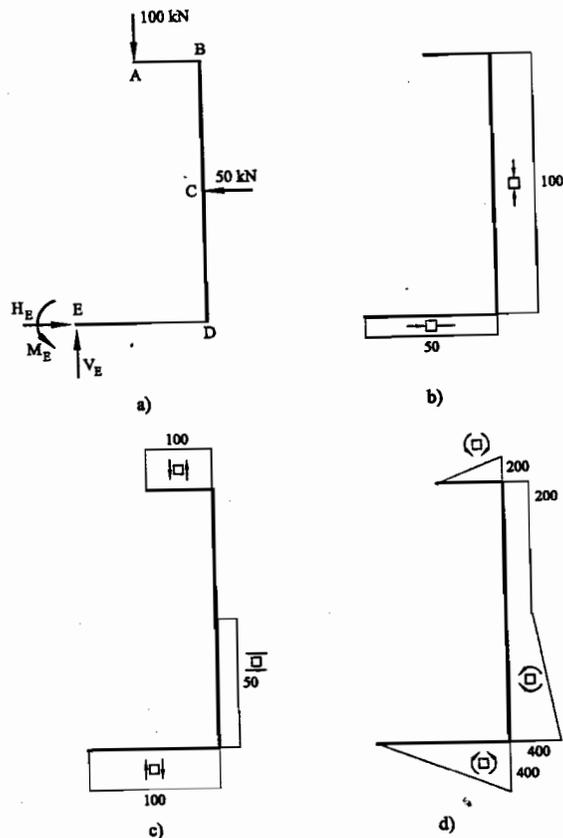


Fig. 3.3: Ejemplo 1: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

3.3 Ejemplo 2

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos axiales, cortantes y de momento flector de la estructura de la figura 3.4.

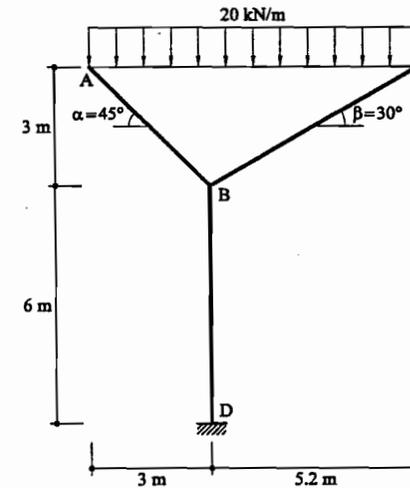


Fig. 3.4: Estructura del ejemplo 2

3.3.1 Reacciones externas:

Las reacciones en el empotramiento D se calculan imponiendo el equilibrio de fuerzas y momentos al conjunto de la estructura, considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 3.6a.

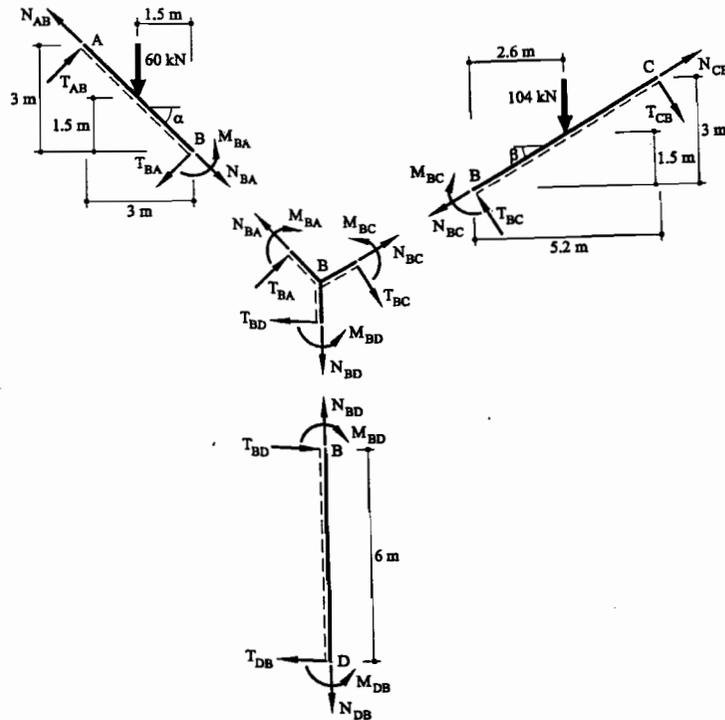


Fig. 3.5: Despiece de la estructura del ejemplo 2

Equilibrio de fuerzas horizontales:

$$R_x = 0$$

$$\boxed{H_D = 0 \text{ kN}}$$

Equilibrio de fuerzas verticales:

$$V_D - 20 \cdot 8,20 = 0$$

$$R_y = 0$$

$$\boxed{V_D = 164 \text{ kN}}$$

Equilibrio de momentos en el punto D:

$$M_D - 20 \cdot 5,20 \cdot 2,60 + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$$

$$M_{(D)} = 0$$

$$\boxed{M_D = 180,4 \text{ kN}\cdot\text{m}}$$

3.3.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura, tal como se muestra en la figura 3.5.

Nudo A:

El nudo A es un extremo libre y por lo tanto los esfuerzos son nulos:

$$\boxed{N_{AB} = 0} \quad \boxed{T_{AB} = 0} \quad \boxed{M_{AB} = 0}$$

Tramo A-B:

Estudiaremos el equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo. El equilibrio de fuerzas se realizará considerando los ejes locales de la barra o sea según las direcciones paralela y perpendicular a la misma:

$$N_{BA} + (20 \cdot 3) \cdot \cos(45^\circ) = 0 \quad \boxed{N_{BA} = -42,43 \text{ kN}}$$

$$-T_{BA} - (20 \cdot 3) \cdot \sin(45^\circ) = 0 \quad \boxed{T_{BA} = -42,43 \text{ kN}}$$

$$M_{BA} + (20 \cdot 3) \cdot 1,5 = 0 \quad \boxed{M_{BA} = -90 \text{ kN}\cdot\text{m}}$$

Nudo C:

El nudo C es otro extremo libre y por lo tanto los esfuerzos son nulos:

$$\boxed{N_{CB} = 0} \quad \boxed{T_{CB} = 0} \quad \boxed{M_{CB} = 0}$$

Tramo B-C:

Equilibrio de fuerzas (según ejes locales) y momentos en el tramo.

$$-N_{BC} - 104 \cdot \cos(60^\circ) = 0 \quad \boxed{N_{BC} = -52 \text{ kN}}$$

$$T_{BC} - 104 \cdot \sin(60^\circ) = 0 \quad \boxed{T_{BC} = 90,07 \text{ kN}}$$

$$-M_{BC} - (20 \cdot 5,2) \cdot 2,6 = 0 \quad \boxed{M_{BC} = -270,4 \text{ kN}\cdot\text{m}}$$

Nudo D:

En el extremo D podemos identificar los esfuerzos con las reacciones de empotramiento en el nodo. Teniendo en cuenta los respectivos convenio de signos, tenemos:

$$\begin{aligned} N_{DB} &= -V_D & N_{DB} &= -164 \text{ kN} \\ T_{DB} &= -H_D & T_{DB} &= 0 \text{ kN} \\ M_{DB} &= M_D & M_{DB} &= 180,4 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo B-D:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} N_{BD} - N_{DB} &= 0 & N_{BD} &= -164 \text{ kN} \\ T_{BD} - T_{DB} &= 0 & T_{BD} &= 0 \\ -M_{BD} + M_{DB} - T_{DB} \cdot 6 &= 0 & M_{BD} &= 180,4 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo B:

Haciendo equilibrio con todos los esfuerzos provenientes de los tramos B-A, B-C y B-D es posible verificar los resultados obtenidos:

$$\begin{aligned} -N_{BD} + N_{BA} \cdot \sin(45^\circ) + T_{BA} \cdot \cos(45^\circ) + N_{BC} \cdot \cos(60^\circ) - T_{BC} \cdot \sin(60^\circ) &\equiv 0 \\ -T_{BD} + N_{BA} \cdot \cos(45^\circ) + T_{BA} \cdot \sin(45^\circ) + N_{BC} \cdot \sin(60^\circ) - T_{BC} \cdot \cos(60^\circ) &\equiv 0 \\ M_{BD} + M_{BC} - M_{BA} &\equiv 0 \end{aligned}$$

3.3.3 Diagramas de esfuerzos:

Una vez obtenidos los valores de esfuerzos en los puntos de interés, es posible dibujar los diagramas de los mismos en cada tramo de la estructura.

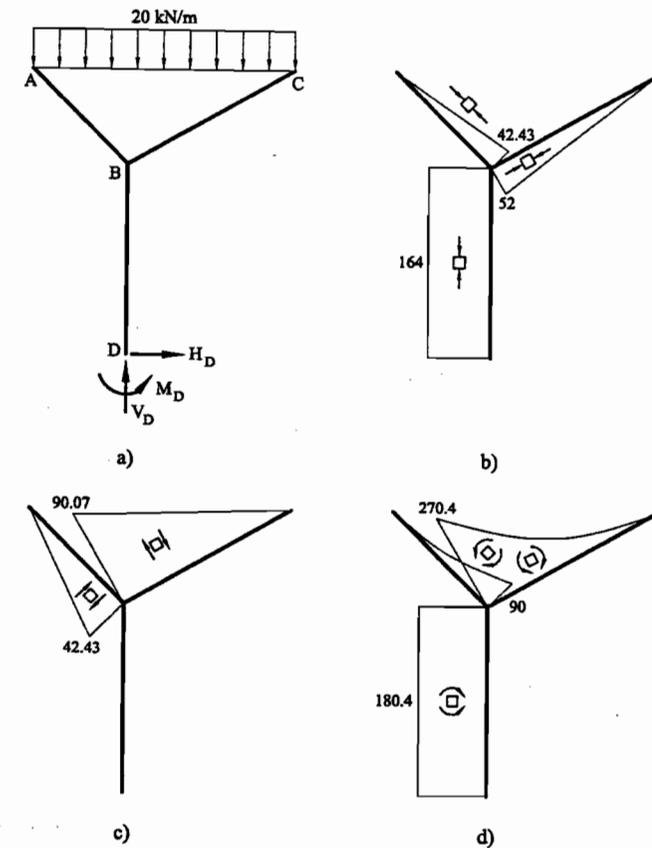


Fig. 3.6: Ejemplo 2: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

3.4 Ejemplo 3

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes, axiles y de momento flector de la estructura de la figura 3.7

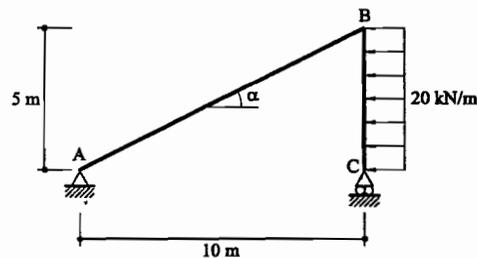


Fig. 3.7: Estructura del ejemplo 3

3.4.1 Reacciones externas:

Las reacciones en la articulación A y en el apoyo C se calculan imponiendo el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales y momentos en el nudo C para el conjunto de la estructura, considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 3.9a.

$$\begin{array}{ll} \text{Equilibrio de fuerzas horizontales:} & R_x = 0 \\ H_A - 20 \cdot 5 = 0 & \boxed{H_A = 100 \text{ kN}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Equilibrio de momentos en el punto C:} & M_{(C)} = 0 \\ -V_A \cdot 10 + (20 \cdot 5) \cdot 2,5 = 0 & \boxed{V_A = 25 \text{ kN}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Equilibrio de fuerzas verticales:} & R_y = 0 \\ V_C + V_A = 0 & \boxed{V_C = -25 \text{ kN}} \end{array}$$

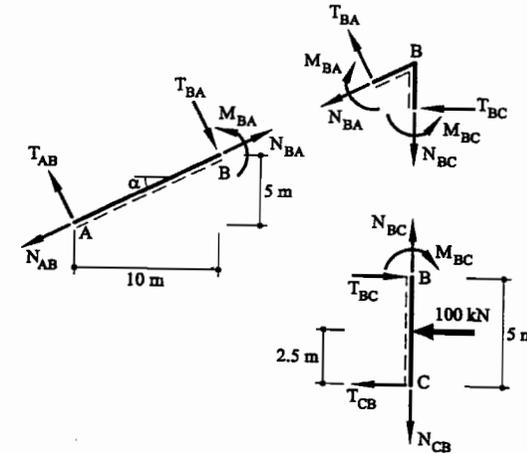


Fig. 3.8: Despiece de la estructura del ejemplo 3

3.4.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura, tal como se muestra en la figura 3.8.

Nudo A:

En el nudo A podemos identificar los esfuerzos con las reacciones de la articulación. Descomponiendo dichas reacciones en las direcciones paralela y perpendicular a la barra A-B y teniendo en cuenta los respectivos convenio de signos, tenemos:

$$N_{AB} = -H_A \cdot \cos(26,56^\circ) - V_A \cdot \sin(26,56^\circ) \quad \boxed{N_{AB} = -100,62 \text{ kN}}$$

$$T_{AB} = -H_A \cdot \sin(26,56^\circ) + V_A \cdot \cos(26,56^\circ) \quad \boxed{T_{AB} = -22,36 \text{ kN}}$$

El momento flector es nulo por definición de articulación.

Tramo A-B:

Estudiaremos el equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo. El equilibrio de fuerzas se realizará considerando los ejes locales de la barra o sea según las direcciones paralela y perpendicular a la misma:

$$\begin{aligned} N_{BA} - N_{AB} &= 0 & N_{BA} &= -100,62 \text{ kN} \\ -T_{BA} + T_{AB} &= 0 & T_{BA} &= -22,36 \text{ kN} \\ M_{BA} - T_{AB} \cdot \sqrt{10^2 + 5^2} &= 0 & M_{BA} &= -250 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo C:

En el nudo C podemos identificar los esfuerzos con la reacción del apoyo. Teniendo en cuenta los respectivos convenios de signos, tenemos:

$$\begin{aligned} N_{CB} &= V_C & N_{CB} &= 25 \text{ kN} \\ T_{CB} &= 0 & T_{CB} &= 0 \text{ kN} \end{aligned}$$

El momento flector es nulo siendo el nudo C un apoyo.

Tramo B-C:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo, teniendo en cuenta la carga exterior:

$$\begin{aligned} N_{BC} - N_{CB} &= 0 & N_{CB} &= 25 \text{ kN} \\ T_{BC} - T_{CB} - 20 \cdot 5 &= 0 & T_{CB} &= 100 \text{ kN} \\ -M_{BC} - T_{CB} \cdot 5 - (20 \cdot 5) \cdot 2,5 &= 0 & M_{CB} &= -250 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

3.4.3 Diagramas de esfuerzos:

Una vez obtenidos los valores de esfuerzos en los puntos de interés, es posible dibujar los diagramas de los mismos en cada tramo de la estructura.

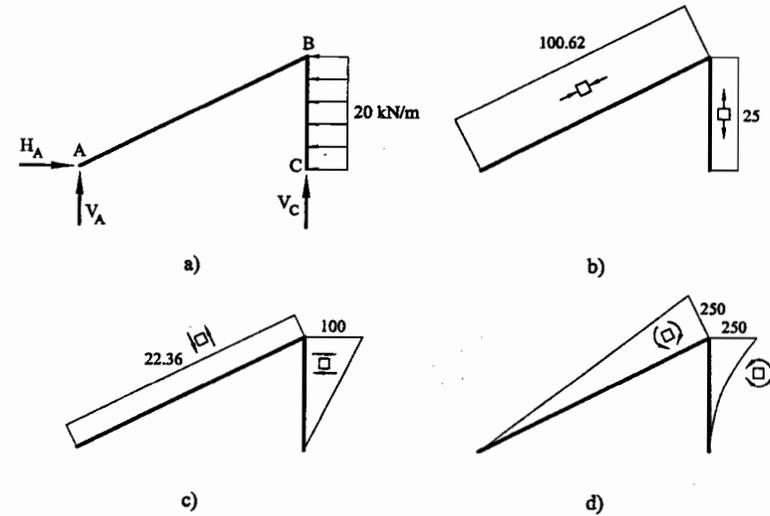


Fig. 3.9: Ejemplo 3: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

3.5 Ejemplo 4

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos axiales, cortantes y de momento flector de la estructura de la figura 3.10

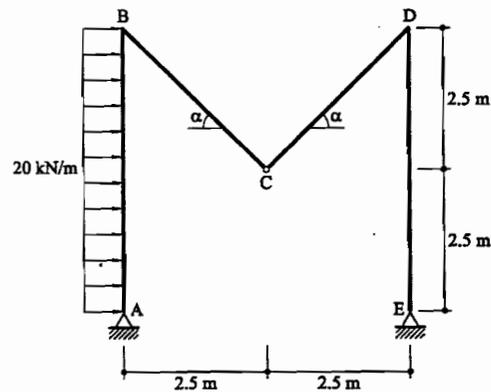


Fig. 3.10: Estructura del ejemplo 4

3.5.1 Reacciones externas:

Las reacciones en las articulaciones A y E se calculan imponiendo el equilibrio de fuerzas horizontales, verticales y momentos, considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 3.13a.

Equilibrio de momentos en el punto E: $M_{(E)} = 0$
 $-V_A \cdot 5 - (20 \cdot 5) \cdot 2,5 = 0$
 $V_A = -50 \text{ kN}$

Equilibrio de fuerzas verticales: $R_y = 0$
 $V_E + V_A = 0$
 $V_E = 50 \text{ kN}$

Momento flector nulo en el punto C, en el tramo C-D-E: $M_{(C)}^{CDE} = 0$
 $V_E \cdot 2,5 + H_E \cdot 2,5 = 0$
 $H_E = -50 \text{ kN}$

Equilibrio de fuerzas horizontales: $R_x = 0$
 $H_A + H_E + 20 \cdot 5 = 0$
 $H_A = -50 \text{ kN}$

3.5.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura, tal como se muestra en la figura 3.11.

Nudo A:

En el nudo A podemos identificar los esfuerzos axial y cortante con las reacciones de la articulación. Teniendo en cuenta los respectivos convenios de signos, tenemos:

$$N_{AB} = -V_A \quad N_{AB} = 50 \text{ kN}$$

$$T_{AB} = -H_A \quad T_{AB} = 50 \text{ kN}$$

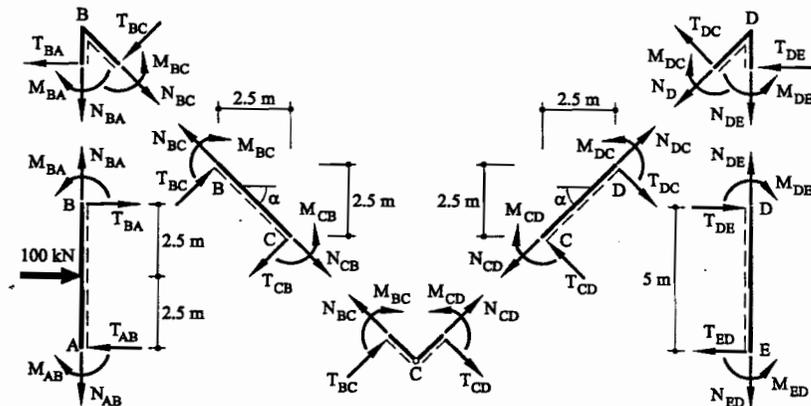


Fig. 3.11: Despiece de la estructura del ejemplo 4

Tramo A-B:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo, teniendo en cuenta la carga exterior:

$$\begin{aligned} N_{BA} - N_{AB} &= 0 & N_{BA} &= 50 \text{ kN} \\ T_{BA} - T_{AB} + (20 \cdot 5) &= 0 & T_{BA} &= -50 \text{ kN} \\ M_{BA} - T_{AB} \cdot 5 + (20 \cdot 5) \cdot 2,5 &= 0 & M_{BA} &= 0 \end{aligned}$$

Nudo B:

En este nudo podemos calcular los esfuerzos para el extremo B del tramo B-C equilibrándolos con las acciones relativas al tramo A-B. Descomponiendo dichos esfuerzos en las direcciones paralela y perpendicular a la barra B-C y teniendo en cuenta los respectivos convenio de signos, tenemos:

$$\begin{aligned} N_{BC} &= -N_{BA} \cdot \cos(45^\circ) + T_{BA} \cdot \sin(45^\circ) & N_{BC} &= -70,71 \text{ kN} \\ T_{BC} &= -N_{BA} \cdot \sin(45^\circ) - T_{BA} \cdot \cos(45^\circ) & T_{BC} &= 0 \\ M_{BC} &= M_{BA} & M_{BC} &= 0 \end{aligned}$$

Tramo B-C:

Estudiaremos el equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo. El equilibrio de fuerzas se realizará considerando los ejes locales de la barra o sea según las direcciones paralela y perpendicular a la misma:

$$\begin{aligned} N_{CB} - N_{BC} &= 0 & N_{CB} &= -70,71 \text{ kN} \\ -T_{CB} + T_{BC} &= 0 & T_{CB} &= 0 \\ M_{CB} - M_{BC} - T_{BC} \cdot 2,5\sqrt{2} &= 0 & M_{CB} &= 0 \end{aligned}$$

Obsérvese como el momento flector es nulo en el nudo C respetando su condición de articulación.

