

CENTRO DE ESTUDIANTES DE INGENIERIA
LA LINEA RECTA
SECRETARIA MATERIALES DE ESTUDIO Y
BIBLIOTECA

ESTABILIDAD I

EL EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS VINCULADOS.-

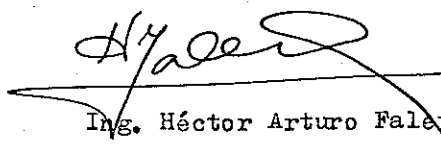
por el Ing. LUIS ALBERTO FONTANA

44.01.15

BUENOS AIRES
AÑO 1985

Por la presente se agradece al Auxiliar Docente Ing. Luis Alberto Fontana, colaborador de los cursos de Estabilidad I de promoción sin examen final, por su dedicación y responsabilidad al redactar estas notas sobre " El equilibrio de los sistemas vinculados ", las cuales serán de mucha utilidad a los estudiantes de los cursos mencionados.-

Buenos Aires, 2 de mayo de 1985.-



Ing. Héctor Arturo Faletty

El equilibrio de los Sistemas Vinculados.

EI

1

En la naturaleza no es concebible un cuerpo, en estado de reposo, que no se encuentre ligado o vinculado de alguna manera, ya sea directamente o por intermedio de otros cuerpos a la tierra.

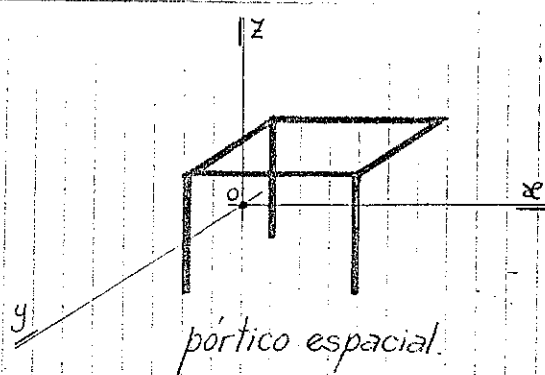
Elementos estructurales:

Distinguiremos 3 tipos de elementos estructurales, según sean sus dimensiones predominantes:

- Una dimensión predominante: elementos lineales o unidimensionales (barras o piezas prismáticas).
- Dos dimensiones predominantes: elementos superficiales o bidimensionales (placas, chapas, membranas, etc.)
- Tres dimensiones predominantes: elementos volúmetricos o tridimensionales (cuerpos).

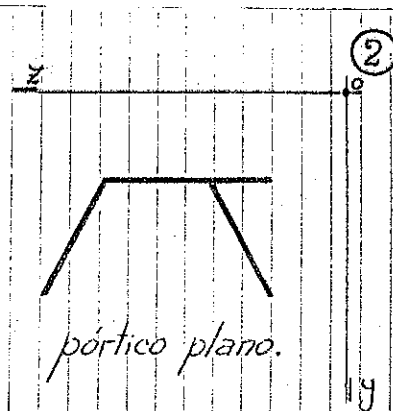
Se trabajará con esquemas estáticos que son los que resultan de llevar los elementos reales a esquemas simplificados.

Toda estructura constituida por una sucesión de barras, de eje rectilíneo o curvilíneo, vinculadas entre sí se la denominará pórtico, y podrán ser planos o espaciales. (fig. 1).



pórtico espacial.

Fig. 1



pórtico plano.

Los elementos verticales ó inclinados de los pórticos se denominan pilares, y los horizontales, vigas ó dinteles del pórtico.

Grados de libertad:

El número de coordenadas independientes necesarias para especificar por completo una determinada posición de un cuerpo se conoce con el nombre de grados de libertad del cuerpo.

Así pues, un punto en el espacio como el A (Fig. 2) posee 3 grados de libertad (G.L.), ya que son necesarias 3 coordenadas independientes para indicar una determinada posición.

En el caso de una barra en el espacio (Fig. 3) se tendrá una posición perfectamente determinada

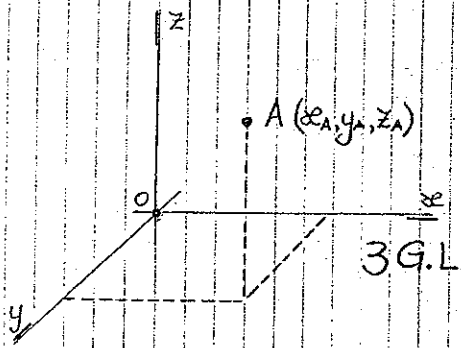


Fig. 2

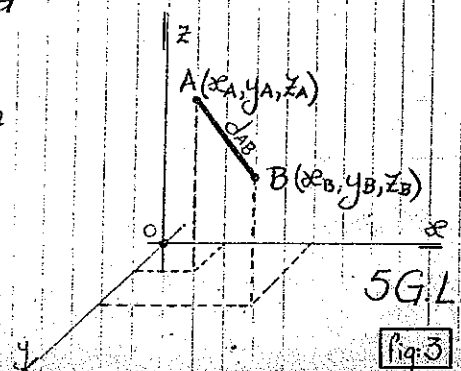


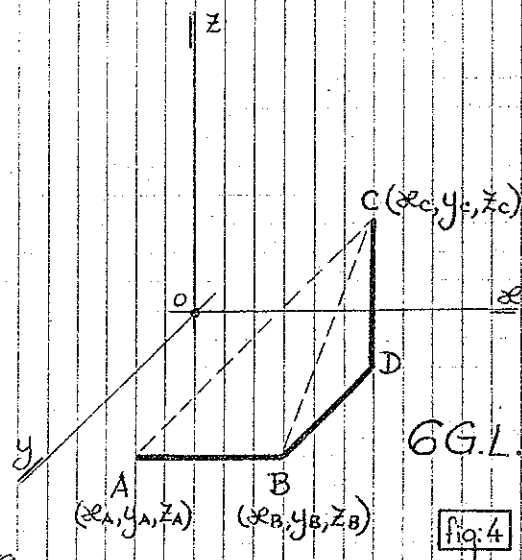
Fig. 3

si se conocen las coordenadas de 2 de sus puntos (3 coordenadas por cada uno), pero siendo la barra indeformable (hipótesis de la rigidez), la distancia entre A y B permanecerá invariable, y bastará conocer 5 de las 6 coordenadas ($x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B$), quedando la sexta determinada por la condición de rigidez:

$$d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2.$$

Por lo que se concluye diciendo que la barra en el espacio posee 5 G.L.

Para un pórtico espacial, (fig. 4) se tendrá una posición perfectamente determinada si se conocen las coordenadas de 3 de sus puntos (no alineados) (3 coordenadas por punto), pero como las distancias entre



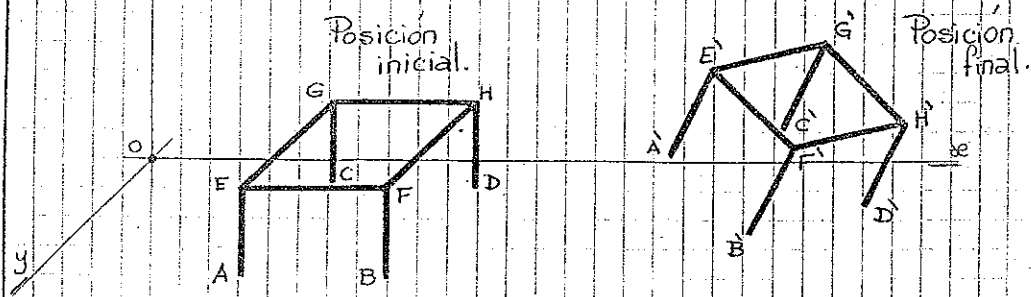
Ay B (d_{AB}), Ay C (d_{AC}) y By C (d_{BC}) permanecerán invariables (hipótesis de la rigidez), bastará conocer 6 de las 9 coordenadas ($x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$), quedando las 3 coordenadas restantes determinadas por la condición de rigidez:

$$\begin{cases} d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \\ d_{AC}^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 \\ d_{BC}^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 \end{cases}$$

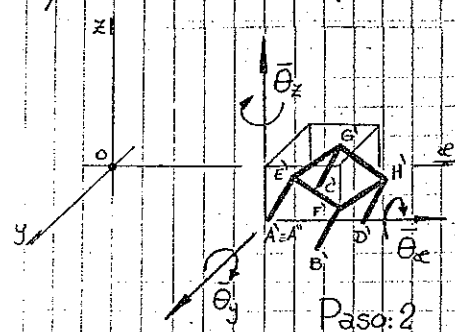
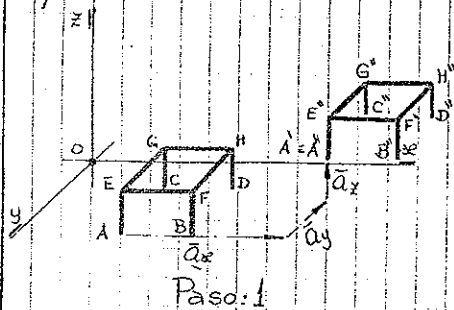
Por lo tanto, un pórtico espacial (cuerpo) en el espacio posee 6 G.L.

También se podría definir los grados de libertad ④ de un cuerpo como el número de desplazamientos simples necesarios para llevar dicho cuerpo desde una determinada posición inicial a otra posición final.

Es decir, si se tiene el pórtico de la siguiente figura, que pasa de una posición inicial ($A, B, \dots G, H$) a otra final ($A', B', \dots G', H'$) (sin interesar la trayectoria ni el tiempo):



Mediante 3 traslaciones $\bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{Q}_z$, según la dirección de los ejes, se ubica en su posición final uno de los puntos (el A por ejemplo) (Paso 1); luego por medio de 3 rotaciones $\bar{\Theta}_x, \bar{\Theta}_y$ y $\bar{\Theta}_z$, el cuerpo quedará orientado en su posición final (Paso 2).



Es decir que se han requerido 6 movimientos simples para alcanzar la posición final. Luego, el cuerpo posee 6 G.L. en el espacio. [Véase "Mecánica Racional" del Ing. Pedro Longhini - pag. 313 y siguientes -].

1) Analizar los G.L. de un punto, una barra y un pórtico en el plano.

(5)

Vínculos:

Toda condición geométrica que limite la movilidad de un cuerpo toma el nombre de vínculo.

Se llamarán vínculos externos ó absolutos a aquellos que imponen condiciones geométricas que limitan la movilidad del cuerpo respecto de la tierra supuesta esta fija. Cuando las condiciones geométricas limitan la movilidad entre los cuerpos, se dirá que los vínculos que las imponen son internos ó relativos.

De acuerdo a la definición de vínculo dada, lo que se estableció como hipótesis de la rigidez es también (por definición) un vínculo, pues establece la invariación de las distancias entre los puntos de un cuerpo.

Por cada condición geométrica que limita 1 movilidad se dirá que se ha impuesto 1 condición de vínculo (1 C.V.). Se tendrá así, vínculos de 1^{ra} especie, de 2^{da} especie, ..., 6^{ta} especie, según sea el número de condiciones de vínculo que imponen:

Vínculos	a) Externos	a.1) 1 ^{ra} especie	→ 1 C.V.
		a.6) 6 ^{ta} especie	→ 6 C.V.
	b) Internos	b.1) 1 ^{ra} especie	→ 1 C.V.
		b.6) 6 ^{ta} especie	→ 6 C.V.

Cinemáticamente hablando, 2 vínculos de 1^{ra} especie

serán equivalentes a un vínculo de 2^{da} especie, ⑥ y así sucesivamente.

Los vínculos siempre imponen condiciones geométricas que limitan la movilidad del cuerpo ó de los cuerpos.

Cuando la condición geométrica impuesta a un cuerpo no altera las posibilidades de desplazamiento del mismo, se dice que existe vinculación aparente.

2) Indique ejemplos de vinculación aparente.

En las figuras siguientes (Fig. 5 y 6) se ejemplifican distintos tipos de vínculos:

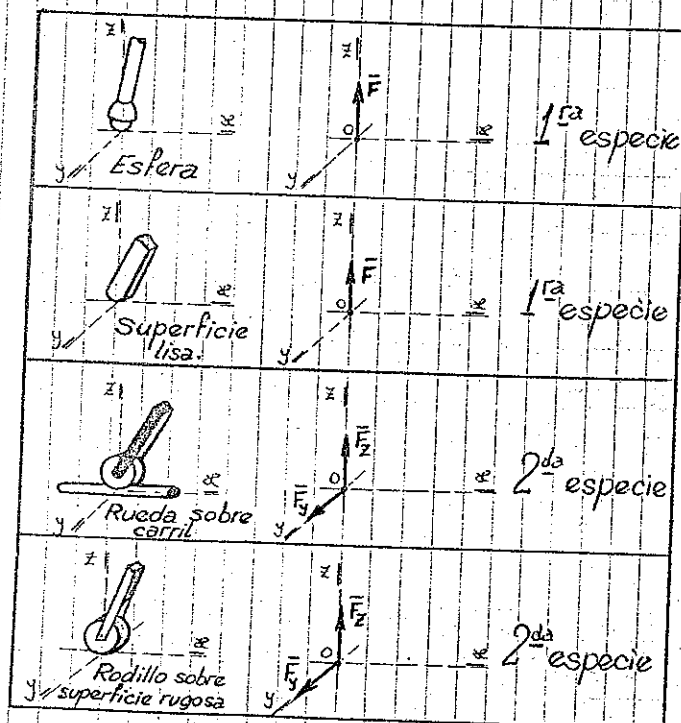


Fig. 5

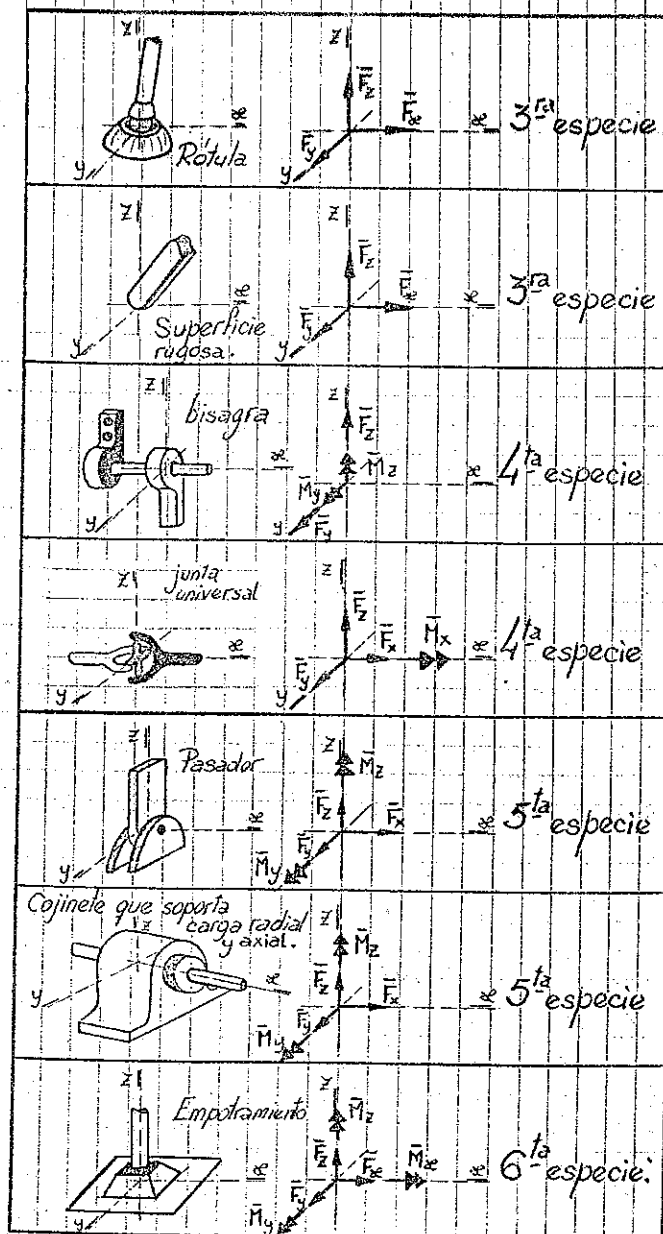


fig: 6

Téngase bien presente la diferencia conceptual entre "vinculo" y "condición de vinculo".

