Unidad N°4

CUERPOS VINCULADOS

Estabilidad I – Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

Profesor: Ing. Néstor Ferré

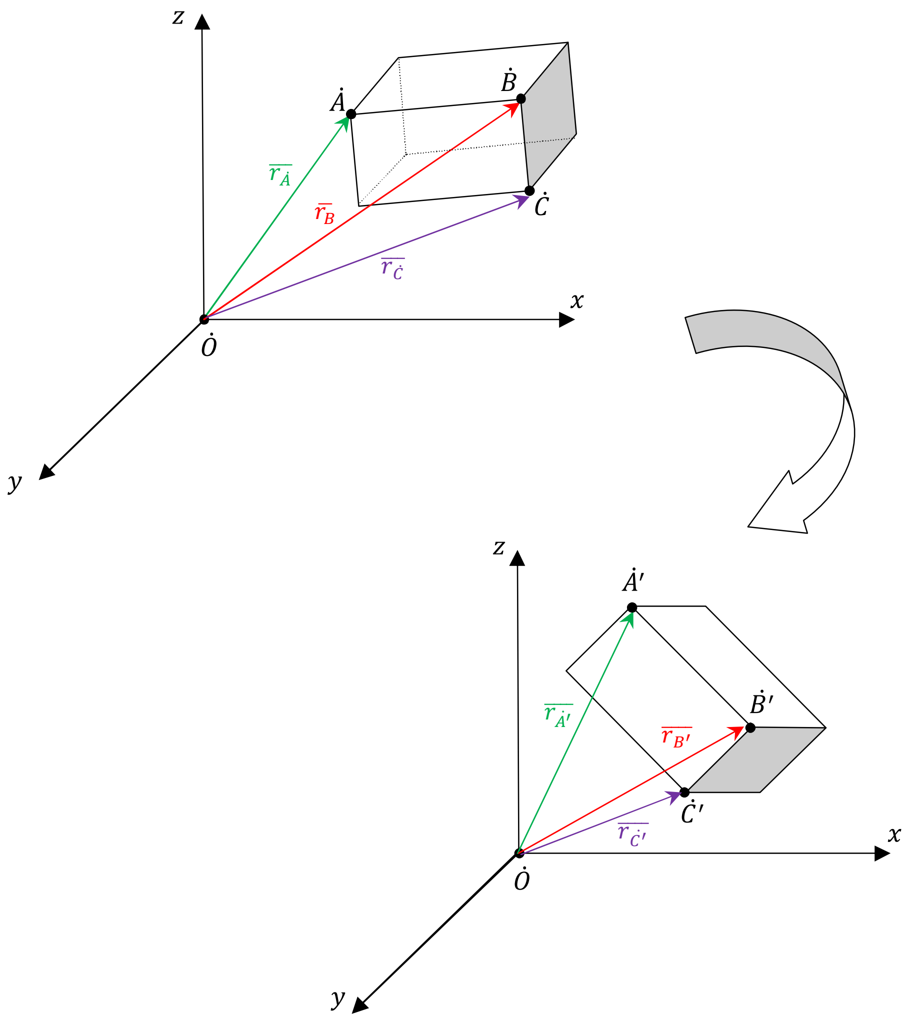
JTP: Ing. Rubén Daniel Altieri

ATP: Juan Francisco Pfeiffer

ATP: Franco Iván Aiducic

Cuerpos Vinculados: Considerando un sistema de puntos materiales vinculados entre sí por la condición de rigidez, no se concibe en la naturaleza un cuerpo rígido en estado de reposo sin que se halle vinculado a tierra, sea directamente o bien por intermedio de otro sólido o cuerpo rígido. Los sistemas materiales son espaciales por definición, aunque muchas veces podrán simplificarse a sistemas planos cuando, por simetría de cargas y de forma, se reemplace el sólido por una “chapa”.

Grados de libertad de un sólido en el espacio: Dado un sistema espacial de ejes de referencia como el de la figura, conocida la posición de tres puntos no alineados (tomados arbitrariamente dentro del sólido), estará entonces definida la posición del mismo.



Movimiento rígido

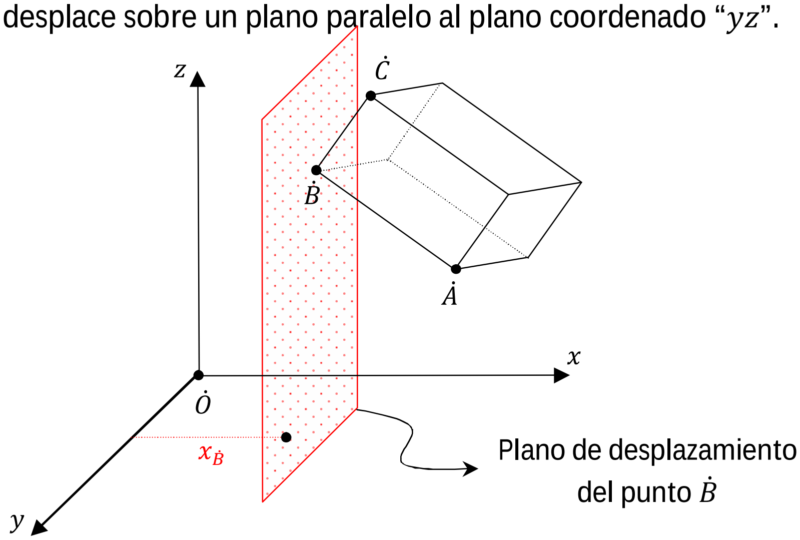
$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$\overline{AC} = \overline{A'C'}$

