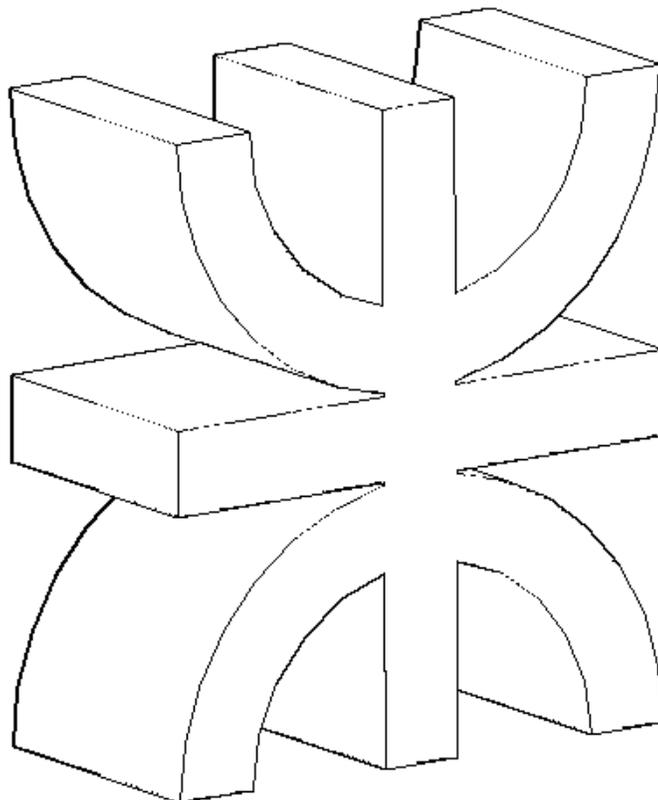


# Unidad N°3

# FUERZAS DISTRIBUIDAS

Estabilidad I – Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires



Profesor: Ing. Néstor Ferré

JTP: Ing. Rubén Daniel Altieri

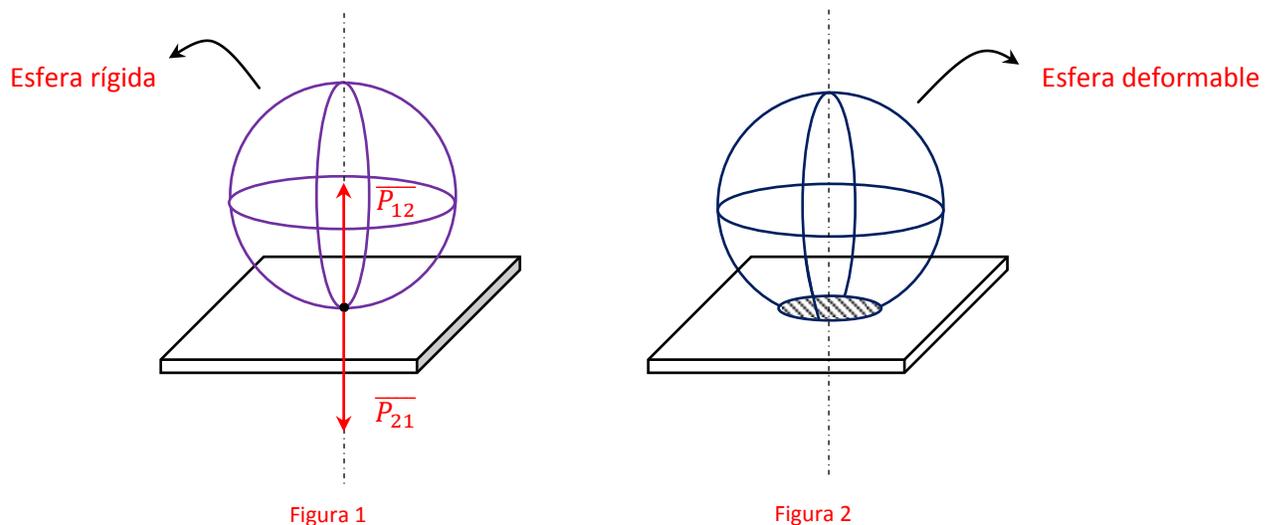
ATP: Juan Francisco Pfeiffer

## INTRODUCCIÓN

En la Unidad N° 1 “Sistemas de Fuerzas” hemos estudiado el equilibrio de un sistema de cargas externas actuando sobre un sólido suponiendo que las mismas actuaban concentradas en puntos materiales de dicho sólido. En la realidad, no existen fuerzas concentradas en puntos determinados, sino que tanto las acciones externas como las que surgen de la interacción entre sólidos se transmiten por lo general a través de superficies. No obstante ello, vamos a considerar a una carga puntual como aquella cuya superficie de contacto es tan pequeña que podemos asociarla con un punto dependiendo de las características del problema.