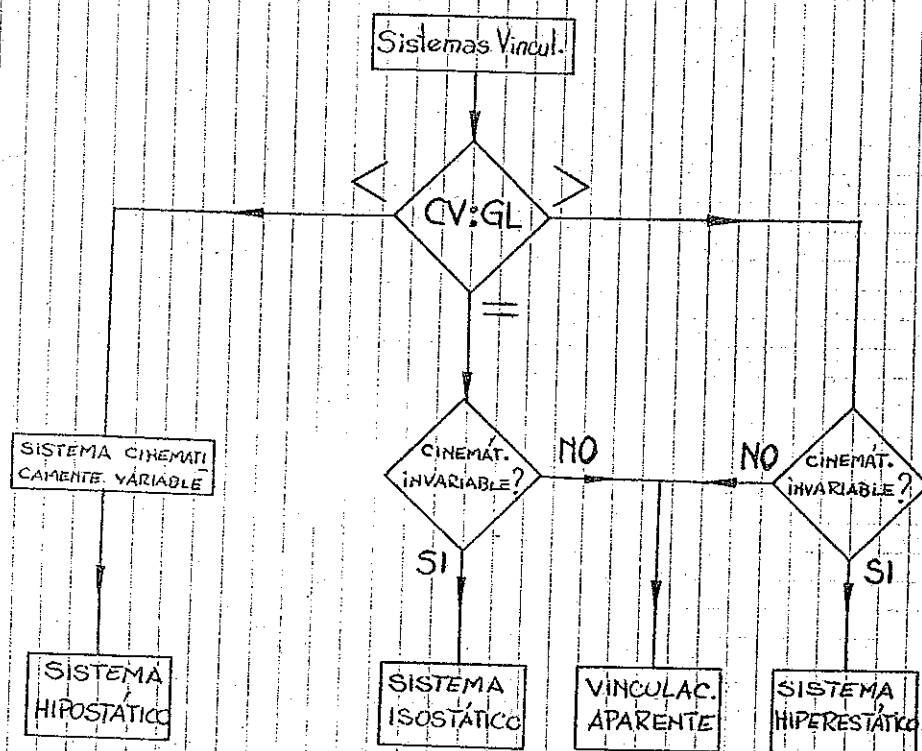
Para que un cuerpo quede fijo en una determinada posición respecto a la tierra, deberán imponerse tantas condiciones de vinculo (C.V.) como grados de libertad posea (G.L.).

Pero esta condición necesaria no es suficiente pa ⑧
ra asegurar que un cuerpo mantenga una posición de
reposo, debiéndose además estudiar el sistema
desde un punto de vista cinemático para poder
asegurar que el mismo no se pueda mover, en cuyo
caso se dirá que el sistema es cinemáticamente
invariable.

Luego, si $C.V. = G.L.$ y el sistema no tiene posibilidad
de moverse, se dirá que el sistema se encuentra
isostáticamente sustentado, INDEPENDIENTEMENTE
DEL ESTADO DE CARGA.

Si ocurre que $C.V. < G.L.$ el sistema es cinemática
mente variable (se puede mover), y se dirá que se
trata de un sistema hipostático.

Y si $C.V. > G.L.$, y el sistema es cinemáticamente
invariable, se dirá que el sistema es hiperestático.
En resumen:



Biela:

Sea el caso de un punto A (fig. 7), unido mediante una barra rígida al punto B el que, a su vez, se encuentra vinculado con tierra mediante una articulación (rotula).

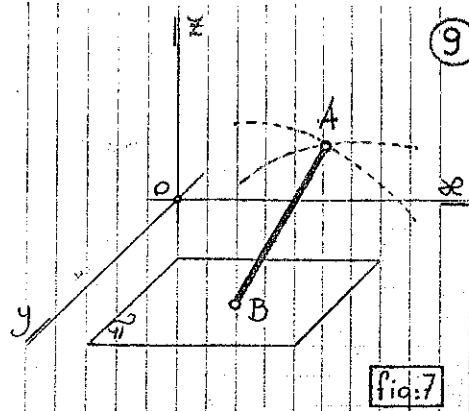


fig. 7

Como la distancia $\overline{AB}$ es invariable (hipótesis de la rigidez), el punto A está obligado a moverse sobre una superficie esférica de radio $\overline{AB}$, siendo esta su única posibilidad de movimiento. En consecuencia, la barra $\overline{AB}$ constituye un vínculo para el punto A de 1ª especie, y se la denominará en lo sucesivo biela.

Si se da un desplazamiento al punto A (fig. 8), este se moverá sobre un casquete esférico (de centro B y radio $\overline{AB}$). El punto A pasará a ocupar la posición A'' . El desplazamiento del punto será el vector $\vec{a}_A = (\overline{A''} - \overline{A})$, NO INTERESA LA TRAYECTORIA NI EL TIEMPO.

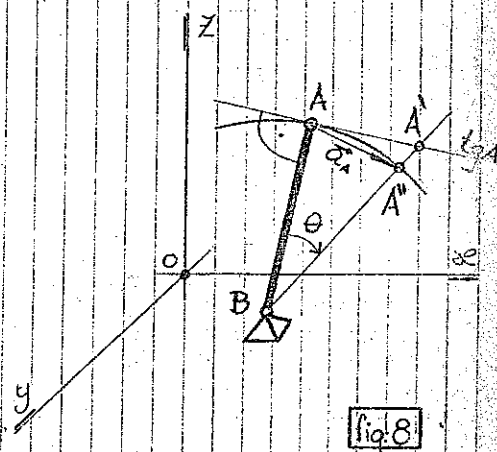


fig. 8

Se impondrá la condición de PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS, en tal caso, la cuerda $\overline{AA''}$, el arco $\overline{AA''}$ y la tangente $\overline{AA''}$ se confunden, y siendo esta última normal al radio $\overline{AB}$, se tiene que, para desplazamientos pequeños (infinitésimos físicos) los corrimientos que experimentan los puntos resultan normales a las rectas determinadas por los puntos y el cen-

tro ó polo de rotación instantáneo (punto B).

(10)

Luego, el punto A se moverá en el plano tangente al casquete esférico de radio $\overline{AB}$ (fig. 9), por esta razón también se lo denomina vínculo superficial.

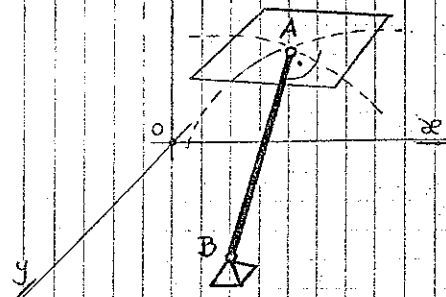
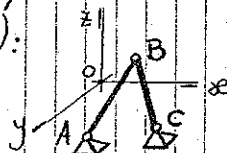


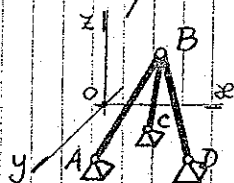
fig. 9

En lo sucesivo, y mientras no se establezca lo contrario, nos referiremos siempre a desplazamientos pequeños.

3) Indique como se comportan 2 bielas solidarias en un punto (B):



4)Cuál será el comportamiento de un conjunto de 3 bielas concurrentes en un punto (B) (no coplanares)?



5) Idem [4] pero si las 3 bielas son coplanares.

Reacciones de vínculo:

Sea el caso del pórtico espacial de la (fig. 10), al cual se le coloca un vínculo de 6^{ta} especie en A (empotramiento espacial), es decir que se han impuesto 6 condiciones geométricas.

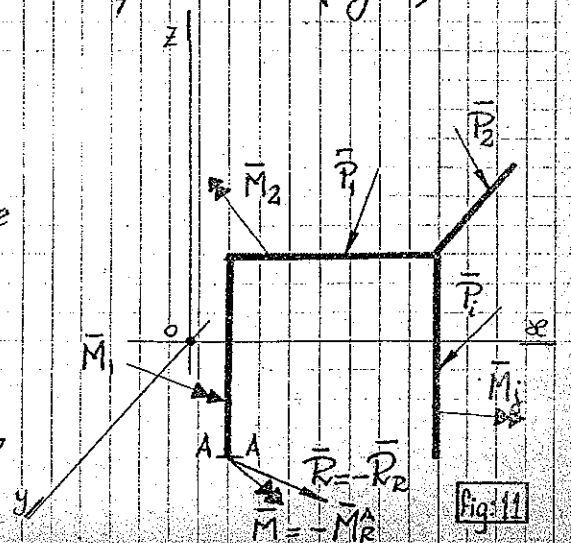
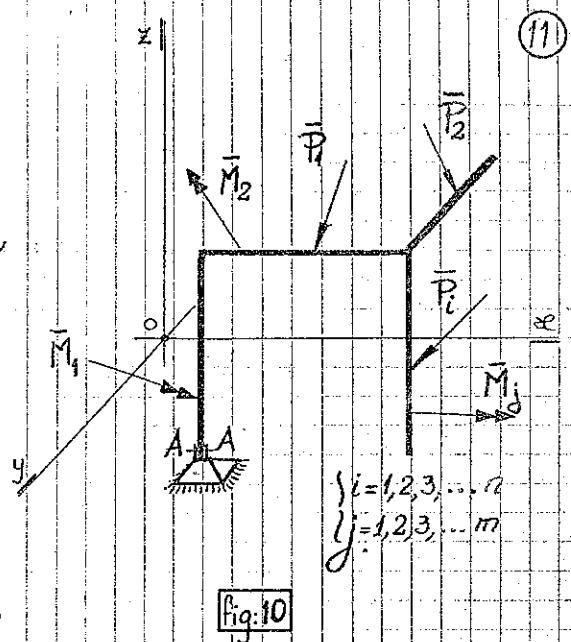
El baricentro de la sección A-A no tiene posibilidad de movimiento alguna, así como tampoco puede rotar o girar dicha sección, por consiguiente ningún otro punto del pórtico admitirá movimiento posible, ya que se encuentran rígidamente ligados a la sección A-A.

Sobre dicha estructura actúa un sistema de fuerzas generalizadas $\{\bar{P}_i, \bar{M}_j\}$, cuyas magnitudes surgen de los análisis de carga, y que se denominarán fuerzas activas (F.A.).

Los vínculos serán los medios por los cuales dichas fuerzas activas se transmitirán a la tierra.

Si se quita la tierra, a la cual está ligada el vínculo, deberán colocarse las fuerzas generalizadas $\bar{R}$ y $\bar{M}$, a los efectos de que el sistema permanezca en las mismas condiciones que antes. (Fig. 11).

Estas fuerzas generalizadas $\bar{R}$ y $\bar{M}$ serán opuestas a la suma de las F.A., o sea que serán opuestas al momento de reducción al punto A ($\bar{M}_R^A$) y a la resultante de reducción ($\bar{R}_R$).



Dichas fuerzas incógnitas ($-\bar{R}_R, -\bar{M}_R^A$) se las denominará fuerzas reactivas ($\bar{F}.R.$), las que conjuntamente con las ($\bar{F}.A.$) conforman el denominado sistema de fuerzas exteriores ($\bar{F}.E.$), el cual deberá ser un sistema nulo ó en equilibrio. ⑫

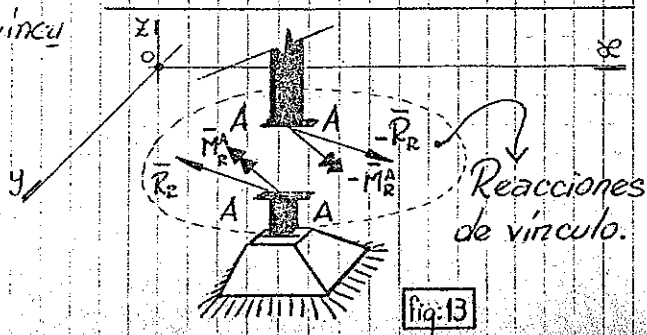
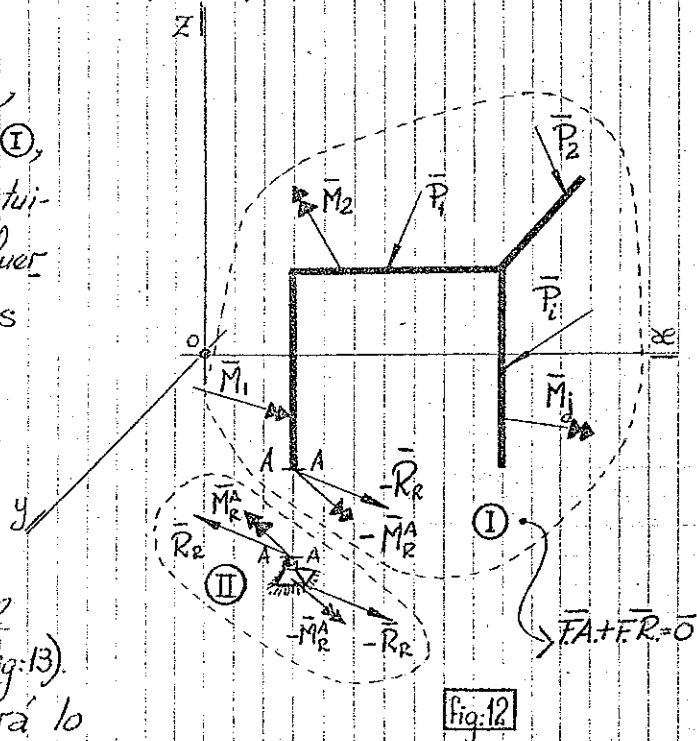
$$\bar{F}.A. + \bar{F}.R. = \bar{F}.E. = \bar{O}$$

En la otra cara de la sección A-A, deberán colocarse fuerzas $\bar{M}_R^A$ y $\bar{R}_R$ a los efectos de que el vínculo quede en las mismas condiciones en que se hallaba antes de interrumpir la continuidad de la sección A-A (Aplicación del 4º principio de la estática). Ver Fig. 12.