Nudo C:

En este nudo podemos calcular los esfuerzos para el extremo C del tramo C-D equilibrándolos con las acciones relativas al tramo B-C. Descomponiendo dichos esfuerzos en las direcciones paralela y perpendicular a la barra C-D y teniendo en cuenta los respectivos convenio de signos, tenemos:

$$\begin{aligned} N_{CD} &= -T_{BC} & N_{CD} &= 0 \\ T_{CD} &= N_{BC} & T_{CD} &= -70,71 \text{ kN} \\ M_{CD} &= M_{BC} & M_{CD} &= 0 \end{aligned}$$

Tramo C-D:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo considerando los ejes locales de la barra:

$$\begin{aligned} N_{DC} - N_{CD} &= 0 & N_{DC} &= 0 \\ -T_{DC} + T_{CD} &= 0 & T_{DC} &= -70,71 \text{ kN} \\ M_{DC} - M_{CD} - T_{CD} \cdot 2,5\sqrt{2} &= 0 & M_{DC} &= -250 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo D:

Poe equilibrio en este nudo tenemos:

$$\begin{aligned} N_{DE} &= -N_{DC} \cdot \cos(45^\circ) + T_{DC} \cdot \sin(45^\circ) & N_{DE} &= -50 \text{ kN} \\ T_{DE} &= -N_{DC} \cdot \sin(45^\circ) - T_{DC} \cdot \cos(45^\circ) & T_{DE} &= 50 \text{ kN} \\ M_{DE} &= M_{DC} & M_{DE} &= -250 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo D-E:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} -N_{ED} + N_{DE} &= 0 & N_{ED} &= -50 \text{ kN} \\ -T_{ED} + T_{DE} &= 0 & T_{ED} &= 50 \text{ kN} \\ M_{ED} - M_{DE} - T_{DE} \cdot 5 &= 0 & M_{ED} &= 0 \end{aligned}$$

Nudo E:

Finalmente, los resultados anteriores se confirman al coincidir los valores de las reacciones externas en la articulación E.

$$\begin{aligned} N_{ED} &= -V_A & N_{ED} &= -50 \text{ kN} \\ T_{ED} &= -H_A & T_{ED} &= 50 \text{ kN} \\ M_{ED} &= 0 & M_{ED} &= 0 \end{aligned}$$

3.5.3 Diagramas de esfuerzos:

Una vez obtenidos los valores de esfuerzos en los puntos de interés, es posible dibujar los diagramas de los mismos a lo largo del eje de cada barra. Sin embargo, aún falta obtener los puntos máximos del diagrama de momentos flectores, que están ubicados en las secciones donde el diagrama de cortante se anula. Al construir el diagrama de cortantes, se observa que existe un punto con estas características en el tramo A-B, que denotaremos A'. La ubicación de este punto se obtiene mediante una ecuación de equilibrio de fuerzas hortogonales al tramo A-A' (ver figura 3.12). El valor de momento flector máximo se obtiene planteando la ecuación de equilibrio de momentos en A para el mismo despiece:

Tramo A-A':

$$\begin{aligned} -T_{AB} + 20 \cdot x_A &= 0 & x_A &= 2,5 \text{ m} \\ M_{A'} - (20 \cdot x_A) \cdot \frac{x_A}{2} &= 0 & M_{A'} &= 62,5 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

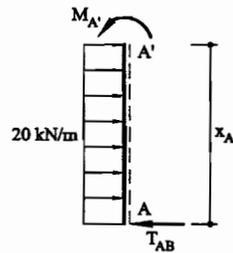


Fig. 3.12: Cálculo de la ubicación y de la magnitud del momento máximo del tramo AB en el ejemplo 4

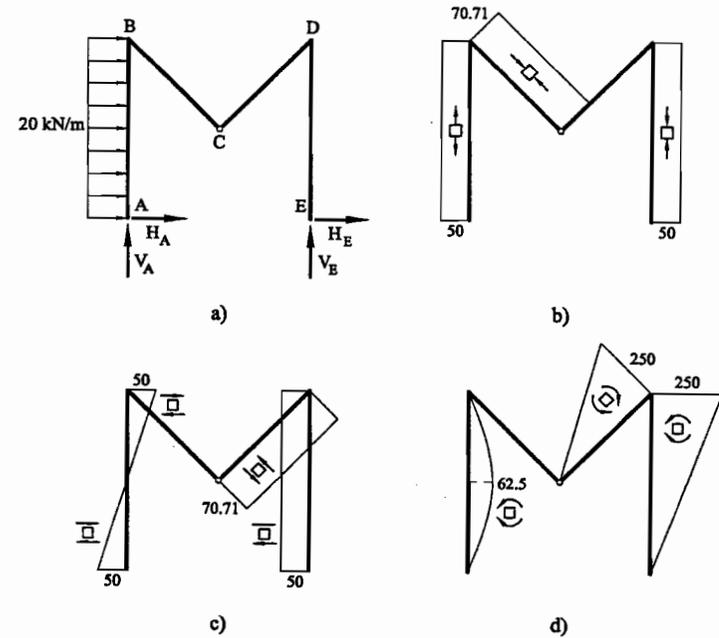


Fig. 3.13: Ejemplo 4: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

3.6 Ejemplo 5

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes, axiles y de momento flector de la estructura de la figura 3.14

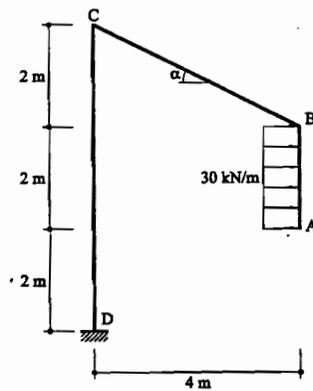


Fig. 3.14: Estructura del ejemplo 5

3.6.1 Reacciones externas:

Las reacciones en el empotramiento D se calculan imponiendo el equilibrio de fuerzas horizontales, verticales y momentos, considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 3.16a.

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de fuerzas horizontales:} \quad R_x &= 0 \\ H_D + 30 \cdot 2 &= 0 \end{aligned} \quad \boxed{H_D = -60 \text{ kN}}$$

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de fuerzas verticales:} \quad R_y &= 0 \\ V_D &= 0 \end{aligned} \quad \boxed{V_D = 0}$$

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de momentos en el punto D:} \quad M_{(D)} &= 0 \\ M_D - (30 \cdot 2) \cdot 3 &= 0 \end{aligned} \quad \boxed{M_D = 180 \text{ kN}\cdot\text{m}}$$

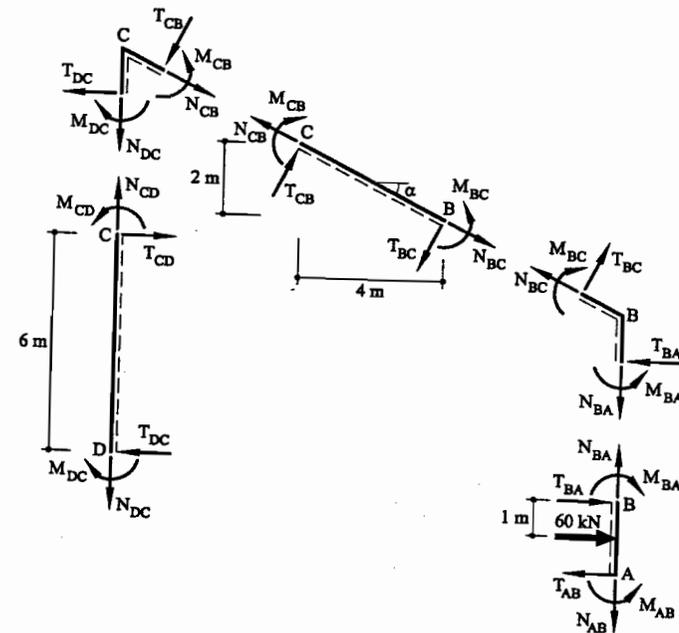


Fig. 3.15: Despiece de la estructura del ejemplo 5

3.6.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura, tal como se muestra en la figura 3.15.

Nudo A:

En el nudo A es un extremo libre y por lo tanto todos los esfuerzos en este extremo son nulos:

$$\boxed{N_{AB} = 0} \quad \boxed{T_{AB} = 0} \quad \boxed{M_{AB} = 0}$$

Tramo A-B:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo, teniendo en cuenta la carga exterior:

$$\begin{aligned} N_{BA} - N_{AB} &= 0 & N_{BA} &= 0 \\ T_{BA} - T_{AB} + (30 \cdot 2) &= 0 & T_{BA} &= -60 \text{ kN} \\ -M_{BA} + M_{AB} - T_{AB} \cdot 2 + (30 \cdot 2) \cdot 1 &= 0 & M_{BA} &= 60 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo B:

Estudiamos el equilibrio de este nudo para ver como se transmiten los esfuerzos en el extremo B hacia la barra B-C. Teniendo en cuenta los respectivos convenios de signo y siendo $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26,56^\circ$, tenemos:

$$\begin{aligned} N_{BC} &= N_{BA} \cdot \sin(26,56^\circ) - T_{BA} \cdot \cos(26,56^\circ) & N_{BC} &= 53,66 \text{ kN} \\ T_{BC} &= N_{BA} \cdot \cos(26,56^\circ) + T_{BA} \sin(26,56^\circ) & T_{BC} &= -26,83 \text{ kN} \\ M_{BC} &= M_{BA} & M_{BC} &= 60 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo B-C:

Estudiaremos el equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo. El equilibrio de fuerzas se realizará considerando los ejes locales de la barra o sea según las direcciones paralela y perpendicular a la misma:

$$\begin{aligned} -N_{CB} + N_{BC} &= 0 & N_{CB} &= 53,66 \text{ kN} \\ T_{CB} - T_{BC} &= 0 & T_{CB} &= -26,83 \text{ kN} \\ -M_{CB} + M_{BC} - T_{BC} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2} &= 0 & M_{CB} &= 180 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo D:

Se puede continuar con la resolución del problema empezando desde el nudo D. Identificando los esfuerzos que se dan en este extremo con las reacciones de empotramiento, tenemos:

$$\begin{aligned} N_{DC} &= -V_D & N_{DC} &= 0 \\ T_{DC} &= -H_D & T_{DC} &= 60 \text{ kN} \\ M_{DC} &= -M_D & M_{DC} &= -180 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo C-D:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo:

$$\begin{aligned} N_{CD} - N_{DC} &= 0 & N_{CD} &= 0 \\ T_{CD} - T_{DC} &= 0 & T_{CD} &= 60 \text{ kN} \\ M_{CD} - M_{DC} - T_{DC} \cdot 6 &= 0 & M_{CD} &= 180 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

3.6.3 Diagramas de esfuerzos:

Una vez obtenidos los valores de esfuerzos en los puntos de interés, es posible dibujar los diagramas de los mismos a lo largo del eje de cada barra, tal como se muestra en la figura 3.16. Obsérvese como el momento flector es tangente a la barra A-B en el extremo A de acuerdo con el valor del cortante.

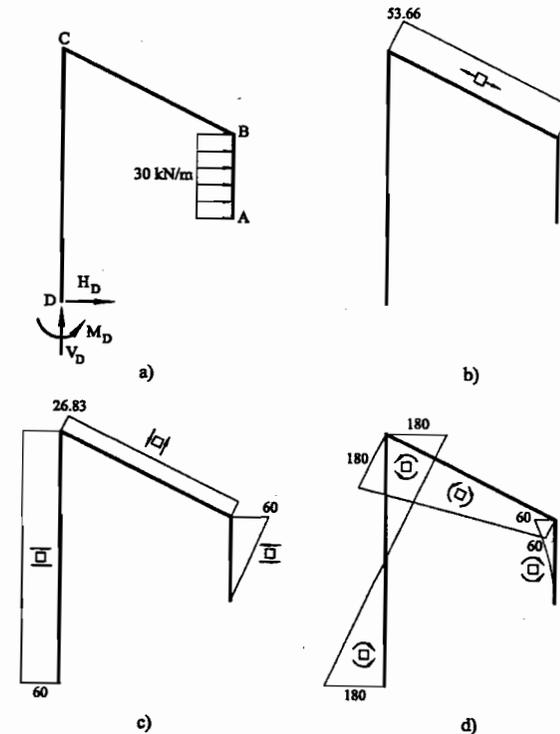


Fig. 3.16: Ejemplo 5: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

3.7 Ejemplo 6

Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzos axiles, cortantes y de momento flector de la estructura de la figura 3.17

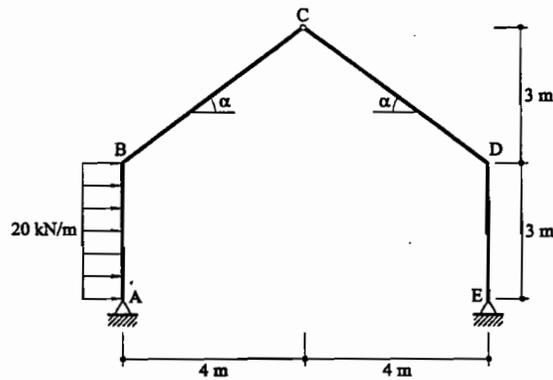


Fig. 3.17: Estructura del ejemplo 6

3.7.1 Reacciones externas:

Las reacciones en las articulaciones A y E se calculan imponiendo el equilibrio de fuerzas horizontales, verticales y momentos en las articulaciones, considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 3.19a.

Equilibrio de momentos en el punto E: $M_{(E)} = 0$
 $-V_A \cdot 8 - (20 \cdot 3) \cdot 1,5 = 0$
 $V_A = -11,25 \text{ kN}$

Equilibrio de fuerzas verticales: $R_y = 0$
 $V_E + V_A = 0$
 $V_E = 11,25 \text{ kN}$

Momento flector nulo en la articulación C, para el tramo C-D-E: $M_{(C)}^{CDE} = 0$
 $H_E \cdot 6 + V_E \cdot 4 = 0$
 $H_E = -7,5 \text{ kN}$

Equilibrio de fuerzas horizontales: $R_x = 0$
 $H_A + H_E + (20 \cdot 3) = 0$
 $H_A = -52,5 \text{ kN}$

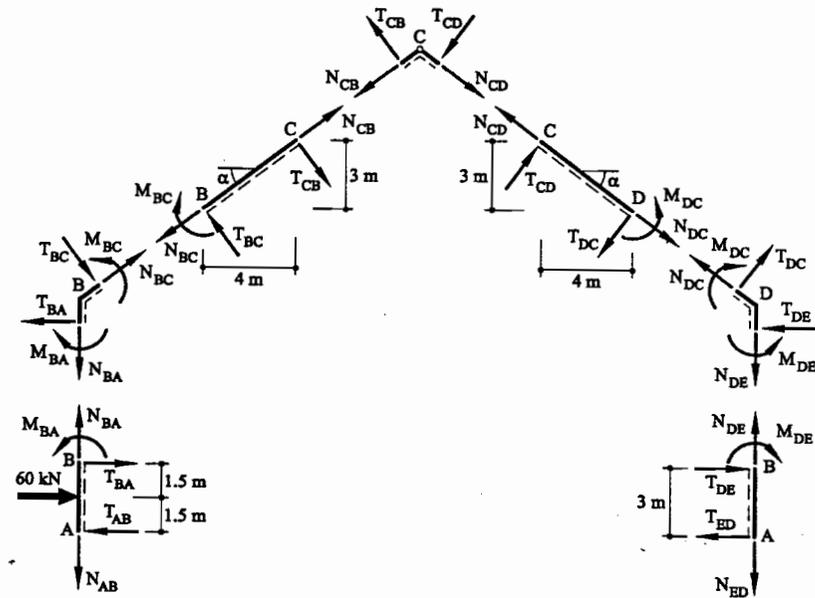


Fig. 3.18: Despiece de la estructura del ejemplo 6

3.7.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos se procede al despiece de la estructura, tal como se muestra en la figura 3.18.

Nudo A:

Identificando los esfuerzos en este extremo con las reacciones que se dan en la articulación, tenemos:

$$\begin{aligned} N_{AB} &= -V_A & N_{AB} &= 11,25 \text{ kN} \\ T_{AB} &= -H_A & T_{AB} &= 52,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Tramo A-B:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo, teniendo en cuenta la carga exterior:

$$\begin{aligned} N_{BA} - N_{AB} &= 0 & N_{BA} &= 11,25 \text{ kN} \\ T_{BA} - T_{AB} + (20 \cdot 3) &= 0 & T_{BA} &= -7,5 \text{ kN} \\ M_{BA} - T_{AB} \cdot 3 + (20 \cdot 3) \cdot 1,5 &= 0 & M_{BA} &= 67,5 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo B:

Estudiamos el equilibrio de este nudo para ver como se transmiten los esfuerzos en el nudo B hacia la barra B-C. Teniendo en cuenta los respectivos convenios de signo, tenemos:

$$\begin{aligned} N_{BC} &= N_{BA} \cdot \sin(36,87^\circ) + T_{BA} \cdot \cos(36,87^\circ) & N_{BC} &= 0,75 \text{ kN} \\ T_{BC} &= -N_{BA} \cdot \cos(36,87^\circ) + T_{BA} \sin(36,87^\circ) & T_{BC} &= -13,5 \text{ kN} \\ M_{BC} &= M_{BA} & M_{BC} &= 67,5 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo B-C:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo.

$$\begin{aligned} N_{CB} - N_{BC} &= 0 & N_{CB} &= 0,75 \text{ kN} \\ -T_{CB} + T_{BC} &= 0 & T_{CB} &= -13,5 \text{ kN} \\ M_{CB} - M_{BC} - T_{BC} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} &= 0 & M_{CB} &= 0 \end{aligned}$$

Se puede observar como el momento flector en el nudo C es nulo siendo una articulación.

Nudo E:

Se puede continuar con la resolución del problema empezando desde el nudo E. Identificando los esfuerzos que se dan en este extremo con las reacciones que se generan en la articulación, tenemos:

$$\begin{aligned} N_{ED} &= -V_E & N_{ED} &= -11,25 \text{ kN} \\ T_{ED} &= -H_E & T_{ED} &= 7,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Tramo D-E:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo.

$$\begin{aligned} N_{DE} - N_{ED} &= 0 & N_{DE} &= -11,25 \text{ kN} \\ T_{DE} - T_{ED} &= 0 & T_{DE} &= 7,5 \text{ kN} \\ -M_{DE} - T_{ED} \cdot 3 &= 0 & M_{DE} &= -22,5 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Nudo D:

En el extremo D de la barra D-E los esfuerzos se transmiten hacia la barra D-C. Estudiando el equilibrio de estos esfuerzos en el nudo D, tenemos:

$$\begin{aligned} N_{DC} &= N_{DE} \cdot \sin(36,87^\circ) - T_{DE} \cdot \cos(36,87^\circ) & N_{DC} &= -12,75 \text{ kN} \\ T_{DC} &= N_{DE} \cdot \cos(36,87^\circ) + T_{DE} \sin(36,87^\circ) & T_{DC} &= -4,5 \text{ kN} \\ M_{DC} &= M_{DE} & M_{DC} &= -22,5 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Tramo C-D:

Equilibrio de fuerzas y momentos en el tramo.

$$\begin{aligned} N_{CD} - N_{DC} &= 0 & N_{CD} &= -12,75 \text{ kN} \\ T_{CD} - T_{DC} &= 0 & T_{CD} &= -4,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

El momento flector es nulo siendo C una articulación. Es posible verificarlo escribiendo la ecuación de equilibrio de momentos.