Para comprender mejor lo enunciado, consideremos como ejemplo una esfera en equilibrio apoyada sobre una superficie plana. Si la esfera se comportara como un cuerpo rígido, el peso de la misma se transmitiría a la placa plana a través del punto de tangencia y estaríamos ante un caso ideal de una fuerza concentrada (figura 1).

Como en la naturaleza no existen cuerpos absolutamente rígidos, sino que los mismos modifican su forma ante la acción de fuerzas externas, la esfera se deforma como consecuencia de su peso propio y de la reacción de la placa de apoyo y el contacto entre ambos cuerpos se establece ahora a través de un círculo (figura 2).



## FUERZAS DISTRIBUIDAS

Las fuerzas distribuidas son un conjunto continuo de fuerzas de módulo diferencial ( $d\overline{P}$ ). Los conceptos físicos de estos sistemas son los mismos que para los sistemas de fuerzas concentradas.

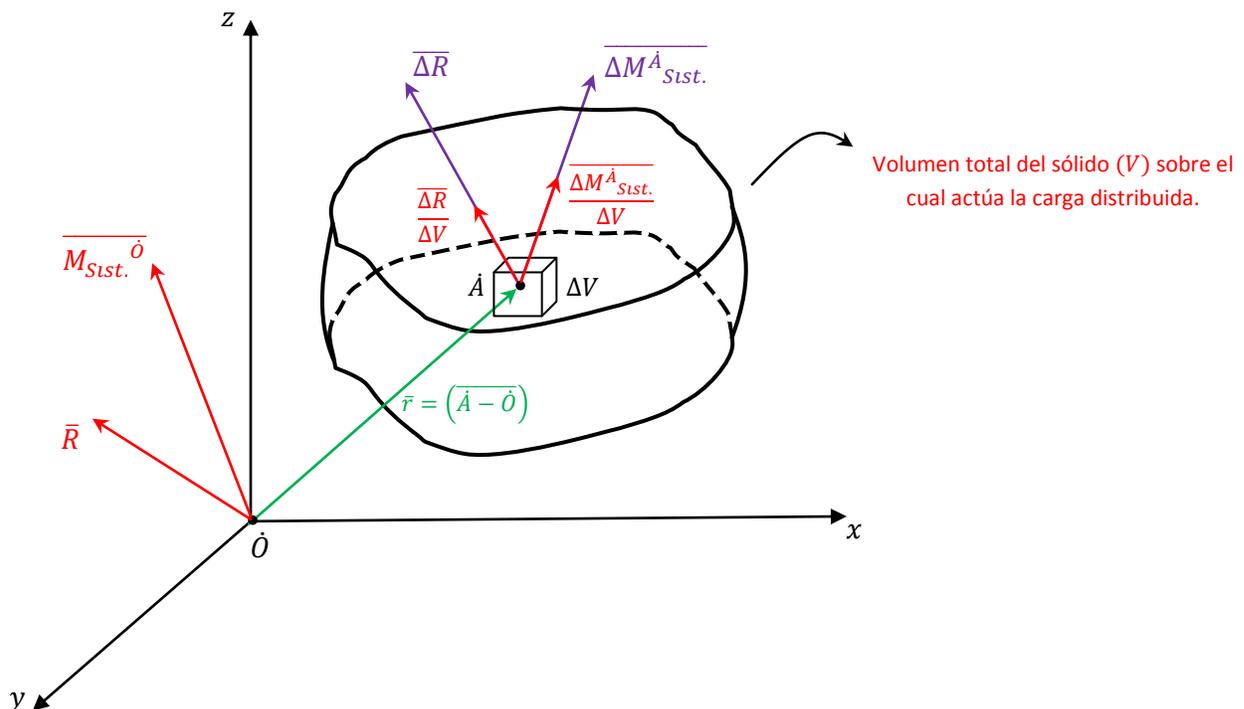
Para resolver el sistema se debe conocer el vector carga específica ( $\bar{\rho}$ ) correspondiente a un punto y su ley de variación a través del volumen, la superficie o la línea donde actué dicho sistema.