De esta manera, tanto el sistema ①, como el ② constituirán sistemas de fuerzas generalizadas en equilibrio.

Al conjunto de fuerzas ($-\bar{R}_R, -\bar{M}_R^A$) y ($\bar{R}_R, \bar{M}_R^A$) se lo denominará reacciones de vínculo. (Fig. 13).

Como no interesará lo que le sucede al vínculo y sí lo que le ocurre al elemento estructural, se trabajará únicamente con ($-\bar{R}_R, -\bar{M}_R^A$).



Téngase presente que vínculo y reacción de vínculo (13) NO COEXISTEN.

Se tendrá así, en el sistema (I), 6 incógnitas dadas por las componentes de $-\bar{R}_R$ y $-\bar{M}_R^A: (R_{Rx}, R_{Ry}, R_{Rz}, M_{Rx}^A, M_{Ry}^A, M_{Rz}^A)$, para cuyo cálculo deberán plantearse las ecuaciones de equilibrio correspondiente ($\sum \bar{F}_A + \sum \bar{F}_R = \vec{0}$) (Problema de fuerzas con incógnitas). [Ver notas del Ing. H. Faletty sobre "Sistemas de Fuerzas" CEI - pag. 15].

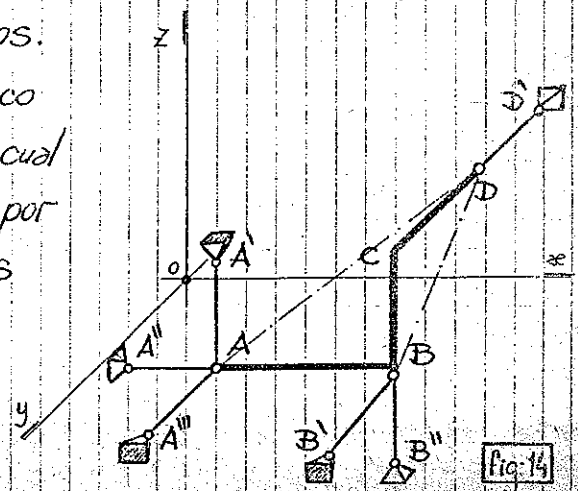
El procedimiento de eliminar las condiciones de vínculo y colocar las fuerzas generalizadas que tienen el mismo efecto cinemático, se denomina poner en evidencia las reacciones de vínculo.

En el caso del pórtico analizado, este fue fijado a tierra mediante la imposición de un vínculo de 6^{ta} especie en A, no pudiendo existir por consiguiente vinculación aparente.

En el caso de utilizarse otro tipo de vinculación, la determinación de la adecuación ó inadecuación de los apoyos, para mantener un cuerpo en una posición de equilibrio suele poderse hacer por simple inspección, pero en muchas ocasiones será necesario plantear la cuestión de la adecuación por medio de criterios analíticos.

Sea el caso del pórtico espacial de fig. 14, al cual se le imponen 6 C.V. por medio de las 6 bielas indicadas.

El punto A se encuentra inmovilizado, ya que

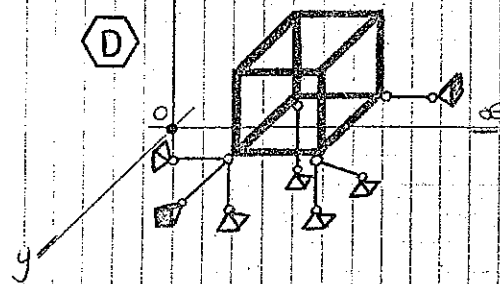
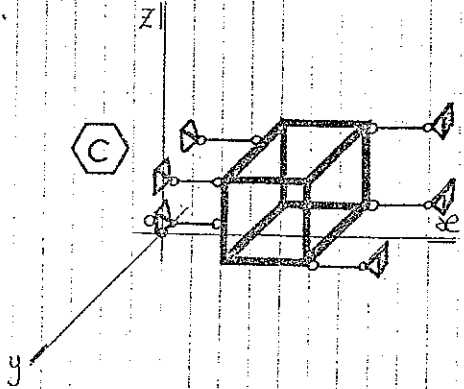
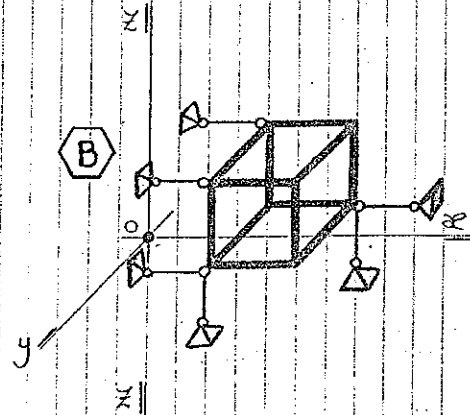
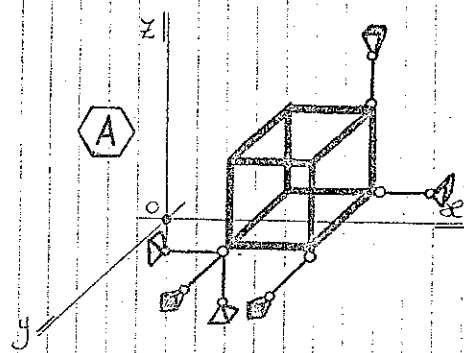


a él concurren 3 bielas no coplanares. El punto B , también se hallará inmovilizado ya que concurren 2 bielas y además se encuentra relacionado con el punto A por el vínculo de la rigidez ($\overline{AB}$ biela interna) ($\overline{AB}, \overline{BB'}$ y $\overline{BB''}$ no coplanares).

Finalmente, para el punto D , $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ serán bielas internas, y como no son coplanares con $\overline{DD'}$ (biela externa), el punto D se halla fijo.

Luego, al ser C.V. = G.L. y no existir vinculación aparente, el sistema será cinemáticamente invariable, pudiéndose cargar con cualquier sistema de fuerzas.

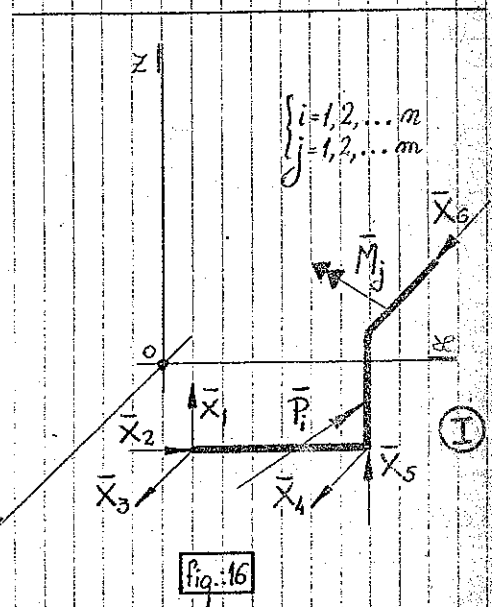
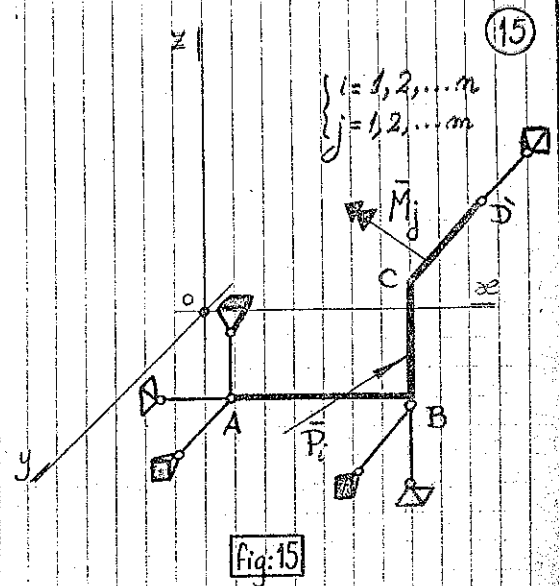
6) Efectuar el análisis cinemático en los siguientes casos:



Si en la (fig. 15), se suprimen las bielas, deberá colocarse el conjunto de fuerzas $\bar{X}_k$ ($k=1, 2, \dots, 6$) ($\bar{F}, \bar{R}$),

de forma tal que el sistema permanezca en las mismas condiciones. (fig: 16). Así, en el sistema ① podrán plantearse las ecuaciones de equilibrio, ya que $\vec{F}\vec{A} + \vec{F}\vec{R} = \vec{0}$. Se tendrán así 6 incógnitas: $X_1, X_2, \dots, X_6$, y un número igual de ecuaciones independientes (6 ecuaciones de equilibrio). La solución de este sistema de ecuaciones lineales será única si no hay vinculación aparente. Se establecerá entonces como criterio analítico para analizar la adecuación de la vinculación el siguiente:

- Se considerará que sobre el sistema no actúan fuerzas activas: $\vec{F}\vec{A} = \vec{0}$.
- Deberá por consiguiente ser $\vec{F}\vec{R} = \vec{0}$, y obviamente cada una de las X_k (reacciones incógnitas) ser nulas, ya que sobre el sistema no actúan cargas ni ningún tipo de acción.
- Luego, el sistema de ecuaciones lineales que resulta al plantear las 6 ecuaciones de equilibrio, será un sistema



homogeneo, ya que $\bar{F}.A. = \bar{0}$:

(16)

$$\sum_{j=1}^6 a_{ij} X_j = 0 \quad (i=1,2,\dots,6)$$

d. Por consiguiente, para que exista la solución trivial: $X_1 = X_2 = \dots = X_6 = 0$, deberá cumplirse que $|A| \neq 0$ ($|A|$: determinante de la matriz de los coeficientes).

e. Entonces podrá decirse que:

$|A| \neq 0 \longrightarrow$ Sistema isostáticamente sustentado.-

$|A| = 0 \longrightarrow$ Existe vinculación aparente.-

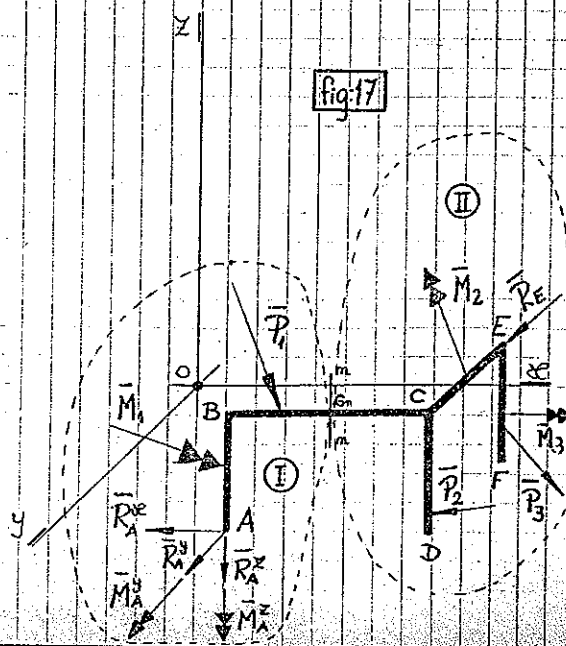
[7] Nótese que se habla de vinculación aparente y no de vínculo aparente. Analice la diferencia.

[Sobre adecuación de los vínculos, véase: "Estática" de J. L. Meriam - 2^a edición - pág. 109 y siguientes.]

Reacción de vínculo interno en una sección:

Sea el pórtico de la fig. 17, isostáticamente sustentado (1 vínculo de 5^{ta} especie en A y otro de 1^{ra} especie en E), cargado con $\bar{F}.A.$ y en donde también se han indicado las $\bar{F}.R.$:

Se considerarán, de ahora en más, a

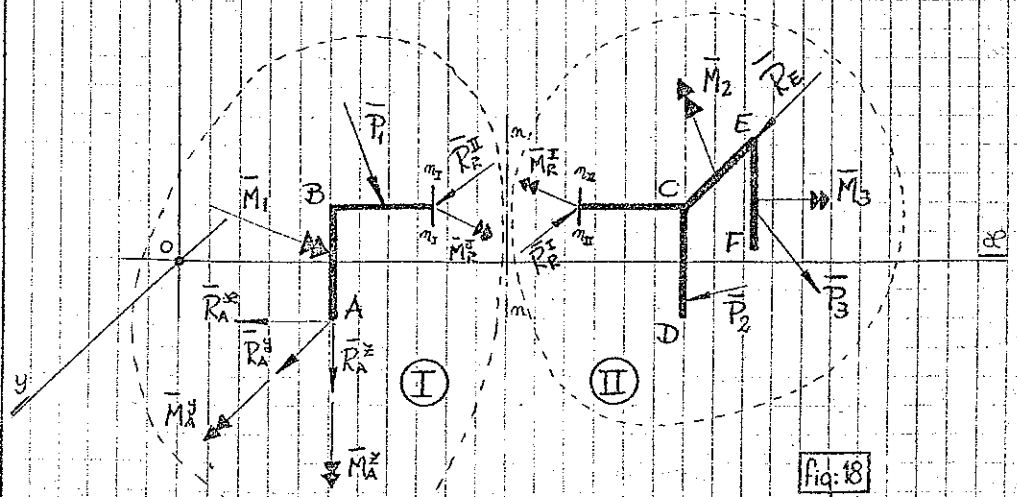


las FUERZAS COMO VECTORES APLICADOS (YA NO ⑪)
AXILES), ASÍ COMO TAMBIÉN A LOS VECTORES MOMENTO
(ANTES VECTORES LIBRES).-

Considérese una sección genérica (m-m) de baricentro G_m .
El esquema queda dividido en 2 partes ① y ② (siempre
que el esquema estático sea abierto), en las cuales
actuarán fuerzas exteriores $(\bar{F}, \bar{E})_I$ y $(\bar{F}, \bar{E})_{II}$, de manera tal
que: $(\bar{F}, \bar{E})_I + (\bar{F}, \bar{E})_{II} = \bar{F}, \bar{E} = \bar{O}$ (sistema nulo) $= \bar{F}, \bar{A} + \bar{F}, \bar{R}$

$$\therefore (\bar{F}, \bar{E})_I = -(\bar{F}, \bar{E})_{II}$$

Si se reduce al baricentro de la sección (m-m) las $(\bar{F}, \bar{E})_I$
y $(\bar{F}, \bar{E})_{II}$, se tendrá (fig: 18):



→ cada parte debe encontrarse en equilibrio.

