



**CENTRO DE ESTUDIANTES DE INGENIERIA**  
**"LA LINEA RECTA"**  
**SECRETARIA MATERIALES DE ESTUDIO Y BIBLIOTECA**

# **ESTABILIDAD**

## **Sistemas de Fuerza**

**Por el Ing. H.A. Faletty**

**44.01.12**

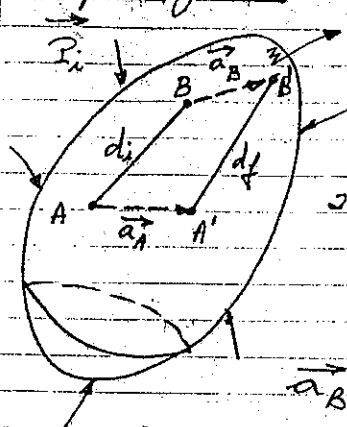
**Bs. As.**  
**1985**

Sistemas de Fuerzas.-Introducción.-Estática.-

Estudia el problema del equilibrio de los cuerpos e investiga las leyes que lo rigen.-

Fuerza.-

Se la conoce por su efecto sobre el cuerpo sobre el cual actúa, tiende a sacar el cuerpo de su posición de reposo o alterar su movimiento uniforme, es decir, tiende a modificar el estado de movimiento sobre el cual actúa. Es una magnitud dirigida, es decir, vectorial. Vector axial en esta 1ª parte del curso.

Cuerpo rígido.- (Fuerzas vectores axiales).-

Cuerpo.-

Al actuar las fuerzas sobre el cuerpo el punto genérico A pasa a la posición A' y el B a la posición B'.

$\vec{a}_A = (A' - A)$  desplazamiento del punto A.-

$\vec{a}_B = (B' - B)$  desplazamiento del punto B.-

$AB = d_i$  distancia inicial entre los puntos genéricos A y B.-

$A'B' = d_f$  distancia final entre los puntos genéricos A y B.-

$\delta_{A,B} = d_f - d_i$  variación de la distancia entre los puntos genéricos A y B.-

$$\delta_{A,B} \geq 0$$

cundo  $\delta_{A,B} = 0$  para los infinitos pares de puntos del cuerpo se dice

(6)

que es un cuerpo rígido, caso contrario se habla de un cuerpo deformable.

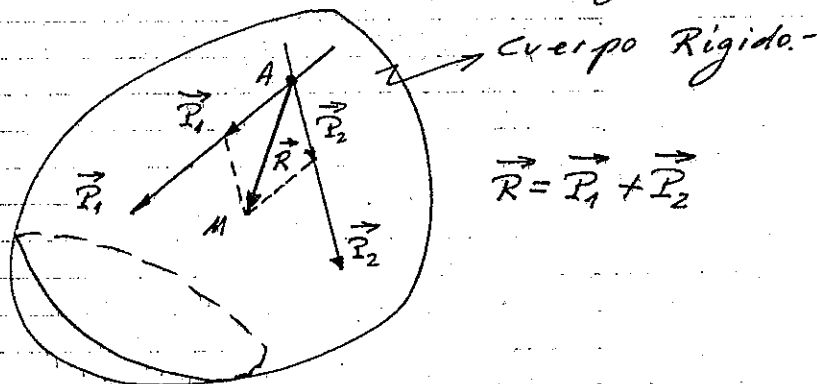
Hipótesis de la rigidez.

Aceptaremos que el cuerpo con el cual trabajaremos es un cuerpo rígido. Esta es una hipótesis simplificada pero no limitativa. (Ver el folleto "Sistemas de Fuerzas" de los Ings. Martoccio y Rosetti, Publicación N° 44.01.06 del C.E.I. "La Línea Recta").

Principios de la Estática.

(Ver "Estabilidad 1º Curso del Ing. Eliess ó "Mecánica Técnica" del Ing. S. Timoshenko).

