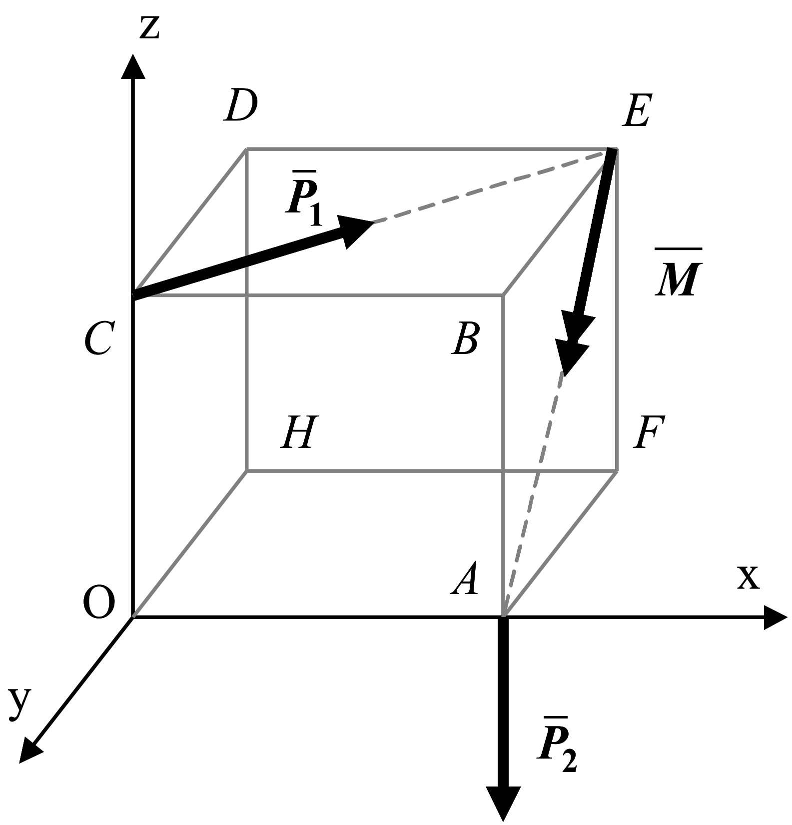
Tp 1 - Ejercicio N°1



P1	P2	M	OC=	OH=	OA=
			AB=	AF=	HF=
			HD=	CD=	CB=
			EF	BE	EF
kN	kN	kN m	m	m	m
100	90	100	3	2	1

Los valores indicados en la tabla corresponden al módulo de las magnitudes correspondientes

Se solicita:

Reducirlo al punto *D* y determinar los invariantes

Reducirlo al origen de coordenadas *O* pasando de los elementos reducidos al punto *D.* Verificar el valor de los invariantes

Indicar si el sistema admite resultante, justificando la respuesta

Equilibrarlo con 6 fuerzas cuyas rectas de acción son los ejes coordenados y las dadas por los segmentos A*F; BC* y *DH*

Componenetes de cada vector →

$$P_{1x} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}} \cdot P_1 \qquad P_{1y} = -\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \cdot P_1 \qquad P_{1z} = 0$$

$$P_{2x} = 0_1 \qquad P_{2y} = 0 \qquad P_{2z} = -P_2$$

$$M_x = 0 \qquad M_y = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \cdot M \qquad M_z = -\frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} \cdot M$$

$$x_C = 0 \qquad y_C = 0 \qquad z_C = \overline{OC}$$

$$x_B = \overline{OA} \qquad y_B = 0 \qquad z_B = \overline{OC}$$

← **Puntos de aplicación** de cada vector fuerza

Recordar 2 cosas:

a.- El vector Momento es libre

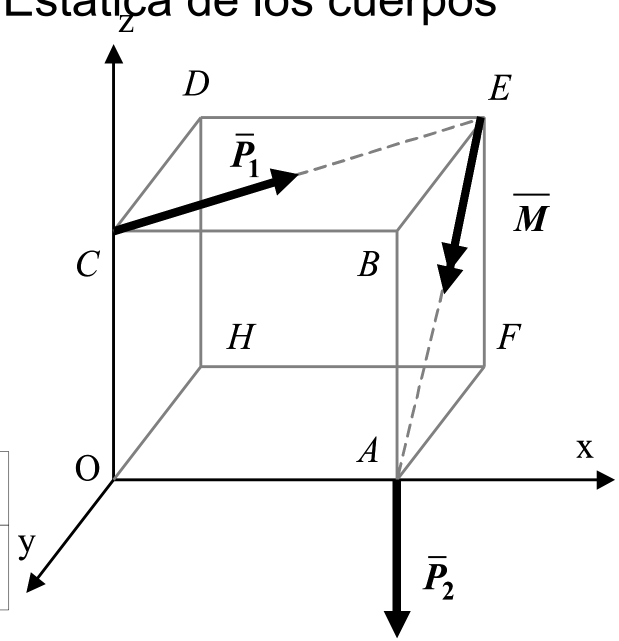
b.- Para la fuerza P2 es lo mismo tomar B ó A (principio de transmisibilidad de las fuerzas válido dentro del campo de la Estática de los cuerpos indeformables).

Cálculos auxiliares para encontrar los ángulos de proyección de cada vector-->

$$\overline{CE} = \sqrt{\left(\overline{CB}\right)^2 + \left(\overline{CD}\right)^2}$$

$$\overline{AE} = \sqrt{\left(\overline{AF}\right)^2 + \left(\overline{EF}\right)^2}$$

P1x	P1y	P1z	P2x	P2y	P2z	Mx	My	Mz
44,7	-89,4	0,0	0,0	0,0	-90,0	0,0	55,5	-83,2



Binomio de reducción al punto "D"

Resultante

$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2$$

$$R_x = P_{1x} + P_{2x}$$
$$R_y = P_{1y} + P_{2y}$$
$$R_z = P_{1z} + P_{2z}$$

$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2}$$

Momento Resultante de reducción en "D"

$$\overline{M}_R^D = (C - D) \wedge \overline{P}_1 + (B - D) \wedge \overline{P}_2 + \overline{M}$$

$$\overline{M}_R^D = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ x_C - x_D & y_C - y_D & z_C - z_D \\ P_{1x} & P_{1y} & P_{1z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ x_B - x_D & y_B - y_D & z_B - z_D \\ P_{2x} & P_{2y} & P_{2z} \end{vmatrix} + \overline{M}$$