3.7.3 Diagramas de esfuerzos:

Es ahora posible dibujar los diagramas de los esfuerzos a lo largo del eje de cada barra, tal como se muestra en la figura 3.19. Se observa que existe un punto donde se anula el cortante en la barra A-B: este punto, que denotaremos A', corresponde al momento flector máximo en dicha barra. La ubicación de este punto se obtiene mediante una ecuación de equilibrio de fuerzas hortogonales al tramo A-A' (ver figura 3.20). El valor de momento flector máximo se obtiene planteando la ecuación de equilibrio de momentos en A para el mismo despiece.

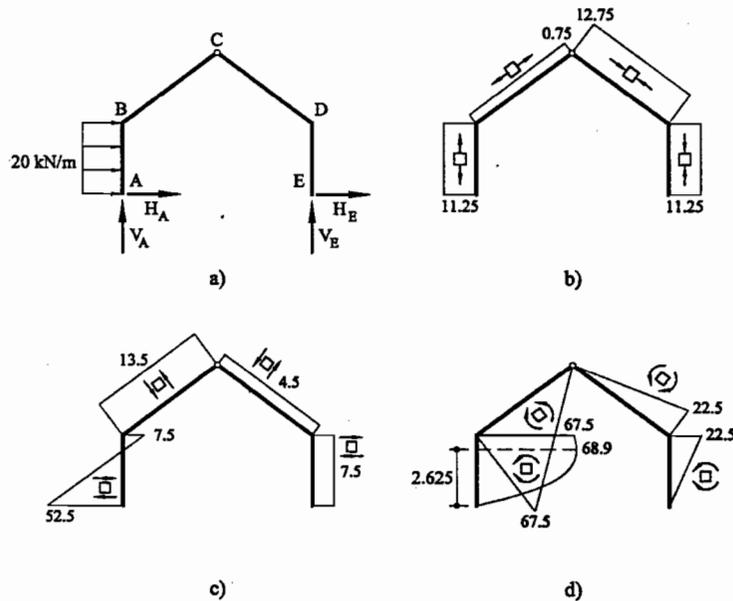


Fig. 3.19: Ejemplo 6: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

Tramo A-A':

$$\begin{aligned} -T_{AB} + 20 \cdot x_A &= 0 & x_A &= 2,625 \text{ m} \\ M_{A'} - (20 \cdot x_A) \cdot \frac{x_A}{2} &= 0 & M_{A'} &= 68,91 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

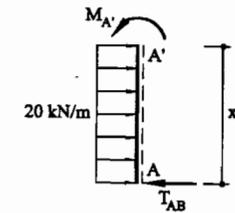


Fig. 3.20: Cálculo de la ubicación y de la magnitud del momento máximo del tramo AB en el ejemplo 6

3.8 Ejercicios propuestos

A continuación se propone una serie de ejercicios donde se pide calcular esfuerzos axiales, cortantes y momentos flectores para las estructuras propuestas. En las soluciones se muestran los relativos diagramas de esfuerzos.

3.8.1 Ejercicio 1

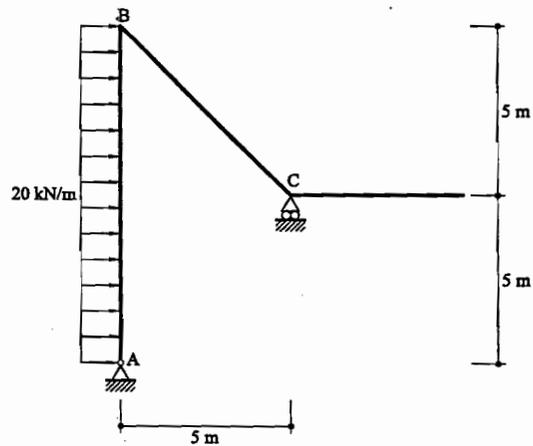


Fig. 3.21: Estructura del ejercicio 1

Diagramas de esfuerzos

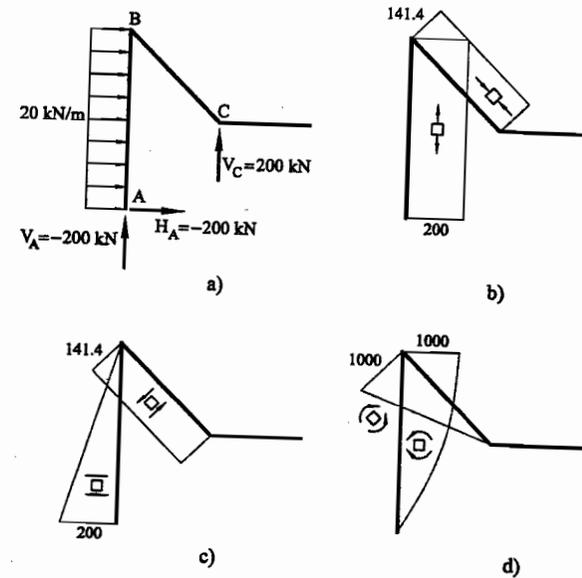


Fig. 3.22: Solución del ejercicio 7: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

3.8.2 Ejercicio 2

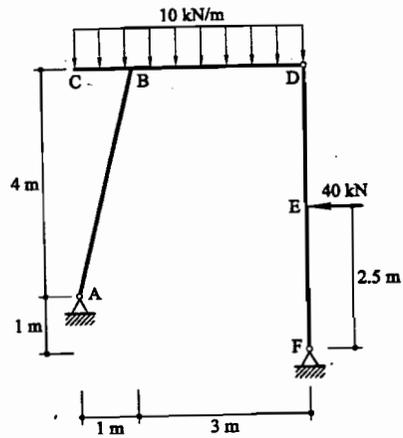


Fig. 3.23: Estructura del ejercicio 2

Diagramas de esfuerzos:

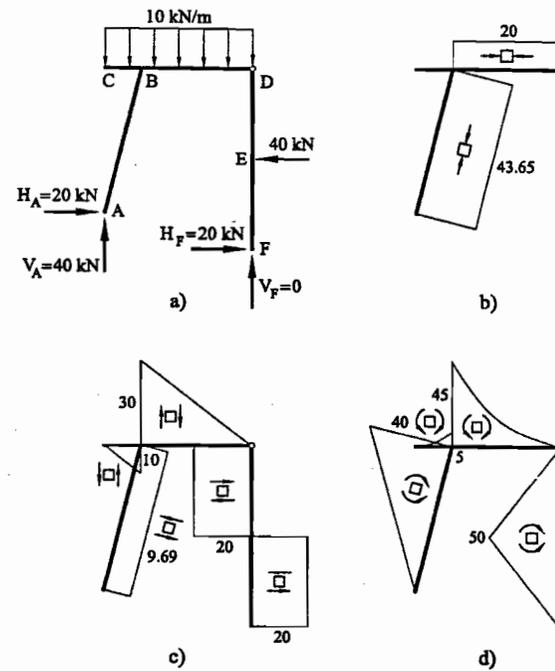


Fig. 3.24: Solución del ejercicio 8: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

3.8.3 Ejercicio 3

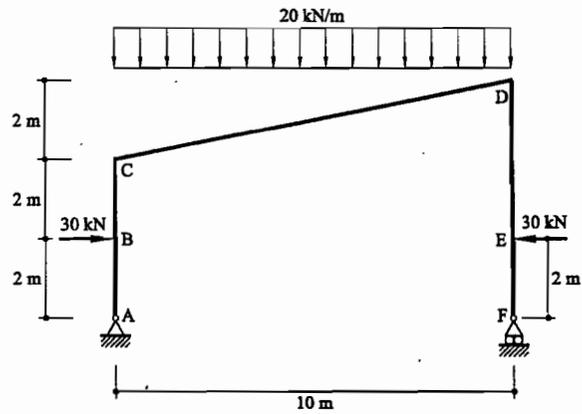


Fig. 3.25: Estructura del ejercicio 3

Diagramas de esfuerzos:

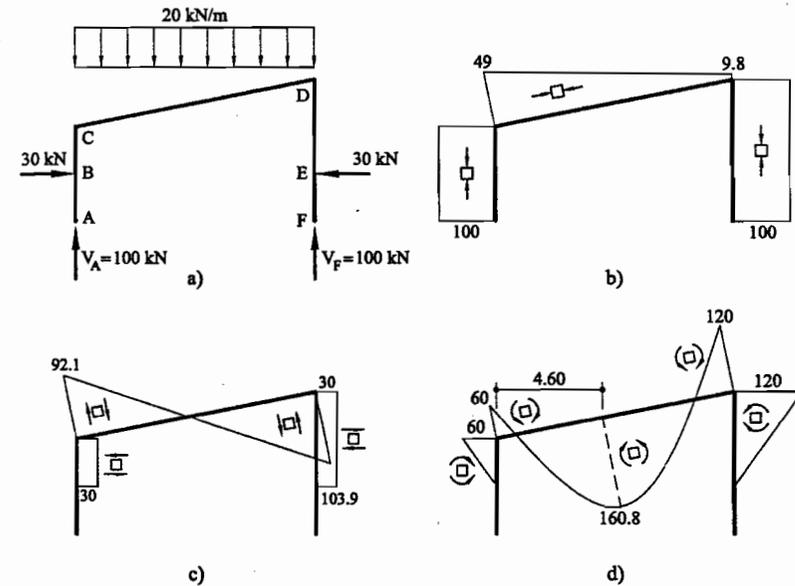


Fig. 3.26: Solución del ejercicio 9: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

3.8.4 Ejercicio 4

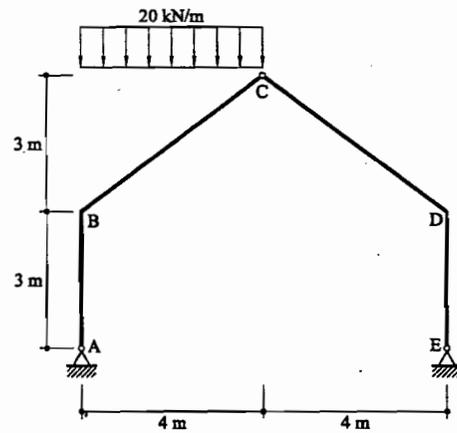


Fig. 3.27: Estructura del ejercicio 4

Diagramas de esfuerzos:

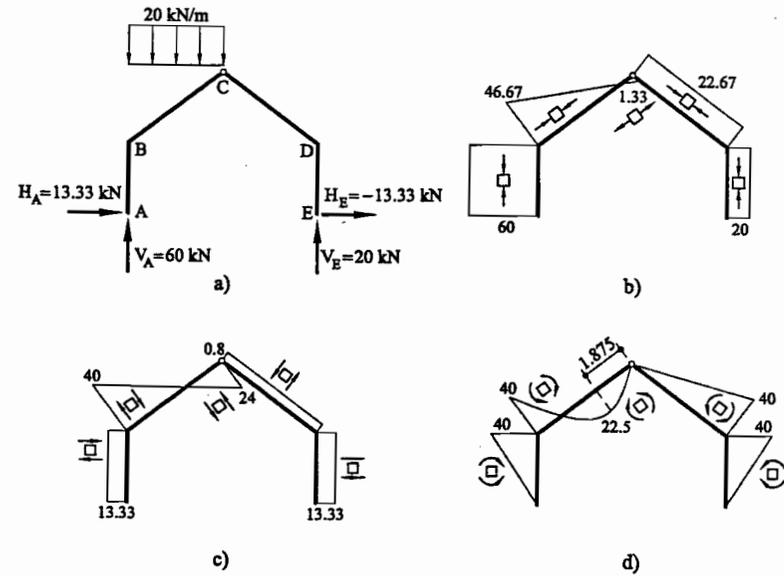


Fig. 3.28: Solución del ejercicio 10: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

3.8.5 Ejercicio 5

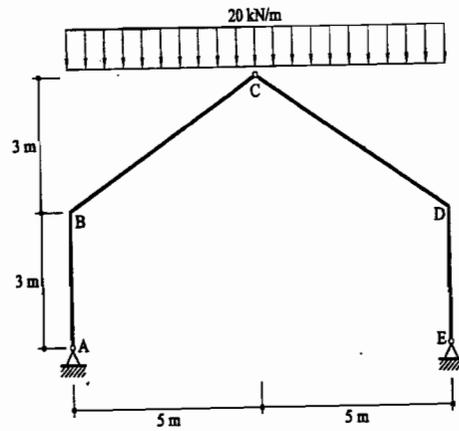


Fig. 3.29: Estructura del ejercicio 5

Diagramas de esfuerzos:

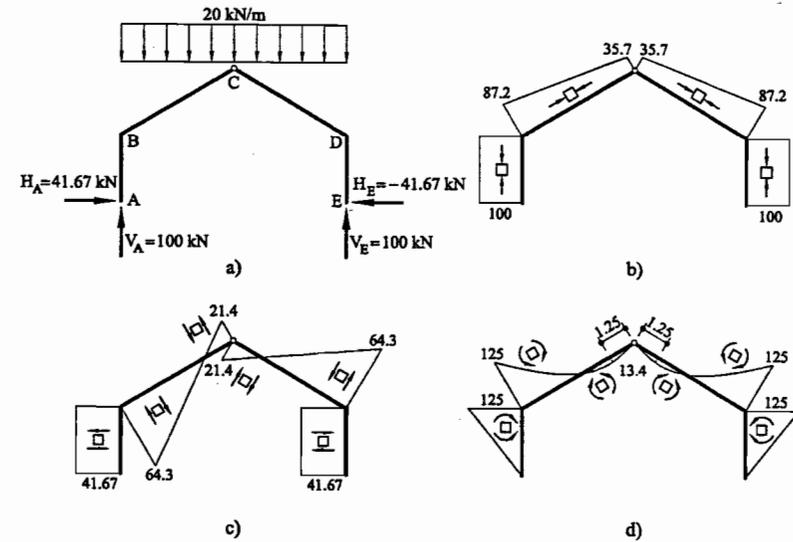


Fig. 3.30: Solución del ejercicio 11: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiales c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

3.8.6 Ejercicio 6

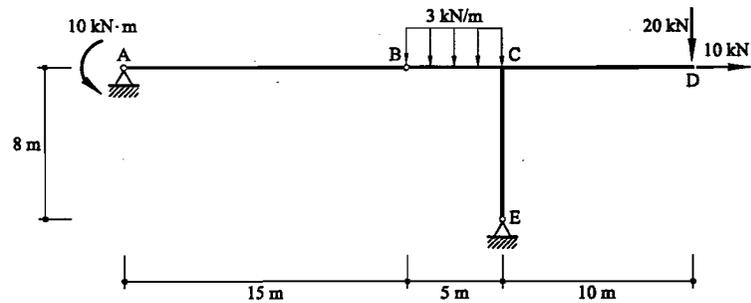


Fig. 3.31: Estructura del ejercicio 6

Diagramas de esfuerzos:

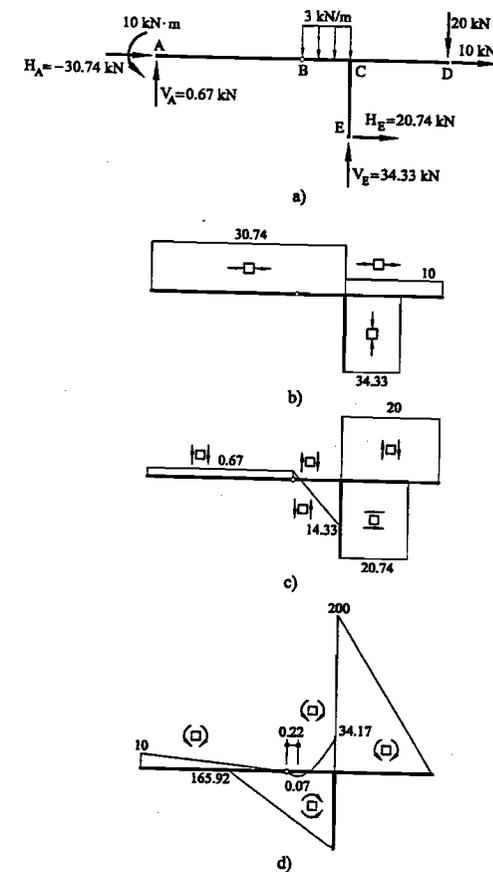


Fig. 3.32: Solución del ejercicio 12: a) Reacciones b) Ley de esfuerzos axiles c) Ley de esfuerzos cortantes d) Ley de esfuerzos de momentos flectores

4 Diagramas de esfuerzos en estructuras articuladas

4.1 Introducción

En este capítulo se estudian las estructuras articuladas y se presentan diferentes ejemplos resueltos. Dichas estructuras están formadas por elementos enlazados entre sí por medio de una rótula permitiendo así el giro relativo entre ellos, e impidiendo, por tanto, la transmisión de momentos en los nudos de conexión. Si podemos aproximar las fuerzas exteriores que soporta la estructura a través de unas cargas puntuales aplicadas exclusivamente en los nudos, en dicha estructura los únicos esfuerzos presentes serán axiales. Su resolución, por tanto, consiste en determinar el diagrama de esfuerzos axiales en todas las barras que forman la estructura.

En esta sección, nos ocuparemos exclusivamente de estructuras articuladas planas y estáticamente determinadas (isostáticas). Presentaremos la resolución de varios ejemplos aplicando el método del equilibrio de nudos en el cual se plantean las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada nudo de la estructura o bien el método de Culmann-Ritter que permite calcular rápidamente los esfuerzos en las barras más solicitadas.

4.2 Ejemplo 1

Calcular todos los esfuerzos axiales de la estructura de la figura 4.1.

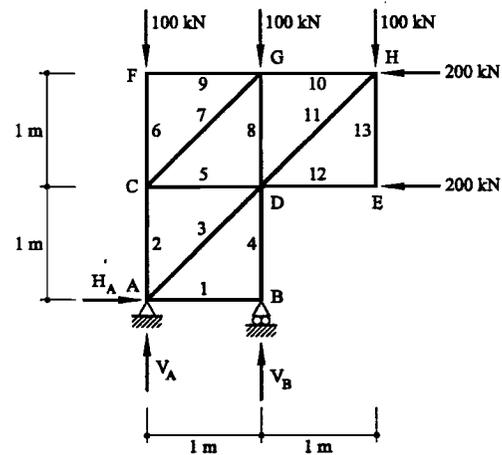


Fig. 4.1: Estructura del ejemplo 1

4.2.1 Reacciones externas:

Las reacciones en la articulación A y en el apoyo B se calculan imponiendo el equilibrio de fuerzas y momentos al conjunto de la estructura, considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 4.1.

Equilibrio de fuerzas horizontales: $R_x = 0$
 $H_A - 200 - 200 = 0$ $H_A = 400 \text{ kN}$

Equilibrio de momentos en el punto E: $M_{(A)} = 0$
 $V_B \cdot 1 - 100 \cdot (1 + 2) + 200 \cdot (1 + 2) = 0$ $V_B = -300 \text{ kN}$

Equilibrio de fuerzas verticales: $R_y = 0$
 $V_A + V_B - 100 \cdot 3 = 0$ $V_A = 600 \text{ kN}$

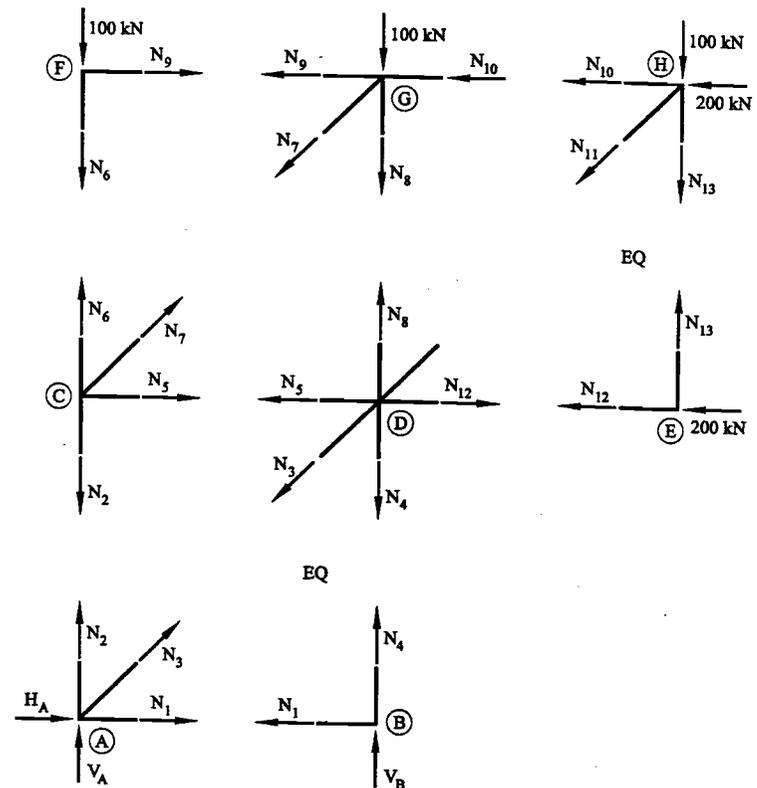


Fig. 4.2: Despiece de la estructura del ejemplo 1

4.2.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos axiales se procede al despiece de la estructura, tal como se muestra en la figura 4.2. Se trata de aislar todos los nudos de la estructura articulada y plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales y verticales.