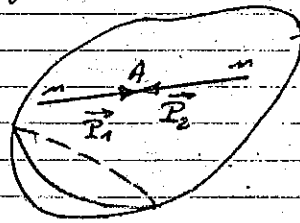
1º) El efecto de dos fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo rígido y cuyas rectas de acción se cortan en un punto propio es el mismo del que tiene una sola fuerza cuya recta de acción pasa por el punto común de las rectas de acción de las fuerzas dadas y cuya dirección, intensidad y sentido están dados por la diagonal del paralelogramo construido teniendo como lados los vectores representativos de cada fuerza dada. (Principio del Paralelogramo)



2º) El efecto de dos fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo rígido y que tienen la misma intensidad, la misma recta de

©

acción y sentidos contrarios es nulo.-



Cuerpo Rígido.-

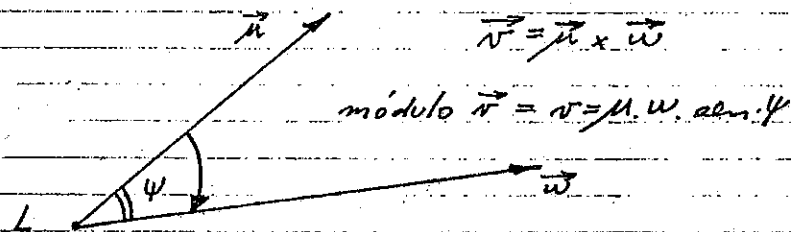
$$\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$$

3<sup>ra</sup>) A un sistema de fuerzas, que actúa sobre el mismo cuerpo rígido, se le puede agregar o quitar un sistema nulo, sin variar el efecto que tiene sobre el cuerpo rígido sobre el cual actúa.-

4<sup>a</sup>) A toda acción le corresponde una reacción igual y contraria.- (Principio de acción y reacción).- (Acción y reacción actúan sobre distintos cuerpos).

Regla del observador para obtener el sentido del vector que resulta del producto vectorial entre dos vectores.-

Dados dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  el vector que resulta del producto vectorial entre ambos es normal al plano que forman ambos y el sentido es tal, que un observador parado en el plano debe colocar su cabeza de modo tal que mirando al primer vector pase al segundo recorriendo el ángulo que forman ambos vectores en sentido horario.-



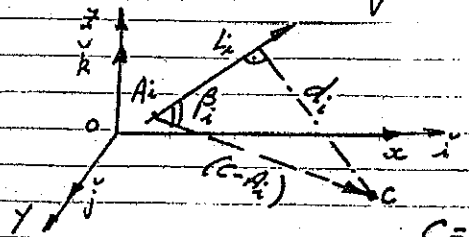
$$\vec{r} = \vec{u} \times \vec{w}$$

$$\text{módulo } \vec{r} = r = u \cdot w \cdot \sin \phi$$

En este ejemplo si los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  están en el plano del dibujo el vector  $\vec{r}$  es saliente del dibujo.-

44.01.17

ESTA PAGINA REEMPLAZA A LA QUE SE ENCUENTRA EN EL APUNTE ①

Momento de una fuerza respecto de un punto.

definición.-

$$\vec{M}_{P_i}^C = \vec{P}_i \times (\vec{C} - \vec{A}_i)$$

Para una fuerza  $i=1$  $C$  = Centro de momentos. $A_i$  = punto cualquiera de la recta de acción de la fuerza. $\times$  = Simbología del producto vectorial.

Módulo:  $\Rightarrow M_{P_i}^C = P_i \cdot CA_i \cdot \sin \beta = P_i \cdot CA_i \cdot \frac{d_i}{CA_i} =$

$$= P_i \cdot d_i \text{ (Nm) Newton metro}$$

Dirección:  $\Rightarrow$  Normal al plano definido por la recta de acción de la fuerza y el centro de momentos.Sentido:  $\Rightarrow$  El que corresponde a la regla del observador (esta regla da sentido contrario al de la regla del tornavoz).Tipo de vector:  $\Rightarrow$  El vector momento está asociado al centro de momentos, luego es un vector aplicado. Si tenemos varias fuerzas:  $i=1, 2, \dots, n$  es:

$$\vec{M}_{P_i}^C = \sum_{i=1}^n [\vec{P}_i \times (\vec{C} - \vec{A}_i)] = \sum_{i=1}^n [(\vec{A}_i - \vec{C}) \times \vec{P}_i]$$