### FUERZAS DISTRIBUIDAS SOBRE UN VOLUMEN

Como ejemplos típicos de fuerzas distribuidas sobre el volumen de un cuerpo, podemos citar a la fuerza gravitatoria, a la fuerza eléctrica que actúa sobre un cuerpo cargado (no conductor) y a la fuerza que ejerce un campo magnético sobre un trozo de hierro.

Para su estudio, imaginemos un punto genérico  $\dot{A} \equiv (x; y; z)$  interior a un cuerpo y un entorno muy pequeño de dicho punto al cual denominamos  $\Delta V$ . Si  $\overline{\Delta R}$  y  $\overline{\Delta M^{\dot{A}}_{Sist.}}$  representan al binomio de reducción del sistema formado por las fuerzas infinitesimales que actúan en el entorno considerado, se define como intensidades medias de carga en dicho entorno a las siguientes relaciones:

$$\overline{I_{mc1}} = \frac{\overline{\Delta R}}{\Delta V} \quad \overline{I_{mc2}} = \frac{\overline{\Delta M^{\dot{A}}_{Sist.}}}{\Delta V}$$



Si consideramos entornos de  $\dot{A}$  cada vez más pequeños, cuando  $\Delta V \rightarrow 0$  el entorno coincide con el punto en estudio.

Si las funciones que definen el campo de fuerzas son continuas y derivables, resulta lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta R}}{\Delta V} = \frac{d\overline{R}}{dV} \\ \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta M_{Sist.}^{\dot{A}}}}{\Delta V} = \vec{0} \end{array} \right. \longrightarrow \text{Aclaración: Las fuerzas que actúan sobre el punto } \dot{A} \text{ no generan momento respecto del mismo.}$$

Por definición:

$$\boxed{\frac{d\overline{R}}{dV} = \bar{\rho}} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Vector carga específica } (\bar{\rho}) \\ \text{correspondiente al punto } \dot{A} \text{ en el} \\ \text{volumen del cuerpo considerado.} \end{array} \right.$$

$$\downarrow$$

$$[\bar{\rho}] = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Long.}^3}$$

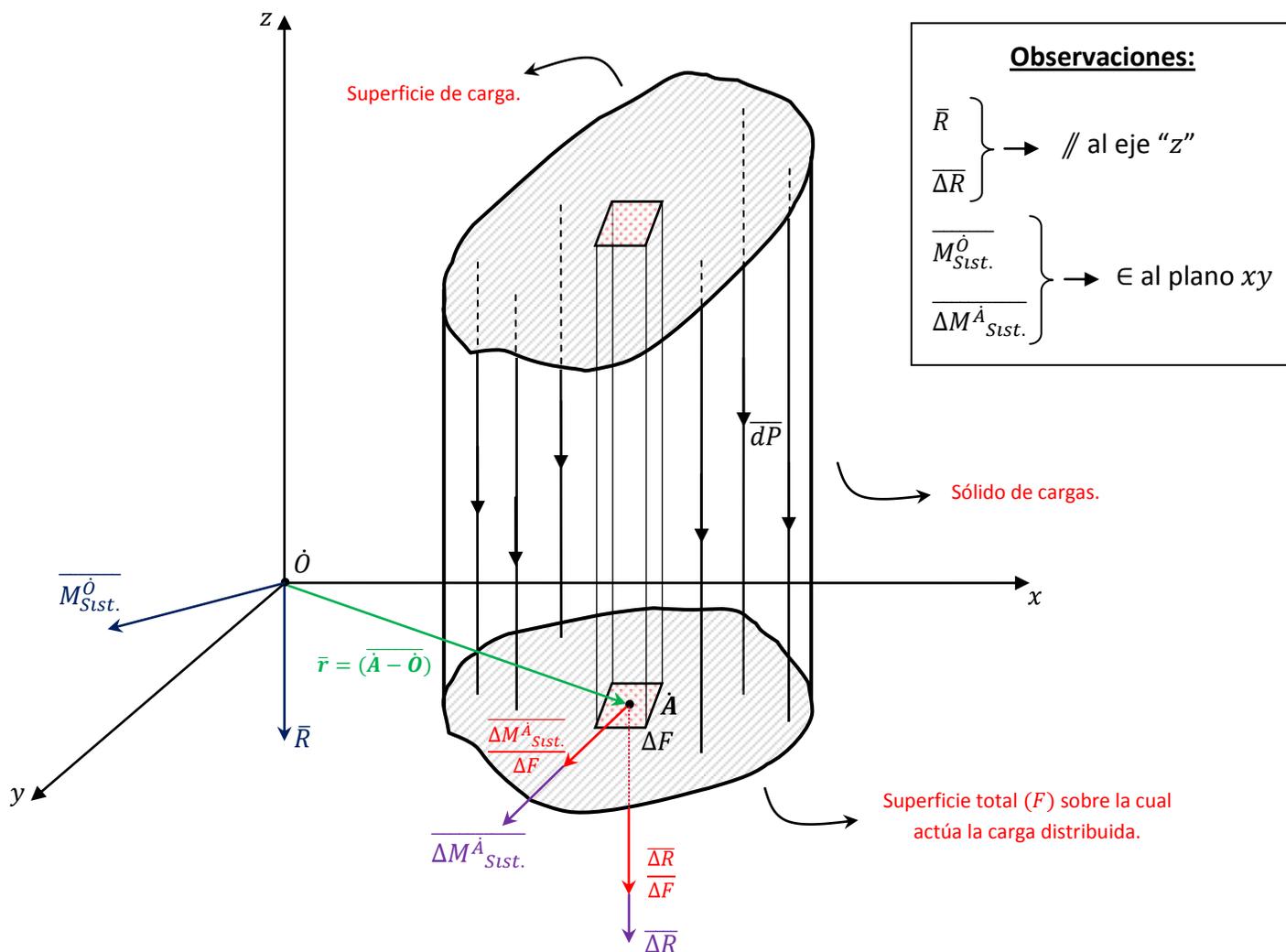
Cálculo del binomio de reducción en  $\dot{O}$ :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{R} = \int_V d\bar{R} \quad \rightarrow \quad \bar{R} = \int_V \bar{\rho} \cdot dV \\ \\ \overline{M_{Sist.}^{\dot{O}}} = \int_V \bar{r} \wedge d\bar{R} = \int_V (\overline{\dot{A} - \dot{O}}) \wedge \bar{\rho} \cdot dV \end{array}}$$