Nudo B:

Teniendo en cuenta que para cada nudo se pueden escribir dos ecuaciones de equilibrio, tenemos que empezar la resolución del problema desde un nudo que tenga como mucho dos esfuerzos incógnitos:

$$\begin{aligned} R_x^{(B)} &= 0 & N_1 &= 0 \\ R_y^{(B)} &= 0 & N_4 - 300 &= 0 & N_4 &= 300 \text{ kN} \end{aligned}$$

Nudo A:

Equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en el nudo:

$$\begin{aligned} R_x^{(A)} &= 0 & N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_1 + 400 &= 0 & N_3 &= -400\sqrt{2} \text{ kN} \\ R_y^{(A)} &= 0 & N_2 + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + 600 &= 0 & N_2 &= -200 \text{ kN} \end{aligned}$$

Nudo F:

Equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en el nudo:

$$\begin{aligned} R_x^{(F)} &= 0 & N_9 &= 0 \\ R_y^{(F)} &= 0 & -N_6 - 100 &= 0 & N_6 &= -100 \text{ kN} \end{aligned}$$

Nudo C:

Equilibrio de fuerzas verticales y horizontales en el nudo:

$$\begin{aligned} R_y^{(C)} &= 0 & N_7 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_6 - N_2 &= 0 & N_7 &= -100\sqrt{2} \text{ kN} \\ R_x^{(C)} &= 0 & N_5 + N_7 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 & N_5 &= 100 \text{ kN} \end{aligned}$$

Nudo G:

Equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en el nudo:

$$\begin{aligned} R_x^{(G)} &= 0 & N_{10} - N_9 - N_7 &= 0 & N_{10} &= -100 \text{ kN} \\ R_y^{(G)} &= 0 & -N_8 - N_7 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 &= 0 & N_8 &= 0 \end{aligned}$$

Nudo E:

Equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en el nudo:

$$\begin{aligned} R_x^{(E)} &= 0 & -N_{12} - 200 &= 0 & N_{12} &= -200 \text{ kN} \\ R_y^{(E)} &= 0 & & & N_{13} &= 0 \end{aligned}$$

Nudo H:

Equilibrio de fuerzas verticales en el nudo:

$$R_y^{(H)} = 0 \quad -N_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{13} - 100 = 0 \quad N_{11} = -100\sqrt{2} \text{ kN}$$

En la tabla siguiente se resumen los valores de los esfuerzos axiales calculados para la estructura dada. Recordamos que un valor positivo corresponde a un esfuerzo axial de tracción y negativo de compresión.

$N_1 = 0$	$N_6 = -100 \text{ kN}$	$N_{11} = -100\sqrt{2} \text{ kN}$
$N_2 = -200 \text{ kN}$	$N_7 = -100\sqrt{2} \text{ kN}$	$N_{12} = -200 \text{ kN}$
$N_3 = -400\sqrt{2} \text{ kN}$	$N_8 = 0$	$N_{13} = 0$
$N_4 = 300 \text{ kN}$	$N_9 = 0$	
$N_5 = 100 \text{ kN}$	$N_{10} = -100 \text{ kN}$	

4.3 Ejemplo 2

Calcular todos los esfuerzos axiles de la estructura de la figura 4.3.

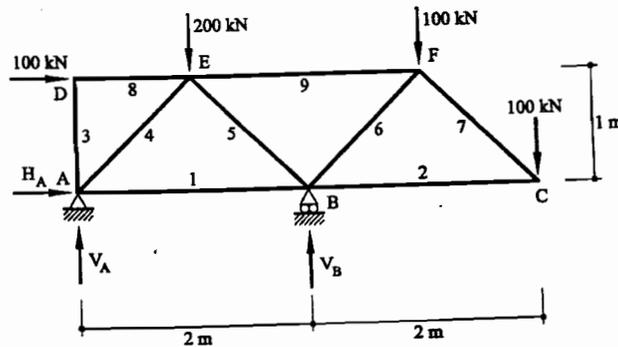


Fig. 4.3: Estructura del ejemplo 2

4.3.1 Reacciones externas:

Las reacciones en la articulación A y en el apoyo B se calculan imponiendo el equilibrio de fuerzas y momentos al conjunto de la estructura, considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 4.4.

Equilibrio de fuerzas horizontales:
 $H_A + 100 = 0$

$$R_x = 0$$

$$\boxed{H_A = -100 \text{ kN}}$$

Equilibrio de momentos en el punto A:
 $V_B \cdot 2 - 100 \cdot 1 - 200 \cdot 1 - 100 \cdot (3 + 4) = 0$

$$M_{(A)} = 0$$

$$\boxed{V_B = 500 \text{ kN}}$$

Equilibrio de fuerzas verticales:
 $V_A + V_B - 100 \cdot 2 - 200 = 0$

$$R_y = 0$$

$$\boxed{V_A = -100 \text{ kN}}$$

4.3.2 Cálculo de esfuerzos:

Para calcular los esfuerzos axiles se procede al despiece de la estructura, tal como se muestra en la figura 4.2. Se trata de aislar todos los nudos de la estructura articulada y plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales y verticales.

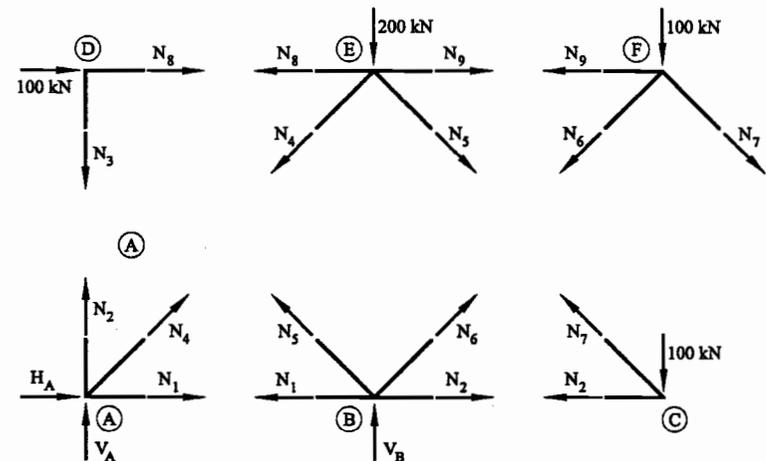


Fig. 4.4: Despiece de la estructura del ejemplo 2

Nudo C:

Empezamos el calculo desde el nudo C donde solo hay dos incognitas. Equilibrio de fuerzas verticales y horizontales en el nudo:

$$R_y^{(C)} = 0 \quad N_7 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 0 \quad \boxed{N_7 = 100\sqrt{2} \text{ kN}}$$

$$R_x^{(C)} = 0 \quad -N_2 - N_7 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \boxed{N_2 = -100 \text{ kN}}$$

Nudo F:

Equilibrio de fuerzas verticales y horizontales en el nudo:

$$\begin{aligned} R_y^{(F)} = 0 & \quad -N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_7 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 & \quad N_6 = -200\sqrt{2} \text{ kN} \\ R_x^{(F)} = 0 & \quad -N_9 - N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_7 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & \quad N_9 = 300 \text{ kN} \end{aligned}$$

Nudo B:

Equilibrio de fuerzas verticales y horizontales en el nudo:

$$\begin{aligned} R_y^{(B)} = 0 & \quad N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + 500 = 0 & \quad N_5 = -300\sqrt{2} \text{ kN} \\ R_x^{(B)} = 0 & \quad -N_1 - N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 = 0 & \quad N_1 = 0 \end{aligned}$$

Nudo A:

Equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en el nudo:

$$\begin{aligned} R_x^{(A)} = 0 & \quad N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_1 - 100 = 0 & \quad N_4 = 100\sqrt{2} \text{ kN} \\ R_y^{(A)} = 0 & \quad N_3 + N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 0 & \quad N_3 = 0 \end{aligned}$$

Nudo D:

Equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en el nudo:

$$R_x^{(D)} = 0 \quad N_8 + 100 = 0 \quad N_8 = -100 \text{ kN}$$

En la tabla siguiente se resumen los valores de los esfuerzos axiales calculados para la estructura dada. Recordamos que un valor positivo corresponde a un esfuerzo axial de tracción y negativo de compresión.

$N_1 = 0$	$N_4 = 100\sqrt{2} \text{ kN}$	$N_7 = 100\sqrt{2} \text{ kN}$
$N_2 = -100 \text{ kN}$	$N_5 = -300\sqrt{2} \text{ kN}$	$N_8 = -100 \text{ kN}$
$N_3 = 0$	$N_6 = -200\sqrt{2} \text{ kN}$	$N_9 = 300 \text{ kN}$

4.4 Ejemplo 3

Calcular los esfuerzos axiales en las barras 1, 2 y 3 marcadas en la figura 4.5.

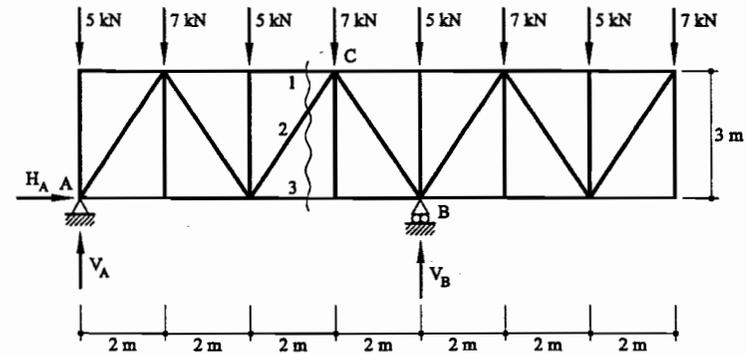


Fig. 4.5: Estructura del ejemplo 3.

4.4.1 Reacciones externas:

Para calcular los esfuerzos que nos pide el problema, haremos uso del método de Culmann-Ritter. Si dividimos la estructura articulada en dos partes según un corte que pasa por las barras 1, 2 y 3 (ver figura 4.6) para el cálculo de los esfuerzos solo será necesario calcular previamente la reacción en el apoyo B. Esta reacción la calcularemos imponiendo el equilibrio de momentos al conjunto de la estructura en el punto A. Considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 4.5, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de momentos en el punto A:} & \quad M_{(A)} = 0 \\ V_B \cdot 8 - 7 \cdot (2 + 6 + 10 + 14) - 5 \cdot (4 + 8 + 12) = 0 & \quad V_B = 43 \text{ kN} \end{aligned}$$

4.4.2 Cálculo de esfuerzos:

Los esfuerzos en las barras 1, 2 y 3 se pueden calcular imponiendo tres ecuaciones de equilibrio a la parte derecha de la estructura, tal como se muestra en la figura 4.6. Teniendo en cuenta el valor del ángulo $\alpha = \arctan(2/3) = 33,7^\circ$, tenemos:

Equilibrio de fuerzas verticales:

$$-N_2 \cdot \cos(\alpha) + 43 - 7 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 0$$

$$R_y = 0$$

$$N_2 = 14,42 \text{ kN}$$

Equilibrio de momentos en el punto C:

$$-N_3 \cdot 3 + 43 \cdot 2 - 7 \cdot (4 + 8) - 5 \cdot (2 + 6) = 0$$

$$M_{(C)} = 0$$

$$N_3 = -12,6 \text{ kN}$$

Equilibrio de fuerzas horizontales:

$$-N_1 - N_2 \cdot \sin(\alpha) - N_3 = 0$$

$$R_x = 0$$

$$N_1 = 4,6 \text{ kN}$$

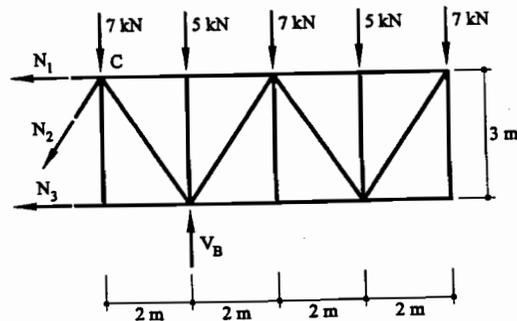


Fig. 4.6: Corte de Ritter propuesto para el ejemplo 3.

4.5 Ejemplo 4

Calcular los esfuerzos axiales en las barras 1, 2 y 3 marcadas en la figura 4.7.

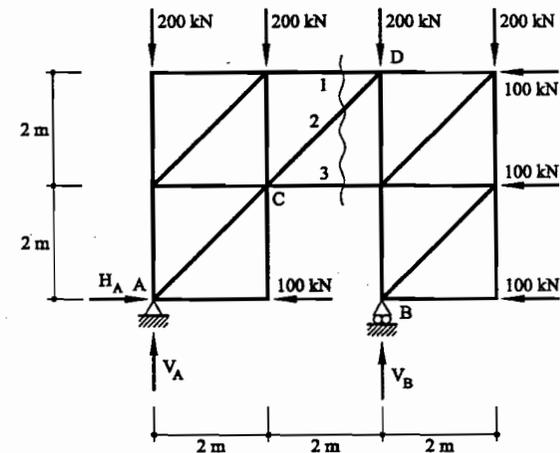


Fig. 4.7: Estructura del ejemplo 4

4.5.1 Reacciones externas:

Para el cálculo de los esfuerzos será necesario calcular previamente las reacciones en la articulación A y en el apoyo B. Estas reacciones las calcularemos imponiendo el equilibrio de fuerzas y momentos al conjunto de la estructura. Considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 4.8, tenemos:

Equilibrio de fuerzas horizontales:

$$H_A - 100 \cdot 4 = 0$$

$$R_x = 0$$

$$H_A = 400 \text{ kN}$$

Equilibrio de momentos en el punto A:

$$M_{(A)} = 0$$

$$V_B \cdot 4 - 200 \cdot (2 + 4 + 6) - 100 \cdot (2 + 4) = 0 \quad \boxed{V_B = 450 \text{ kN}}$$

Equilibrio de fuerzas verticales:

$$R_y = 0$$

$$V_A + V_B - 200 \cdot 4 = 0 \quad \boxed{V_A = 350 \text{ kN}}$$

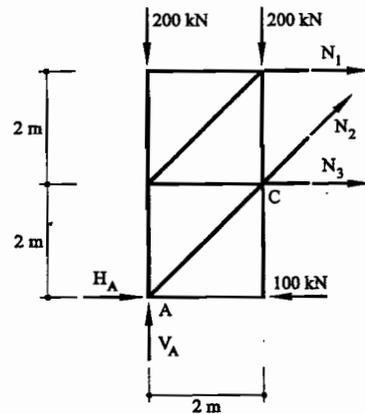


Fig. 4.8: Corte de Ritter propuesto para el ejemplo 4. Equilibrio de la parte de la izquierda.

4.5.2 Cálculo de esfuerzos:

Usando el método de Culmann-Ritter, dividimos la estructura articulada en dos partes según un corte que pasa por las barras 1, 2 y 3 (ver figuras 4.8-4.9). El esfuerzo en la barra 1 se puede calcular imponiendo una ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto C en la parte izquierda de la estructura, tal como se muestra en la figura 4.6.

Equilibrio de momentos en el punto C:

$$M_{(C)} = 0$$

$$-N_1 \cdot 2 + 200 \cdot 2 - 100 \cdot 2 - 350 \cdot 2 + 400 \cdot 2 = 0 \quad \boxed{N_1 = 150 \text{ kN}}$$

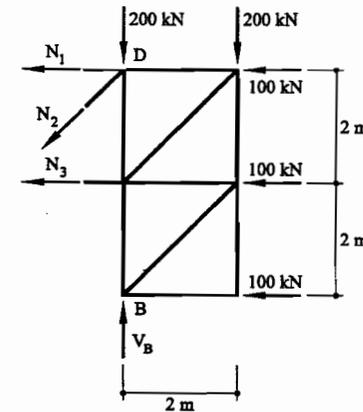


Fig. 4.9: Corte de Ritter propuesto para el ejemplo 4. Equilibrio de la parte de la derecha.

Los esfuerzos en las barra 2 y 3 se pueden obtener imponiendo una ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto D y una ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales en la parte derecha de la estructura (ver figura 4.9).

Equilibrio de momentos en el punto D:

$$M_{(D)} = 0$$

$$-N_3 \cdot 2 + 200 \cdot 2 - 100 \cdot (2 + 4) - 200 \cdot 2 = 0 \quad \boxed{N_3 = -500 \text{ kN}}$$

Equilibrio de fuerzas horizontales:

$$R_x = 0$$

$$-N_1 - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_3 - 100 \cdot 3 = 0 \quad \boxed{N_2 = 50\sqrt{2} \text{ kN}}$$

4.7 Ejemplo 6

Calcular los esfuerzos axiles en las barras 1, 2 y 3 marcadas en la figura 4.12.

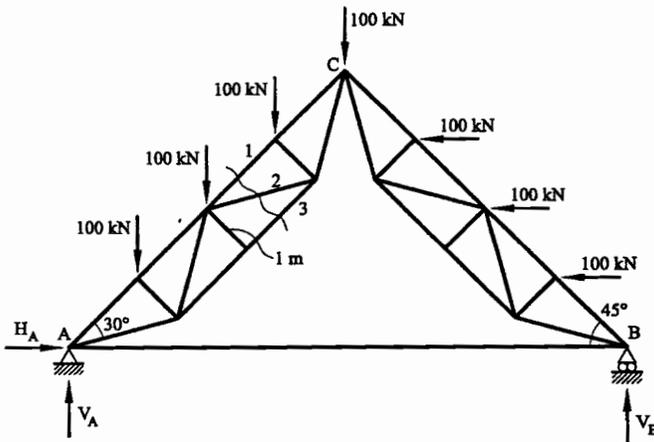


Fig. 4.12: Estructura del ejemplo 6

4.7.1 Reacciones externas:

Para el cálculo de los esfuerzos será necesario calcular previamente las reacciones en la articulación A y en el apoyo B. Estas reacciones las calcularemos imponiendo el equilibrio de fuerzas y momentos al conjunto de la estructura. Considerando el convenio de signos tal como se indica en la figura 4.13, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio de fuerzas horizontales:} \quad R_x &= 0 \\ H_A - 100 \cdot 3 &= 0 \quad \boxed{H_A = 300 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Equilibrio de momentos en el punto A:

$$V_B \cdot 4\sqrt{6} - 100 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} (1 + 2 + 3 + 4) + 100 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} (1 + 2 + 3) = 0 \quad \boxed{V_B = 50 \text{ kN}}$$

Equilibrio de fuerzas verticales:

$$V_A + V_B - 100 \cdot 4 = 0 \quad \boxed{V_A = 350 \text{ kN}}$$

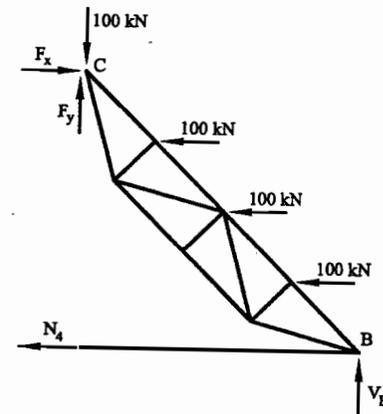


Fig. 4.13: Primer corte de Ritter propuesto para el ejemplo 6.

4.7.2 Cálculo de esfuerzos:

Usando el método de Culmann-Ritter, dividimos la estructura articulada en dos partes según un primer corte que pasa por la articulación C y la barra A-B, que indicaremos con 4 (ver figuras 4.13). Una vez conocido el valor del esfuerzo axial N_4 , consideraremos un segundo corte que divide las barras 1, 2 y 3 (ver figuras 4.14).