El producto vectorial entre dos vectores puede expresarse:

$$\vec{M}_{P_i}^C = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_i \cos \alpha_i & P_i \cos \beta_i & P_i \cos \gamma_i \\ (x_c - x_{A_i}) & (y_c - y_{A_i}) & (z_c - z_{A_i}) \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^n P_i \cos \beta_i (z_c - z_{A_i}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i (y_c - y_{A_i}) \right\} \cdot \vec{i} +$$

$$+ \left\{ \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i (x_c - x_{A_i}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i (z_c - z_{A_i}) \right\} \cdot \vec{j} +$$

Nota:  $\cos \alpha_i$ ,  $\cos \beta_i$  y  $\cos \gamma_i$  son los cosenos directores.

(2)

$$+ \left\{ \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i (y_c - y_{Ai}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \beta_i (x_c - x_{Ai}) \right\} \cdot \vec{k} =$$

$$= M_{P_i}^c \alpha - \alpha + M_{P_i}^c y - y + M_{P_i}^c z - z \quad \text{siendo}$$

$$\vec{M}_{P_i}^c \alpha - \alpha = \left\{ \sum_{i=1}^n P_i \cos \beta_i (z_c - z_{Ai}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i (y_c - y_{Ai}) \right\} \cdot \vec{i} \quad (1)$$

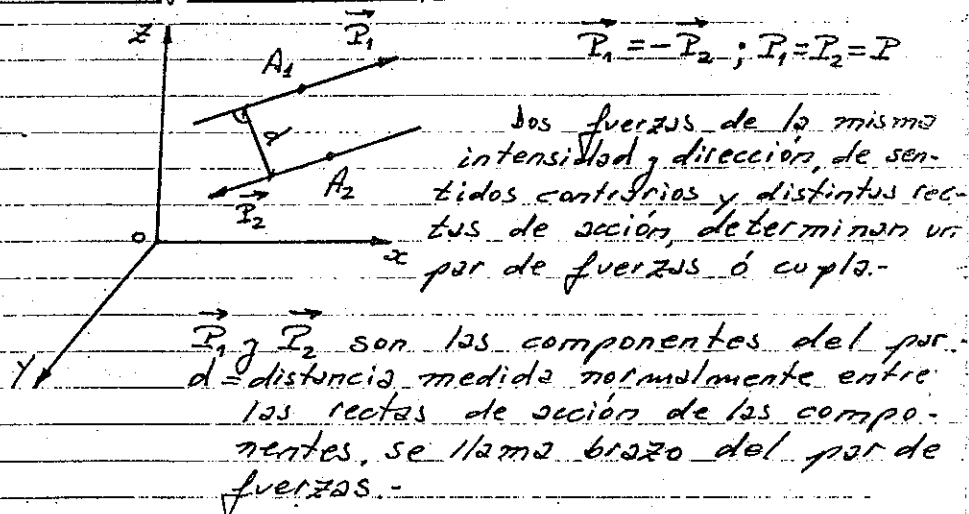
$$\vec{M}_{P_i}^c y - y = \left\{ \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i (x_c - x_{Ai}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i (z_c - z_{Ai}) \right\} \cdot \vec{j} \quad (2)$$

$$\vec{M}_{P_i}^c z - z = \left\{ \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i (y_c - y_{Ai}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \beta_i (x_c - x_{Ai}) \right\} \cdot \vec{k} \quad (3)$$

Justificar:

- 1<sup>ra</sup>) Que el momento de una fuerza no varía si el centro de momentos se desplaza paralelamente a la recta de acción de la fuerza.
- 2<sup>da</sup>) Que el momento de una fuerza respecto de un punto es independiente del punto que se tome sobre la recta de acción de la fuerza.
- 3<sup>ra</sup>) Cuando el momento de una fuerza respecto de un punto es nulo.