## FUERZAS DISTRIBUIDAS SOBRE UNA SUPERFICIE

Para su estudio, consideremos una porción del plano  $xy$  de área  $F$  y actuando sobre la misma una carga distribuida en dirección normal.

En un entorno pequeño ( $\Delta F$ ) de un punto genérico  $\dot{A} \equiv (x; y; 0)$  tendremos un sistema de fuerzas infinitésimas cuyo binomio de reducción en dicho punto será  $\overline{\Delta R}$  y  $\overline{\Delta M^A_{Sist.}}$ .



En este caso, las intensidades medias de carga en  $\Delta F$  adquieren las siguientes expresiones:

$$\overline{I_{mc1}} = \frac{\overline{\Delta R}}{\Delta F} \qquad \overline{I_{mc2}} = \frac{\overline{\Delta M^A_{Sist.}}}{\Delta F}$$

Pasando al límite obtenemos la expresión correspondiente al vector carga específica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta R}}{\Delta F} = \frac{\overline{dR}}{dF} = \overline{\rho} \\ \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta M_{Sist.}^A}}{\Delta F} = \overline{0} \end{array} \right. \longrightarrow [\overline{\rho}] = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Long.}^2}$$

Cálculo del binomio de reducción en  $\hat{O}$ :

$$\begin{aligned} \overline{R} &= \int_F \overline{dR} \quad \rightarrow \quad \overline{R} = \int_F \overline{\rho} \cdot dF \\ \overline{M_{Sist.}^{\hat{O}}} &= \int_F \overline{\vec{r}} \wedge \overline{dR} = \int_F \overline{(\vec{A} - \hat{O})} \wedge \overline{\rho} \cdot dF \end{aligned}$$