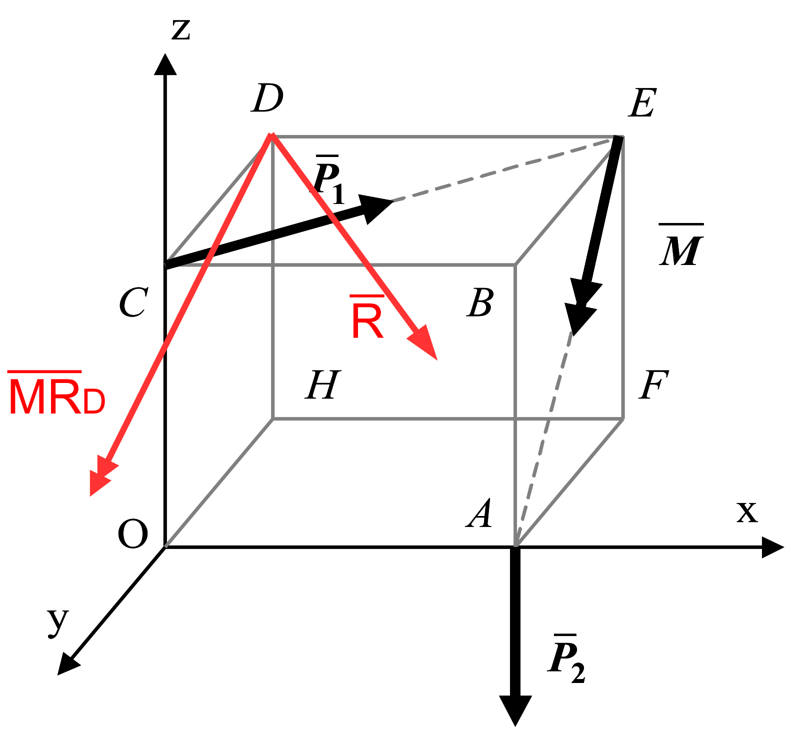
$$M_{R\,x}^D = \left[(y_C - y_D) \cdot P_{1z} - (z_C - z_D) \cdot P_{1y} + (y_B - y_D) \cdot P_{2z} - (z_B - z_D) \cdot P_{2y} + M_x \right]$$
$$M_{R\,y}^D = \left[(z_C - z_D) \cdot P_{1x} - (x_C - x_D) \cdot P_{1z} + (z_B - z_D) \cdot P_{2x} - (x_B - x_D) \cdot P_{2z} + M_y \right]$$
$$M_{R\,z}^D = \left[(x_C - x_D) \cdot P_{1y} - (y_C - y_D) \cdot P_{1x} + (x_B - x_D) \cdot P_{2y} - (y_B - y_D) \cdot P_{2x} + M_z \right]$$

$$M_R^D = \sqrt{\left(M_{R\,x}^D\right)^2 + \left(M_{R\,y}^D\right)^2 + \left(M_{R\,z}^D\right)^2}$$

Binomio de reducción en el punto "D"

Valores obtenidos:

MP1Dx	MP1Dy	MP1Dz	MP2Dx	MP2Dy	MP3Dz	MRDx	MRDy	MRDz	MRD	Rx	Ry	Rz	R
0	0	-89,44	-180	90	0	-180	145	-173	289	45	-89	-90	135



$\overline{R}$ = 45i – 89j - 90k

$\overline{MR}_D$ = -180i + 145j - 173k

Invariantes del sistema

$$I_v = \overline{R}$$

$$I_e = \frac{\overline{R} \times \overline{M}_R^D}{R}$$

$$I_e = \frac{R_x \times M_{R\,x}^D + R_y \times M_{R\,y}^D + R_z \times M_{R\,z}^D}{R}$$