Par de fuerzas ó cuplo:



(3)

Justificar:-

1<sup>ra</sup>) Que el momento de un par de fuerzas es constante respecto de cualquier punto del espacio y que está dado por:

$$\vec{M}_{\text{par}} = \vec{P}_1 \times (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = \vec{P}_2 \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2)$$

(módulo)  $M_{\text{par}} = P \cdot d$  (Nm) Newton metro

2<sup>da</sup>) Que el vector momento de un par de fuerzas es un vector libre.

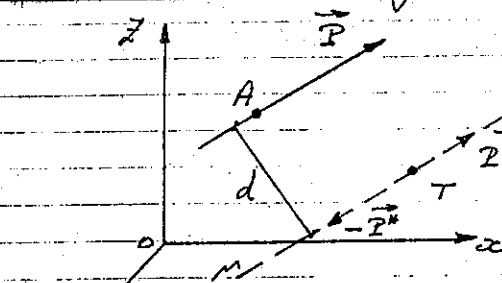
3<sup>ra</sup>) Que un par de fuerzas puede trasladarse ó girar en su plano sin alterar el efecto sobre el cuerpo sobre el cual actúa. Lo mismo que puede trasladarse en planos paralelos.

4<sup>ta</sup>) Que sucede si a un par de fuerzas le alteramos el módulo de sus fuerzas componentes y al mismo tiempo alteramos su brazo manteniendo constante el producto del módulo por el brazo.

5<sup>ta</sup>) Que pasaría si el brazo del par tendiera a infinito.

6<sup>ta</sup>) A qué es igual la proyección de un par sobre cualquier eje.

Traslación de una fuerza:-



El problema es que la recta de  $\vec{P}$  pase por el punto dado T sin alterar el efecto de la fuerza sobre el cuerpo sobre el cual actúa. Se procede de la siguiente forma:

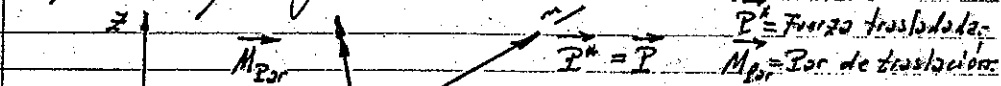
- 1<sup>ra</sup>) Se traza por T una recta n-n paralela a la recta de acción de la fuerza.
- 2<sup>da</sup>) Se introduce según n-n un sistema nulo (2<sup>o</sup> y 3<sup>o</sup> Principios de la Estática) tomam

(4)

do los módulos iguales al de la fuerza dato  $\vec{P}$  (llamaremos  $\vec{P}^*$  y  $-\vec{P}^*$ ).  
 3<sup>er</sup>) La fuerza  $\vec{P}^*$  es la fuerza dato  $\vec{P}$  trasladada y las fuerzas  $\vec{P}$  y  $-\vec{P}^*$  configuran, por definición, un par de fuerzas de módulo dado por:

$$M_{Br} = P \cdot d$$

es, decir que finalmente tendremos:



$\vec{P}^* = \text{Fuerza trasladada}$   
 $M_{Br} = \text{Par de traslación}$

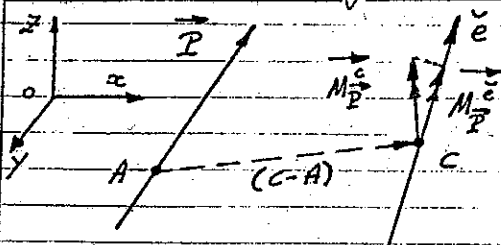
El vector  $M_{Br}$  es un vector libre de dirección normal al plano definido por la recta de acción de la fuerza dato  $\vec{P}$  y el punto dado T y de sentido que responde a la regla del observador.  
 Para distinguir los vectores fuerzas de los vectores momentos, indicaremos a los primeros con una flecha y a los segundos con dos.  
 Indicar:

1<sup>er</sup>) ¿qué diferencia existe entre el  $M_{Br}$  y el  $M_{\vec{P}}$ ?

2<sup>da</sup>) ¿qué expresión vectorial se utilizará para determinar  $M_{Br}$ ?