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_R^I &= -\bar{R}_R^{II} \\ \bar{M}_R^I &= -\bar{M}_R^{II} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Reacción de} \\ \text{vínculo interno} \\ \text{en una sección.} \end{array}$$

Para poner en evidencia esta reacción, se debe destruir
la continuidad, y sobre la parte ① del sistema actuarán
los elementos de la reducción de las $\bar{F}, \bar{E}$ de la parte
②, y sobre la parte ② los de la ①. Cada parte con

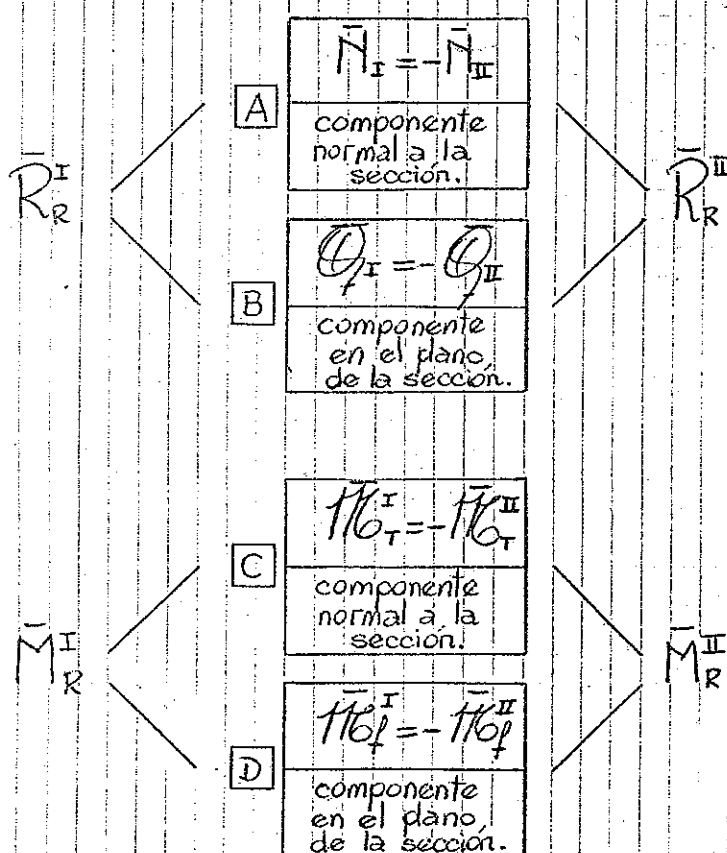
juntamente con los elementos de la reducción ⑮ de la otra parte deberá encontrarse en equilibrio, ya que el todo inicialmente se hallaba en equilibrio.

La continuidad es en definitiva un empotramiento relativo (vínculo interno de 6^{ta} especie).

Podrán definirse las componentes de la reacción de vínculo interno en una sección:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{R(x)}^I = -\bar{R}_{R(x)}^{II} \\ \bar{R}_{R(y)}^I = -\bar{R}_{R(y)}^{II} \\ \bar{R}_{R(z)}^I = -\bar{R}_{R(z)}^{II} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_{R(x)}^I = -\bar{M}_{R(x)}^{II} \\ \bar{M}_{R(y)}^I = -\bar{M}_{R(y)}^{II} \\ \bar{M}_{R(z)}^I = -\bar{M}_{R(z)}^{II} \end{array} \right\}$$

Podrían buscarse componentes tales como:



$\bar{N}_{I,II}$ y $\bar{H}_T^{I,II}$ serán vectores de dirección coincidente con

la tangente al eje de la barra (coincidirán con el eje de la pieza para elementos de eje recto). (19)

Estas componentes son UNICAS, y no dependen de la terna de referencia adoptada.

Al conjunto de fuerzas A se lo denomina esfuerzo normal.

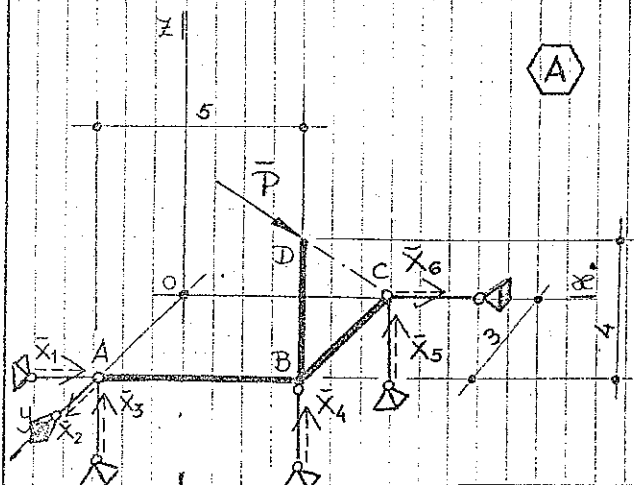
Al conjunto de fuerzas B se lo denomina esfuerzo de corte.

Al conjunto de vectores momento C se lo denomina momento torsor.

Al conjunto de vectores momento D se lo denomina momento flexor.

Estos esfuerzos son los denominados ESFUERZOS CARACTERISTICOS en una sección. Ver anexo pag. 47.-

8) Verificar la isostaticidad de los siguientes esquemas; calcular las reacciones de vínculo:



(A)

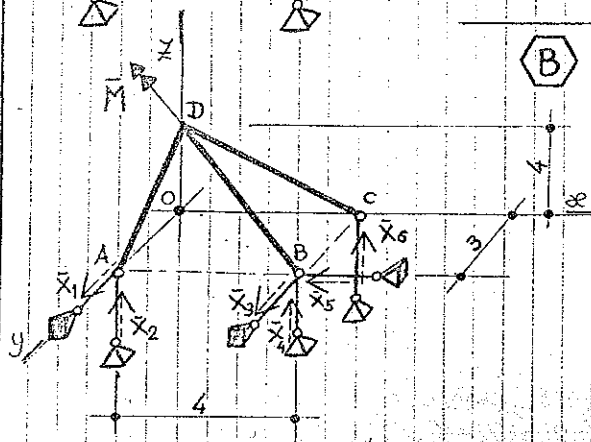
{ Longitudes en [m].
 $|\vec{P}| = 5 \cdot 10^3 \text{ daN}$

Respuesta:

$$X_1 = -5 \cdot 10^3 \text{ daN}, X_2 = 3 \cdot 10^3 \text{ daN}$$

$$X_3 = 0; X_4 = 0$$

$$X_5 = 4 \cdot 10^3 \text{ daN}, X_6 = 5 \cdot 10^3 \text{ daN}$$



(B)

{ longitudes en [m].
 $|\vec{M}| = 7 \cdot 10^3 \text{ daN/m}$ - dirección DB

Respuesta:

$$X_1 = 1,09 \cdot 10^3 \text{ daN}, X_2 = 0,82 \cdot 10^3 \text{ daN}$$

$$X_3 = -1,09 \cdot 10^3 \text{ daN}, X_4 = 0,64 \cdot 10^3 \text{ daN}$$

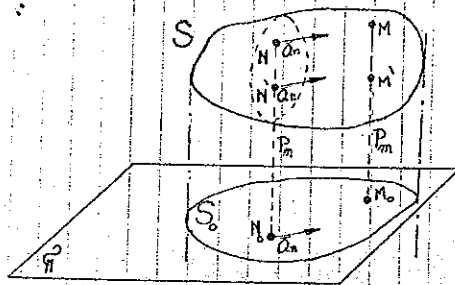
$$X_5 = 0; X_6 = -1,46 \cdot 10^3 \text{ daN}$$

Sistemas vinculados planos:

(20)

La mayor parte de los elementos estructurales utilizados en construcciones son de una configuración tal que admiten un plano de simetría. Su sustentación también simétrica, y las fuerzas exteriores que los solicitan, se encuentran, en general, dispuestas simétricamente respecto de dicho plano. En consecuencia, cada sistema de dos fuerzas ubicadas simétricamente respecto del plano de simetría, admitirá una resultante que actúa en el mismo, por lo que la totalidad de las fuerzas actuantes puede reemplazarse por un sistema equivalente que actúa en el plano de simetría del cuerpo. De ahí que, a los efectos prácticos, se pueda reemplazar el cuerpo rígido por un conjunto de puntos materiales planos, coincidente con el plano de simetría y cargado con el sistema de fuerzas mencionado. Este sistema plano de puntos materiales recibe el nombre de chapa y, en lo sucesivo, se tratará el estudio del equilibrio de chapas o sistemas de chapas, vinculadas entre sí y cargadas en su plano.

también se vé el concepto de chapa de la siguiente manera. Sea un sistema S como el de la siguiente figura:



Dicho sistema S se encuentra vinculado en for. (21) ma tal que sus puntos $N, N', M, M', \dots$, sólo pueden experimentar desplazamientos paralelos a un plano π y, además, que dichos desplazamientos sean iguales para todos los puntos, como $N, N', M, M', \dots$, situados sobre perpendiculares $p, p', \dots$, a dicho plano.

Proyéctese el sistema sobre el plano en cuestión y se obtendrá una cierta figura S_0 , conjunto de las proyecciones $N_0, M_0, \dots$, de sus puntos.

Es evidente que el desplazamiento del sistema S quedará perfectamente determinado, cuando se conozca el desplazamiento que experimente su proyección S_0 sobre el plano π .

Si un punto cualquiera N_0 de esta última se des-
plaza según un vector $\vec{a}_m$, todos los puntos del sistema S situados sobre la perpendicular p_m , experimentarán, en efecto, el mismo desplazamiento.

El sistema plano S_0 , constituido por un conjunto de puntos situados en un plano π , sujetos al vínculo de experimentar sólo desplazamientos dirigidos según el mismo plano, es lo que se designa con el nombre de chapa. [Véase "Resolución estática de sistemas planos" - Ing. E. Butty - pag. N° 11.]

El número de grados de libertad (G.L.) de una chapa surge como caso particular del sistema espacial. Ya que el elemento no podrá salir de su plano, no podrán llevarse a cabo los siguientes desplazamientos simples: (a) traslación según la dirección del eje normal al plano, (b) rotaciones según los ejes que definen el plano. Por consiguiente, de los 6 G.L. que posee el cuerpo en el espacio, quedarán 3 G.L. pa

ra el elemento plano chapa.

Para que una chapa quede fijada a tierra, será necesario imponerle tantas condiciones de vínculo (C.V.) como grados de libertad (G.L.) posea, ó sea que deberán imponerse 3 (tres) C.V.:

En el siguiente cuadro se indican distintos tipos de apoyos para sistemas estáticos planos, su representación, el número de C.V. que introducen, y la puesta en evidencia de las reacciones de vínculo:

Especie	Apoyo ó conexión	Representación	C.V.	Puesta en evidencia de reacción
1 ^{ra} especie	biela 		1	
1 ^{ra} especie	 apoyo móvil.		1	
2 ^{da} especie	 apoyo fijo.		2	
3 ^{ra} especie	 Empotramiento.		3	

En el caso del apoyo simple ó de primera especie, denominado comunmente APOYO MÓVIL, el punto de articulación A, podrá experimentar corrimientos de dirección (n-n) (fig. 19), y dentro de la condición de pequeños desplazamientos,

puede expresarse que el corrimiento del punto A es consecuencia de una rotación según un eje nor-

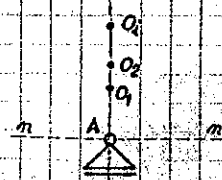
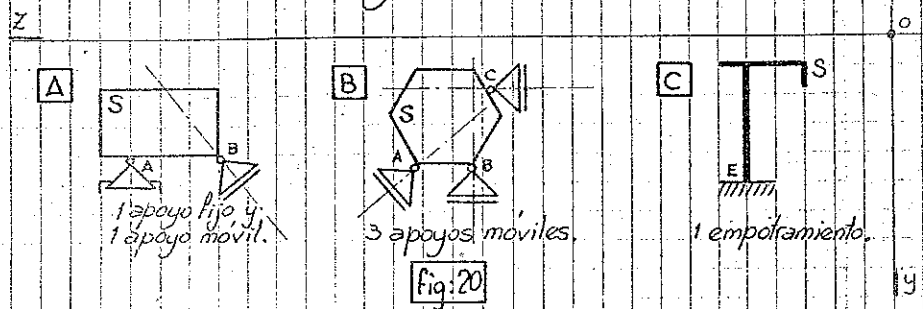


fig. 19

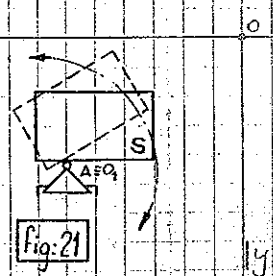
mal al plano y pasante por O_1 u $O_2, \dots$ u O_i , polos ⁽²³⁾ ó centros de rotación ubicados en la recta normal a la dirección del apoyo (m-n).

Sustentación de una chapa:

Dado que la chapa en el plano posee 3 G.L., para que la misma quede inmovilizada será necesario imponerle 3 C.V., siendo la condición suficiente que el sistema sea cinemáticamente invariable, lo que surgirá realizando el estudio cinemático correspondiente. Las alternativas de vinculación de una chapa en el plano se indican en la [fig:20]:



En el caso (A) de la [fig:20], si solo existiera el apoyo fijo en A, la chapa admitiría rotaciones entorno de dicho punto (fig:21). Si ahora, solo se considerara la existencia del apoyo móvil en B (fig:22), dicho punto (B) podrá experimentar corrimientos según (m-n), consecuencia de rotaciones alrededor de polos ubicados sobre la recta normal a la dirección del apoyo (m-n), ó sea $O_2, O_3, \dots O_i$.

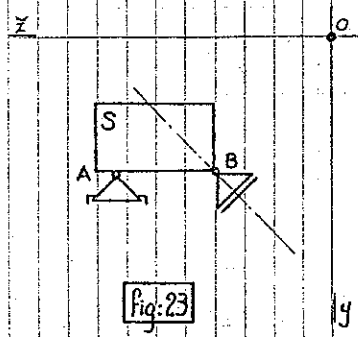
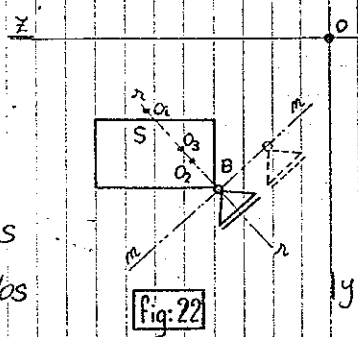


La coexistencia de los apoyos en A (fijo) y en B (móvil), conduce a expresar que el punto B será fijo (al igual que el punto A) siempre y cuando la normal a la dirección del apoyo móvil en

$B(n, n)$ no pase por el punto A, ya que de esta manera no podrá existir simultáneamente un único polo de rotación (fig:23).

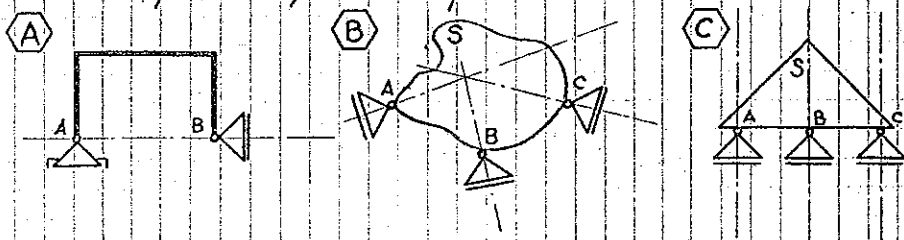
Por lo tanto si dos de los puntos de la chapa son fijos (A y B), todos los demás también lo serán, ya que se encuentran relacionados por el vínculo de la rigidez.