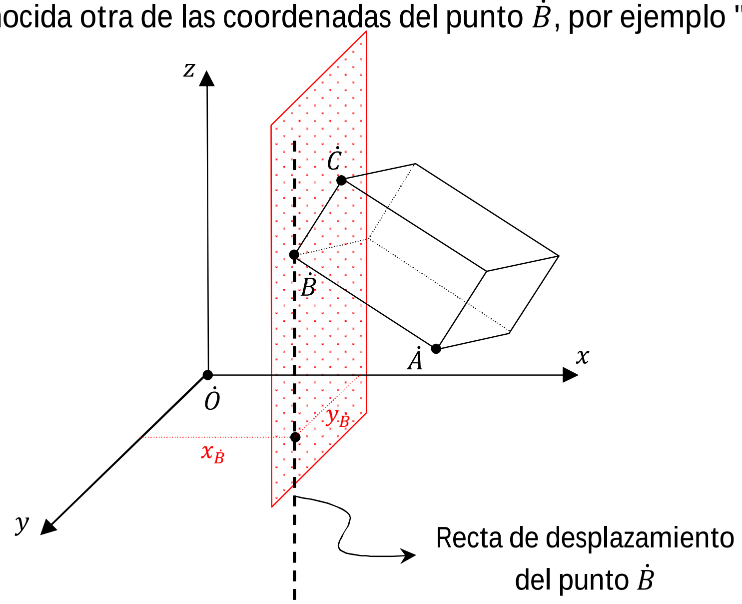
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$

Luego del movimiento rígido, los puntos A, B y C pasan a ocupar (para el mismo sistema de referencia), las posiciones A', B', C'. Pero la distancia entre cualquier par de puntos considerados dentro del sólido permanece invariante, pues se trata de un cuerpo indeformable, ya que estamos dentro del campo de la Estática.

Consideremos ahora que conocemos, para nuestro sistema de referencia, una de las coordenadas del punto $\dot{B}$, por ejemplo "$x_{\dot{B}}$". Supongamos entonces que el sólido pudiese moverse en el espacio permaneciendo fija la coordenada $x_{\dot{B}}$. Este movimiento implica que dicho punto del sólido se desplace sobre un plano paralelo al plano coordenado “yz”.

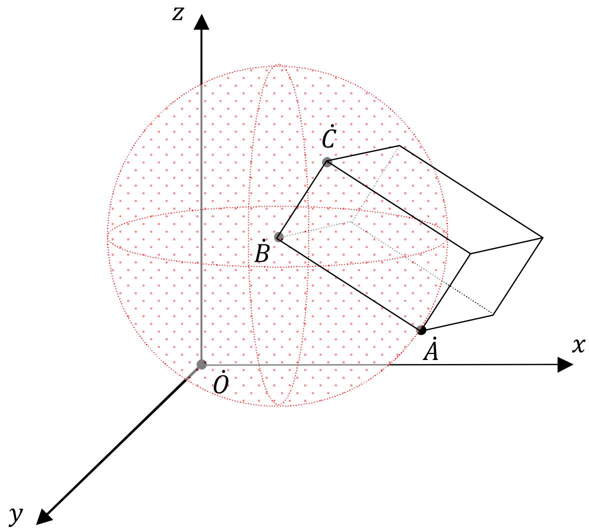


Consideremos ahora conocida otra de las coordenadas del punto $\dot{B}$, por ejemplo "$y_{\dot{B}}$".



En el caso que el punto $\dot{B}$ este perfectamente definido para el sistema de coordenadas ortogonales “xyz” adoptado, todo el sólido podrá moverse en torno al mismo.

Como el cuerpo en estudio es idealmente rígido, la longitud del segmento $\overline{AB}$ permanece invariante, y el punto $\dot{A}$ pasará a ocupar distintas posiciones sobre una superficie esférica centrada en $\dot{B}$ y de radio $\overline{AB}$.



$$\overline{AB} = \sqrt{(x_{\dot{A}} - x_{\dot{B}})^2 + (y_{\dot{A}} - y_{\dot{B}})^2 + (z_{\dot{A}} - z_{\dot{B}})^2} = cte.$$

En la ecuación anterior se observa que, conocidas las tres coordenadas del punto $\dot{B}$, sólo basta con conocer dos coordenadas del punto $\dot{A}$ para que este último este completamente definido.

Finalmente, estando los puntos $\dot{A}$ y $\dot{B}$ determinados, sólo bastaría, para definir la posición del sólido en el espacio, conocer las coordenadas del punto $\dot{C}$. Para ello consideremos ahora los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_{\dot{A}} - x_{\dot{C}})^2 + (y_{\dot{A}} - y_{\dot{C}})^2 + (z_{\dot{A}} - z_{\dot{C}})^2} = cte.$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_{\dot{B}} - x_{\dot{C}})^2 + (y_{\dot{B}} - y_{\dot{C}})^2 + (z_{\dot{B}} - z_{\dot{C}})^2} = cte.$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} (x_{\dot{A}} - x_{\dot{C}})^2 + (y_{\dot{A}} - y_{\dot{C}})^2 + (z_{\dot{A}} - z_{\dot{C}})^2 = cte. \\ (x_{\dot{B}} - x_{\dot{C}})^2 + (y_{\dot{B}} - y_{\dot{C}})^2 + (z_{\dot{B}} - z_{\dot{C}})^2 = cte. \end{cases}$$

Para resolver el sistema anterior, sólo basta con conocer una de las tres coordenadas que definen al punto C para poder definirlo.