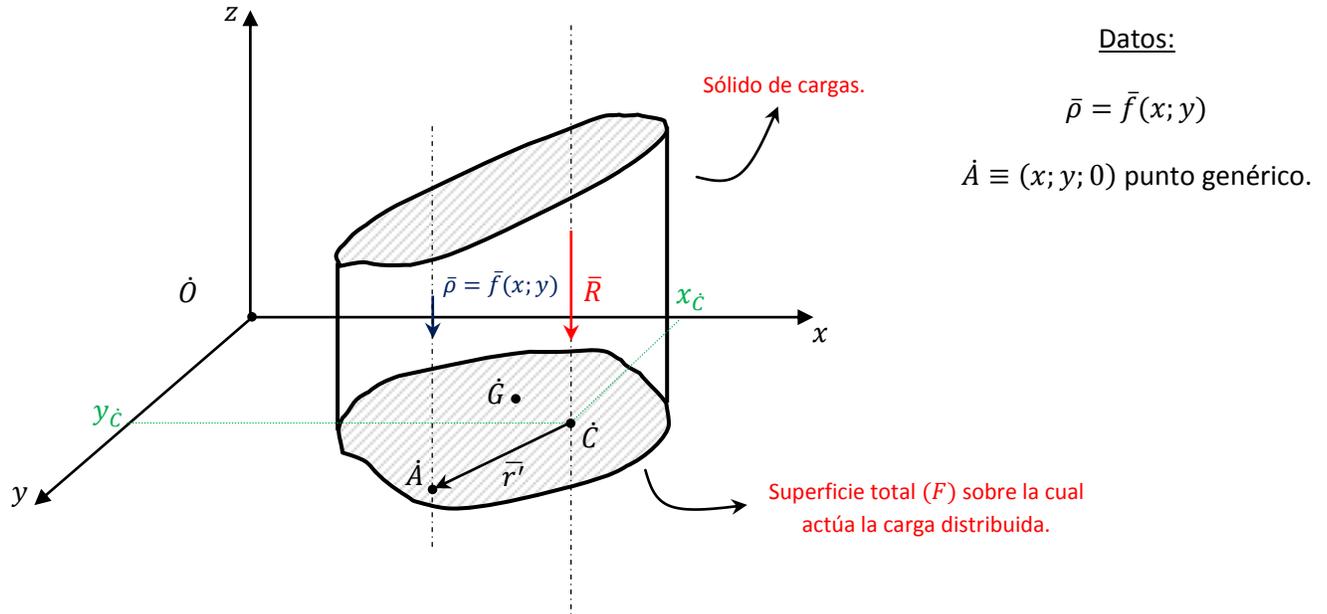
Si fuese posible definir para cada punto de la superficie la intensidad del vector carga específica, representando el mismo en una escala determinada en la dirección del semieje positivo "z", el conjunto de todos los puntos extremos dan origen a una superficie denominada "superficie de cargas". Al volumen comprendido entre dicha superficie y el plano sobre el cual actúa la carga distribuida se lo denomina "sólido de cargas".

Como ejemplos típicos de este tipo de fuerzas distribuidas podemos citar a la fuerza de viento que actúa sobre una estructura (cartel, edificio, etc.), o la fuerza que ejerce un líquido sobre el fondo y sobre las paredes del recipiente que lo contiene.

**Centro de presión:** Se denomina centro de presión ( $\hat{C}$ ) de un cuerpo, al punto sobre el cual se debe aplicar la resultante del sistema de cargas distribuidas que actúa sobre el mismo, para que la misma represente al efecto de todo el sistema.

El centro de presión puede o no coincidir con el centro de masas o con el baricentro del cuerpo en estudio.

Aplicación del Teorema de Varignon para determinar las coordenadas del centro de presión  $\hat{C} \equiv (x_{\hat{C}}; y_{\hat{C}}; 0)$ :



$$\overline{dR} = \bar{\rho} \cdot dF$$

$$\overline{dM_{Sist.}^{\hat{C}}} = \overline{\vec{r}'} \wedge \overline{dR} = (\overline{\hat{A} - \hat{C}}) \wedge \bar{\rho} \cdot dF$$

$$\overline{dM_{Sist.}^{\hat{C}}} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ (x - x_{\hat{C}}) & (y - y_{\hat{C}}) & 0 \\ 0 & 0 & -p_z \cdot dF \end{vmatrix}$$

$$\overline{dM_{Sist.}^{\hat{C}}} = [(y_{\hat{C}} - y) \cdot p_z \cdot dF] \cdot \check{i} + [(x - x_{\hat{C}}) \cdot p_z \cdot dF] \cdot \check{j} + 0 \cdot \check{k}$$

Por definición de centro de presión se debe cumplir lo siguiente:

$$\overline{M_{Sist.}^{\hat{C}}} = \int_F \overline{dM_{Sist.}^{\hat{C}}} = \vec{0}$$

$$\int_F \overline{dM_{Sist.}^{\hat{C}}} = \left[ \int_F (y_{\hat{C}} - y) \cdot p_z \cdot dF \right] \cdot \check{i} + \left[ \int_F (x - x_{\hat{C}}) \cdot p_z \cdot dF \right] \cdot \check{j} + 0 \cdot \check{k} = \vec{0}$$