Luego, la chapa S se encuentra fija (Estudio cinemático).



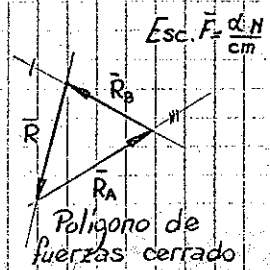
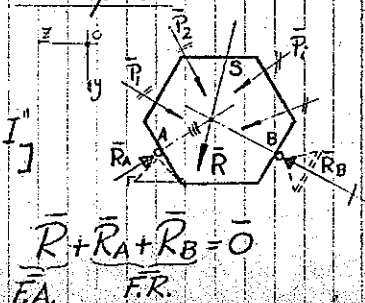
9) Realice el estudio cinemático de los casos (B) y (C) de la (fig:20):

10) Los ejemplos siguientes presentan vinculación aparente. Indique los posibles polos de rotación.



Determinación de las reacciones de vínculo en una chapa.

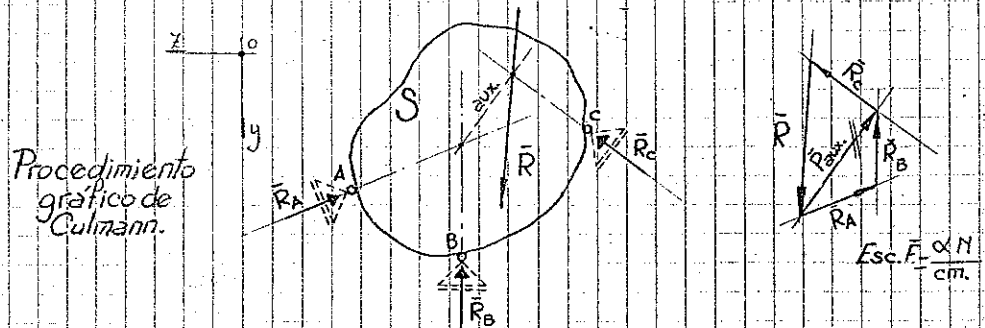
• Gráficamente:
[Véase "Estabilidad I"
E. Fließ - pag. 277.]
 $\sum \vec{F}_i = \vec{R} = \vec{F} \cdot \vec{A}.$



$$\vec{R} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$$

Polígono de fuerzas cerrado

Si la sustentación es por medio de 3 apoyos móviles, (25) podrá aplicarse el método de resolución gráfica de Culmann (Véase "Estabilidad I" E. Fliess - pag. 80). Téngase presente que lo que se busca son equilibrantes de las F.A.



También podría aplicarse el método graficonumérico de Ritter [ver "Estabilidad I" de E. Fliess - pag. 82].

- Analíticamente: se deberán plantear las condiciones de equilibrio para los sistemas de fuerzas generalizadas coplanares:

$$\vec{F}.A. + \vec{F}.R. = \vec{0}$$

expresión vectorial que da lugar a 3 ecuaciones escalares, que para el caso de la Fig. 24 resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } H_A + R_B \cdot \cos \varphi_B + \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \varphi_i = 0 \\ \text{b) } V_A + R_B \cdot \sin \varphi_B + \sum_{i=1}^n P_i \cdot \sin \varphi_i = 0 \\ \text{c) } R_B [(z_A - z_B) \cdot \sin \varphi_B - (y_A - y_B) \cdot \cos \varphi_B] + \sum_{i=1}^n P_i [(z_A - z_i) \cdot \sin \varphi_i - (y_A - y_i) \cdot \cos \varphi_i] + \sum_{j=1}^m M_j = 0 \end{array} \right.$$

$$R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = ? \\ V_A = ? \\ R_B = ? \end{array} \right.$$

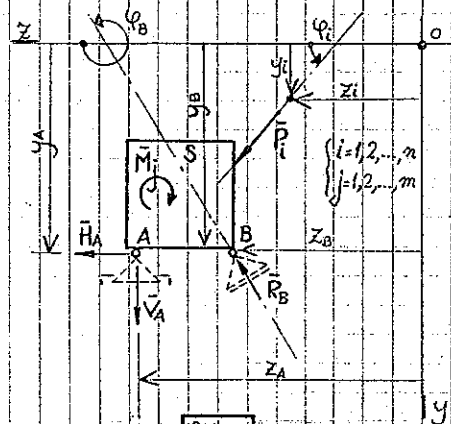


Fig. 24

expresiones que surgen de plantear 2 ecuaciones de proyección [(a) y (b)] respecto de los ejes "x" e "y" (por comodidad), y una ecuación de momentos (c) respecto de

un punto cualquiera del plano (se toma el punto A por simplicidad, ya que aparece R_B como única incógnita). (26)

Los sentidos de las fuerzas incógnitas ($\bar{F}, \bar{R}$) se supondrán por comodidad de antemano positivos, siendo contrarios cuando resulten valores negativos de las incógnitas en la resolución del sistema de ecuaciones.

En las ecuaciones (a), (b) y (c), podrán cambiarse las expresiones de proyección por otras de momentos, y tener por consiguiente:

I.- Una ecuación de proyección y 2 de momentos.

II.- Tres ecuaciones de momentos.

11) Indique las restricciones de las variantes (I) y (II) anteriores para que resulten ecuaciones independientes.

También podrán determinarse las componentes de reacción de vínculo interno en una sección ($m-n$), análogamente a lo indicado para los sistemas espaciales.

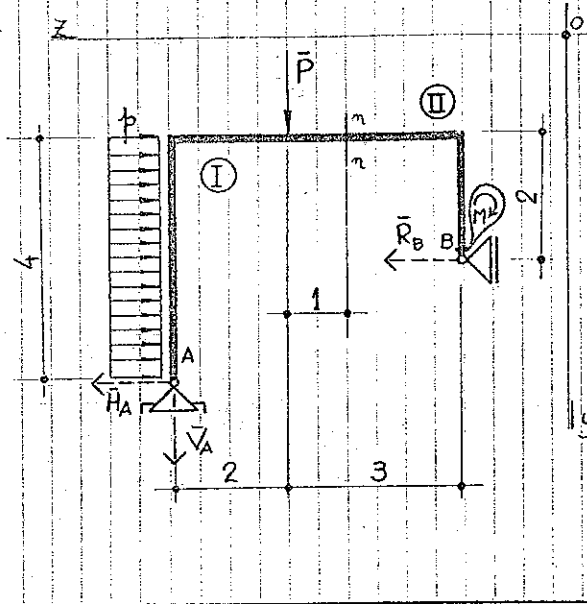
Para los sistemas planos se tendrá:

$$\begin{cases} \bar{P}_{R(y-y)}^I = -\bar{R}_{R(y-y)}^{II} & \longrightarrow \text{Esfuerzo de corte } Q_y. \\ \bar{P}_{R(z-z)}^I = -\bar{R}_{R(z-z)}^{II} & \longrightarrow \text{Esfuerzo normal } N_z. \\ \bar{M}_R^I(x-x) = -\bar{M}_{R(x-x)}^{II} & \longrightarrow \text{Momento flexor } M_x. \end{cases}$$

La cuarta característica M_t es nula para los sistemas planos.

12) Para el esquema de la figura determinar las componentes de reacción de vínculo externo e interno pa

ra la sección (n-n):



Longitudes en [m]

$$\bar{P} = 10 \text{ N}$$

$$p = 1 \text{ N/m}$$

$$\bar{M} = 10 \text{ Nm}$$

Respuesta:

$$H_A = 15 \text{ N}, V_A = -10 \text{ N}$$

$$R_B = 19 \text{ N}, N_I = 19 \text{ N}$$

$$M_{I_x} = -48 \text{ Nm}, Q_x^I = 0$$

$$M_{II_x} = 48 \text{ Nm}, Q_x^{II} = 0$$

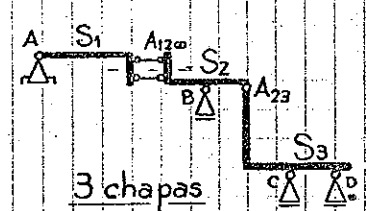
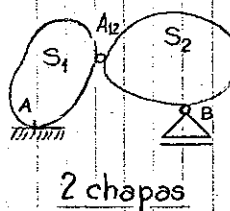
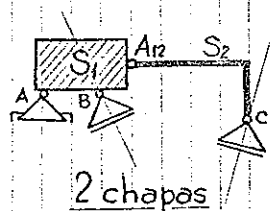
Cadenas cinemáticas de chapas:

Se las clasificará

- Abiertas.
- Cerradas.
- Mixtas.

Se dice que una cadena es abierta cuando a partir de una sección genérica (n-n) NO EXTREMA, para que se pueda recorrer todo el sistema y volver al baricentro de la sección considerada, se tiene que pasar más de una vez por las distintas secciones.

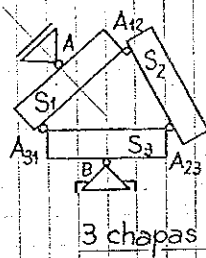
Ejemplos de cadenas cinemáticas abiertas de chapas:



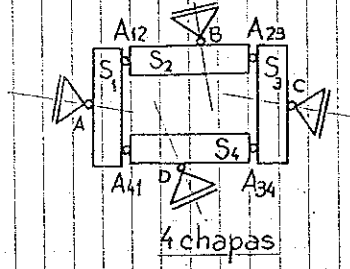
Si en cambio, a partir de una sección genérica (n-n), es posible recorrer todo el esquema estructural y retornar al baricentro de la sección de partida

pasando solamente una vez por cada sección, el sistema será cerrado. (28)

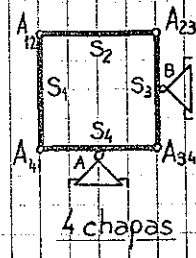
Ejemplos de cadenas cinemáticas cerradas de chapas:



3 chapas

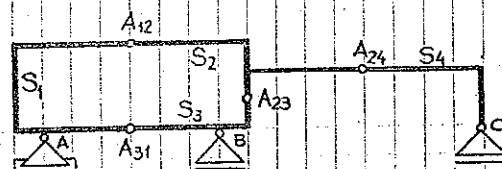


4 chapas



4 chapas

Cuando se tengan sistemas en los cuales una parte sea abierta y otra parte sea cerrada, se dirá que se trata de cadenas mixtas:



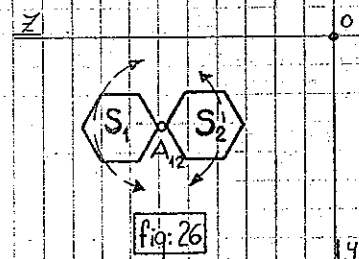
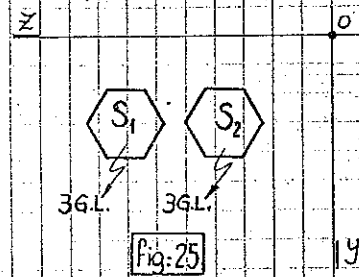
cadena cinemática mixta.

Cadenas cinemáticas abiertas de 2 chapas.

Sean dos chapas S_1 y S_2 (Fig:25), cada una posee en el plano 3 G.L., ó sea que para el conjunto se tendrán 6 G.L.

Si ahora se coloca una articulación intermedia A_{12} entre S_1 y S_2 , la movilidad entre las chapas se ve restringida, y ya no podrá haber movimientos de traslación de una chapa respecto a la otra (Fig:26).

Desde el punto de vista del movimiento relativo, a esas chapas articuladas entre sí les quedará 1 G.L., y la articulación relativa será un vínculo de 2^{da} especie interno, pues impone 2 condiciones geométricas que limitan el movimiento.



tan la movilidad entre chapas (anula cualquier movimiento de traslación entre ambas).

(29)

Luego, el número de grados de libertad de la cadena de 2 chapas (G.L.) será:

$$G.L. = 3 \times 2 - 2 \times 1 = 6 - 2 = 4$$

cantidad de articulaciones relativas.

número de condiciones geométricas impuestas por las articulaciones relativas.

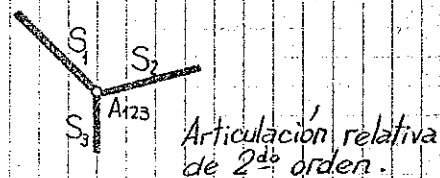
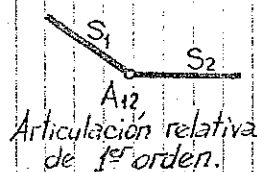
número de chapas.

grados de libertad por chapa libre.

Generalizando para un número (n) de chapas:

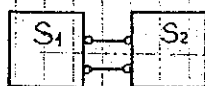
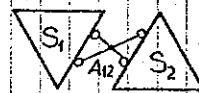
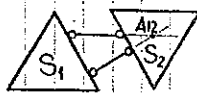
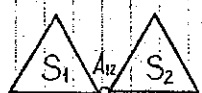
$$G.L. = 3 \cdot n - 2 \cdot (n-1) = n+2$$

Cuando las articulaciones relativas vinculen 2 chapas se dirá que son de 1^{er} orden, si vinculan (n) chapas: ($n-1$) orden:



[Véase sobre articulaciones relativas: "Resolución estática de sistemas planos" - Ing. E. Butty.].

La articulación relativa entre 2 chapas de una cadena cinemática puede también concebirse mediante 2 barras tal como se muestra en la siguiente figura (fig. 27):



Art. 12∞: articulación relativa impropia. El desplazamiento relativo de las chapas es una traslación.

Fig. 27

Considérese nuevamente las chapas S_1 y S_2 de la (fig:26) (30) articuladas entre sí. Si se le imponen 3 C.V. a la chapa S_1 (un vínculo de 2^{da} especie en A y otro de 1^{ra} especie en B, donde la normal a la dirección del apoyo en B no pasa por A), esta resultará fija a tierra. (fig:28).

Luego, la chapa S_2 podrá rotar entorno de un eje normal al plano del dibujo pasante por A_{12} .

La articulación relativa A_{12} resultará ser un punto fijo (pertenece tanto a la chapa S_1 como a la S_2), resultando

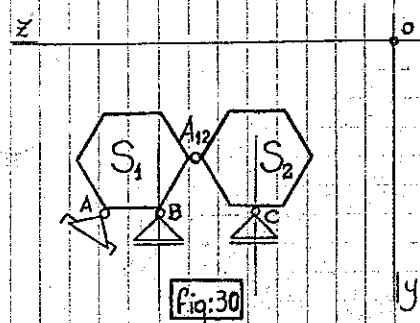
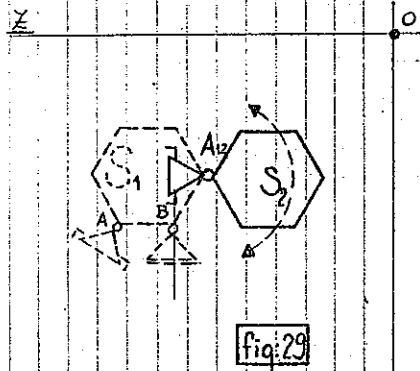
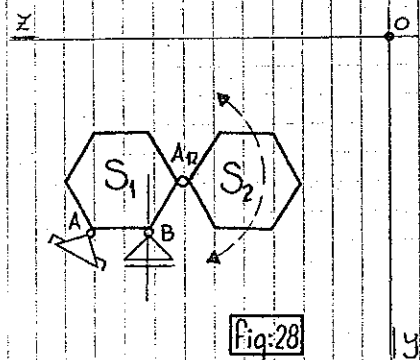
para la chapa S_2 como si en A_{12} estuviera aplicado un apoyo fijo (ficticio). (fig:29). Luego, si se coloca

un apoyo móvil a la chapa S_2 en C, donde la normal a la dirección del apoyo no pase por A_{12} , la chapa S_2 también se encontrará fija (fig:30), y por consiguiente el sistema será cinemáticamente invariable.