Como consecuencia del análisis realizado, decimos que para poder definir la posición de un cuerpo en el espacio basta con conocer sólo seis componentes de las nueve correspondientes a los tres puntos que inicialmente mocionamos como necesarios para tal fin. **Es por ello que se dice que un cuerpo en el espacio posee seis grados de libertad.**

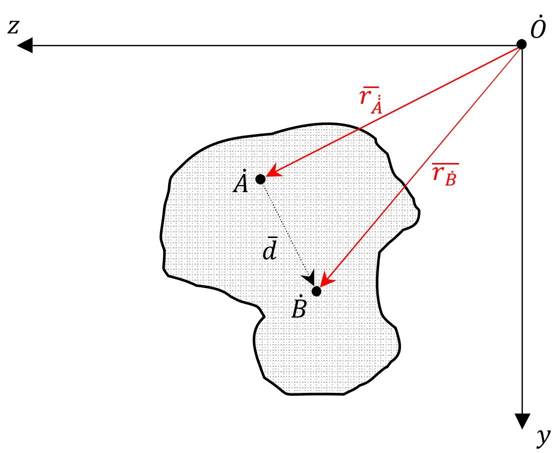
$$\boxed{Gl = 6} \longrightarrow \text{Grados de libertad de un cuerpo en el espacio.}$$

Grados de libertad de una chapa en el plano: Antes de pasar al estudio de la cantidad de desplazamientos independientes que una chapa posee en el plano debemos dar la definición correspondiente a la misma.

Es habitual, debido a las características dimensionales de los problemas de la estática y por una cuestión de simplificación de cálculo, que las estructuras tridimensionales se estudien como si fuesen estructuras planas (cuando pueda asegurarse una simetría de forma y de cargas en la estructura en estudio).

Una chapa es la representación ideal de un cuerpo que posee dos de sus dimensiones preponderantes frente a la restante.

Análisis de los grados de libertad de una chapa en el plano: Si el cuerpo (la chapa en este caso) se comporta como un cuerpo rígido, significa que la distancia entre dos puntos tomados arbitrariamente dentro del mismo permanece invariante.



$$\overline{r_{\dot{A}}} = \left(\overline{\dot{A} - \dot{O}}\right) = x_{\dot{A}}.\breve{\imath} + y_{\dot{A}}.\breve{\jmath}$$

$$\overline{r_{\dot{B}}} = \left(\overline{\dot{B} - \dot{O}}\right) = x_{\dot{B}}.\breve{\imath} + y_{\dot{B}}.\breve{\jmath}$$

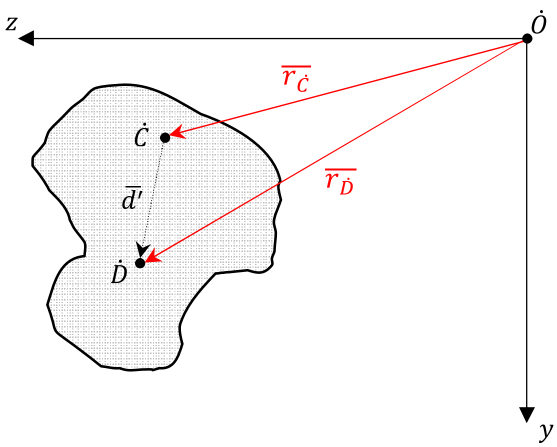
$$\bar{d} = \left(\overline{\dot{B} - \dot{A}}\right) = (x_{\dot{B}} - x_{\dot{A}}).\breve{\imath} + (y_{\dot{B}} - y_{\dot{A}}).\breve{\jmath}$$

$$\downarrow$$

La distancia (d) constante entre los puntos $\dot{A}$ y $\dot{B}$ viene dada por el módulo del vector $\bar{d}$.

$$d = \sqrt{(x_{\dot{B}} - x_{\dot{A}})^2 + (y_{\dot{B}} - y_{\dot{A}})^2}$$

Supongamos ahora que por algún motivo, la chapa modifique su posición (gire y se desplace) en el plano como indica la siguiente figura:



Los puntos $\dot{A}$ y $\dot{B}$ del sólido, luego del desplazamiento han pasado a ocupar las posiciones $\dot{C}$ y $\dot{D}$ respectivamente.

$$\overline{r_{\dot{C}}} = \left(\overline{\dot{C} - \dot{O}}\right) = x_{\dot{C}}.\breve{\imath} + y_{\dot{C}}.\breve{\jmath}$$

$$\overline{r_{\dot{D}}} = \left(\overline{\dot{D} - \dot{O}}\right) = x_{\dot{D}}.\breve{\imath} + y_{\dot{D}}.\breve{\jmath}$$

$$\bar{d}' = \left(\overline{\dot{D} - \dot{C}}\right) = (x_{\dot{D}} - x_{\dot{C}}).\breve{\imath} + (y_{\dot{D}} - y_{\dot{C}}).\breve{\jmath}$$

Como puede observarse, si la chapa gira y se desliza, los puntos del sólido modifican su posición respecto del sistema de referencia pero la distancia entre dichos puntos permanece invariante por tratarse de un sólido ideal. Por lo tanto, resulta:

$$d = d' = \sqrt{(x_{\dot{B}} - x_{\dot{A}})^2 + (y_{\dot{B}} - y_{\dot{A}})^2} = \sqrt{(x_{\dot{D}} - x_{\dot{C}})^2 + (y_{\dot{D}} - y_{\dot{C}})^2} = constante$$

De la ecuación anterior resulta que, conociendo tres de las cuatro componentes de los puntos considerados del sólido, la cuarta componente queda automáticamente determinada dado que la distancia entre dichos puntos es constante.