Ivx	Ivy	Ivz	Ie
44,72	-89,44	-90	-41,05

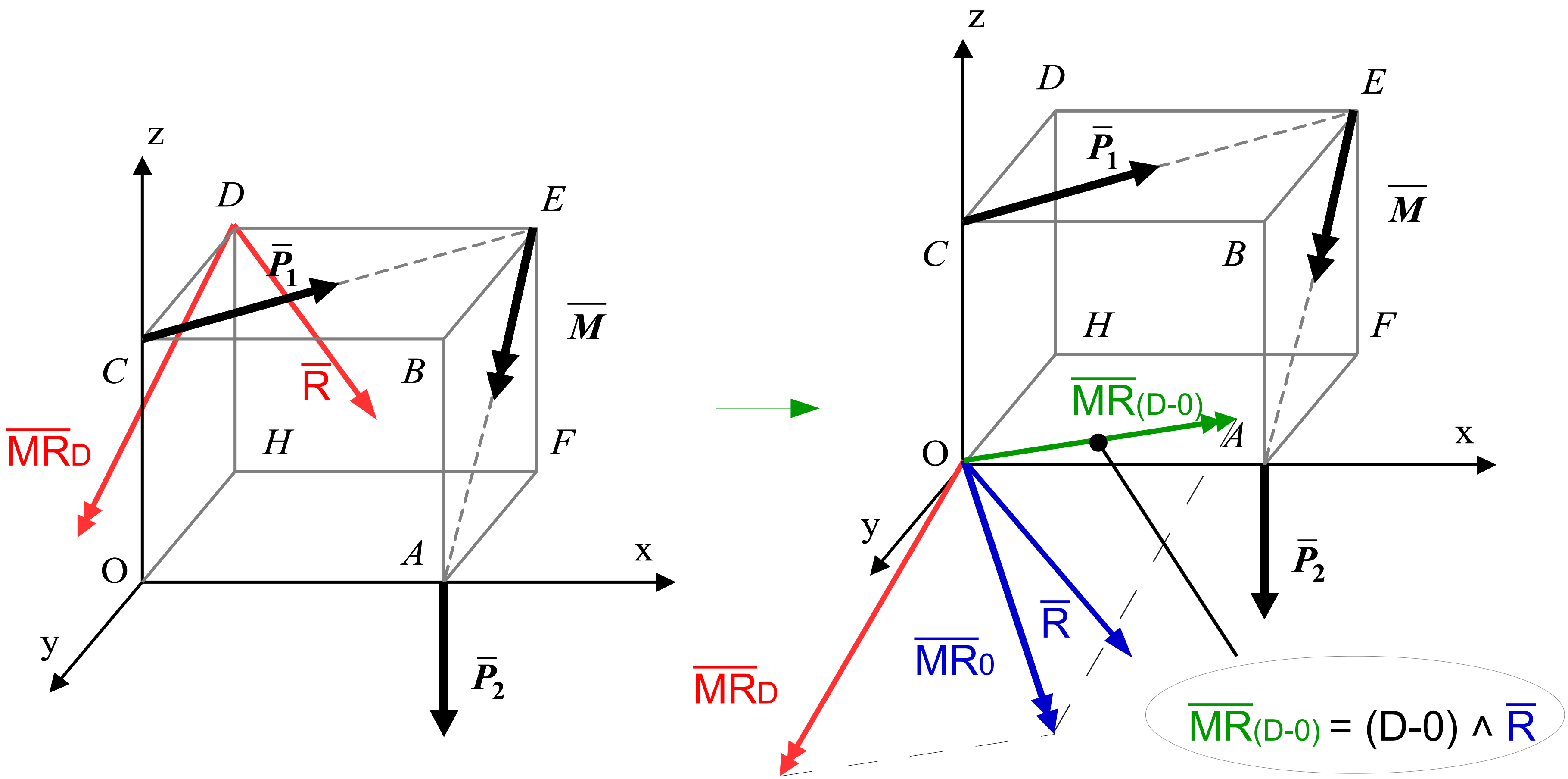
Iv = 44,72i – 89,44j - 90k

Ie = - 41,05

Reducción al origen de coordenadas *O* pasando de los elementos reducidos al punto *D*

Para reducir el sitema original al punto “O” (origen de coordenadas) hay 2 opciones:

- Reducirlo de igual manera que en el punto anterior, desde el sistema dato hacia “O”
- *Reducirlo desde el sitema equivalente hallado en “D”*



Binomio de reducción al punto "0" (origen de coordenadas)

Resultante

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$$

$$R_x = P_{1x} + P_{2x}$$
$$R_y = P_{1y} + P_{2y}$$
$$R_z = P_{1z} + P_{2z}$$

$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2}$$

Momento Resultante de reducción en "0"