Igualando componente a componente:

$$\int_F (y_{\dot{C}} - y) \cdot p_z \cdot dF = 0$$

$$\int_F y_{\dot{C}} \cdot p_z \cdot dF - \int_F y \cdot p_z \cdot dF = 0$$

$$y_{\dot{C}} \cdot \int_F p_z \cdot dF - \int_F y \cdot p_z \cdot dF = 0$$

$$y_{\dot{C}} = \frac{\int_F y \cdot p_z \cdot dF}{\int_F p_z \cdot dF}$$

$$\int_F (x - x_{\dot{C}}) \cdot p_z \cdot dF = 0$$

$$\int_F x \cdot p_z \cdot dF - \int_F x_{\dot{C}} \cdot p_z \cdot dF = 0$$

$$\int_F x \cdot p_z \cdot dF - x_{\dot{C}} \cdot \int_F p_z \cdot dF = 0$$

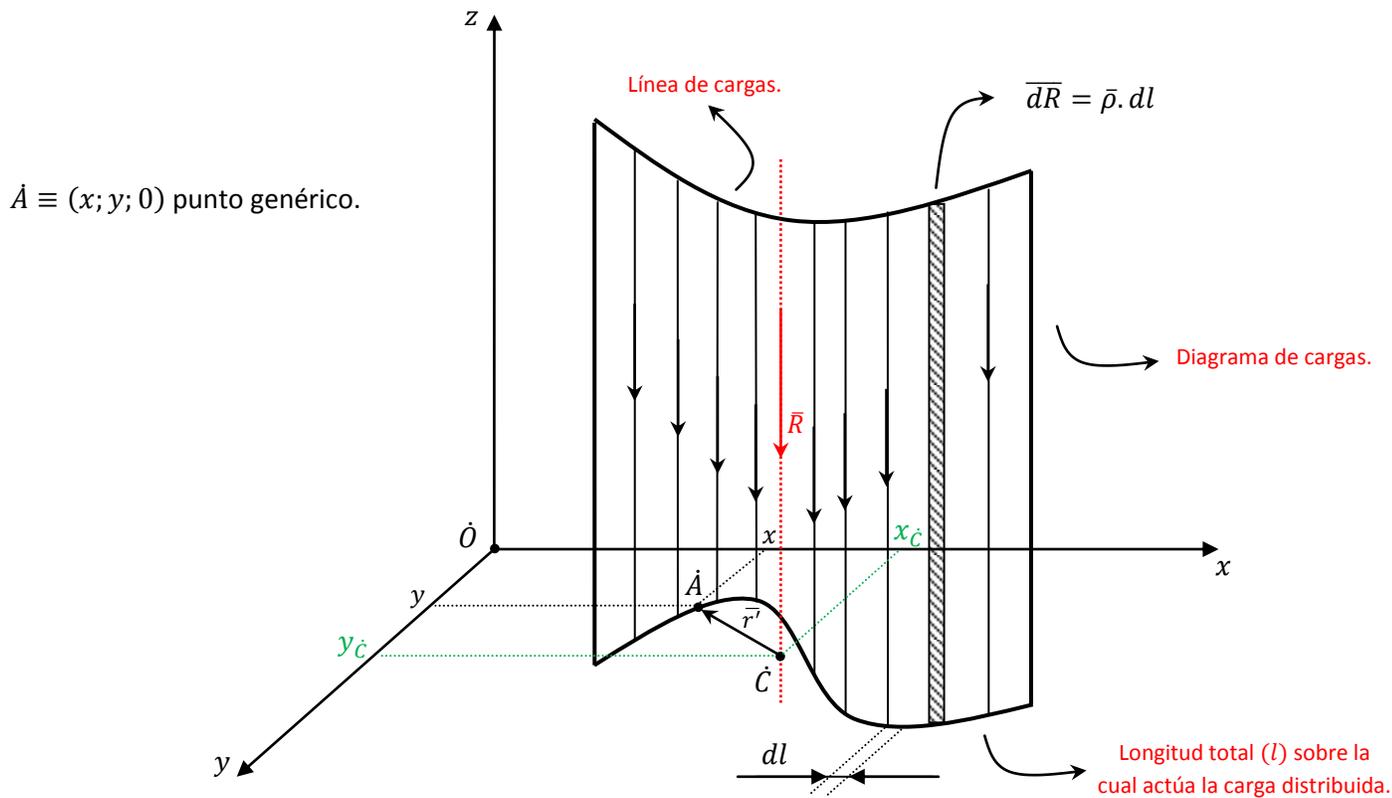
$$x_{\dot{C}} = \frac{\int_F x \cdot p_z \cdot dF}{\int_F p_z \cdot dF}$$

### **Observaciones:**

La recta de acción de la resultante tiene dirección paralela al eje "z" y pasa por el punto  $\dot{C}$ .