El esfuerzo en la barra 4 se puede calcular imponiendo una ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto C en la parte derecha de la estructura, tal como se muestra en la figura 4.13.

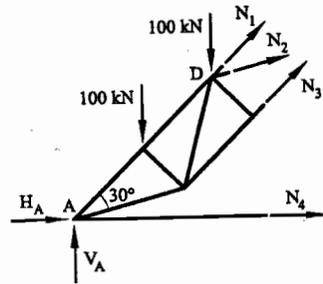


Fig. 4.14: Segundo corte de Ritter propuesto para el ejemplo 6.

Equilibrio de momentos en el punto C:

$$-N_4 \cdot 2\sqrt{6} - 100 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} (1 + 2 + 3) + 50 \cdot 2\sqrt{6} = 0 \quad \boxed{N_4 = -100 \text{ kN}}$$

Los esfuerzos en las barra 1, 2 y 3 se pueden obtener imponiendo tres ecuaciones de equilibrio en la parte izquierda de la estructura (ver figura 4.14).

Equilibrio de momentos en el punto D:

$$N_3 \cdot 1 + 100 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} - 350 \cdot \sqrt{6} + (300 - 100) \cdot \sqrt{6} = 0$$

$$M_{(D)} = 0$$

$$\boxed{N_3 = 100\sqrt{6} \text{ kN}}$$

Equilibrio de momentos en el punto A:

$$-(N_2 \cdot \frac{1}{2}) \cdot 2\sqrt{3} + N_3 \cdot 1 - 100 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} (1 + 2) = 0$$

$$M_{(A)} = 0$$

$$\boxed{N_2 = -50\sqrt{2} \text{ kN}}$$

Equilibrio de fuerzas según la dirección de N_1 :

$$N_1 + N_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + N_3 - (100 + 100 - 300 - 350 + 100) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$R_1 = 0$$

$$\boxed{N_1 = -431,2 \text{ kN}}$$

4.8 Ejercicios propuestos

A continuación se propone una serie de ejercicios donde se pide calcular los esfuerzos axiales indicados para las estructuras propuestas.

4.8.1 Ejercicio 1

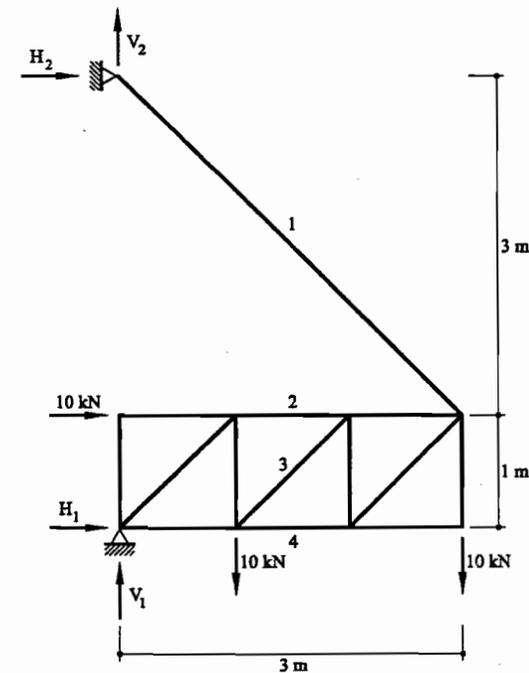


Fig. 4.15: Estructura del ejercicio 1

4.8.2 Ejercicio 2

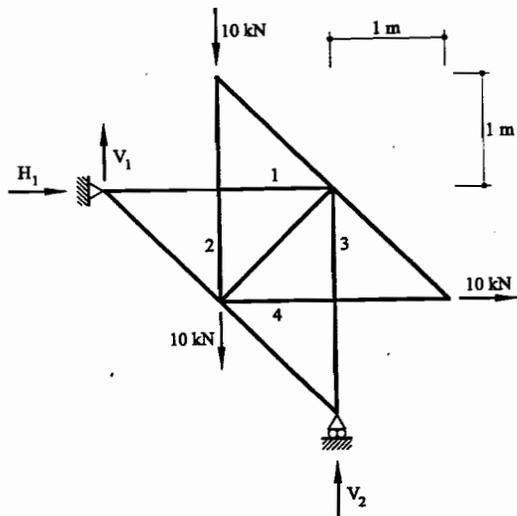


Fig. 4.16: Estructura del ejercicio 2

4.8.3 Ejercicio 3

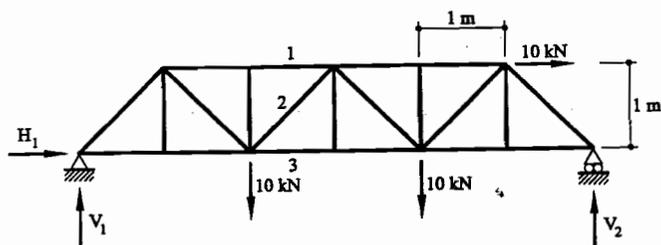


Fig. 4.17: Estructura del ejercicio 3

4.8.4 Ejercicio 4

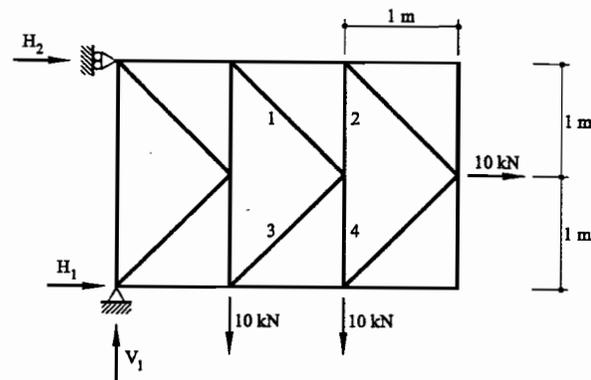


Fig. 4.18: Estructura del ejercicio 4

4.8.5 Ejercicio 5

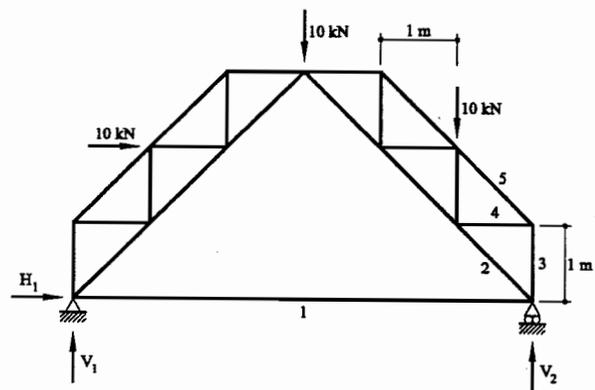


Fig. 4.19: Estructura del ejercicio 5

4.8.6 Ejercicio 6

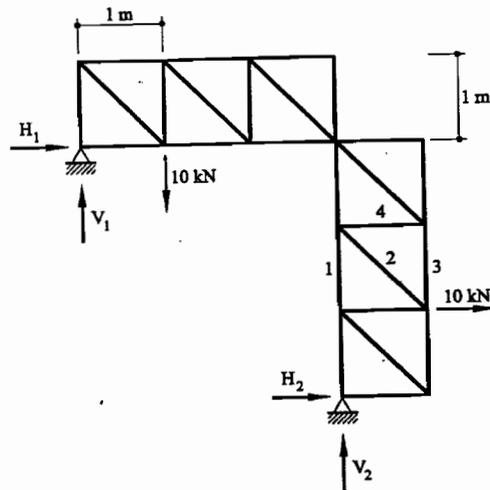


Fig. 4.20: Estructura del ejercicio 6

4.8.7 Ejercicio 7

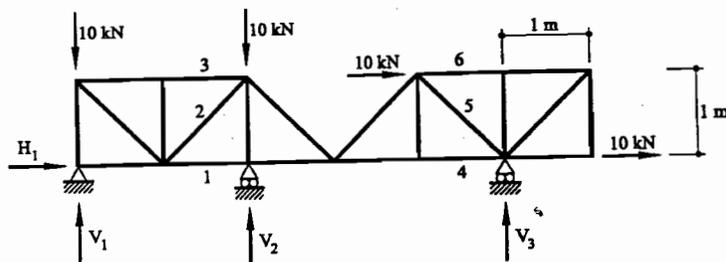


Fig. 4.21: Estructura del ejercicio 7

4.9 Respuestas a los Problemas Propuestos

A continuación se presentan las respuestas a los problemas propuestos: recordamos que de acuerdo con la convención adoptada valores positivos corresponden a esfuerzos de tracción.

Ejercicio 1:

$$N_1 = 17,67 \text{ kN} \quad N_2 = -17,5 \text{ kN}$$

$$N_3 = 3,54 \text{ kN} \quad N_4 = 2,5 \text{ kN}$$

Ejercicio 2:

$$N_1 = -5 \text{ kN} \quad N_2 = -10 \text{ kN}$$

$$N_3 = -5 \text{ kN} \quad N_4 = 10 \text{ kN}$$

Ejercicio 3:

$$N_1 = -16,67 \text{ kN} \quad N_2 = 2,36 \text{ kN} \quad N_3 = 25 \text{ kN}$$

Ejercicio 4:

$$N_1 = 7,07 \text{ kN} \quad N_2 = -5 \text{ kN}$$

$$N_3 = -7,07 \text{ kN} \quad N_4 = 5 \text{ kN}$$

Ejercicio 5:

$$N_1 = 10 \text{ kN} \quad N_2 = -14,14 \text{ kN} \quad N_3 = -6,67 \text{ kN}$$

$$N_4 = 6,67 \text{ kN} \quad N_5 = -9,43 \text{ kN}$$

Ejercicio 6:

$$N_1 = -10 \text{ kN} \quad N_2 = 4,71 \text{ kN}$$

$$N_3 = 3,33 \text{ kN} \quad N_4 = -3,33 \text{ kN}$$

5.2 Ejemplo 1

Para la estructura de la figura 5.1, identificar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector cualitativamente correctos entre los que se proponen en la figura 5.2.

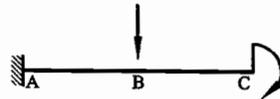


Fig. 5.1: Estructura del ejemplo 1

5.2.1 Solución:

Se trata de una viga empotrada en el extremo A . Hay una carga concentrada en el punto B y un momento concentrado en el extremo libre C . La carga concentrada tiene que dar lugar a un salto en el diagrama de cortantes, así como a una variación en la pendiente (derivada) del momento flector. Podemos de ese modo descartar los diagramas ($T1$) y ($T4$) de cortante que no presentan ningún salto.

Por otro lado, el momento concentrado en el extremo C provoca un valor de momento flector no nulo en el extremo libre de la estructura. Este momento tracciona las fibras superiores en el tramo $B-C$, así que quedan descartados los diagramas de momento flector ($M1$) y ($M2$) propuestos.

En el tramo $B-C$ el diagrama de cortante tiene que ser *constante* (no hay cargas distribuidas aplicadas): observando que en el extremo C el valor del cortante es nulo, esto da lugar a un diagrama nulo en todo el tramo $B-C$. Los diagramas ($T2$) y ($T3$) son ambos admisibles.

En el punto B hay una carga concentrada que provoca un incremento (salto) del cortante en sentido *horario*; el valor alcanzado en este punto (horario) se tiene que mantener *constante* en todo el tramo $A-B$: el diagrama cualitativamente correcto es el ($T3$).

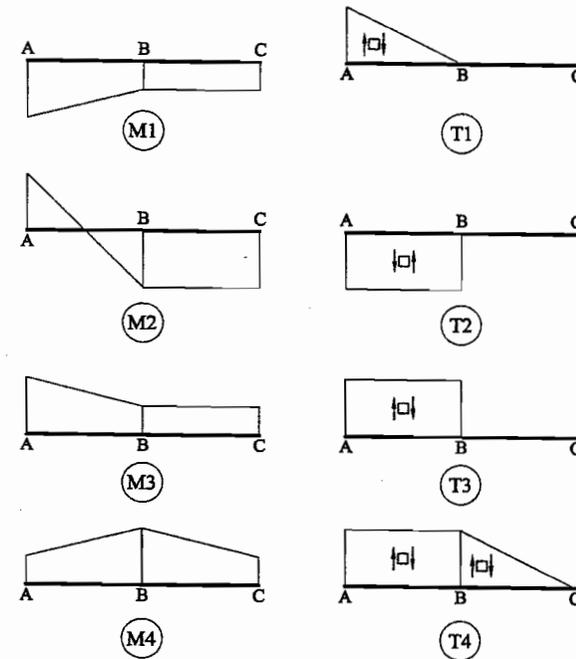


Fig. 5.2: Posibles diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para la estructura del ejemplo 1.

En el tramo $B-C$, de la viga propuesta no hay cargas distribuidas y el cortante es nulo, así que el momento flector tiene que ser *constante*: queda descartado el diagrama ($M4$).

En el tramo $A-B$ tampoco hay cargas distribuidas aunque exista cortante, o sea que la variación en el diagrama del momento flector tiene que ser *lineal*. Por otro lado, el momento flector en el punto A tiene que tener un valor superior al del punto B ya que se suman los efectos del momento aplicado en C y lo que provoca la carga en B . Por este motivo el diagrama de momento flector ($M3$) es admisible.

5.3 Ejemplo 2

Para la estructura de la figura 5.3, identificar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector cualitativamente correctos entre los que se proponen en la figura 5.4.

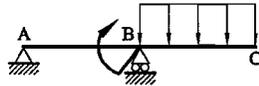


Fig. 5.3: Estructura del ejemplo 2

5.3.1 Solución:

Se trata de una viga apoyada en el extremo A y en el punto B . El estado de carga consiste en un momento concentrado en B y una carga uniforme distribuida en el tramo $B-C$.

La reacción vincular del apoyo vertical en B , así como el momento concentrado en el mismo punto, dan lugar a saltos en los diagramas de cortante y momento flector en este punto: todos los diagramas presentan cualitativamente estos saltos.

Debido a la presencia de la carga distribuida en $B-C$, el diagrama del cortante tiene que mostrar una variación *lineal* y el momento flector tiene que ser *parabólico*. Por otro lado, en el tramo $A-B$ el diagrama del cortante tiene que ser *constante* y el momento flector tiene que ser *lineal*: queda descartado el diagrama ($T4$) de cortante ya que presenta una variación lineal en $A-B$.

Si ahora tenemos en cuenta el sentido de la carga distribuida (hacia abajo), podemos afirmar que el diagrama del cortante en el tramo $B-C$ tiene que ser *horario* y *creciente*, y el diagrama de momentos tiene que tener la *concauidad* hacia arriba: por este motivo descartamos los diagramas de cortantes ($T2$) y el de momentos ($M3$).

El punto C es un extremo libre para la estructura y por lo tanto no sujeto a cargas: el cortante tiene que ser *nulo* y además este punto coincide con el vértice del diagrama parabólico de momentos. Queda descartado el diagrama ($M4$) que presenta el punto de máximo (cortante nulo) en el punto D .

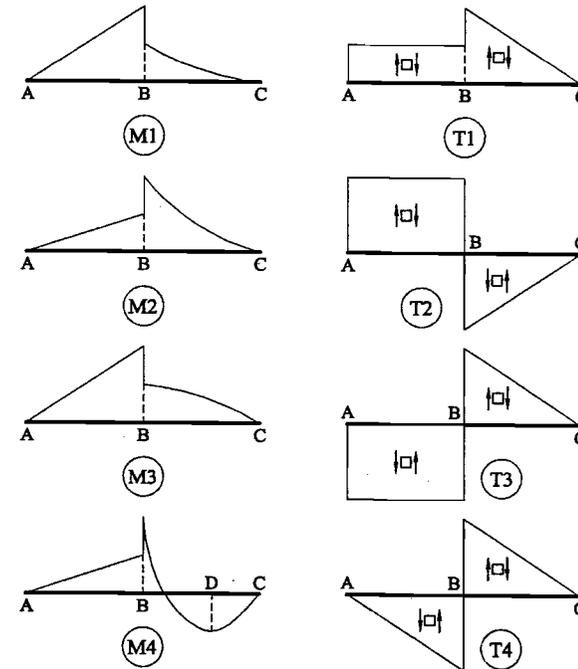


Fig. 5.4: Posibles diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para la estructura del ejemplo 2.

Si tuviéramos que escribir una ecuación de equilibrio de momentos en el punto B , nos daríamos cuenta que el momento provocado por la carga distribuida sumado al momento concentrado en B , solo se puede equilibrar con una reacción vertical descendiente en la articulación A . Por tanto, el cortante en el punto A debe de ser *negativo* (*antihorario*), descartando el diagrama de cortantes ($T1$). El único diagrama cualitativamente correcto resulta ser el ($T3$).

Por otro lado, en el extremo A hay una articulación, o sea que el momento flector debe ser *nulo*. Desde este punto el momento crecerá linealmente (no hay carga distribuida aplicada en el tramo $A-B$) traccionando las fibras superiores de la viga (la

reacción en A debe de ser hacia abajo) hasta el punto B : ambos diagramas ($M1$) y ($M2$) propuestos son admisibles.

Finalmente, por equilibrio de momentos en B , se deduce que $M_{BA} = M_{BC} + M$ (siendo M el valor del momento concentrado en este punto). O sea que M_{BA} tiene que ser mayor a M_{BC} , descartando así el diagrama ($M2$) y dando por bueno el diagrama ($M1$).

5.4 Ejemplo 3

Para la estructura de la figura 5.5, identificar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector cualitativamente correctos entre los que se proponen en la figura 5.6.

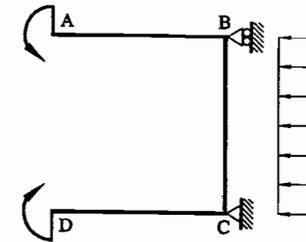


Fig. 5.5: Estructura del ejemplo 3.

5.4.1 Solución:

Se trata de una estructura reticulada apoyada en los puntos B y C . Hay dos momentos concentrados en los extremos A y D , respectivamente, y una carga distribuida uniforme a lo largo del tramo $B-C$.

Observando la condición de carga en los extremos A y D de la estructura se puede rápidamente descartar el diagrama de momentos ($M3$), que presenta un valor nulo para el momento flector en dichos puntos. De igual manera podemos descartar el diagrama de cortantes ($T1$) que sugiere valores no nulos.

En los tramos $A-B$ y $D-C$ el diagrama del cortante tiene que ser *constante* (no hay cargas distribuidas aplicada) y siendo nulo su valor en los extremos A y D será nulo a lo largo de ambas vigas. Los diagramas ($T2$) y ($T3$) propuestos pueden ser ambos correctos. Por otro lado, si no hay carga distribuida y el cortante es nulo, el diagrama del momento flector tiene que ser *constante*: podemos así descartar el diagrama ($M1$) que presenta una variación lineal en $A-B$ y $D-C$.

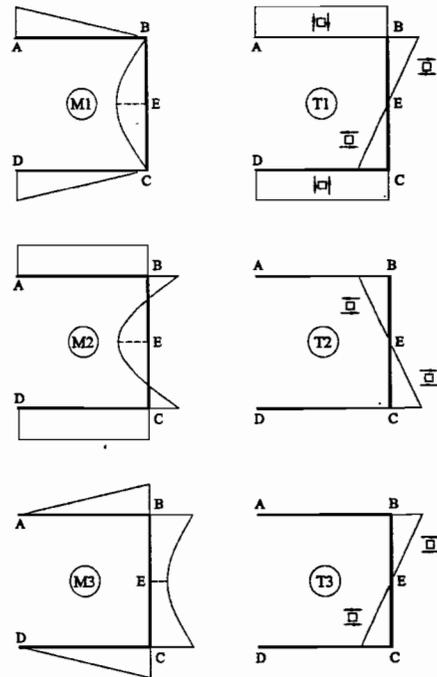


Fig. 5.6: Posibles diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para la estructura del ejemplo 3.

El diagrama (M2) que nos queda para el momento flector presenta una distribución constante e indica una tracción en las fibras externas en los tramos A-B y D-C de acuerdo con el sentido de los momentos aplicados en los extremos. En el tramo B-C, la variación es *parabólica* y la concavidad concuerda con el sentido de la carga uniforme distribuida en esta parte de la estructura.