Por lo expuesto se dice entonces que una chapa en el plano posee tres grados de libertad.

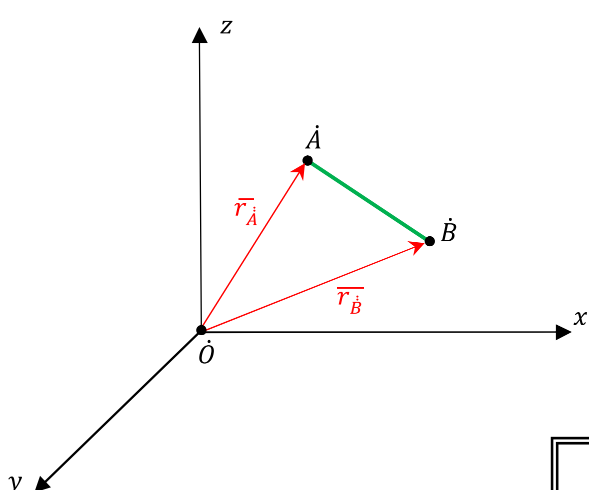
Conclusión:

$$\boxed{Gl = 3} \longrightarrow$$ Grados de libertad de una chapa en el plano.

Grados de libertad de un segmento de línea recta en el espacio:

Puede considerarse como un segmento de línea recta a cualquier pieza esbelta (barra), entendiendo como tal a aquella que posea una de sus tres dimensiones preponderante frente a las dos restantes.

Análogamente a lo estudiado en los casos anteriores, conociendo la posición de uno de los puntos del segmento, como por ejemplo el punto $\dot{A}$, sólo bastará con conocer dos de las tres coordenadas de otro punto $\dot{B}$ del cuerpo para poder determinar la posición del mismo en el espacio, ya que, por la condición de rigidez, la distancia entre los puntos en estudio permanece invariante.



$$\dot{A} \equiv (x_{\dot{A}}, y_{\dot{A}}, z_{\dot{A}})$$

$$\dot{B} \equiv (x_{\dot{B}}, y_{\dot{B}}, z_{\dot{B}})$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_{\dot{A}} - x_{\dot{B}})^2 + (y_{\dot{A}} - y_{\dot{B}})^2 + (z_{\dot{A}} - z_{\dot{B}})^2}$$

Por lo tanto, se dice que una barra en el espacio posee cinco grados de libertad.

$$\boxed{Gl = 5} \longrightarrow$$ Grados de libertad de una barra en el espacio.

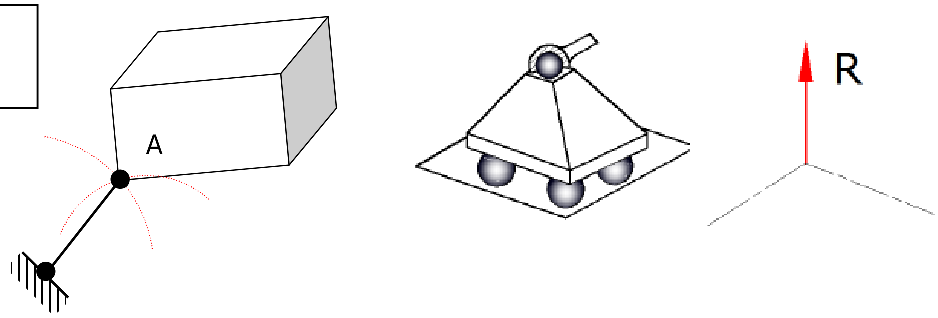
Vínculos: Son dispositivos que restringen o limitan los grados de libertad de los sistemas.

Tipos: Serán absolutos o externos aquellos que limitan la movilidad de un cuerpo respecto de tierra y serán relativos o internos aquellos que implican una limitación de movimientos con respecto a otro cuerpo.

Tipos de vínculos externos espaciales (estructurales):

Vínculo de 1ra especie o vínculo superficial (biela única):

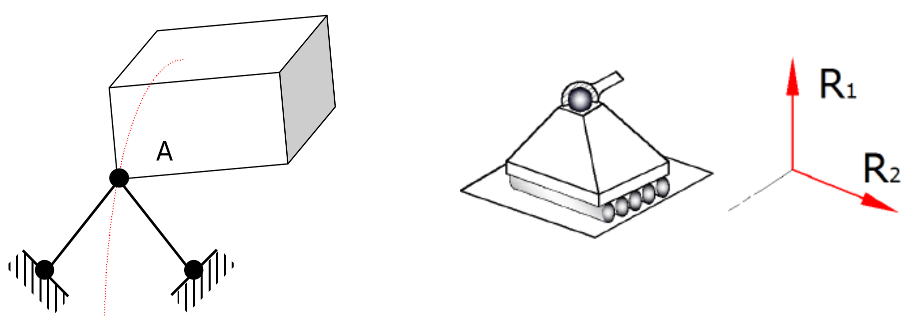
Restringe 1 grado de libertad



- Si los desplazamientos son grandes, el punto A describe una superficie esférica.
- Si los desplazamientos son muy pequeños, A se desplaza sobre un plano λ tangente a la superficie esférica.
- El cuerpo puede rotar sobre A pero no puede desplazarse en el sentido de la biela.