3<sup>er</sup>) ¿Cuál sería el resultado de trasladar un sistema de fuerzas a un mismo punto del espacio?

Momento de una fuerza respecto de un eje:



Definición:

$$M_{\vec{P}}^{\vec{e}} = [\vec{P} \times (C-A) \cdot \vec{e}] \cdot \vec{e}$$

A = punto cualquiera de la recta de acción de la fuerza.

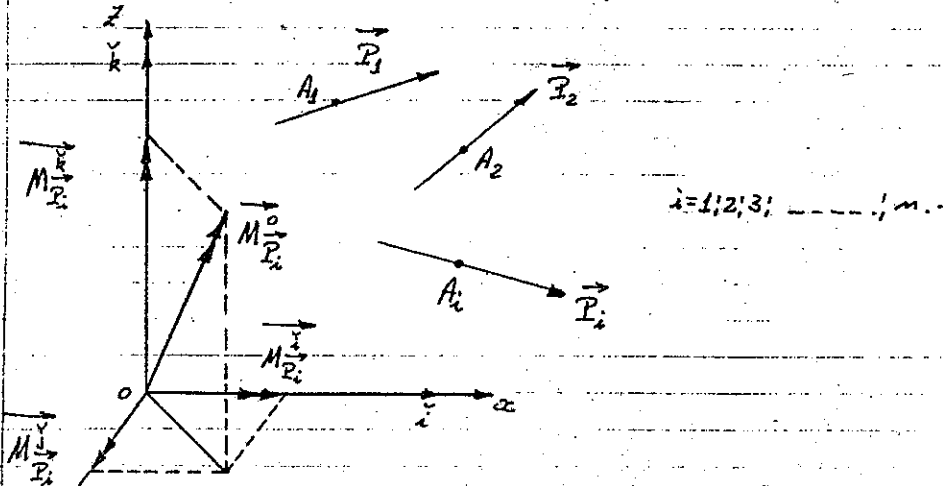
⑤

$C =$  punto cualquiera perteneciente al eje.-

El momento de una fuerza respecto de un eje es el vector que resulta igual a la componente cartesiana según el eje del vector momento de la fuerza respecto de cualquier punto del eje.

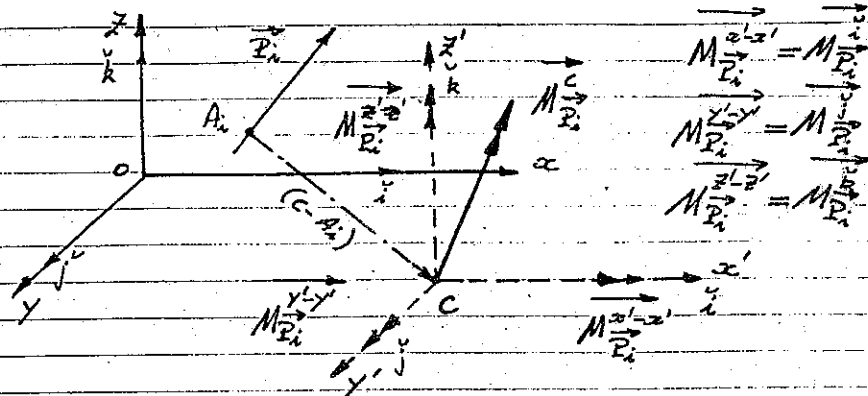
módulo  $M_P^{\vec{e}} = \vec{P} \times (C-A) \cdot \vec{e}$  (N.m) Newton metro

considerando un sistema de fuerzas el momento del sistema respecto de un eje es igual a la suma de los momentos respecto de dicho eje de cada una de las fuerzas componentes del sistema (son vectores colineales).-