Debido a la simetría de la estructura, condiciones de carga y de vínculo podemos deducir que las reacciones horizontales en los apoyos B y C deben ser iguales entre sí, y opuestas al sentido de la carga distribuida (para que exista equilibrio horizontal). Queda así descartado el diagrama de cortantes (T2) que presenta valores del cortante se signo equivocado. El diagrama (T3) resulta ser el único admisible. Este diagrama

presenta una variación lineal de acuerdo a la condición de carga y una anti-simetría respecto al punto central E. En este punto el cortante toma valor nulo y el diagrama de momentos presenta su valor máximo.

5.5 Ejemplo 4

Para la estructura de la figura 5.7, identificar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector cualitativamente correctos entre los que se proponen en la figura 5.8.

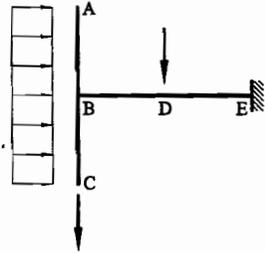


Fig. 5.7: Estructura del ejemplo 4.

5.5.1 Solución:

Se trata de una estructura reticulada empotrada en el punto E . Hay dos cargas concentradas en los puntos C y D , respectivamente, y una carga uniformemente distribuida a lo largo del tramo $A-C$.

Teniendo en cuenta la tipología de carga se puede descartar el diagrama de cortantes ($T1$) porque, debido a la carga distribuida, la variación del cortante en los tramos $A-B$ y $B-C$ tiene que ser *lineal* mientras que, por lo contrario, en el tramo $B-D$ debe de ser *constante*. De acuerdo con el sentido de la carga distribuida, el cortante en el tramo $A-B$ tiene que ser horario y anti-horario en el tramo $B-C$: queda descartado el diagrama ($T4$). Finalmente, considerando la viga $B-D-E$, se puede ver como el valor del cortante en $B-D$ (inducido por la carga en C) debe ser menor que en $D-E$ debido a la carga presente en D . Por este motivo podemos descartar el diagrama ($T2$) y tomar por bueno el diagrama ($T3$).

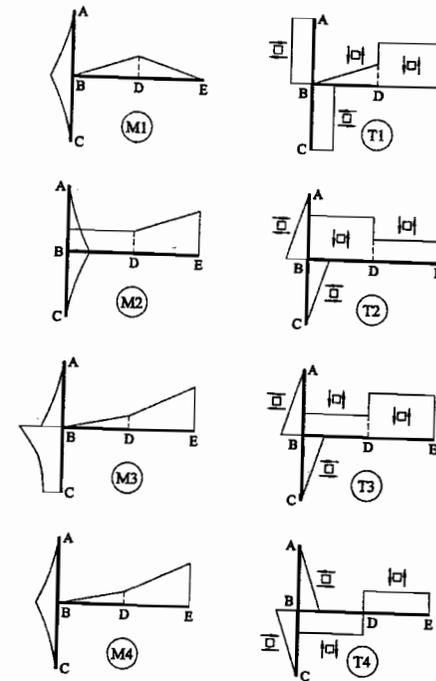


Fig. 5.8: Posibles diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para la estructura del ejemplo 4.

Considerando ahora las diferentes opciones para el diagrama de momentos, se pueden desechar el diagrama ($M3$) que presenta un valor de momento no nulo en el extremo C , y el diagrama ($M2$) que indica un momento cuyo signo no se corresponde con el sentido de la carga distribuida en los dos tramos $A-B$ y $B-C$ de la estructura.

Por otro lado, al escribir una ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto E , se observa que el momento en el empotramiento en el punto E no puede ser nulo. El diagrama ($M1$) queda así descartado.

El diagrama ($M4$) que nos queda, sugiere una variación lineal del momento flector en el tramo $B-D$, cuya pendiente se ve incrementada en el siguiente tramo $D-E$. Este resultado está corroborado por el diagrama de cortantes que indica un valor mayor en

el tramo D-E que en el tramo B-D. Finalmente, la simetría de la carga distribuida con respecto al punto B produce un momento flector M_{BD} nulo y valores idénticos para los momentos M_{BA} y M_{BC} , respectivamente, como indica el diagrama (M4). Este diagrama es cualitativamente correcto para la estructura dada.

5.6 Ejemplo 5

Para la estructura de la figura 5.9, identificar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector cualitativamente correctos entre los que se proponen en la figura 5.10.

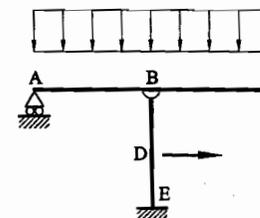


Fig. 5.9: Estructura del ejemplo 5.

5.6.1 Solución:

En este ejemplo el dintel A-B-C está apoyado en el punto A y en el pilar B-E, y soporta una carga uniforme en toda su longitud. El pilar recibe la carga del dintel a través de la articulación B y soporta además una carga concentrada en D .

En primer lugar, debido a la simetría de la carga se puede deducir (equilibrio de momentos en B para el dintel A-B-C) que la reacción en el apoyo A tiene que ser nula. Esto quiere decir que los valores del cortante en A así como en el extremo libre C son nulos, descartando los diagramas (T2), (T3) y (T4). Por otra parte, los diagramas (T3) y (T4) presentan una variación lineal en el tramo D-E que no es compatible con la condición de carga.

Los diagramas (T1) y (T5) presentan una variación *lineal* en los tramos A-B y B-C, un diagrama *constante* en D-E y un valor *nulo* en el tramo B-D. Efectivamente, a través de la articulación B el pilar sólo recibe una acción vertical (esfuerzo axial), o sea que el cortante tiene que ser nulo hasta el punto D donde hay una carga concentrada ortogonal a la viga que provoca un cortante que se mantiene constante hasta el empotramiento E . Las diferencias entre los diagramas (T1) y (T5) residen en los signos de la acción.

Claramente, el diagrama (T1) presenta signos opuestos en los tramos A-B y D-E. La opción que se presenta con el diagrama (T5) es cualitativamente correcta.

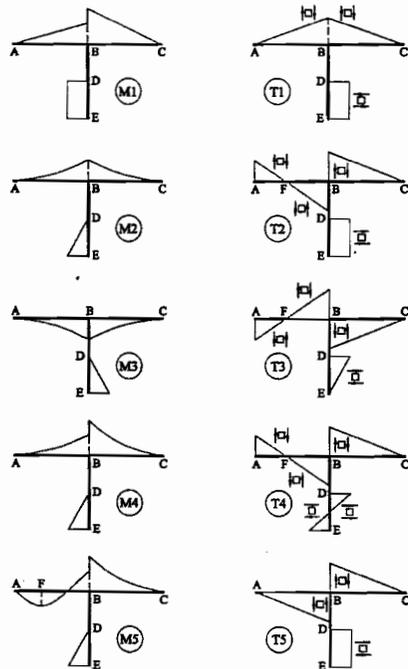


Fig. 5.10: Posibles diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para la estructura del ejemplo 5.

El diagrama del momento flector debe presentar una variación *parabólica* en los tramos A-B y B-C (carga uniforme), ser *nulo* en B-D y ser *lineal* en D-E. Descartamos pues el diagrama (M1). Por razones de simetría los diagramas (M3), (M3) y (M5) quedan igualmente descartados: los momentos M_{BA} y M_{BC} deben ser iguales. Finalmente, observando las fibras traccionadas, podemos descartar también el diagrama (M4) que

sugiere una disposición opuesta respecto a la condición de carga. El diagrama (M2) resulta ser la única alternativa cualitativamente correcta. Como última nota, se puede constatar que en los tramos A-B y B-C los puntos de mínimo (vértices) están en los extremos A y C de acuerdo con el valor nulo del cortante en dichos puntos.

5.7 Ejemplo 6

Para la estructura de la figura 5.11, identificar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector cualitativamente correctos entre los que se proponen en la figura 5.12.

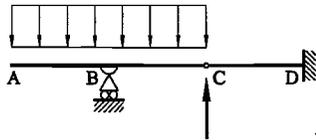


Fig. 5.11: Estructura del ejemplo 6.

5.7.1 Solución:

Se trata de una viga continua apoyada en B y empotrada en D . Una carga uniforme actúa en los tramos $A-B$ y $B-C$, y existe una carga concentrada en la articulación C .

La variación del cortante debe de ser *lineal* en los tramos $A-B$ y $B-C$, y *constante* en el tramo $C-D$. Además, se tienen que observar dos saltos como consecuencia de la reacción vertical en B y la carga concentrada en C . Podemos descartar el diagrama ($T2$).

Por simetría (equilibrio de momentos en B para la viga $A-B-C$) el cortante T_{CB} tiene que ser nulo, descartando así el diagrama de cortantes ($T4$).

Por una cuestión de signos, descartamos también el diagrama ($T1$) y aceptamos el diagrama ($T3$) como correcto.

El diagrama del momento flector debe ser parabólico en los tramos $A-B$ y $B-C$, y *lineal* en el tramo $C-D$. Podemos así descartar el diagrama ($M1$).

Se tienen que observar dos discontinuidades en el valor de la pendiente como consecuencia de los saltos en el valor del cortante en B y C .

Por razones de simetría podemos también descartar el diagrama ($M2$): la variación del momento flector en los tramos $A-B$ y $B-C$ tiene que ser simétrica respecto al apoyo

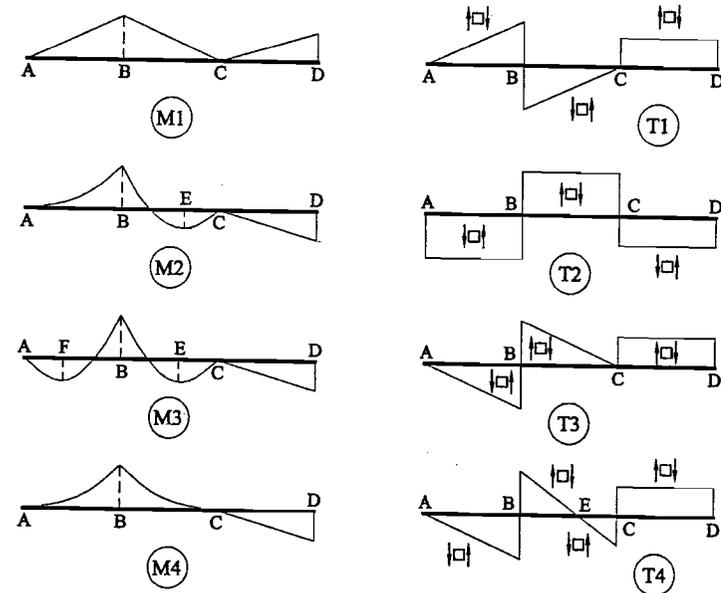


Fig. 5.12: Posibles diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para la estructura del ejemplo 6.

B . El diagrama ($M3$) presenta dos extremos en E y F que no se corresponden a los puntos de cero en el diagrama de cortantes: estos puntos deben ser el extremo A y la articulación en C como sugiere el diagrama de cortantes ($T3$) y ratifica el de momentos ($M4$). Finalmente, este último diagrama indica tracción en las fibras inferiores para el tramo $C-D$ de acuerdo a la acción de la carga concentrada en C .

5.8 Ejemplo 7

En la figura 5.13 se muestran los diagramas de esfuerzos de una estructura isostática formada por dos vigas. Se pide identificar la condición de carga y de apoyo compatible con estos diagramas entre las propuestas en la figura 5.14.

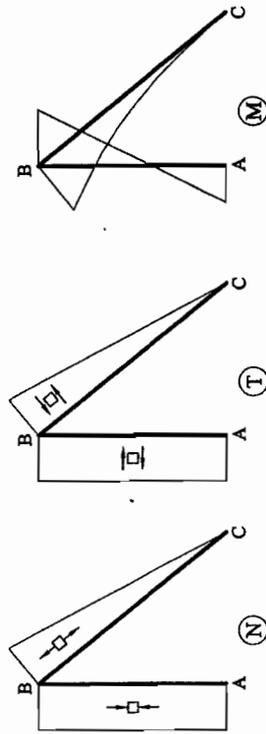


Fig. 5.13: Diagramas de las acciones internas para el ejemplo 7.

5.8.1 Solución:

En el tramo B-C el diagrama del momento flector es parabólico, tiene su vértice en el punto C (como confirma el diagrama de cortantes) y las fibras traccionadas son las interiores. Podemos así descartar la opción b) que daría lugar a tracción en las fibras exteriores.

El diagrama del axil en el tramo B-C es posible sólo si existe una carga axial uniforme: las opciones a) y c) quedan descartadas ya que no cumplen con este requisito. Además, en los extremos A y B del tramo A-B el diagrama de momento flector presenta valores no nulos, descartando la tipología de apoyo presentada en la misma opción a).

Para poder elegir entre las opciones d) y e) es importante observar que en la estructura e) es necesaria una reacción vertical (hacia arriba) en el apoyo C para equilibrar el momento concentrado en A sumado al momento de la carga uniforme. Esta reacción daría lugar a un valor no nulo de axil y cortante en el extremo C. Por este motivo la opción e) queda descartada.

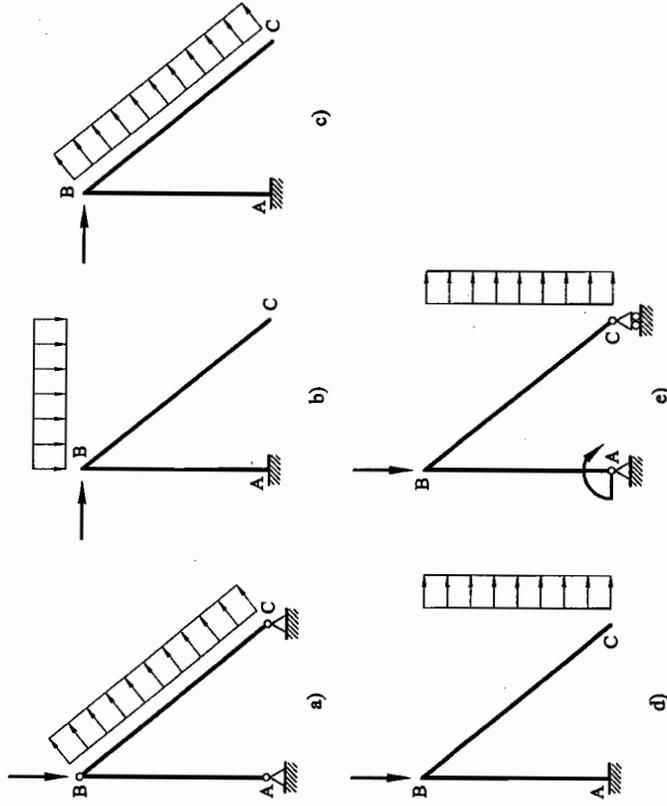


Fig. 5.14: Condiciones de carga y de apoyo propuestas para el ejemplo 7.

Para comprobar que la opción d) es la correcta, podemos verificar que: el axil en el tramo A-B tiene que ser constante y a compresión por causa de la carga concentrada en B, mientras tiene que ser lineal para anularse en el extremo libre C del tramo B-C por efecto de la componente axial de la carga distribuida.

El valor del cortante en A debe equilibrar la carga distribuida, o sea que tiene que ser positivo horario para mantenerse constante en todo el tramo A-B. En el tramo B-C la variación tiene que ser lineal (carga uniforme) para anularse en C (extremo libre) y anti-horario de acuerdo con el sentido de la carga.

Finalmente, el momento de empotramiento en A debe de ser no nulo y anti-horario para equilibrar el valor del momento producido por la carga uniforme: el momento

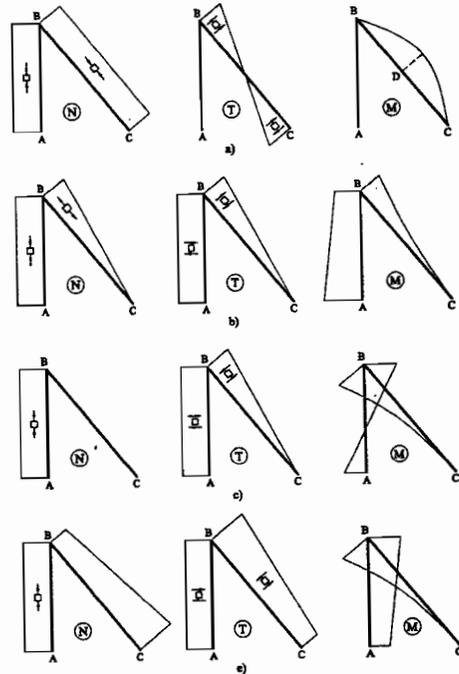


Fig. 5.15: Diagramas de esfuerzo axial, cortante y momento flector relativos a las demás condiciones de carga y apoyo propuestas en el ejemplo 7.

flector resultante tiene que empezar en A traccionando las fibras exteriores de la viga A-B y tener una variación lineal. Por otro lado, en el tramo B-C la carga tracciona las fibras interiores con una variación parabólica hasta el punto B. La unión rígida entre las vigas A-B y B-C da lugar a la continuidad del momento flector, y por consiguiente tracciona las fibras interiores en el punto B de A-B como nos indica el correspondiente diagrama de esfuerzo.

En la figura 5.15 se presentan los diagramas de las acciones internas para todas las demás condiciones de carga y apoyo presentadas en la figura 5.14.

5.9 Ejemplo 8

En la figura 5.16 se muestran los diagramas de cortante y momento flector de una viga continua isostática. Se pide identificar la condición de carga y de apoyo compatible con estos diagramas entre las propuestas en la figura 5.17

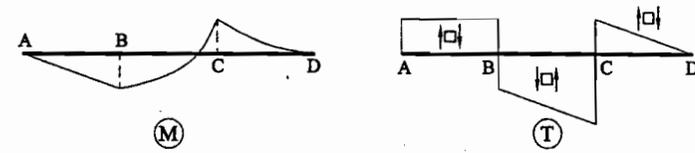


Fig. 5.16: Diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para el ejemplo 8.

5.9.1 Solución:

En el tramo A-B el diagrama del momento flector es lineal mientras es parabólico en los tramos B-C y C-D. Esto nos lleva a suponer una carga uniforme en los tramos B-C y C-D. Observando la pendiente del diagrama de cortantes podemos ver como su variación es igual en ambos tramos, o sea que la carga uniforme tiene que tener el mismo valor tanto en B-C como en C-D. Podemos así descartar el diagrama e) que indica una carga uniforme en los tramos A-B y C-D. De acuerdo con la concavidad del diagrama parabólico de momentos también resulta inaceptable la hipótesis d), que presenta una carga uniforme hacia arriba.

El extremo D de la viga continua presenta valores nulos para el cortante y momento flector: este punto tiene que ser un extremo libre. La opción b) supone un apoyo en D. A partir de la ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto B es evidente que en este apoyo debe haber con una reacción vertical hacia arriba no nula, en desacuerdo con el diagrama de cortantes mostrado.

De la ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto B para la opción a) resulta ahora que en el apoyo A existe una reacción vertical hacia abajo no nula. Esta reacción da lugar a tracción en las fibras superiores en el tramo A-B, así como un

cortante anti-horario. Ambas circunstancias están en desacuerdo con los diagramas de esfuerzos mostrados.

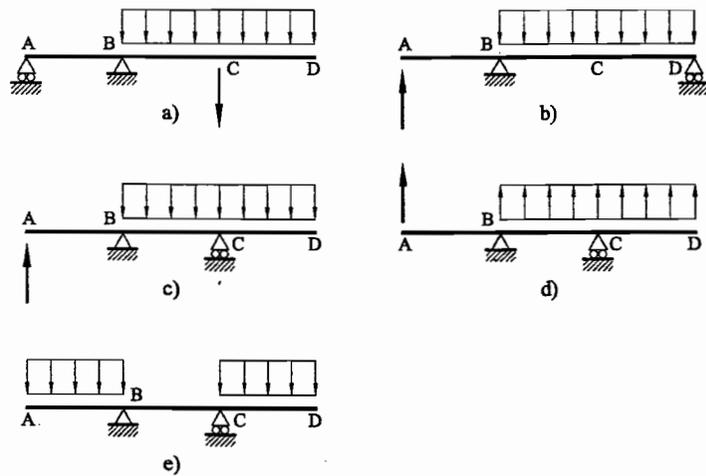


Fig. 5.17: Condiciones de carga y de apoyo propuestas para el ejemplo 8.