$$\bar{M}_R^O = \left(D - O\right) \wedge \bar{R} + \bar{M}_R^D$$

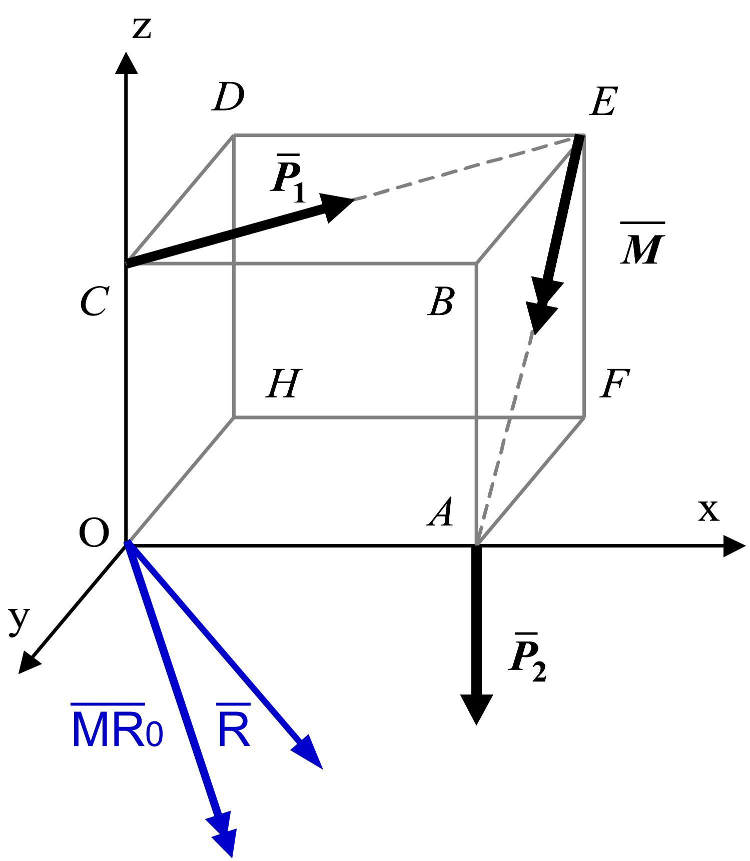
$$\bar{M}_R^O = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ x_D - x_O & y_D - y_O & z_D - z_O \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} + \bar{M}_R^D$$

$$M_{R\,x}^O = \left[\left(y_D - y_O\right) \cdot R_z - \left(z_D - z_O\right) \cdot R_y + M_{R\,x}^D\right]$$
$$M_{R\,y}^O = \left[\left(z_D - z_O\right) \cdot R_x - \left(x_D - x_O\right) \cdot R_z + M_{R\,y}^D\right]$$
$$M_{R\,z}^O = \left[\left(x_D - x_O\right) \cdot R_y - \left(y_D - y_O\right) \cdot R_x + M_{R\,z}^D\right]$$

Binomio de reducción en el punto "0"

Valores obtenidos:

MROx	MROy	MROz	MRO	Rx	Ry	Rz	R
268,32	279,63	-83,20	396,38	44,72	-89,44	-90	134,53



$\overline{R} = 45i – 89j - 90k$

$\overline{MR}_0 = 268i + 280j - 83k$

Indicar si el sistema admite resultante, justificando la respuesta

Que un sistema de cargas *"admita Resultante"* significa preguntar si todo el sistema puede ser representado por un único vector desplazamiento (o Resultante única) que provoque el mismo efecto. O sea que sea equivalente.

Los sistemas cómo el de este ejercicio 1, son sistemas Gausos o de roto-traslación.

Considerando que el cuerpo (cuerpo que no está dibujado en el gráfico del enunciado) al que se le aplica el sistema de cargas se roto-traslada, nunca podrá ser reemplazado por otro sistema equivalente de vector único que provocaría sólo traslaciones, sino por un par de vectores (binomio de reducción que en este caso es la mínima expresión a la que puede reducirse el sistema). Uno de traslación o "**Resultante de reducción**" y otro de rotación ó "**Momento resultante de reducción**".