La suma de los momentos de las fuerzas  $\vec{P}_i$  respecto de los ejes  $x-x$ ,  $y-y$  y  $z-z$  nos dan las tres componentes cartesianas del momento del sistema de fuerzas respecto del punto  $O$ . Luego, el tomar momentos del sistema de fuerzas respecto del punto  $O$  (origen de coordenadas) es igual a la suma geométrica de los momentos del sistema de fuerzas respecto de tres ejes ortogonales entre sí y pasantes por el centro de momentos tomado. Las correspondientes expresiones vectoriales están dadas por los ①, ② y ③ que corresponden a un centro de momentos  $C$  arbitrario, es decir:

⑥



$x' - x' \parallel x - x$   
 $y' - y' \parallel y - y$   
 $z' - z' \parallel z - z$

Pasantes por C.-

$$\vec{M}_{P_i}^C = \vec{M}_{P_i}^{x'x'} = \vec{M}_{P_i}^i = \left[ \sum_{i=1}^n P_i \cos \beta_i (z_c - z_{A_i}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i (y_c - y_{A_i}) \right] \cdot \vec{i} \quad (1)$$

$$\vec{M}_{P_i}^C = \vec{M}_{P_i}^{y'y'} = \vec{M}_{P_i}^j = \left[ \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i (x_c - x_{A_i}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i (z_c - z_{A_i}) \right] \cdot \vec{j} \quad (2)$$

$$\vec{M}_{P_i}^C = \vec{M}_{P_i}^{z'z'} = \vec{M}_{P_i}^k = \left[ \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i (y_c - y_{A_i}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \beta_i (x_c - x_{A_i}) \right] \cdot \vec{k} \quad (3)$$

si el centro de momentos es el origen de coordenadas, para el cual es  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , las expresiones anteriores quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\vec{M}_{P_i}^0 = \vec{M}_{P_i}^i = \left[ \sum_{i=1}^n y_{A_i} P_i \cos \gamma_i - \sum_{i=1}^n z_{A_i} P_i \cos \beta_i \right] \cdot \vec{i} \quad (4)$$

$$\vec{M}_{P_i}^0 = \vec{M}_{P_i}^j = \left[ \sum_{i=1}^n z_{A_i} P_i \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^n x_{A_i} P_i \cos \gamma_i \right] \cdot \vec{j} \quad (5)$$

$$\vec{M}_{P_i}^0 = \vec{M}_{P_i}^k = \left[ \sum_{i=1}^n x_{A_i} P_i \cos \beta_i - \sum_{i=1}^n y_{A_i} P_i \cos \alpha_i \right] \cdot \vec{k} \quad (6)$$

justificar.-

1<sup>da</sup>) Que el momento de una fuerza respecto de un eje sólo depende de la fuerza y del eje,

(7)

es decir, que cualquiera sea el punto tomado sobre la recta de acción de la fuerza y el tomado perteneciente al eje, el valor de  $M_P^F$  es siempre el mismo.-

2<sup>da</sup>) Cuando el momento de una fuerza respecto de un eje, es nulo.-

3<sup>ra</sup>) Cuanto vale el momento de un par de fuerzas respecto de un eje.-

4<sup>ta</sup>) Cual sería la forma práctica de calcular el módulo del vector momento de una fuerza respecto de un eje.-

### Concepto de equivalencia entre dos sistemas de fuerzas.-

Diremos, que dos sistemas de fuerzas son equivalentes, cuando actuando independientemente sobre el mismo cuerpo, tienen, sobre él, el mismo efecto sobre el cambio de estado de movimiento del mismo.-

### Concepto de equilibrio de un sistema de fuerzas.-

Diremos que un sistema de fuerzas está en equilibrio cuando no tiene ningún efecto sobre el cambio de estado de movimiento del cuerpo sobre el cual actúa.

### Operaciones con los sistemas de fuerzas.-

1<sup>ra</sup>) Reducción:

Reducir un sistema de fuerzas es encontrar la mínima expresión equivalente. Esta mínima expresión equivalente puede ser:

- a) Una única fuerza entonces hablaremos de resultante ( $\vec{R}$ ).-
- b) Un único par de fuerzas entonces hablaremos de par resultante ( $\vec{M}_R$ ).-
- c) Una fuerza y un par de fuerzas irreducibles entre sí, hablaremos entonces de resultante de reducción ( $\vec{R}_R$ ) y par de reducción ( $\vec{M}_{R_0}$ ).-

⑧

Podrían ser dos fuerzas de rectas de acción oblicuas, es decir, irreducibles. Cuando esto sucede, hay infinitos juegos de dos fuerzas de rectas de acción oblicuas equivalentes al sistema de fuerzas dado.

a) Que no exista la mínima expresión equivalente, es decir, que el sistema dado es equivalente a nada, luego no habrá efecto y será un sistema de fuerzas nulo o equilibrado o en equilibrio.