En resumen, se han introducido al sistema tantas C.V. como G.L. poseía.

Obsérvese que la condición de $C.V. = G.L.$ es necesaria pero no suficiente, y que además, previo a realizar el estudio cinemático debe verificarse

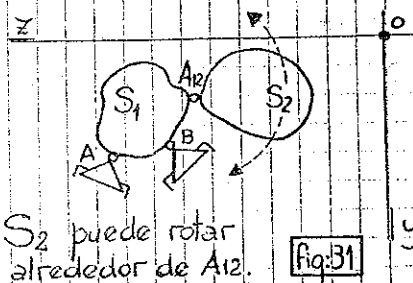
que ninguna de las chapas posea más de 3 C.V., ya



que podría darse la situación de la (fig:31):

(31)

$$\left\{ \begin{array}{l} G.L = n+2 = 4 \\ C.V. = 4 \end{array} \right\}$$



S_2 puede rotar alrededor de A_{12} .

Fig:31

Luego, la secuencia de trabajo será:

verificar que $CV = GL$

no más de 3 cv. por chapa.

realizar el estudio cinemático

Se tendrá entonces que las posibilidades de distribución de las condiciones de vínculo serán:

Chapa S_1	Chapa S_2
3 C.V.	1 C.V.
2 C.V.	2 C.V.

Para el caso de 2 C.V. en la chapa S_1 y 2 C.V. en la chapa S_2 (Fig:32), ya no se tendrá la situación de que una chapa resulte fija independientemente de la otra como en el caso anterior, sino que cada una de las chapas necesitará de la otra para estar fija.

Así pues, si se suprime a la chapa S_2 , el punto A_{12} podrá desplazarse según la dirección (m-n) (Fig:33); mientras que si se suprime a

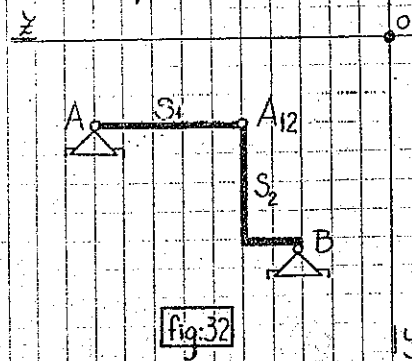
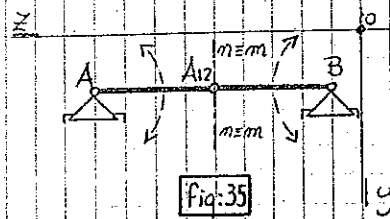
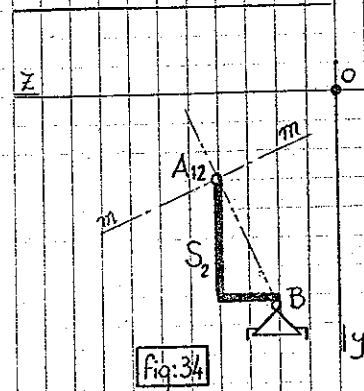
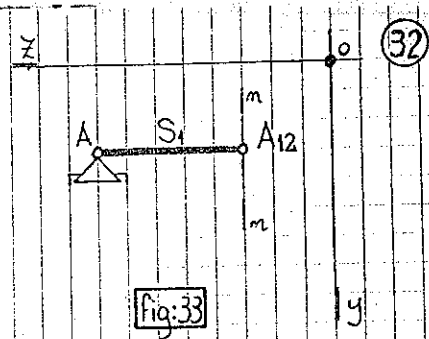


Fig:32

la S_1 , podrá hacerlo según la dirección $(m-m)$ (fig:34). Luego, superponiendo las situaciones de las (fig:33) y (fig:34), el punto A_{12} se encontrará fijo siempre que $(n-m)$ no coincida con $(m-m)$.

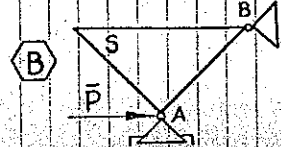
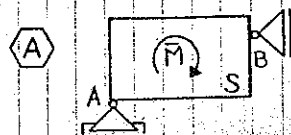
Por lo tanto, como cada chapa tendrá 2 puntos fijos (para S_1 : A y A_{12} ; y para S_2 : B y A_{12}) ya que A_{12} pertenece tanto a S_1 como a S_2 , todos los demás también lo estarán.

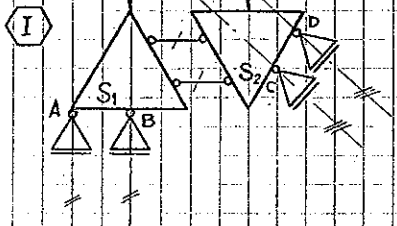
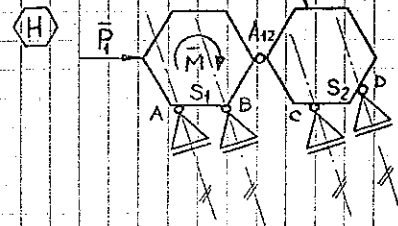
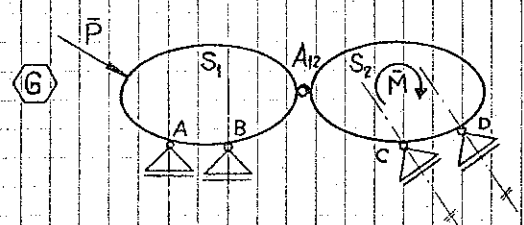
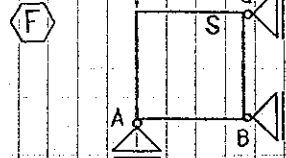
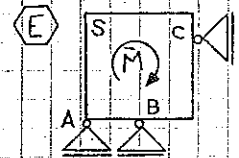
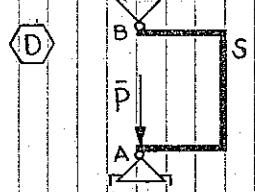
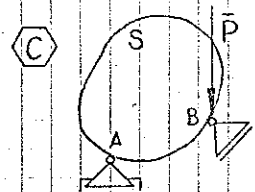
La condición de que $(n-m)$ no coincida con $(m-m)$ puede también expresarse diciendo que las 3 articulaciones (A, B y A_{12}) no estén alineadas. (fig:35).



Esta cadena cinemática de 2 chapas, con 2 C.V. cada una, se denomina frecuentemente arco triarticulado o arco a 3 articulaciones.

13) Verificar si los siguientes sistemas se encuentran isostáticamente sustentados. -Plantear el cálculo de las reacciones de vínculo para los casos [A] a [F].-





Cadena cinemática abierta de 3 chapas:

de la (fig: 36). El número de grados de libertad de la cadena será: $GL = n + 2$; $m = 3$

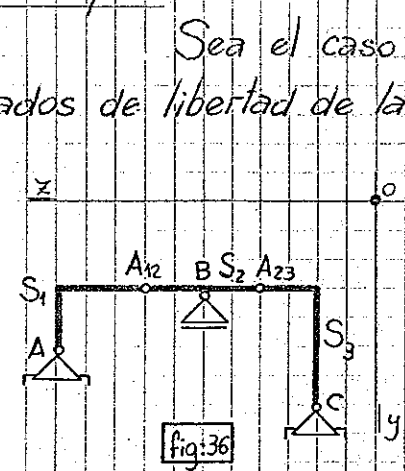
$$GL = 3 + 2 = 5$$

La primer condición a cumplir será $CV = GL$, la cual se satisface:

- 2 C.V. en A
- 1 C.V. en B
- 2 C.V. en C

Total 5 C.V. -

También se verifica que no existan más de 3 C.V. en cada



chapa.

La distribución de los vínculos en el sistema es tal que ninguna chapa se encuentra inmovilizada por sí sola, es decir que, considerando el conjunto, una parte del mismo dependerá del resto para su inmovilización. Se comienza por analizar la sustentación de la chapa S_2 , por ejemplo.

Dicha chapa cuenta con un apoyo móvil en B , requiriendo por consiguiente de las chapas S_1 y S_3 para su total inmovilización.

Se analiza la colaboración que presta la chapa S_1 a la S_2 , la cual se materializará por medio del único punto común a ambas, es decir mediante la articulación interchapas A_{12} .

Supóngase por un momento aislada la chapa S_1 (fig: 37), dado su vinculación

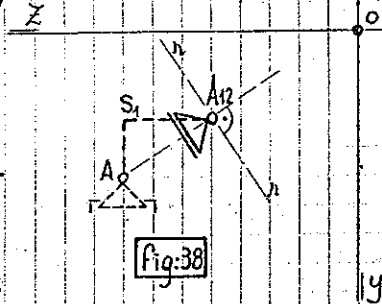
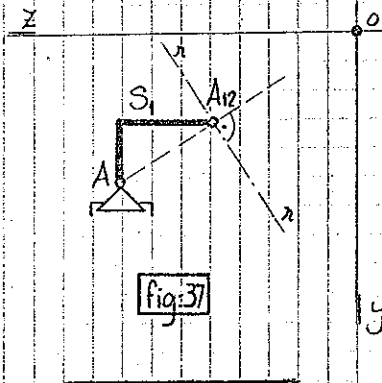
a tierra en A , el punto A_{12} podrá experimentar desplazamientos según la recta $(\lambda-\lambda)$. Es

decir que, a los efectos de mantener el punto A_{12} en las mismas condiciones cinemáticas dadas por la chapa S_1 ,

se le deberá colocar un vínculo de 1^{ra} especie ficticio de la dirección $(\lambda-\lambda)$. (fig: 38).

Por lo tanto, en el sistema de 3 chapas, para no alterar las condiciones cinemáticas de la

chapa S_2 , podrá eliminarse la chapa S_1 siempre y cuando se introduzca en A_{12} un apoyo móvil



de la dirección $(n-n)$. (Fig: 39).

Análogamente, si se elimina la S_3 , deberá colocarse en A_{23} un apoyo móvil de dirección $(s-s)$ normal a $(A_{23}-C)$. (Fig: 40).

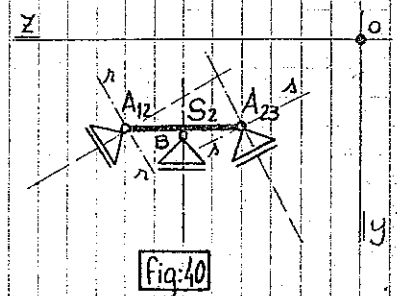
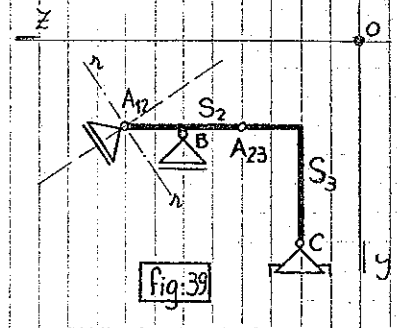
Luego, la chapa S_2 resultará sustentada por 3 apoyos móviles, para los cuales, si las normales a sus direcciones no concurren a un punto, podrá expresarse que la chapa se encuentra fija.

El razonamiento anterior podría haberse aplicado a la chapa S_1 , ó a la S_3 , llegando en cada caso a la conclusión de que también se encuentran fijas.

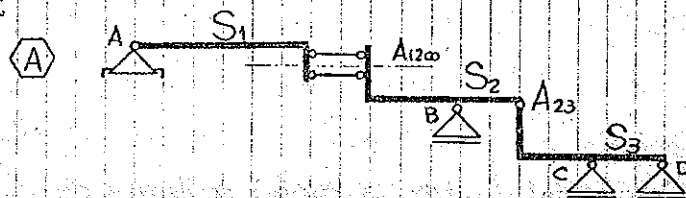
Luego, el sistema de 3 chapas (Fig: 36) se encuentra isostáticamente sustentado.

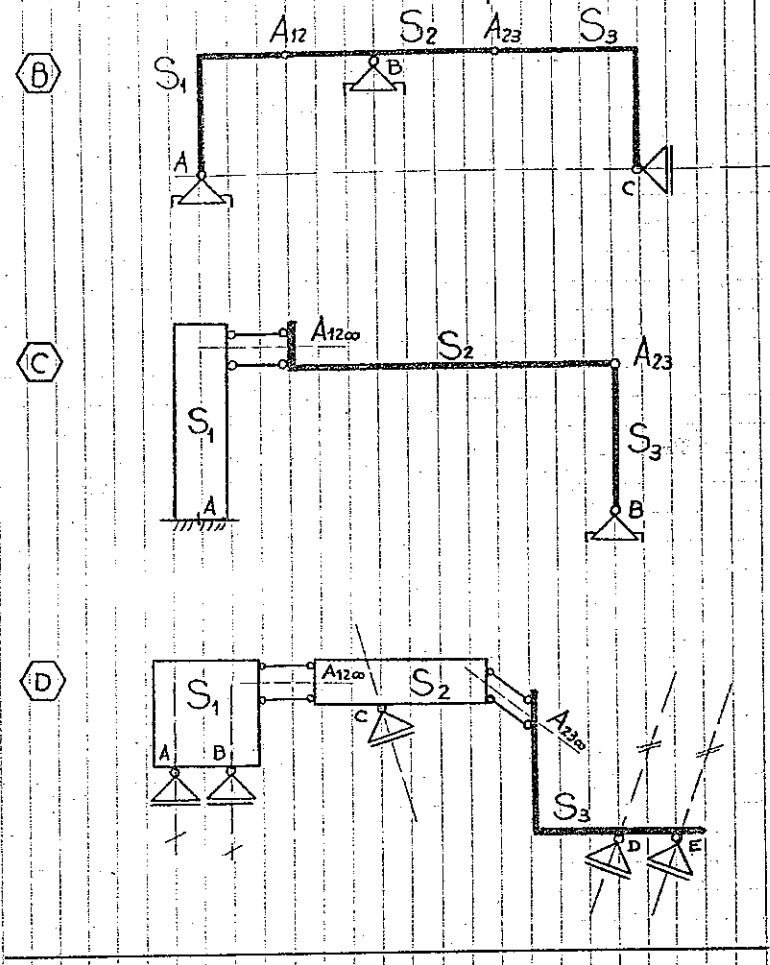
Cualquier otra distribución de los apoyos en la cadena cinemática requerirá de un razonamiento similar al efectuado, de manera de poder comprobar la inmovilización total del sistema.