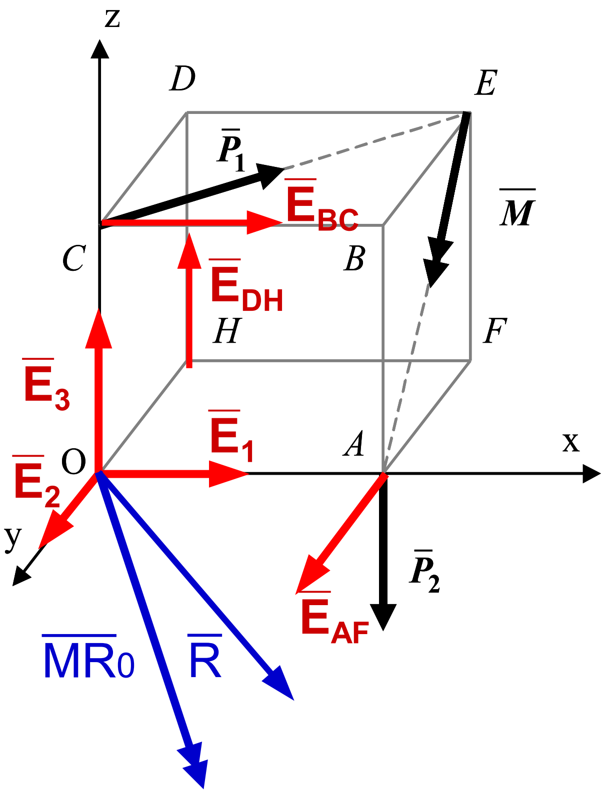
Quiere decir que, si existiera Resultante única, el momento (que sería inexistente) no generaría una proyección sobre la recta de acción de la resultante (Invariante escalar). Ésto quiere decir que si el invariante escalar es NULO, el sistema admitiría Resultante única.

En este caso el invariante escalar es = -41,05 por lo que podemos concluir que

EL SISTEMA NO ADMITE RESULTANTE ÚNICA.

Su mínima expresión es un binomio de reducción

Equilibrarlo con 6 fuerzas cuyas rectas de acción son los ejes coordenados y las dadas por los segmentos AF; BC y DH



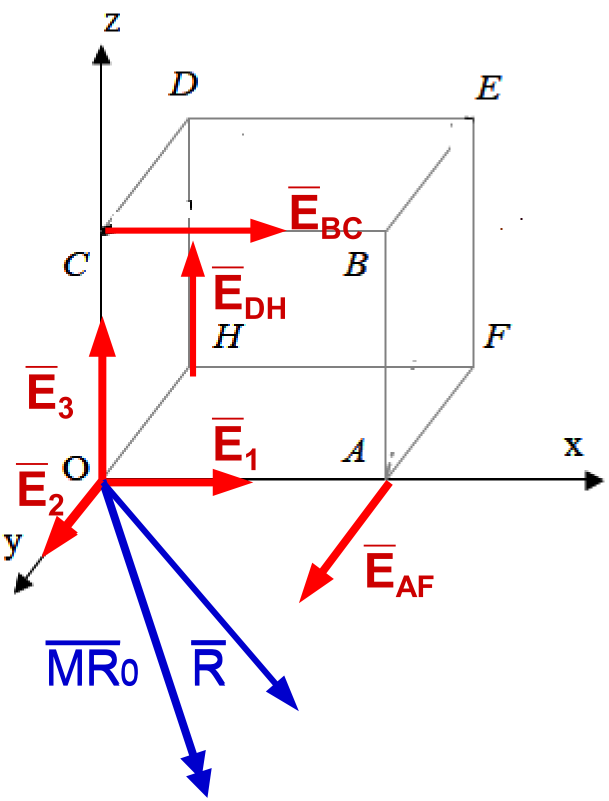
Como el binomio de reducción **(AZUL)** en "0" es equivalente al sistema original, trabajaremos con $\overline{R}$ y $\overline{MR}_0$ y lo equilibramos con el conjunto de fuerzas en **ROJO**

Las fuerzas equilibrantes (incógnitas) y sus respectivos puntos de aplicación son →