Vinculo de 2da especie o apoyo lineal:

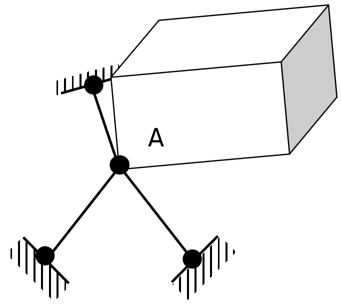
Restringe 2 grados de libertad

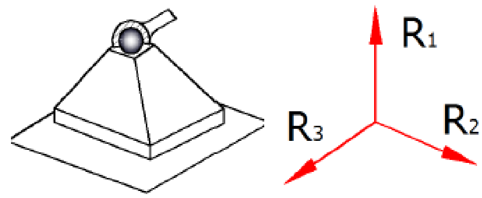


- El cuerpo rota alrededor de A pero no puede desplazarse en cualquiera de los sentidos de las bielas.
- Si los desplazamientos son grandes, A se podría desplazar sobre la curva indicada.
- Si los desplazamientos son muy pequeños, A se desplaza sobre una recta tangente a la curva.

<u>Vinculo de 3ra especie (rótula):</u>

Restringe 3 grados de libertad

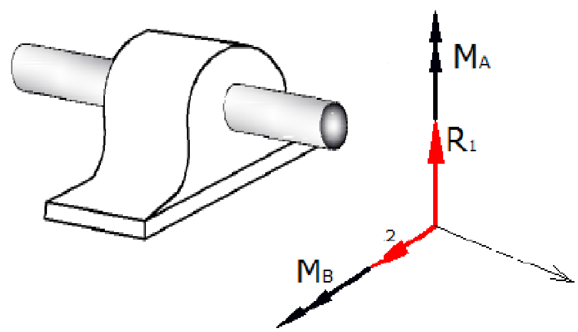




- El cuerpo rota alrededor de A pero no puede desplazarse en cualquiera de los sentidos de las bielas.
- Las 3 bielas no pertenecen al mismo plano*
- No tiene desplazamientos ya que el punto A está fijo en el espacio (rótula).

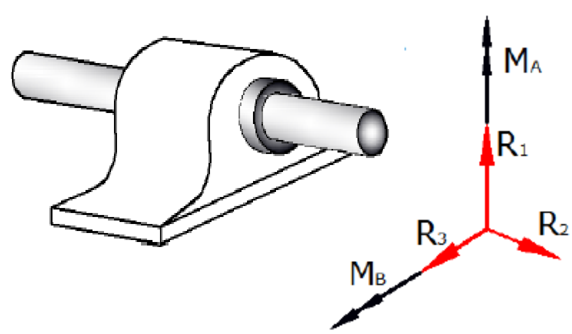
***<u>Observación</u>**: Las bielas no deben encontrarse en el mismo plano. En la imagen la biela 3 se encuentra en un plano distinto al de las bielas 1 y 2. Si las bielas fueran coplanares, se da una situación de “vínculo aparente”, ya que en el campo de los pequeños desplazamientos el punto A podría moverse perpendicularmente al plano generado por las bielas coplanares.

<u>Vinculo de 4ta especie:</u>



Esta forma de vinculación restringe 4 grados de libertad. Un ejemplo aplicado a mecanismos lo constituyen los bujes deslizantes, donde el eje no sólo puede girar, sino que además puede desplazarse en el sentido axial.

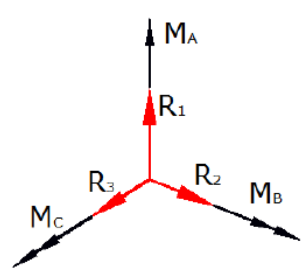
<u>Vinculo de 5ta especie:</u>



Esta forma de vinculación restringe 5 grados de libertad. Un ejemplo aplicado a mecanismos lo constituyen los rodamientos de empuje o crapodinas, donde el eje sólo puede girar en el sentido axial.

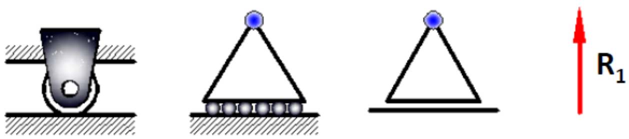
<u>Vinculo de 6ta especie:</u>

Esta forma de vinculación restringe todos los grados de libertad de un cuerpo en el espacio (los 6). Denominado empotramiento espacial.



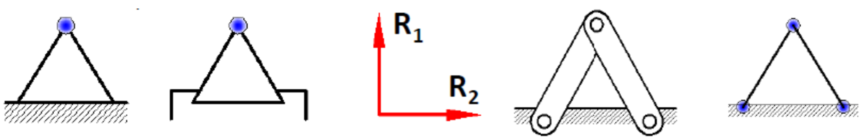
Tipos de vínculos en el plano:

Vínculo de 1ra especie, móvil o apoyo simple:



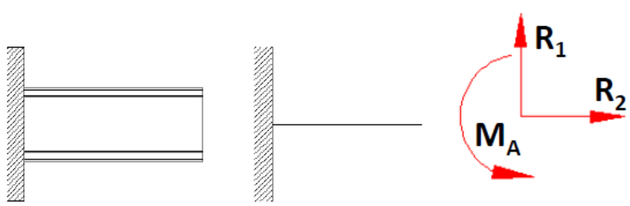
- La chapa puede rotar en el apoyo.
- Se puede desplazar libremente sólo paralelamente al plano de apoyo.
- R_1 dirección de la reacción en el apoyo.