La opción correcta tiene que ser la c). Empezando desde el extremo A, se puede comprobar que el diagrama de cortantes debe de ser horario y mantenerse constante en todo el tramo A-B. La ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto C nos dice que la reacción en el apoyo B es vertical hacia abajo, dando lugar a un salto como indica el diagrama de cortantes. A continuación el esfuerzo cortante se vería incrementado a consecuencia de la carga uniforme hasta el otro apoyo en C. La ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto B nos indica una reacción vertical hacia arriba que se ve reflejada en el diagrama de cortantes como otro salto hacia arriba. Finalmente, en el tramo C-D el cortante tiene que empezar con valor nulo en el extremo libre D para ir incrementándose (en sentido horario) hasta el punto C por efecto de la carga uniforme.

Por lo que concierne al diagrama de momento flector, en el tramo A-B el momento tiene que crecer linealmente de A hasta B a causa de la carga concentrada en A que tracciona las fibras inferiores.

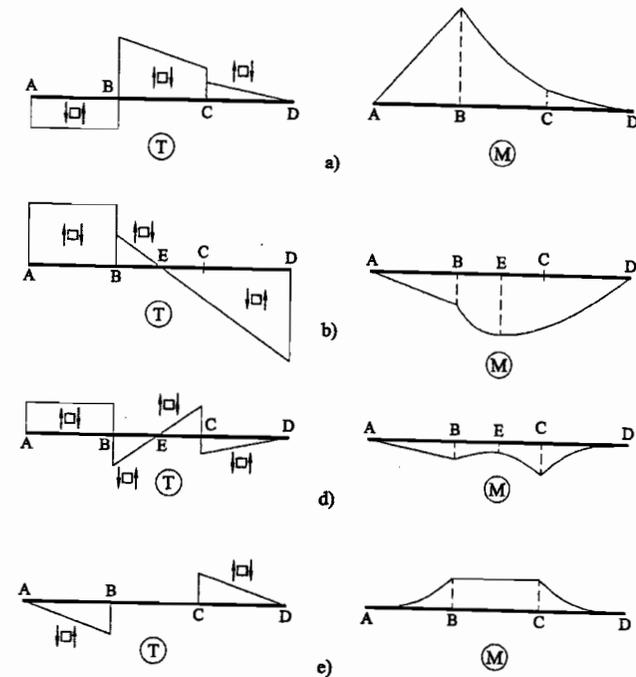


Fig. 5.18: Diagramas de esfuerzo cortante y momento flector relativos a las demás condiciones de carga y apoyo propuestas en el ejemplo 8.

En el tramo C-D la carga uniforme da lugar a una variación parabólica que empieza con valor nulo en el extremo libre D y se incrementa hasta el punto C, traccionando las fibras superiores de la viga. Finalmente, otra variación parabólica tiene que cerrar el diagrama en el tramo B-C uniendo los valores (con signo opuesto) conseguidos en B y C respectivamente. Todas estas observaciones se confirman en el diagrama de momentos.

En la figura 5.18 se presentan los diagramas de cortante y momento flector para todas las demás condiciones de carga y apoyo presentadas en la figura 5.17.

5.10 Ejemplo 9

En la figura 5.19 se muestra el diagrama de momento flector de una estructura isostática. Se pide identificar la condición de carga y de apoyo compatible con este diagrama entre las propuestas en la figura 5.20.

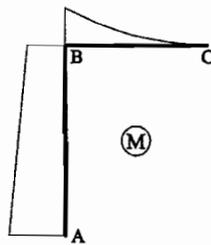


Fig. 5.19: Diagrama del momento flector para el ejemplo 9.

5.10.1 Solución:

El diagrama de momento flector muestra una variación lineal en el tramo A-B que se transmite sin discontinuidades ($M_{BA} = M_{BC}$) al extremo B del tramo B-C. En este tramo la variación es parabólica y acaba anulándose en C con tangente nula (punto de mínimo). Estas observaciones nos llevan a suponer una carga uniforme exclusivamente en el tramo B-C, siendo C un extremo libre: se descartan la opción b), que indica una carga uniforme en el tramo A-B, así como la opción e), donde, además, hay una carga concentrada en C que implica un cortante no nulo en este punto (si el cortante no es nulo este punto no puede ser el mínimo para el momento flector).

Se puede desechar por varios motivos la opción a): en primer lugar, el sentido de la carga uniforme tracciona de las fibras inferiores en el tramo B-C. En segundo lugar, el momento de empotramiento necesario para garantizar el equilibrio de la estructura tiene que ser horario, resultando en un momento flector que tracciona las fibras interiores en el tramo A-B.

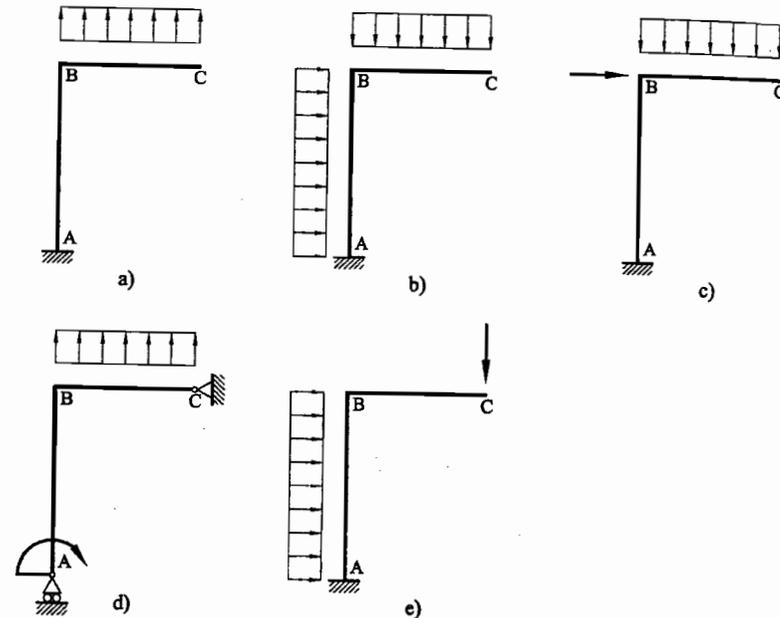


Fig. 5.20: Condiciones de carga y de apoyo propuestas para el ejemplo 9.

La opción d) presenta una carga distribuida ascendente en el tramo B-C, así como una articulación en C: el correspondiente diagrama de momentos tiene que mostrar un valor nulo en C para después ir creciendo hasta B, traccionando las fibras inferiores en todo el tramo B-C. Además, el momento flector en el tramo A-B sólo puede ser constante y debe traccionar en las fibras interiores de la viga de acuerdo con el momento concentrado en A. Esta opción queda desechada.

La alternativa c) presenta una carga uniforme que tracciona las fibras superiores en el tramo B-C. Empezando con valor nulo en el extremo libre C, el momento flector se incrementa hasta llegar a B. El valor alcanzado se transmite sin saltos ($M_{BC} = M_{BA}$) al extremo B del tramo A-B. Desde B hasta A el momento flector tiene que incrementar su valor de forma lineal a causa de la carga concentrada en B, alcanzando su valor máximo en el empotramiento A. Esta variación se corresponde con la que se presenta como dato del problema.

En la figura 5.21 se presentan los diagramas de momento flector para todas las demás condiciones de carga y apoyo presentadas en la figura 5.20.

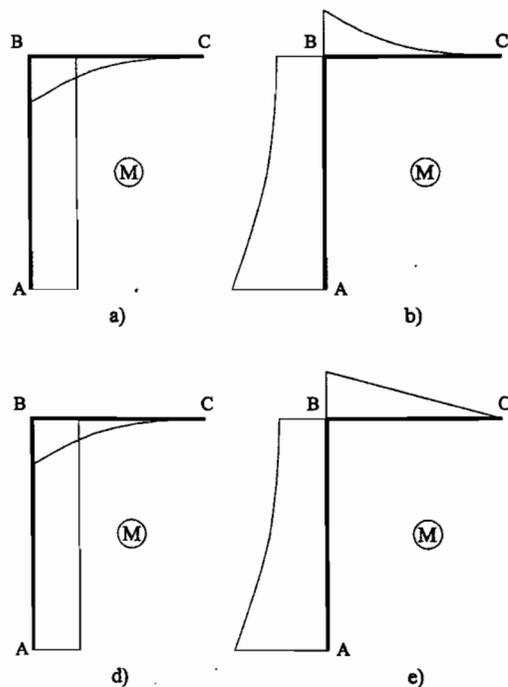


Fig. 5.21: Diagramas del momento flector relativos a las demás condiciones de carga y apoyo propuestas en el ejemplo 9.

5.11 Ejemplo 10

En la figura 5.22 se muestra el diagrama de momento flector de una estructura isostática. Se pide identificar la condición de carga y de apoyo para dicha estructura que satisfaga este diagrama entre las propuestas de figura 5.23.

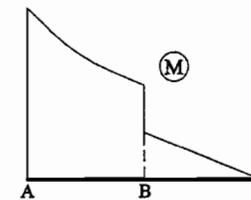


Fig. 5.22: Diagrama del momento flector para el ejemplo 10.

5.11.1 Solución:

El diagrama de momento flector muestra una variación parabólica en el tramo A-B, un salto en el punto B y una variación lineal en el tramo B-C, tomando valor nulo en C. Estas observaciones nos llevan a suponer una carga uniforme exclusivamente en el tramo A-B: se puede descartar la opción a) que indica una carga uniforme en el tramo B-C.

En la opción e) el tramo B-C está libre de cualquier acción externa, así que el momento flector tiene que ser nulo en todo el tramo. Esta configuración de carga no es compatible con el diagrama propuesto.

La opción d) presenta una carga concentrada en el extremo C que da lugar a un momento flector lineal y creciente como muestra el diagrama. Por otro lado, aunque la carga uniforme en el tramo A-B justifica la variación parabólica que sigue, no se explica el salto (discontinuidad) que se halla en B. La carga concentrada aplicada en este punto daría lugar a una variación en la pendiente del diagrama, mientras que una discontinuidad en sus valores solamente puede ser consecuencia de un momento concentrado (un par) aplicado sobre este punto.

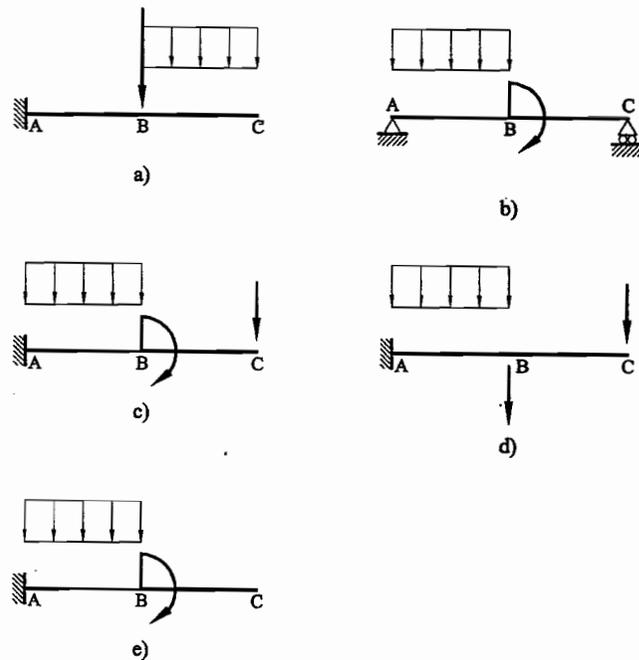


Fig. 5.23: Condiciones de carga y de apoyo propuestas para el ejemplo 10.

A continuación, se puede observar como el diagrama del momento flector presenta un valor no nulo en el extremo A y tracción en las fibras superiores de la viga A-B. Podemos desechar la opción a) puesto que en A existe una articulación y, por consiguiente, un valor nulo para el momento flector.

Finalmente, la configuración de cargas que se muestra en la opción c) es compatible con el diagrama de momento flector propuesto. Empezando por el extremo C, podemos ver como la carga concentrada da lugar a una variación lineal del momento flector que desde el valor nulo en C crece traccionando las fibras superiores del tramo B-C hasta el punto B. El momento concentrado en B provoca un incremento del momento flector que se refleja en el diagrama propuesto. Por último, la carga uniforme obliga a que se siga incrementando el valor del momento flector según una ley parabólica. El valor final del momento flector en el extremo A coincide con el valor del momento de empotramiento.

En la figura 5.24 se presentan los diagramas de momento flector para todas las demás condiciones de carga y apoyo presentadas en la figura 5.23.

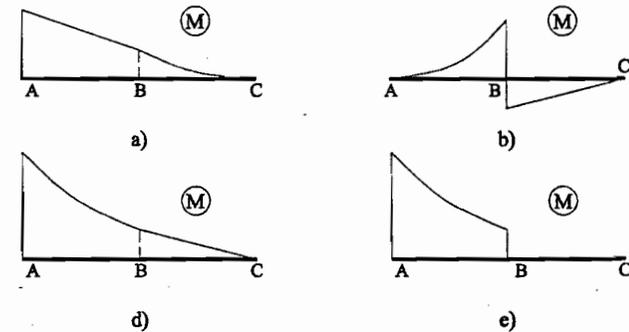


Fig. 5.24: Diagramas del momento flector relativos a las demás condiciones de carga y apoyo propuestas en el ejemplo 10.

En la figura 5.24 se muestran los diagramas de momentos de flexión para todas las demás condiciones de carga y apoyo mostradas en la figura 5.23.



Fig. 5.25. Condiciones de carga y de apoyo propuestas para el ejemplo 5.1.

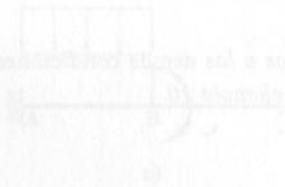


Fig. 5.25. Condiciones de carga y de apoyo propuestas para el ejemplo 5.1.

A continuación se puede observar cómo el diagrama del momento de flexión presenta un valor no nulo en el extremo A y cambia en las fibras superiores de la viga en B. Podemos escribir la ecuación de punto que en A existe una articulación y, por consiguiente, un valor nulo para el momento de flexión.

Finalmente, la configuración de cargas que se muestran en la figura 5.25 corresponden a los diagramas de momento de flexión mostrados. Suponiendo que el extremo C es un apoyo, se puede ver cómo la carga concentrada da lugar a una rotación en el punto B. Debido al valor nulo de C como consecuencia de la libre expansión del tramo B-C hasta el punto B. El momento de flexión en B es nulo. En el extremo A, el momento de flexión es nulo. En el extremo B, el momento de flexión es nulo. En el extremo C, el momento de flexión es nulo. En el extremo D, el momento de flexión es nulo. En el extremo E, el momento de flexión es nulo. En el extremo F, el momento de flexión es nulo. En el extremo G, el momento de flexión es nulo. En el extremo H, el momento de flexión es nulo. En el extremo I, el momento de flexión es nulo. En el extremo J, el momento de flexión es nulo. En el extremo K, el momento de flexión es nulo. En el extremo L, el momento de flexión es nulo. En el extremo M, el momento de flexión es nulo. En el extremo N, el momento de flexión es nulo. En el extremo O, el momento de flexión es nulo. En el extremo P, el momento de flexión es nulo. En el extremo Q, el momento de flexión es nulo. En el extremo R, el momento de flexión es nulo. En el extremo S, el momento de flexión es nulo. En el extremo T, el momento de flexión es nulo. En el extremo U, el momento de flexión es nulo. En el extremo V, el momento de flexión es nulo. En el extremo W, el momento de flexión es nulo. En el extremo X, el momento de flexión es nulo. En el extremo Y, el momento de flexión es nulo. En el extremo Z, el momento de flexión es nulo.

6 Problemas de Teoría de la Elasticidad

6.1 Introducción

En este capítulo se presenta una colección de problemas resueltos relativos al capítulo de Teoría de la Elasticidad.

6.2 Formulario

Leyes de elasticidad de Hooke:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}, \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\eta \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_y = 2\eta \varepsilon_y + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_z = 2\eta \varepsilon_z + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \end{cases}$$

Constantes de Lamé:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \eta = G = \frac{E}{2(1 + 2\nu)}$$

Deformación volumétrica:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Tensión hidrostática o tensión media:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

Relación entre deformación volumétrica y tensión media:

$$\sigma_h = K \varepsilon_v$$

Módulo de compresibilidad volumétrica:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Variación de longitud:

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_x$$

Variación de sección transversal:

$$\frac{\Delta A}{A} = (1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \approx \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Variación de volumen:

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_v$$

Rotación de ejes:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \cdot \sin(2\alpha)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cdot \cos(2\alpha)$$

Tensiones principales:

$$\sigma_I = \sigma_m + R$$

$$\sigma_{II} = \sigma_m - R$$

Tensión media:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Radio del círculo de Mohr:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Ángulo de rotación hacia los ejes principales:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

6.3 Ejemplo 1

Los ejes $\xi\eta$ forman un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con los ejes xy como se indica en la figura 6.1. Calcular el valor de la tensión normal σ_ξ sabiendo que el tensor de tensiones según los ejes xy es el siguiente σ [MPa] =

$$\begin{bmatrix} 100 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix}$$

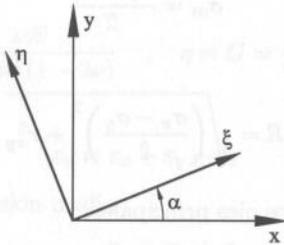


Fig. 6.1: Ejemplo 1

6.3.1 Solución:

En la figura 6.2 se muestra el plano inclinado de un ángulo $\alpha = 30^\circ$ y las respectivas componentes del vector tracción en las direcciones normal y tangente, σ_ξ y τ_ξ , respectivamente. Las componentes del tensor de tensiones $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ nos indican el valor de las tensiones normales y tangentes según los planos cartesianos xy .

Si escribimos la ecuación de equilibrio $R_\xi = 0$ según la dirección del eje ξ tendremos:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi \cdot dl - \sigma_x \cdot \cos 30 \cdot (dl \cdot \cos 30) - \tau_{xy} \cdot \sin 30 \cdot (dl \cdot \cos 30) - \\ - \sigma_y \cdot \sin 30 \cdot (dl \cdot \sin 30) - \tau_{yx} \cdot \cos 30 \cdot (dl \cdot \sin 30) = 0 \end{aligned}$$

Eliminando dl y sustituyendo los respectivos valores de las componentes del tensor

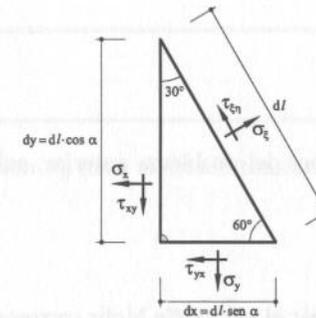


Fig. 6.2: Ejemplo 1

de tensiones, se obtiene:

$$\sigma_\xi = 65,17 \text{ [MPa]}$$

El mismo resultado se puede conseguir aplicando las fórmulas de rotación de ejes. En este caso tenemos una rotación en sentido antihorario (positiva) de un ángulo $\alpha = 30^\circ$. La tensión normal según este plano inclinado se calcula como:

$$\sigma_\xi = \sigma_x (30^\circ) = \sigma_x \cdot \cos^2 30 + \sigma_y \cdot \sin^2 30 + 2\tau_{xy} \cdot \sin 30 \cdot \cos 30$$

de donde se obtiene:

$$\sigma_\xi = 65,17 \text{ [MPa]}$$

que corresponde con el resultado anteriormente calculado.

6.3 Ejemplo 1

Los ejes $\xi\eta$ forman un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con los ejes xy como se indica en la figura 6.1. Calcular el valor de la tensión normal σ_ξ sabiendo que el tensor de tensiones según los

ejes xy es el siguiente $\sigma [MPa] = \begin{bmatrix} 100 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix}$.

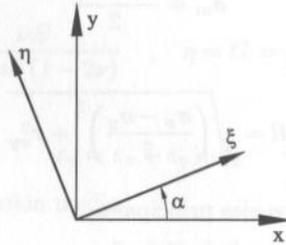


Fig. 6.1: Ejemplo 1

6.3.1 Solución:

En la figura 6.2 se muestra el plano inclinado de un ángulo $\alpha = 30^\circ$ y las respectivas componentes del vector tracción en las direcciones normal y tangente, σ_ξ y τ_ξ , respectivamente. Las componentes del tensor de tensiones $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ nos indican el

valor de las tensiones normales y tangentes según los planos cartesianos xy .