Para el estudio de las cadenas cinemáticas abiertas de (n) chapas, el camino a seguir es exactamente igual a lo indicado, solo con mayor trabajo material.



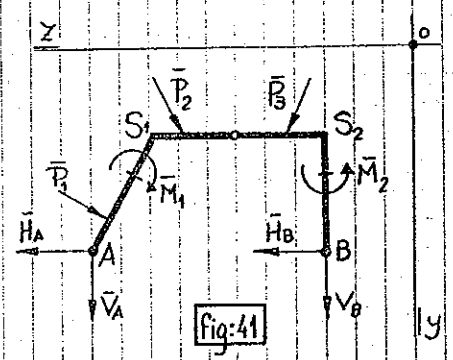
14) Verificar la isostaticidad de los siguientes sistemas:





Determinación de las componentes de reacción de vínculos externos e internos en cadenas abiertas de chapas.

Sea el caso de la cadena abierta de 2 chapas de la (fig:41). Se tiene el sistema cargado con las $\vec{F}E = \vec{F}A + \vec{F}R$ las que conforman un sistema en equilibrio: $\vec{F}E = \vec{O}$.

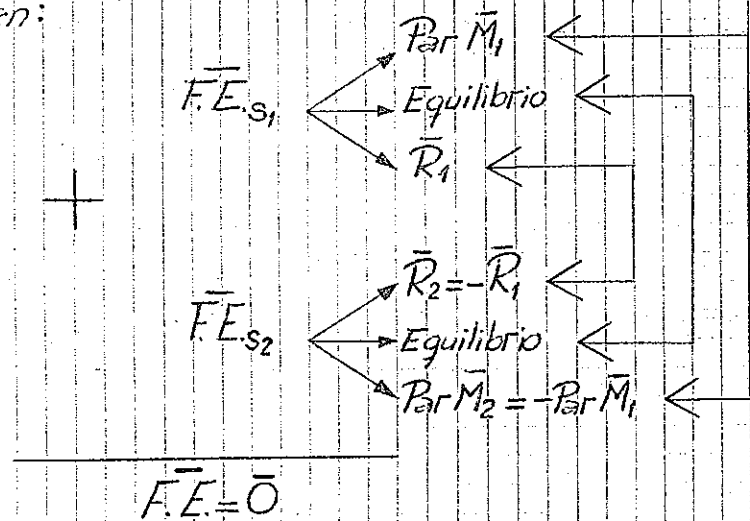


Sobre cada una de las chapas se tendrá actuando un conjunto de las $\vec{F}E$, de manera que se cumpla: $\vec{F}E_{s_1} + \vec{F}E_{s_2} = \vec{O}$
 Siempre que se tenga $\vec{F}E$ que configuran un sistema equilibrado, si se subdivide a dicho sistema de $\vec{F}E$ en 2

partes, la fuerza generalizada equivalente a las $\bar{F.E.}$ (37) que actúan en una de ellas tiene que ser opuesta a la fuerza generalizada equivalente de las $\bar{F.E.}$ de la otra parte o del resto del sistema.

Además, como se está trabajando con sistemas planos, las fuerzas coplanares no concurrentes admiten 3 posibilidades: 1) están en equilibrio, 2) admiten resultante, o 3) admiten par resultante.

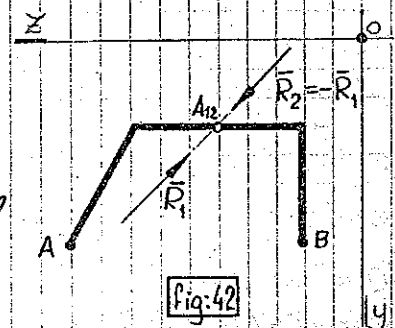
En resumen:



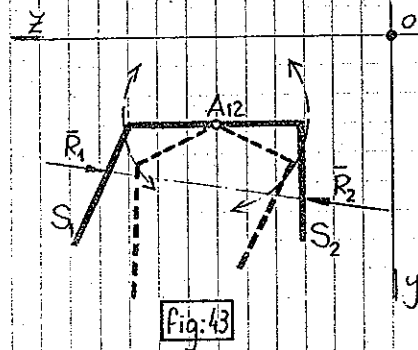
Sean las $\bar{F.E.s}_i$ del sistema de la (fig:41). Si dicho conjunto no configura un sistema nulo, la única alternativa será que exista $\bar{R}_1$, ya que nunca podrá dicho sistema ser equivalente a un par si la articulación relativa entre ambas chapas es un punto propio.

Además, la resultante $\bar{R}_1$ de las $\bar{F.E.s}_i$ tendrá su recta de acción tal que pase por la articulación relativa A_{12} (fig:42).

Téngase presente que las fuerzas $\bar{R}_1$ y $\bar{R}_2$ están aplicadas a distintos cuerpos; por consiguiente, el hecho de que $\bar{R}_1$ y $\bar{R}_2$ pasen por la articulación relativa



da lugar a que ambas configuren un sistema nulo (38) pues estarán actuando sobre un mismo punto y por lo tanto se estará de acuerdo con el 2º principio de la estática. Además, como debe satisfacerse la condición del equilibrio relativo entre ambas chapas, si $\bar{R}_1$ y $\bar{R}_2$ no pasaran por A_{12} , como actúan en cuerpos distintos, darían lugar a una rotación de una chapa respecto a la otra en torno de A_{12} . (fig:43).



Tanto las $\bar{F}E_{S1}$ como las $\bar{F}E_{S2}$ no podrían ser equivalentes a un par $\bar{M}_1$ o $\bar{M}_2$, ya que dicho par puede interpretarse como una fuerza de intensidad infinitamente pequeña y cuya recta de acción sea la recta impropia del plano, recta que no pasará por el punto propio A_{12} .

En otras palabras, si se hubiera pretendido determinar en la sección genérica (m-m), que se hace coincidir con la articulación relativa A_{12} , las componentes de reacción de vínculo interno, se hubieran encontrado solamente 2 componentes, que serían las 2 componentes de $\bar{R}_1$ y las 2 componentes iguales y contrarias de $\bar{R}_2$, o sea que se habrían tenido solamente 2 componentes fuerzas: una contenida en el plano de la sección (Q : esfuerzo de corte) y otra en la dirección del eje (N : esfuerzo normal), pero no habría par de traslación porque las fuerzas pasan por la articulación relativa ($M=0$ momento flexor).

En el caso de tratarse de una articulación relativa impropia (fig:44), podrá suceder:

• a) que las $\vec{F}E_{s1}$ y por consiguiente las $\vec{F}E_{s2}$ estén en equilibrio.

• b) que admitan resultante, en cuyo caso su recta de acción deberá pasar por la articulación relativa, es decir que dicha recta deberá cumplir con la condición de que su dirección sea la misma que la de las 2 barras paralelas.

• c) que las $\vec{F}E_{s1}$ sean equivalentes a un par $\vec{M}_1$, y por ende $\vec{F}E_{s2}$ a $\vec{M}_2 = -\vec{M}_1$.

En el caso de la articulación relativa propia, la condición de que $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ pasen por A_{12} , podrá plantearse analíticamente estableciendo que los momentos de las $\vec{F}E_{s1}$ o $\vec{F}E_{s2}$ respecto de A_{12} sea igual a cero:

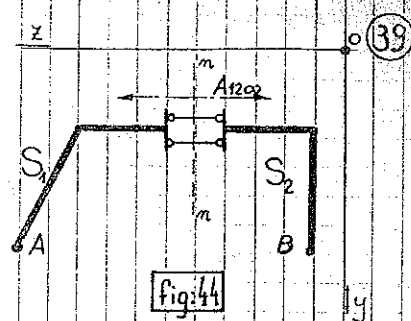
$$\boxed{A} \quad \sum_{i=1}^n M_{i(\vec{F}E_{s1})}^{A_{12}} = \sum_{j=1}^m M_{j(\vec{F}E_{s2})}^{A_{12}} = 0$$

En tanto que para la articulación relativa impropia, las alternativas (a), (b) o (c) podrán plantearse analíticamente estableciendo que la suma de las proyecciones de $\vec{F}E_{s1}$ o $\vec{F}E_{s2}$ sobre un eje normal a la dirección común de las 2 barras (n-m) sea igual a cero:

$$\boxed{B} \quad \sum_{i=1}^n P_{i(\vec{F}E_{s1})}^{(n-m)} = \sum_{j=1}^m P_{j(\vec{F}E_{s2})}^{(n-m)} = 0$$

Las expresiones (A) y (B) se conocen como ecuaciones de equilibrio relativo o de condición.

El número de componentes de reacción de vínculo externo (incógnitas) a determinar en una cadena cinemática abierta de chapas, isostáticamente



te sustentada, será igual al número de G.L., es decir $(m+2)$. (m: número de chapas). (40)

El número de ecuaciones independientes que se podrán plantear será:

1^{ra}) 3 ecuaciones de equilibrio absoluto (inmovilidad respecto a la tierra).

2^{da}) 1 ecuación de equilibrio relativo ó de condición por cada articulación relativa. Es decir, $(m-1)$ ecuaciones.

Luego, el número total de ecuaciones independientes será: $3 + (m-1) = m+2$.

Es decir que se podrán plantear tantas ecuaciones independientes como número de incógnitas se tengan.

Cadenas cinemáticas cerradas de chapas.

El número de grados de libertad de la cadena cinemática cerrada de chapas será:

$$G.L. = 3.m - 2.m = m$$

téngase presente que en una cadena cerrada, se tiene el mismo número de articulaciones relativas que de chapas del sistema (m).

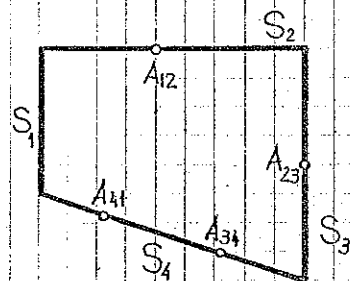
El mínimo número de chapas para una cadena cerrada será 3, y en dicho caso se tendrá $G.L.=3$, ó sea que el sistema se comportará como una única chapa.

15) Analizar el caso $m=2$. -

Solo se trabajará con las cadenas cinemáticas cerradas de 4 chapas, por cuanto el estudio de las de

mayor número de ellas resulta más complejo. (41)
 Las distintas posibilidades de vinculación del sistema se indican en el siguiente cuadro:

S_1	S_2	S_3	S_4
3	1	0	0
3	0	1	0
2	2	0	0
2	0	2	0
2	1	0	1
2	1	1	0
1	1	1	1



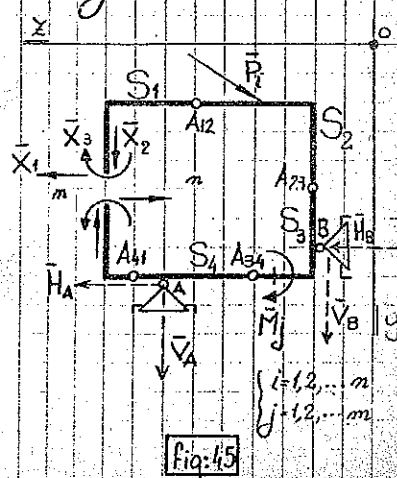
Para el estudio cinemático de cada caso, véase "Estabilidad I" - E. Fliess, pag. 311 y siguientes.

Para la determinación de las componentes de reacción de vínculos externos, se procederá efectuando la apertura de la cadena cinemática cerrada.

Al abrir la cadena cinemática se podrán presentar 2 posibilidades:

- (1) destruir la continuidad en una sección (n-m).
- (2) destruir la continuidad de una articulación relativa.

Para el caso de la alternativa (1) (fig: 45), al destruir la continuidad, se deben poner en evidencia las componentes de reacción de vínculo interno en esa sección (n-m), se tendrá así una componente normal $\bar{X}_1$, una componente de la dirección del eje $\bar{X}_2$, y la componente par $\bar{X}_3$, las cuales son incógnitas (en la



otra cara de la sección (m-m) actuarán los correspondientes (42)
dientes elementos iguales y opuestos).

Luego, el número de incógnitas será:

$$N^{\circ} \text{ de incógnitas} = C.V. + 3 = \underline{m+3}$$

(X_1, X_2, X_3)

Una incógnita por cada
condición de vínculo.

El número de ecuaciones independientes que podrán
plantearse será:

$$N^{\circ} \text{ de ecuaciones independientes} = \underline{3+m}$$

equilibrio absoluto

equilibrio relativo

ó sea que se dispone del mismo número de ecuaciones
independientes que de incógnitas.

En cuanto a la alternativa (2) - (Fig. 46), al destruir la
continuidad en una articula-

ción relativa cualquiera, se
está destruyendo un vínculo
interno de 2^{da} especie, enton-

ces las componentes de
reacción de vínculo interno
serán solamente 2, ya que el
par no podrá existir en una

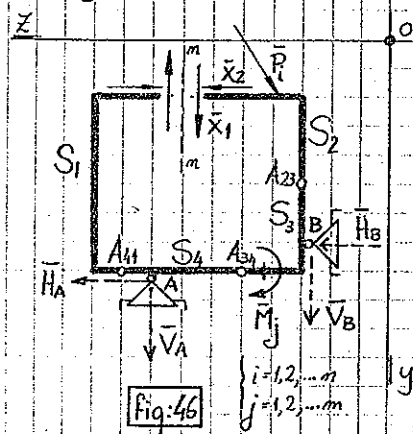
articulación. En consecuencia, aparecen ó se ponen
en evidencia las componentes $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$.

El número de incógnitas que se tendrá ahora será:

$$N^{\circ} \text{ de incógnitas} = \underline{m+2}$$

componentes de reacción
de vínculo externo, igual al
número de chapas

componentes de reacción de
vínculo interno en una articulación
relativa cualquiera (X_1 y X_2)



Mientras que el número de ecuaciones independiente ⁽⁴³⁾ será:

$$N^{\circ} \text{ de ecuaciones independientes} = 3 + (n-1) = \underline{n+2}$$

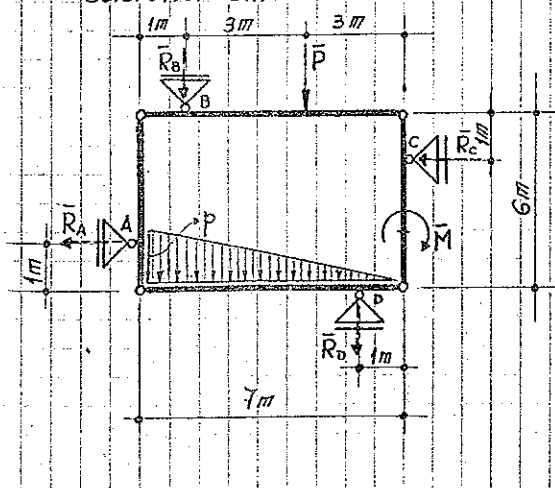
equilibrio
absoluto.

equilibrio relativo
(n-1) articulaciones relativas.

Luego, se tendrá un número de ecuaciones independientes igual al número de incógnitas.