Vínculo de 2da especie o vinculo fijo:



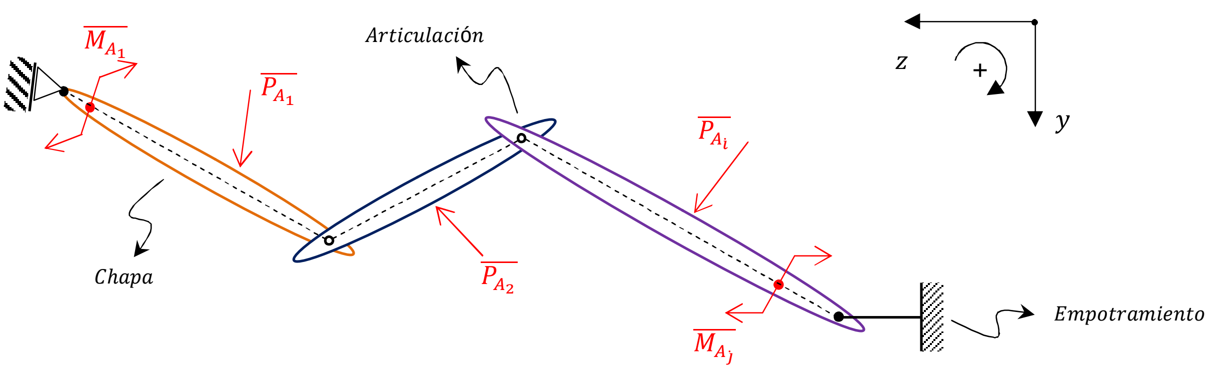
- La chapa sólo puede rotar en el apoyo.
- R_1 y R_2 direcciones de las reacciones en el apoyo.

Vinculo de 3ra especie o empotramiento:



- No puede rotar.
- No puede desplazarse verticalmente ni horizontalmente.
- R_1 , R_2 y M_A direcciones de las reacciones en el empotramiento.

Sistemas de cuerpos vinculados: Cuando dos o más cuerpos se encuentran vinculados y en equilibrio, existirá un sistema de cargas externas activas $\left(\overline{P_{A_i}}\,;\overline{M_{A_j}}\right)$ y otro sistema de cargas externas reactivas (correspondientes a las reacciones de los vínculos externos las cuales no se ponen de manifiesto en la figura).



Aclaración: El sistema de la figura corresponde a una cadena cinemática abierta de chapas articuladas en el plano, sustentada por un empotramiento y un vínculo de 2da especie aplicados en los extremos de la cadena. Las características particulares de cada elemento de la figura y el estudio del sistema se verán a continuación.

El objetivo del estudio de cuerpos vinculados consiste en determinar las reacciones de vínculo de un sistema isostático para poder, más adelante, trazar los llamados diagramas de esfuerzos característicos y finalmente dimensionar la estructura para que la misma sea capaz de soportar las cargas externas sin dejar de cumplir la función de diseño o sin llegar a la rotura física del material (como puede llegar a ocurrir en el caso de los materiales frágiles).

Grados de libertad de un sistema Gl: El mismo esta dado por el número de desplazamientos (lineales o angulares) independientes que posee un sistema.

Clasificación de los sistemas vinculados:

1. **Sistema isostático:** La estructura se encuentra sustentada a tierra por un numero de condiciones de vínculo igual a sus grados de libertad . En este caso las condiciones de sustentación son estrictamente las suficientes, se dice que la estructura esta isostáticamente sustentada.
2. **Sistema hiperestático:** La estructura se encuentra sustentada a tierra por un numero de condiciones de vínculo que es mayor que el de grados de libertad. En este caso las condiciones de sustentación son superabundantes respecto de las estrictamente necesarias. Se dice que la estructura es hiperestática.
3. **Sistema hipostático:** En este caso las condiciones de sustentación son insuficientes para restringir todos los grados de libertad.

El análisis no se debe limitar a determinar la condición necesaria en cuanto a la cantidad de vínculos existentes, sino que también se realiza una verificación de suficiencia, por cuanto puede existir un vinculo mal ubicado y no restringe el desplazamiento , al que se denomina **vinculo aparente**.

1. Gl = v : El sistema esta isostáticamente sustentado, es cinemáticamente invariable y se dice que es estáticamente determinado.
2. Gl> v : El sistema esta hipostáticamente sustentado, e cinemáticamente variable y, estáticamente, es de solución condicionada.
3. Gl< v : Existen vínculos superabundantes. El sistema está hiperestáticamente sustentado, es cinemáticamente inamovible. Se resuelve dentro del campo de la resistencia de materiales.