Si escribimos la ecuación de equilibrio $R_\xi = 0$ según la dirección del eje ξ tendremos:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi \cdot dl - \sigma_x \cdot \cos 30 \cdot (dl \cdot \cos 30) - \tau_{xy} \cdot \sin 30 \cdot (dl \cdot \cos 30) - \\ - \sigma_y \cdot \sin 30 \cdot (dl \cdot \sin 30) - \tau_{yx} \cdot \cos 30 \cdot (dl \cdot \sin 30) = 0 \end{aligned}$$

Eliminando dl y sustituyendo los respectivos valores de las componentes del tensor

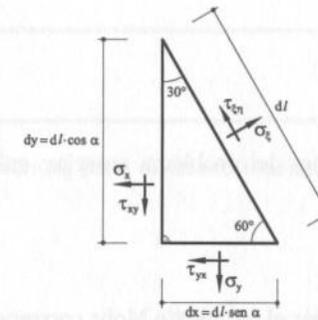


Fig. 6.2: Ejemplo 1

de tensiones, se obtiene:

$$\sigma_\xi = 65,17 [MPa]$$

El mismo resultado se puede conseguir aplicando las fórmulas de rotación de ejes. En este caso tenemos una rotación en sentido antihorario (positiva) de un ángulo $\alpha = 30^\circ$. La tensión normal según este plano inclinado se calcula como:

$$\sigma_\xi = \sigma_x (30^\circ) = \sigma_x \cdot \cos^2 30 + \sigma_y \cdot \sin^2 30 + 2\tau_{xy} \cdot \sin 30 \cdot \cos 30$$

de donde se obtiene:

$$\sigma_\xi = 65,17 [MPa]$$

que corresponde con el resultado anteriormente calculado.

6.4 Ejemplo 2

Utilizando el tensor de tensiones del problema anterior, calcular el valor de la tensión tangencial máxima.

6.4.1 Solución:

En la figura 6.3 se puede apreciar el círculo de Mohr correspondiente al estado tensional del problema propuesto. El valor de la tensión tangencial máxima τ_{\max} se da cuando la tensión normal toma el valor medio $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$. En estas condiciones la tensión tangencial máxima es igual al radio del círculo de Mohr:

$$\tau_{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Sustituyendo los respectivos valores de las componentes del tensor de tensiones, se obtiene:

$$\tau_{\max} = 40,31 \text{ [MPa]}$$

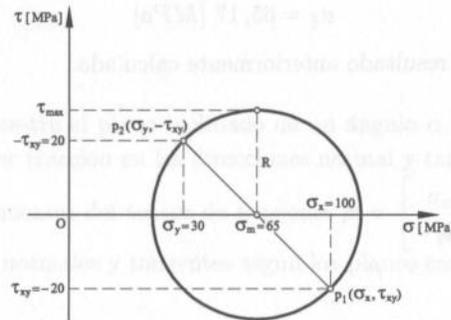


Fig. 6.3: Ejemplo 2

6.5 Ejemplo 3

Calcular el valor de la tensión σ_y para el estado tensional de la figura 6.4.

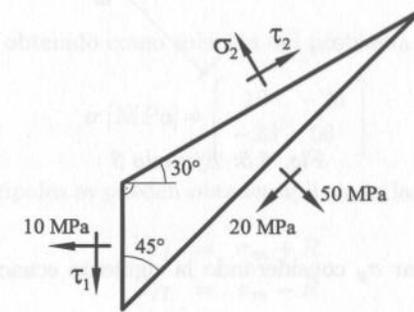


Fig. 6.4: Ejemplo 3

6.5.1 Solución:

En primer lugar, podemos identificar el valor de la tensión normal $\sigma_x = 10 \text{ [MPa]}$ y la tensión tangencial $\tau_{xy} = \tau_1$ todavía incógnita. El problema pide la tensión normal σ_y por lo cual es conveniente considerar un corte con un plano de normal y . En la figura 6.5 es posible apreciar un estado tensional que hace referencia a los dos planos cartesianos más un plano inclinado 45° respecto al eje x .

Las incógnitas son la tensión tangencial $\tau_1 = \tau_{xy}$ y la tensión normal σ_y . Por equilibrio en la dirección horizontal podemos escribir:

$$-10 \cdot (dl \cdot \cos 45) + \tau_{xy} \cdot (dl \cdot \sin 45) - 20 \cdot \cos 45 \cdot dl + 50 \cdot \sin 45 \cdot dl = 0$$

Eliminando dl y despejando en función de τ_{xy} se obtiene:

$$\tau_{xy} = -20 \text{ [MPa]}$$

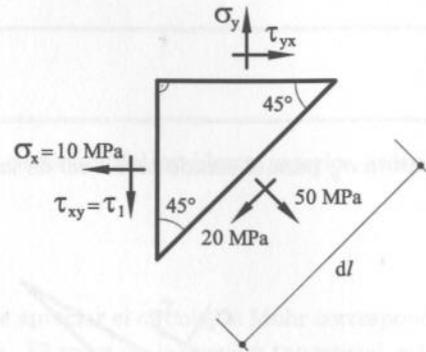


Fig. 6.5: Ejemplo 3

Podemos ahora calcular σ_y considerando la siguiente ecuación de equilibrio en la dirección vertical:

$$\sigma_y \cdot (dl \cdot \sin 45) - \tau_{xy} \cdot (dl \cdot \cos 45) - 20 \cdot \sin 45 \cdot dl - 50 \cdot \cos 45 \cdot dl = 0$$

Eliminando dl y despejando en función de σ_y se obtiene:

$$\sigma_y = 50 \text{ [MPa]}$$

6.6 Ejemplo 4

Calcular el valor de la tensión principal máxima σ_I y la correspondiente rotación de ejes para el estado tensional del problema anterior.

6.6.1 Solución:

El tensor de tensiones obtenido como solución del problema anterior es:

$$\sigma \text{ [MPa]} = \begin{bmatrix} 10 & -20 \\ -20 & 50 \end{bmatrix}$$

Las tensiones principales se pueden obtener aplicando las siguientes formulas:

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \sigma_m + R \\ \sigma_{II} &= \sigma_m - R \end{aligned}$$

siendo $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ la tensión media y $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ el radio del círculo de Mohr. Para los datos del problema, se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{10 + 50}{2} = 30 \text{ [MPa]} \\ R &= \sqrt{\left(\frac{10 - 50}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 28,28 \text{ [MPa]} \end{aligned}$$

así que las tensiones principales tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \sigma_I &= 30 + 28,28 = 58,28 \text{ [MPa]} \\ \sigma_{II} &= 30 - 28,28 = 1,72 \text{ [MPa]} \end{aligned}$$

Para poder calcular la posición de los ejes principales, se puede recurrir a la fórmula que proporciona el ángulo de rotación (*antihorario*) necesario para pasar desde los ejes cartesianos originales a los ejes principales (ver figura 6.6):

$$\theta_p = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = 22,5^\circ$$

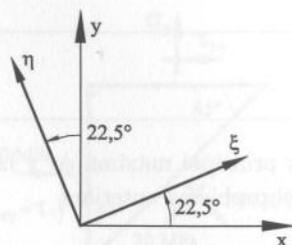


Fig. 6.6: Ejemplo 4

La figura 6.7 muestra el círculo de Mohr correspondiente al estado tensional del problema; se puede observar como con una rotación horaria de $2\theta_p = 45^\circ$ el estado tensional (σ_x, τ_{xy}) se transforma en la tensión principal menor $(\sigma_{II}, 0)$, mientras el otro estado tensional $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ se transforma en la tensión principal mayor $(\sigma_I, 0)$, o sea:

$$\sigma_I = \sigma_y(22,5^\circ)$$

$$\sigma_{II} = \sigma_x(22,5^\circ)$$

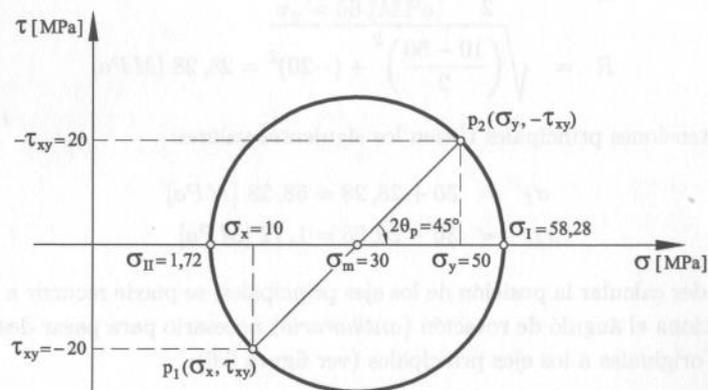


Fig. 6.7: Ejemplo 4

6.7 Ejemplo 5

Calcular el valor de la tensión tangencial τ_1 para el estado tensional de figura 6.8.

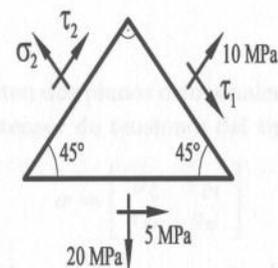


Fig. 6.8: Ejemplo 5

6.7.1 Solución:

El problema se resuelve aplicando las condiciones de equilibrio horizontal y vertical para estado tensional propuesto. Las incógnitas del problema son la tensión tangencial $\tau_1 = -\tau_2$ y la tensión normal σ_2 . Por equilibrio en la dirección horizontal podemos escribir:

$$-\sigma_2 \cdot \cos 45 \cdot (dl \cdot \cos 45) + \tau_2 \cdot \sin 45 \cdot (dl \cdot \cos 45) + 5 \cdot dl + 10 \cdot \cos 45 \cdot (dl \cdot \cos 45) + \tau_1 \cdot \sin 45 \cdot (dl \cdot \cos 45) = 0$$

Eliminando dl y despejando en función de σ_2 se obtiene:

$$\sigma_2 = 20 \text{ [MPa]}$$

Podemos ahora calcular τ_1 considerando la siguiente ecuación de equilibrio en la dirección vertical:

$$\sigma_2 \cdot \sin 45 \cdot (dl \cdot \cos 45) + \tau_2 \cdot \cos 45 \cdot (dl \cdot \cos 45) - 20 \cdot dl + 10 \cdot \sin 45 \cdot (dl \cdot \cos 45) - \tau_1 \cdot \cos 45 \cdot (dl \cdot \cos 45) = 0$$

Eliminando dl , sustituyendo el valor de σ_2 anteriormente, calculado y despejando en función de τ_1 (acordándose que $\tau_1 = -\tau_2$), se deduce:

$$\tau_1 = -5 \text{ [MPa]}$$

6.8 Ejemplo 6

Calcular las tensiones principales para el estado tensional del problema anterior.

6.8.1 Solución:

En el problema propuesto existen dos planos ortogonales que definen un estado tensional que se puede resumir con un tensor de tensiones del tipo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_\xi & \tau_{\xi\eta} \\ \tau_{\xi\eta} & \sigma_\eta \end{bmatrix}$$

Tomamos esta configuración rotada como punto de partida para el cálculo de las tensiones principales (éstas no dependen de la configuración de partida). En estas condiciones, el tensor de tensiones vale:

$$\sigma \text{ [MPa]} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$$

Las tensiones principales se calculan como:

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \sigma_m + R \\ \sigma_{II} &= \sigma_m - R \end{aligned}$$

En nuestro problema, la tensión media y el radio del círculo de Mohr valen respectivamente:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{10 + 20}{2} = 15 \text{ [MPa]} \\ R &= \sqrt{\left(\frac{10 - 20}{2}\right)^2 + 5^2} = 7,07 \text{ [MPa]} \end{aligned}$$

así que las tensiones principales tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \sigma_I &= 15 + 7,07 = 22,07 \text{ [MPa]} \\ \sigma_{II} &= 15 - 7,07 = 7,93 \text{ [MPa]} \end{aligned}$$

6.9 Ejemplo 7

Suponiendo que la tensión principal máxima sea $\sigma_I = 100$ [MPa] y la tensión principal mínima sea $\sigma_{II} = 40$ [MPa], calcular la tensión tangencial máxima.

6.9.1 Solución:

Observando el círculo de Mohr relativo a un estado tensional genérico, se puede observar como la tensión tangencial máxima, τ_{\max} , toma un valor equivalente al radio R de dicho círculo:

$$\tau_{\max} = R$$

Por otro lado, el diámetro del círculo de Mohr se puede calcular restando los valores de las tensiones principales, así que:

$$\tau_{\max} = R = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = 30 \text{ [MPa]}$$

6.10 Ejemplo 8

Un cable tiene una longitud inicial de $l = 4$ [m] y una sección transversal de $A = 2$ [mm²]. Calcular el alargamiento que experimenta al someterlo a una fuerza de tracción de $F = 100$ [Kgf]. El módulo de elasticidad del material vale $E = 200$ [GPa].

6.10.1 Solución:

En primer lugar, es conveniente uniformar los datos del problema en unidades del sistema internacional S.I.:

$$l = 4 \text{ [m]}$$

$$A = 2 \text{ [mm}^2\text{]} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$F = 100 \text{ [Kgf]} = 981 \text{ [N]}$$

$$E = 200 \text{ [GPa]} = 2 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]}$$

El cable está sometido a un estado de tracción uniaxial que podemos expresar como:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = 490,5 \cdot 10^6 \text{ [Pa]}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Para calcular el alargamiento del cable, podemos recurrir a las leyes de elasticidad o leyes de Hooke, así que la deformación ε_x que experimenta el cable en la dirección de carga es:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

y en nuestro caso resulta:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = 2,45 \cdot 10^{-3}$$

El alargamiento del cable se obtiene multiplicando la deformación por la longitud original del cable:

$$\Delta l = \varepsilon_x \cdot l = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} = 9,8 \text{ [mm]}$$

6.11 Ejemplo 9

Un bloque cúbico de acero ($E = 200$ [GPa], $\nu = 0,3$) de 1 [m] de lado y cuyas aristas son paralelas a los ejes xyz se somete a la siguiente distribución de tensiones: $\sigma_x = 500$ [MPa], $\sigma_y = 700$ [MPa], $\sigma_z = 0$ [MPa] y $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ [MPa]. Calcular la disminución de espesor del bloque en dirección z .

6.11.1 Solución:

La disminución del espesor del bloque en dirección z se calcula a partir de la deformación ε_z en dicha dirección como:

$$\Delta l = \varepsilon_z \cdot l$$

La deformación ε_z se calcula a partir de las leyes de elasticidad o leyes de Hooke:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -1,8 \cdot 10^{-3}$$

Así que la disminución del espesor del bloque en dirección z vale:

$$\Delta l = -1,8 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \text{ [m]} = -1,8 \text{ [mm]}$$

6.12 Ejemplo 10

Calcular la variación de volumen del bloque del ejercicio anterior.

6.12.1 Solución:

La variación de volumen del bloque se calcula a partir de la deformación volumétrica ε_v como:

$$\Delta V = \varepsilon_v \cdot V$$

La deformación ε_v se calcula como suma de las deformaciones según los tres ejes cartesianos:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

donde:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 1,45 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = 2,75 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -1,8 \cdot 10^{-3}$$

Así que la variación de volumen del bloque resulta:

$$\Delta V = 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \text{ [m}^3\text{]} = 2,4 \text{ [dm}^3\text{]}$$

6.13 Ejemplo 11

Se somete una probeta cilíndrica de acero ($E = 200 [GPa]$, $\nu = 0,3$) a un ensayo de tracción uniaxial. Determinar el valor de la tensión (en dirección axial) cuando la sección transversal se ha reducido un 0,3%.

6.13.1 Solución:

La variación de sección transversal $\frac{\Delta A}{A}$ de la probeta se calcula en función de las deformaciones transversales ε_y y ε_z como:

$$\frac{\Delta A}{A} = (1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \approx \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Por otro lado, las deformaciones ε_y y ε_z se pueden expresar en función del estado tensional utilizando las leyes de la elasticidad.

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

La probeta está sometida a un estado de tracción uniaxial que podemos expresar como:

$$\sigma_x \neq 0$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

por lo cual resulta:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x$$

Sabiendo que $\frac{\Delta A}{A} = -0,003$ y sustituyendo las expresiones de las deformaciones transversales se obtiene:

$$-0,003 = \frac{\Delta A}{A} = \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{2\nu}{E} \sigma_x$$

y despejando la tensión σ_x resulta:

$$\sigma_x = \frac{E}{2\nu} \cdot \frac{\Delta A}{A} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 0,3} \cdot 0,003 = 1 [GPa]$$

6.14 Ejemplo 12

Se somete una probeta cilíndrica de sección $A = 5 [mm^2]$ y longitud $l = 10 [cm]$ a un ensayo de tracción uniaxial aplicando una carga $F = 2500 [N]$. Suponiendo que la longitud de la probeta aumenta 0,5 [mm], determinar el módulo elástico E del material.

6.14.1 Solución:

En el caso de un ensayo uniaxial se puede escribir:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

La tensión axial σ_x se puede calcular a partir del estado de carga:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{2500}{5 \cdot 10^{-6}} = 500 [MPa]$$

Por otro lado, la deformación axial ε_x se obtiene a partir del alargamiento de la probeta:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-2}} = 0,005 = 0,5\%$$

El módulo elástico E del material es:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{500 \cdot 10^6}{0,005} = 100 [GPa]$$

6.15 Ejemplo 13

Se somete una probeta cúbica de acero ($E = 200$ [GPa], $\nu = 0,3$) de arista $l = 10$ [cm] a una fuerza cortante $F = 1000$ [kN]. Determinar la distorsión resultante γ_{xy} .

6.15.1 Solución:

En primer lugar, calculamos el esfuerzo cortante al que está sometida la probeta:

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A} = \frac{1 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 0,1} = 100 \text{ [MPa]}$$

La distorsión resultante γ_{xy} se calcula utilizando la ley de elasticidad siguiente:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

que relaciona el esfuerzo cortante con la correspondiente distorsión angular en función del módulo de rigidez a cortante:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 77 \text{ [GPa]}$$

Sustituyendo este valor en la ley de elasticidad, se obtiene:

$$\gamma_{xy} = \frac{100 \cdot 10^6}{77 \cdot 10^9} = 0,13\%$$

6.16 Ejemplo 14

En un ensayo triaxial, las tensiones principales valen: $\sigma_I = 300$ [MPa], $\sigma_{II} = 200$ [MPa] y $\sigma_{III} = 100$ [MPa]. Determinar la deformación longitudinal máxima, así como la variación de volumen que experimenta una probeta de acero ($E = 210$ [GPa], $\nu = 0,3$).

6.16.1 Solución:

La deformación longitudinal máxima se obtiene aplicando la ley de elasticidad de Hooke según la dirección de la tensión principal máxima, σ_I :

$$\varepsilon_I = \frac{1}{E} [\sigma_I - \nu (\sigma_{II} + \sigma_{III})] = 0,1\%$$

La variación de volumen $\frac{\Delta V}{V}$ de la probeta se puede expresar en función de las deformaciones transversales ε_x , ε_y y ε_z como:

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

La misma expresión es válida cuando se introducen las deformaciones según los ejes principales de tensión:

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 + \varepsilon_I)(1 + \varepsilon_{II})(1 + \varepsilon_{III}) - 1 \approx \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}$$

El término de la derecha representa la deformación volumétrica $\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V}$, definida como:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}$$

Por otro lado, se puede relacionar dicha deformación con la tensión hidrostática o tensión media, σ_m definida como:

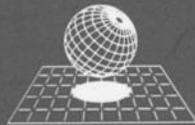
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} = 200 \text{ [MPa]}$$

a través de la relación:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_m}{K} = 0,11\%$$

siendo $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = 175$ [GPa] el módulo de compresibilidad volumétrica del material.

Esta obra recoge parte del programa docente de la asignatura "Mecánica", que se imparte en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, dentro de las titulaciones de Ingeniería de Obras Públicas. Su contenido abarca los temas de Estática, Análisis de Estructuras de Barras y Teoría de la Elasticidad siguiendo un planteamiento válido para diferentes titulaciones españolas de Ingeniería. La obra repasa los principios fundamentales de la estática presentando una colección de problemas resueltos. El objetivo final es el cálculo de los diagramas de esfuerzo en estructuras articuladas y reticuladas isostáticas. Se resuelven paso a paso numerosos ejemplos provenientes de las clases prácticas de la asignatura.



Centro Internacional
de Métodos Numéricos en Ingeniería