Si  $\bar{\rho} = \bar{f}(x; y)$  en una determinada escala define la altura punto a punto sobre la superficie plana en la cual actúa la carga distribuida, entonces, la expresión  $p_z \cdot dF$  define un  $dV$  del sólido de cargas. Observando las ecuaciones correspondientes a las coordenadas del centro de presión, se deduce que la recta de acción de la resultante del sistema de fuerzas distribuidas pasa por el baricentro del sólido de cargas.

## FUERZAS DISTRIBUIDAS SOBRE UNA LÍNEA



Procediendo en forma análoga a los casos anteriores se llega a la siguiente definición del vector carga específica:

$$\boxed{\frac{\overline{dR}}{dl} = \overline{\rho}} \longrightarrow [\overline{\rho}] = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Long.}}$$

Cálculo del binomio de reducción en  $\dot{O}$ :

$$\overline{R} = \int_l \overline{dR} \quad \rightarrow \quad \overline{R} = \int_l \overline{\rho} \cdot dl$$

$$\overline{M}_{Sist.}^{\dot{O}} = \int_l \overline{r} \wedge \overline{dR} = \int_l (\overline{A} - \dot{O}) \wedge \overline{\rho} \cdot dl$$

Determinación de las coordenadas del centro de presión:

$$\overline{dM_{Sist.}^{\dot{C}}} = \overline{r'} \wedge \overline{dR} = (\overline{A - \dot{C}}) \wedge \overline{\rho} \cdot dl$$

$$\overline{dM_{Sist.}^{\dot{C}}} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ (x - x_{\dot{C}}) & (y - y_{\dot{C}}) & 0 \\ 0 & 0 & -p_z \cdot dl \end{vmatrix}$$

$$\overline{dM_{Sist.}^{\dot{C}}} = [(y_{\dot{C}} - y) \cdot p_z \cdot dl] \cdot \check{i} + [(x - x_{\dot{C}}) \cdot p_z \cdot dl] \cdot \check{j} + 0 \cdot \check{k}$$

$$\overline{M_{Sist.}^{\dot{C}}} = \int_l \overline{dM_{Sist.}^{\dot{C}}} = \overline{0}$$

$$\int_l \overline{dM_{Sist.}^{\dot{C}}} = \left[ \int_l (y_{\dot{C}} - y) \cdot p_z \cdot dl \right] \cdot \check{i} + \left[ \int_l (x - x_{\dot{C}}) \cdot p_z \cdot dl \right] \cdot \check{j} + 0 \cdot \check{k} = \overline{0}$$

Igualando componente a componente:

$$\int_l (y_{\dot{C}} - y) \cdot p_z \cdot dl = 0$$

$$\int_l y_{\dot{C}} \cdot p_z \cdot dl - \int_l y \cdot p_z \cdot dl = 0$$

$$y_{\dot{C}} \cdot \int_l p_z \cdot dl - \int_l y \cdot p_z \cdot dl = 0$$

$$y_{\dot{C}} = \frac{\int_l y \cdot p_z \cdot dl}{\int_l p_z \cdot dl}$$

$$\int_l (x - x_{\dot{C}}) \cdot p_z \cdot dl = 0$$

$$\int_l x \cdot p_z \cdot dl - \int_l x_{\dot{C}} \cdot p_z \cdot dl = 0$$

$$\int_l x \cdot p_z \cdot dl - x_{\dot{C}} \cdot \int_l p_z \cdot dl = 0$$

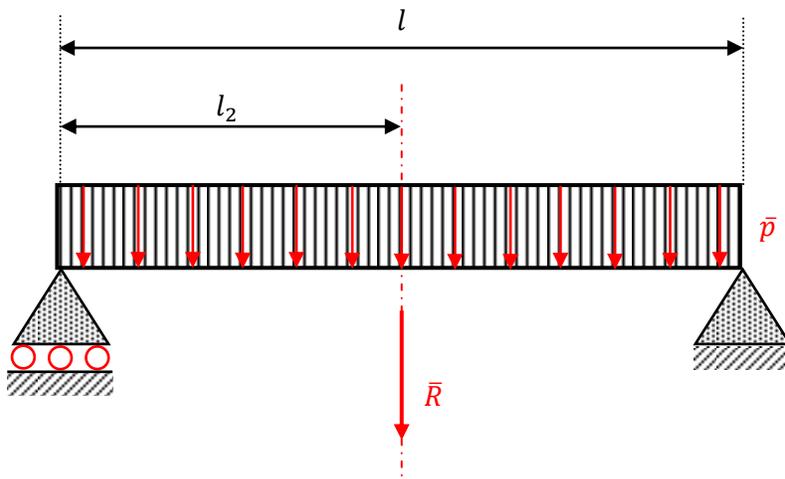
$$x_{\dot{C}} = \frac{\int_l x \cdot p_z \cdot dl}{\int_l p_z \cdot dl}$$

**Observaciones:**

La recta de acción de la resultante tiene dirección paralela al eje "z" y pasa por el punto  $\dot{C}$ .