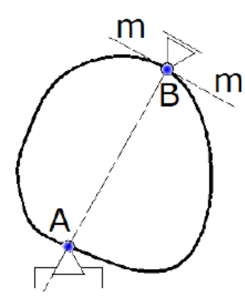
Vinculación de sistemas:

1) Hay que tener en cuenta los grados de libertad del sistema.
2) Si se quiere vincular isostáticamente al sistema se deben agregar tantos vínculos como grados de libertad tenga la estructura.
3) Se debe realizar el análisis cinemático para corroborar que no existe condición de vínculo aparente (condición necesaria y suficiente para que sea isostático)→ESTUDIO CUALITATIVO).
4) Cálculo de las reacciones de vínculo → ESTUDIO CUANTITATIVO

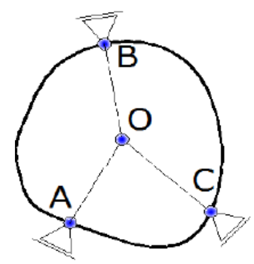
Vinculación aparente:

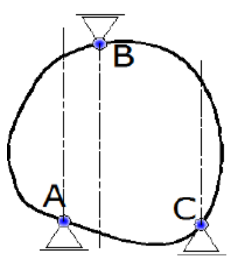
Definición:
Se denomina vínculo aparente a aquel vínculo impuesto a un punto de una chapa que no altera las posibilidades de desplazamiento de la misma, por estar mal ubicado.

Ejemplos:
1) Chapa con un apoyo fijo y uno móvil:
Si sólo colocáramos el apoyo fijo, la chapa rotaría sobre A, tendiendo el punto B a desplazarse en la dirección m-m, normal a la dirección A-B.
Por lo tanto, en una chapa sustentada con un apoyo fijo y otro móvil, para que no se presente vinculación aparente, la normal al plano de apoyo del vínculo móvil, no debe pasar por el apoyo fijo.



2) Chapa con tres apoyos móviles:
Si colocáramos dos apoyos móviles en A y B, la chapa rotaría sobre el punto de intersección de ambas direcciones (centro instantáneo de rotación “0”). Si agregamos el otro apoyo móvil en C de la forma indicada en la figura, se configurará una condición de vínculo aparente ya que la normal al plano del apoyo en C pasa por “0”.

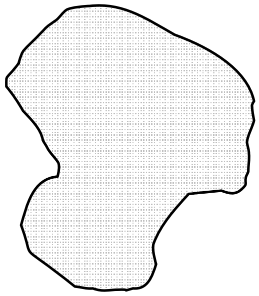




Lo mismo pasaría si las normales a los planos de apoyo de los vínculos de 1ª especie son todas paralelas, ya que el centro de rotación ficticio estaría en el impropio, y la chapa se desplazaría normal a las direcciones paralelas.
Por lo tanto, en una chapa sustentada con tres apoyos móviles, para que no se presente vinculación aparente, las normales a los planos de apoyo de los tres vínculos móviles no deben cortarse en un mismo punto.

3) Vinculaciones aparentes en el espacio (6 bielas):
   a. Si las 6 bielas son coplanares o paralelas;
   b. Si 4 o más de las bielas concurren a un punto;
   c. Si existe una recta que corta a las 6 bielas.

<u>Sistemas de chapas en el plano:</u>

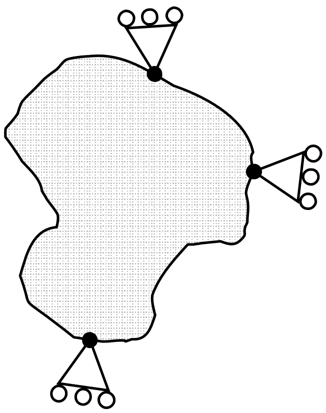


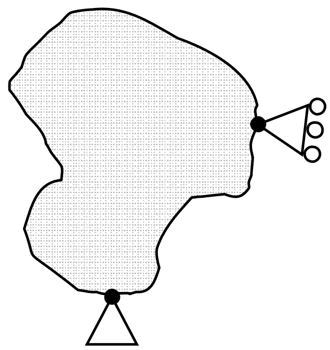
1) Grados de libertad. Gl = 3

2) Cantidad de vínculos externos v = Gl –> v = 3

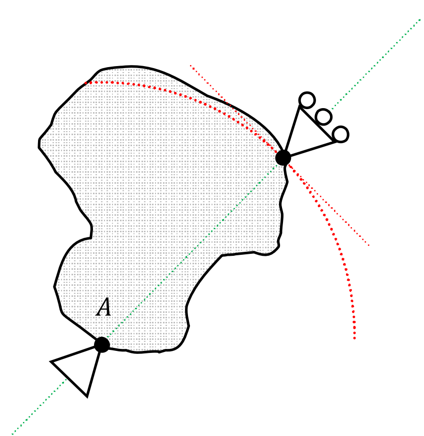
3) Análisis cinemático.

Vinculo a la chapa restringiendo 3 grados de libertad:



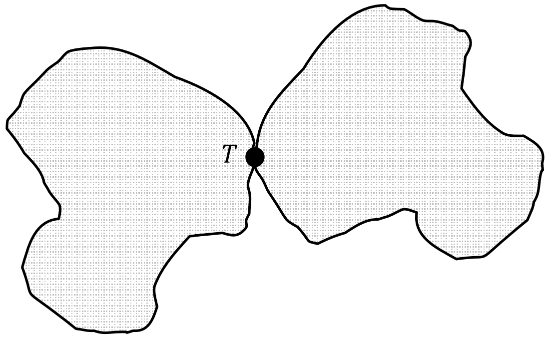


<u>Análisis cinemático</u>: Verifico que no haya condición de vínculo aparente:



En este caso existe vínculo aparente, ya que la normal a la base del vínculo móvil pasa por el punto A perteneciente al vínculo fijo. Esto permite que la chapa se desplace rotando en A y con dirección normal a la recta que une a los dos vínculos.