La diferencia entre la cadena abierta y la cerrada es que en la cadena abierta cualquier sección siempre define 2 partes, en cambio en la cadena cerrada esto no ocurre, y para poder definir las 2 partes será necesario siempre abrir la cadena.

16 Hallar las reacciones de vínculo de la siguiente cadena cinemática cerrada de 4 chapas:



$$\begin{cases} \bar{P} = 6 \times 10^3 \text{ daN} \\ p = 2 \times 10^3 \text{ daN/m} \\ M = +10^4 \text{ daN.m} \end{cases}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned} R_A &= -2,48 \times 10^3 \text{ daN} \\ R_B &= -7,60 \times 10^3 \text{ daN} \\ R_C &= 2,48 \times 10^3 \text{ daN} \\ R_D &= -5,47 \times 10^3 \text{ daN} \end{aligned}$$

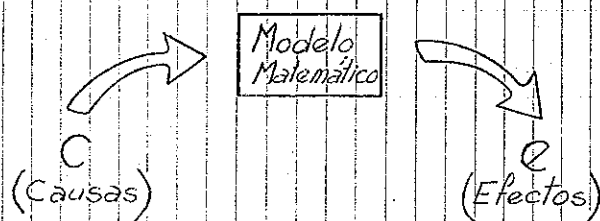
17 Deduzca la expresión correspondiente al cálculo de los grados de libertad de una cadena cinemática abierta de "n" cuerpos (donde esos "n" cuerpos están articulados entre sí con rótulas relativas).

18 Idem [17] pero de una cadena cinemática cerrada de "n" cuerpos. ¿Cuál será mínimo número de cuerpos posible ("n")?

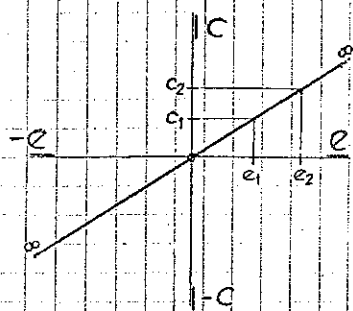
Matriz de transformación:

(44)

En los problemas de estabilidad se trabaja con causas, y a través de un modelo matemático (esquema estático de la estructura) se determinan los efectos, de acuerdo con la teoría correspondiente.



Si la relación que liga causas y efectos es lineal, significará que hay proporcionalidad entre causa y efecto, y que puede aplicarse el principio de superposición.



Relación Lineal entre C y $e \Rightarrow$

a) Proporcionalidad:

$$c_1 \rightarrow e_1$$

$$10c_1 \rightarrow 10e_1$$

b) Superposición:

$$c_1 \rightarrow e_1$$

$$c_2 \rightarrow e_2$$

$$C = c_1 + c_2 \rightarrow e = e_1 + e_2$$

La herramienta fundamental cuando la relación entre causa y efecto es lineal es el álgebra lineal o álgebra matricial. Luego:

$$\{e\} = [T] \cdot \{c\}$$

$\{e\}$: vector efectos ; $[T]$: Matriz de transformación.

$\{c\}$: vector causas.

Se considerará como causas a las cargas activas (45) (magnitudes estáticas), y como efectos a las componentes de reacción de vínculos externos (magnitudes estáticas); luego, la matriz de transformación se la denomina matriz estática [Est.].

La matriz de transformación no tiene porqué ser una matriz cuadrada:

para el caso de 8 causas y 5 efectos:

$$\begin{matrix} \{e\} = [T] \cdot \{c\} \\ (5 \times 1) \quad (5 \times 8) \quad (8 \times 1) \end{matrix}$$

A los efectos de determinar los coeficientes de la matriz de transformación, se adoptarán vectores causa tales que permitirán ir obteniendo dicha matriz por columnas. Sea por ejemplo el caso de 3 causas y 3 efectos:

$$\begin{aligned} \{e\} &= \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix}; \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{[T]} \cdot \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

• Si se considera: $c_1 = 1$ y $c_2 = c_3 = 0$

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{1er columna de la matriz [T].}$$

• Si se considera $C_1=C_3=0$ y $C_2=1$

(46)

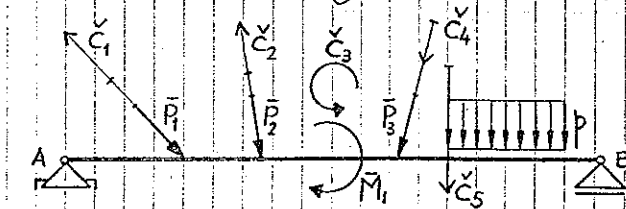
$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{2da columna de la matriz [T].}$$

• Finalmente, si $C_1=C_2=0$ y $C_3=1$

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{3er columna de la matriz [T].}$$

Se busca ahora una independencia con las ternas de referencia ortogonales ó cartesianas que se han utilizado hasta este momento, trabajándose entonces con las denominadas COORDENADAS GENERALIZADAS (debidas a Lagrange).

Estas coordenadas consisten en suponer para cada magnitud vectorial con las que se está trabajando un versor dirección (coordenada generalizada) de sentido arbitrario; de esta manera se trabajará solamente con magnitudes escalares (módulos de fuerzas, módulos de pares, ordenadas de cargas específicas). (fig. 47)



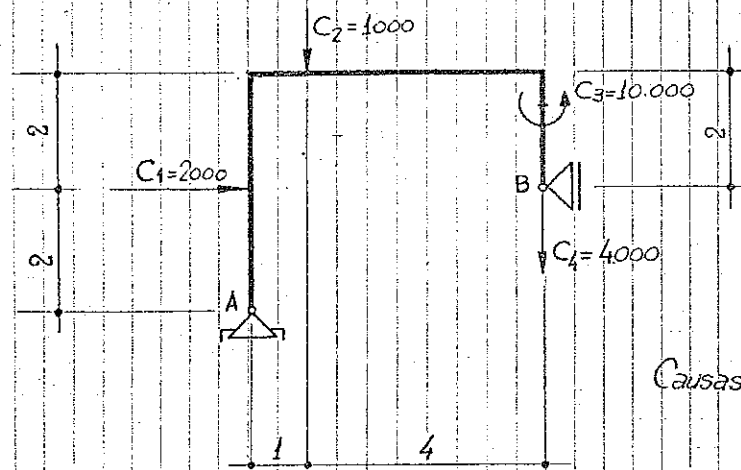
$\langle \check{C}_1, \check{C}_2, \check{C}_3, \dots, \check{C}_5 \rangle$ versores dirección

$\bar{P}_1 = P_1 \cdot \check{C}_1$ ($P_1 < 0$); $\bar{P}_3 = P_3 \cdot \check{C}_4$ ($P_3 > 0$)

Fig. 47

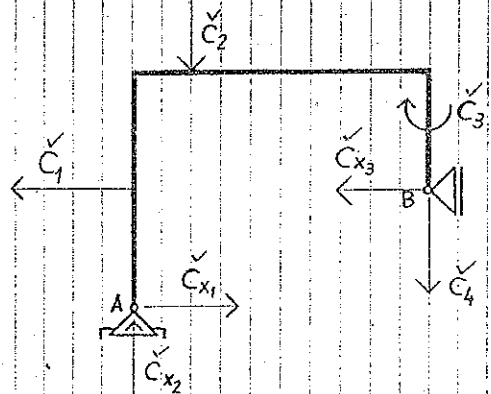
Ejemplo de cálculo de la matriz estática:

(47)



Causas $\left\{ \begin{array}{l} C_1, C_2 \text{ y } C_4: \text{Car.} \\ \text{gas concentra} \\ \text{das} = \\ C_3: \text{par.} \end{array} \right.$

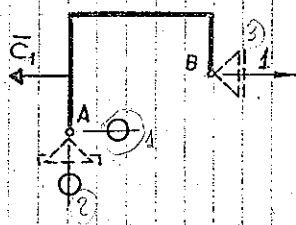
Se fijan arbitrariamente a cada una de las causas una coordenada generalizada, como así también a cada uno de los efectos:



Efectos. $\left\{ \begin{array}{l} X_1 = H_A \\ X_2 = V_A \\ X_3 = R_B \end{array} \right.$

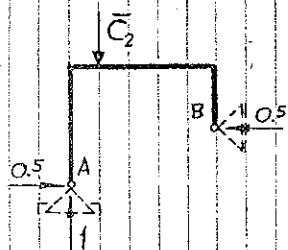
Se procede al cálculo de la matriz estática por columnas:

a) $C_1 = +1$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$



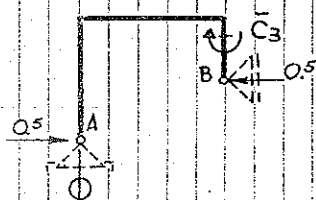
$$[Est.] = \begin{bmatrix} 0 & - & - & - \\ 0 & - & - & - \\ -1 & - & - & - \end{bmatrix}$$

b) $C_2 = +1, C_1 = C_3 = C_4 = 0$



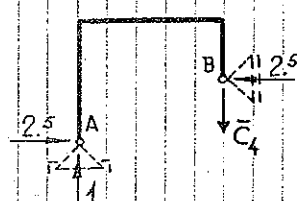
$$[Est.] = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & - & - \\ 0 & 1 & - & - \\ -1 & 0,5 & - & - \end{bmatrix}$$

c) $C_3 = +1, C_1 = C_2 = C_4 = 0$



$$[Est.] = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & - \\ 0 & 1 & 0 & - \\ -1 & 0,5 & 0,5 & - \end{bmatrix}$$

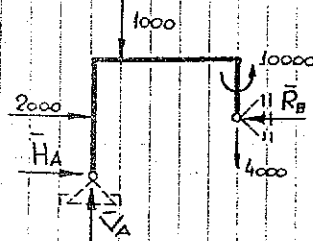
d) $C_4 = +1, C_1 = C_2 = C_3 = 0$



$$[Est.] = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 2,5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0,5 & 0,5 & 2,5 \end{bmatrix}$$

Pueden ahora calcularse las reacciones de vínculo externo:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 2,5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0,5 & 0,5 & 2,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2000 \\ 1000 \\ -10000 \\ 4000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.500 \\ 5.000 \\ 7.500 \end{Bmatrix}$$



$$X_1 = 5.500 \text{ daN}$$

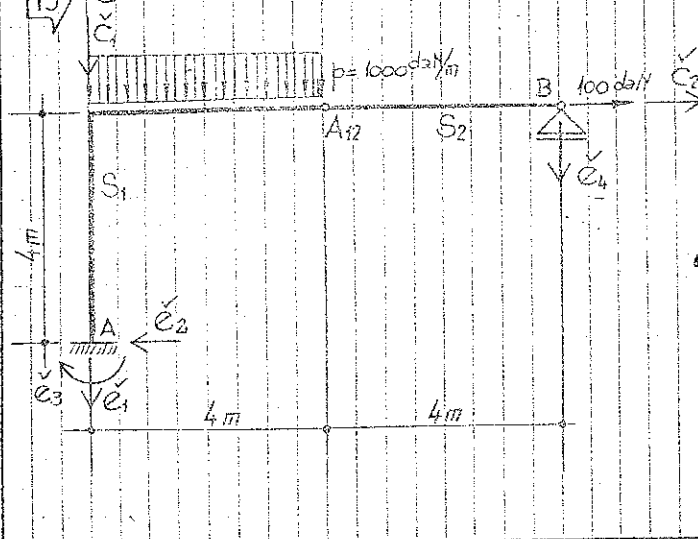
$$X_2 = 5.000 \text{ daN}$$

$$X_3 = 7.500 \text{ daN}$$

19

Determinar la matriz estática:

49



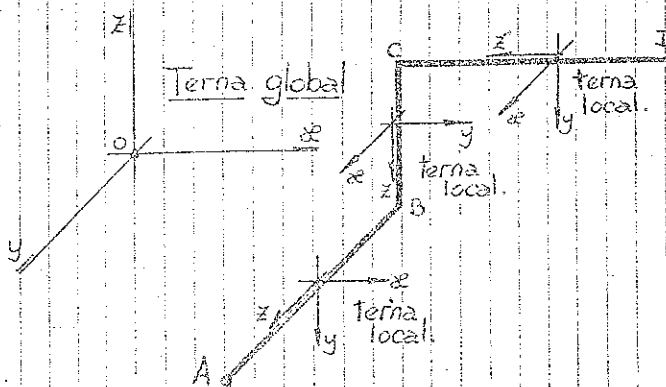
Respuesta:

$$[Est] = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -8 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anexo:

Convención de partes para definir el signo de las características y ubicación de la terna local:

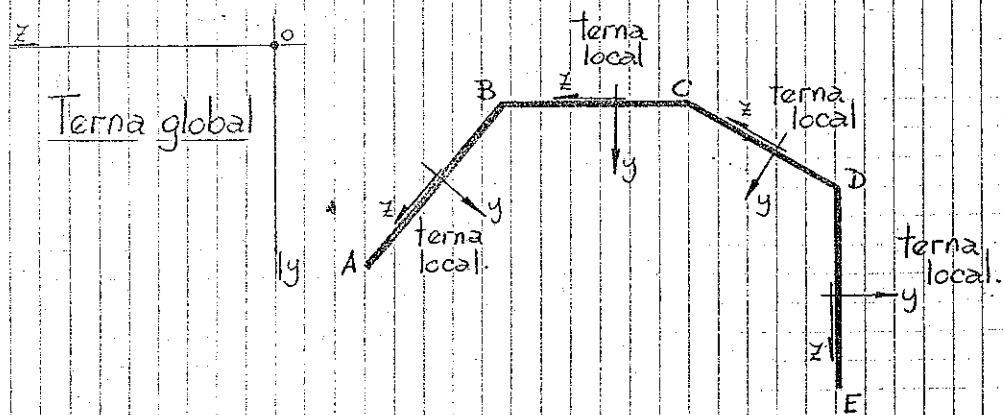
• Sistemas espaciales:



Se elige una de las secciones extremas como sección de referencia y se adopta por convención que las características en valor y signo están dadas por la reducción al baricentro de la sección considerada de las fuerzas exteriores actuantes entre la sección considerada y la sección extrema de referencia. Los signos de acuerdo a la terna local correspondiente.

• Sistemas planos:

(50)



En los sistemas planos se adoptará por convención que las características en valor y signo están dadas por la reducción al baricentro de la sección considerada de las fuerzas exteriores actuantes entre la sección considerada y en toda la parte del sistema estructural recorriendo el sistema desde la sección considerada hacia la izquierda física (para tramos horizontales o inclinados) o hacia abajo (para tramos verticales) hasta alcanzar la o las secciones extremas:

Bibliografía consultada:

- * "Resolución estática de sistemas planos" - Ing. E. Butty
- * "Lecciones de estática gráfica" - Ing. H. Meoli.
- * "Estabilidad I" - Ing. E. Fliess.
- * "Estática" - J. L. Meriam.
- * Notas de clases teóricas del Ing. H. Faletty (UBA-UTN)

Luis Fontana
 Mayo 1985 -
 ING. LUIS ALBERTO FONTANA