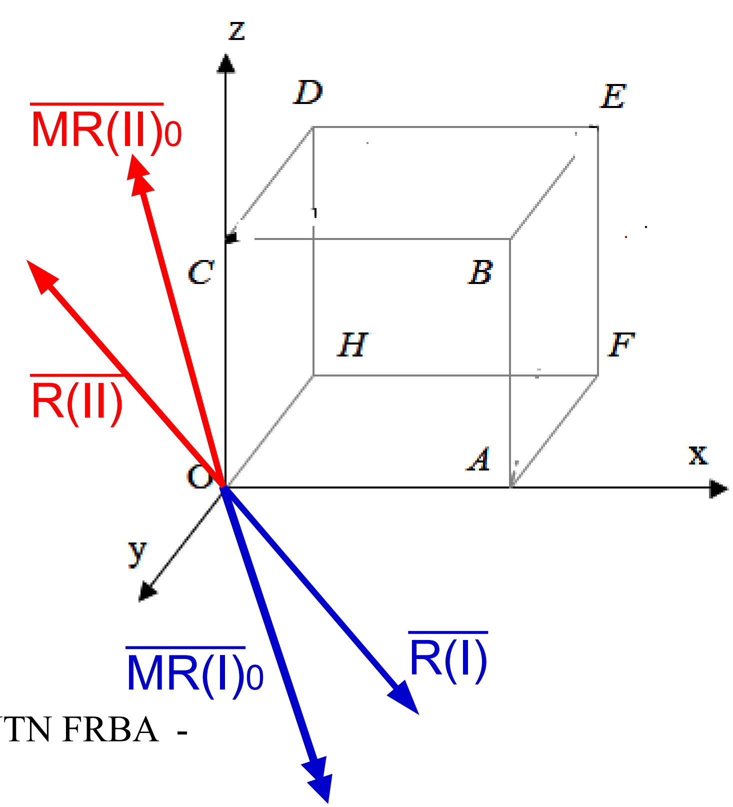
$$\overline{E}_1 = E_1 \cdot \underset{\smile}{i} \quad O$$
$$\overline{E}_2 = E_2 \cdot \underset{\smile}{j} \quad O$$
$$\overline{E}_3 = E_3 \cdot \underset{\smile}{k} \quad O$$
$$\overline{E}_{BC} = E_{BC} \cdot \underset{\smile}{i} \quad C$$
$$\overline{E}_{AF} = E_{AF} \cdot \underset{\smile}{j} \quad A$$
$$\overline{E}_{DH} = E_{DH} \cdot k \quad H$$

<u>NOTA</u>: Las direcciones son dato, pero los sentidos y múdulos de las fuerzas "E" son incógnitas. Lo recomendable es asignar sentidos positivos (en este caso de acuerdo a la terna izquierda usada) a todas las incógnitas. Los módulos se calcularán a continuación planteando el "EQUILIBRIO" de ambos sistemas. El **AZUL** y el **ROJO**