Cadena cinemática de chapas:

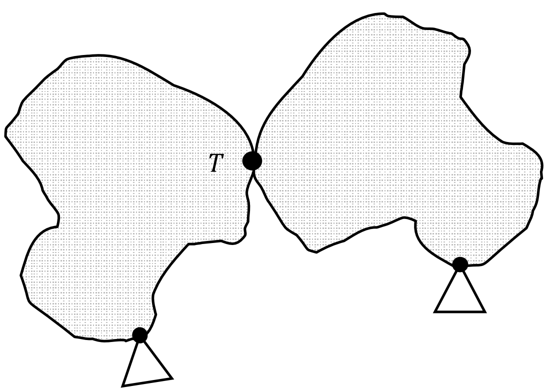


1) Cada chapa tiene 3 grados de libertad entonces GI= 6. Como el vínculo interno T restringe 2 grados de libertad sólo quedan 4 grados de libertad por restringir.
2) GI* = n+2 para cadena abierta de chapas (en el caso de cadena cinemática de chapas cerrada GI*=n)
3) v = GI* → v = 4

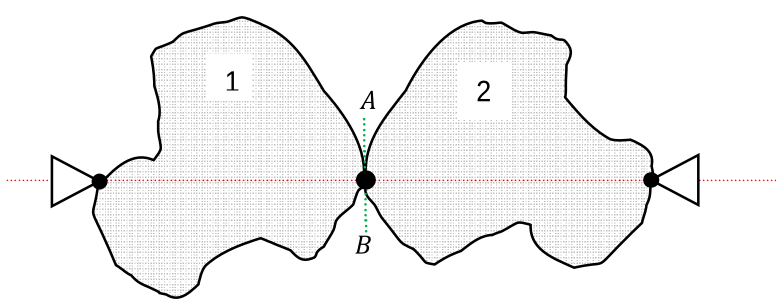
Se podría vincular de las siguientes formas:

Vínculos	Chapa 1	Chapa 2
v	3	1
v	1	3
v	2	2

Vamos a tomar el caso en el que se restringen 2 grados de libertad por chapa:

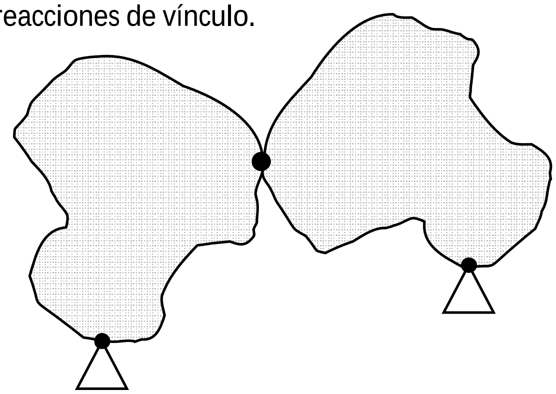


Observación: En el siguiente caso la chapa 1 actúa como una biela para la chapa 2 y viceversa y permite pequeños movimientos a lo largo de la recta AB, por lo que constituye un arco triarticulado y, por lo tanto, una vinculación aparente.



Resolución de sistemas vinculados:

1) Determinar los grados de libertad del sistema en estudio.
2) Vincular la estructura con igual número de vínculos que grados de libertad (isostático).
3) Análisis cinemático y comprobación de no existencia de vinculación aparente.
4) Realizar el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL) poniendo de manifiesto las reacciones en los vínculos.
5) Adoptar la terna (global) de referencia xyz.
6) Planteo de ecuaciones de equilibrio absoluto y relativo entre chapas (caso de cadena cinemática) y Cálculo de las reacciones de vínculo.



- Como el sistema debe estar en equilibrio, el binomio de reducción de este sistema en cualquier punto es igual a cero.
- Las acciones entre ambas chapas tienen lugar a través de la articulación T, es decir, la resultante del sistema de fuerzas F que actúa sobre la chapa 1 pasa por la articulación hacia la chapa 2 y viceversa.

Ecuaciones de equilibrio:

Del teorema de Varignon:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Pi}^{T} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Pj}^{T} = 0$$

Para el caso de las cadenas cinemáticas de chapas se tiene:

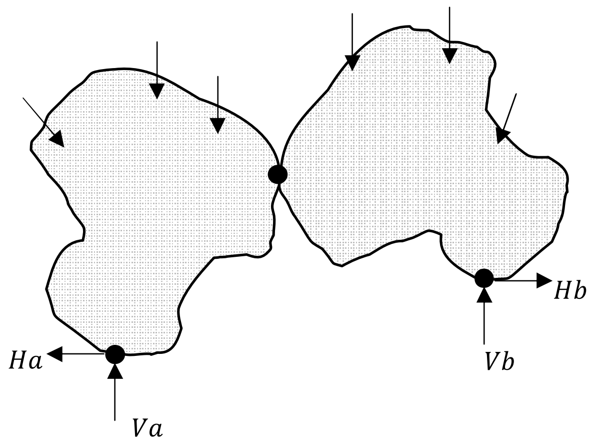
$$gl = 3n$$

Como se tienen articulaciones que restringen 2 grados de libertad entre chapas:

$$gl* = n + 2$$

Numero de incógnitas:

$$v = n + 2$$



Numero de ecuaciones:

$3 + 1(n-1) = n + 2$

Los grados de libertad a restringir en una cadena cinemática abierta de chapas es:

$$\boxed{v = Gl = n + 2}$$

Este tipo de cadena de chapas se resuelve un sistema de n+2 ecuaciones y n+2 incógnitas.