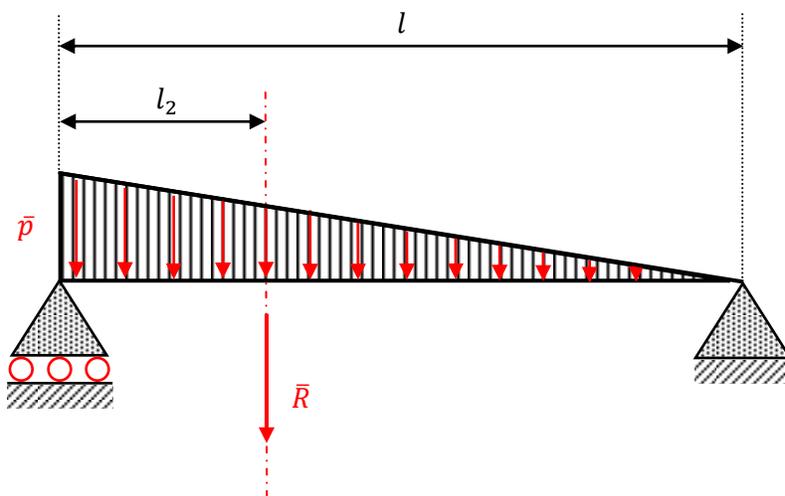
Si  $\bar{p} = \bar{f}(x; y)$  en una determinada escala define la altura punto a punto sobre la línea en la cual actúa la carga distribuida, entonces, la expresión  $p_z \cdot dl$  define un  $dF$  del diagrama de cargas. Observando las ecuaciones correspondientes a las coordenadas del centro de presión, se deduce que la recta de acción de la resultante del sistema de fuerzas distribuidas pasa por el baricentro del diagrama de cargas.

## CARGAS DISTRIBUIDAS MÁS USUALES



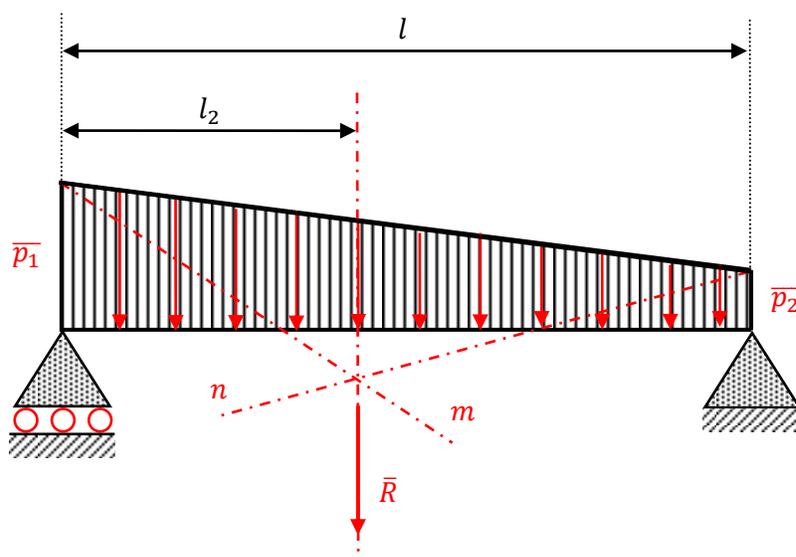
$$\bar{R} = \bar{p} \cdot l$$

$$l_2 = \frac{l}{2}$$



$$\bar{R} = \frac{\bar{p} \cdot l}{2}$$

$$l_2 = \frac{l}{3}$$



$$\bar{R} = \bar{p}_2 \cdot l + \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \cdot l}{2}$$

$l_2$  : Determinado por método gráfico.

Las rectas extremas  $(m; n)$  que dividen la base del trapecio en tres partes iguales, se cortan en un punto cuya vertical es la recta de acción de la resultante del sistema de cargas.