Se plantea el equilibrio de ambos sistemas

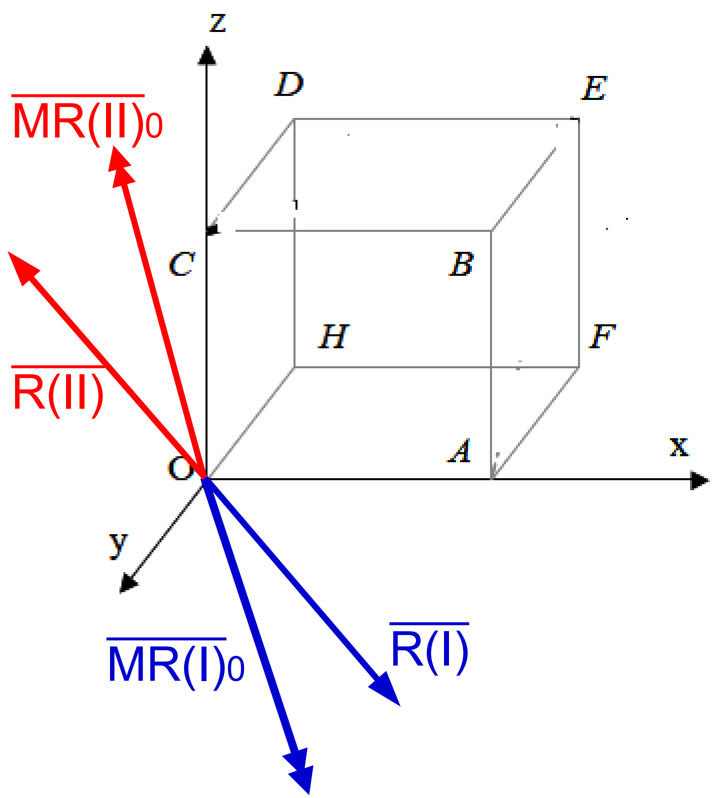


El sistema de fuerzas en **ROJO** (sitema II) se reduce al origen de coordenadas, cuyo binomio de reducción tendrá una Resultante de reducción y un Momento resultante de reducción en “0” que debería ser equilibrante del binomio de reducción original en **AZUL** (sistema I).



Las incóginas se encontarán si podemos encontrar el binomio de reducción del sistema (II) ROJO

Plantear el equilibrio de ambos sistemas significa plantear la nulidad del conjunto de todas las fuerzas puestas en juego (o sea: ambos binomios de reducción).



Vectorialmente:

$$\overline{R(I)} + \overline{R(II)} = 0$$

$$\overline{MR(I)_0} + \overline{MR(II)_0} = 0$$

Escalarmente:

(1) $R_x + E_1 + E_{BC} = 0$

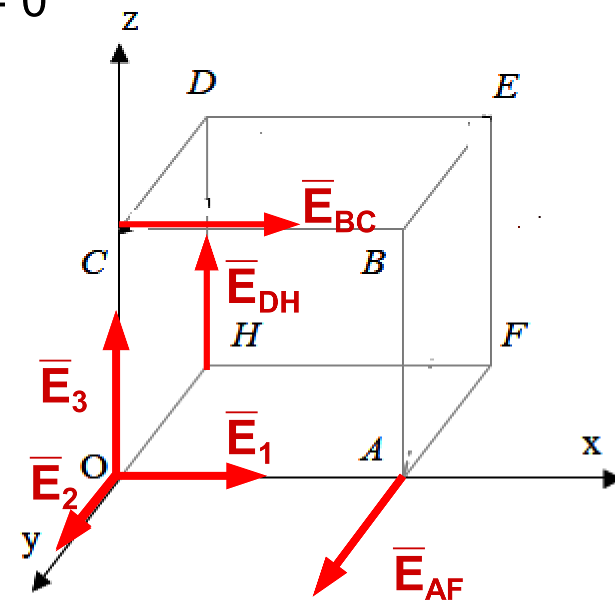
(2) $R_y + E_2 + E_{AF} = 0$

(3) $R_z + E_3 + E_{DH} = 0$

(4) $M^O_{R\,x} - E_{DH} \cdot \overline{OH} = 0$

(5) $M^O_{R\,y} + E_{BC} \cdot \overline{OC} = 0$

(6) $M^O_{R\,z} + E_{AF} \cdot \overline{OA} = 0$



Sistema equilibrante

E1	E2	E3	EBC	EAF	EDH
48,49	6,23	-44,16	-93,21	83,20	134,16

NOTA:

El signo "-" de E3 y EBC significa que los sentidos arbitrariamente elegidos para esas 2 fuerzas son contrarios a los reales.

Al haber puesto a todas las incógnitas con sentidos positivos, los valores hallados (tabulados acá arriba) coinciden en módulo y signo con los vectores fuerza de las 6 fuerzas equilibrantes del sistema original.