## 2<sup>da</sup>) Problemas de fuerzas con incógnitas.

Dado un sistema de fuerzas se pide encontrar otro sistema, el cual deberá cumplir ciertas condiciones, que sea equivalente al sistema dado o que conjuntamente con el sistema dado formen un sistema equilibrado.

### Fuerzas generalizadas.

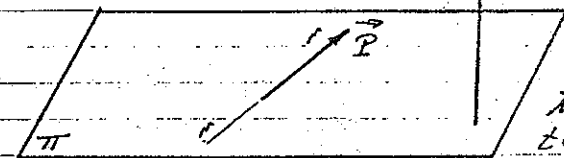
Un sistema de fuerzas podrá estar formado solamente por fuerzas propiamente dichas o sólo por pares de fuerzas o por fuerzas propiamente dichas y por pares de fuerzas. Por lo tanto hablaremos de sistemas de fuerzas generalizadas incluyendo en esta terminología a todas las posibilidades indicadas.

### Reducción de una fuerza y de un par de fuerzas.

Existen dos posibilidades:

#### 1<sup>ra</sup>) Fuerza y par coplanarios.

$$\vec{P} \cdot \vec{M} = 0$$



$$\vec{P} \in \pi$$

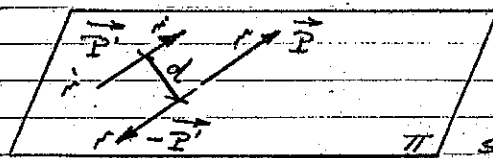
$$\vec{P} \text{ or } \vec{M} \in \pi$$

$$\vec{M} \perp \pi$$

$\vec{M}$  es el vector momento del par dado.

(9)

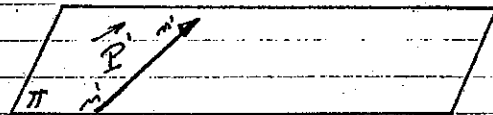
Hacemos  $d = \frac{M}{P}$  representemos así el par de fuerzas y lo movemos en el plano  $\pi$  hasta:



$$P = P' = \text{módulo } \vec{P}$$

$\vec{P}$  y  $-\vec{P}'$  forman un sistema nulo luego lo podemos eliminar.

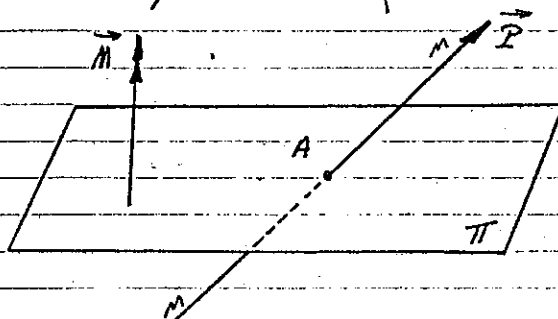
$$m'-m' // m-m$$



De la reducción resulta una única fuerza ( $\vec{P}'$ ) de la misma intensidad, dirección y sentido que la fuerza dato ( $\vec{P}$ ), pero de distinta recta de acción ( $m'-m'$ ) que es paralela a la recta de acción de la fuerza dato ( $m-m$ ). La fuerza  $\vec{P}'$  es la resultante de la reducción de la fuerza dato  $\vec{P}$  y del par de fuerzas dato  $\vec{M}$ .

2<sup>da</sup>) Fuerza y par no coplanarios.

$$\vec{P} \cdot \vec{M} \neq 0 \quad \text{pues } \vec{P} \nparallel \vec{M}$$

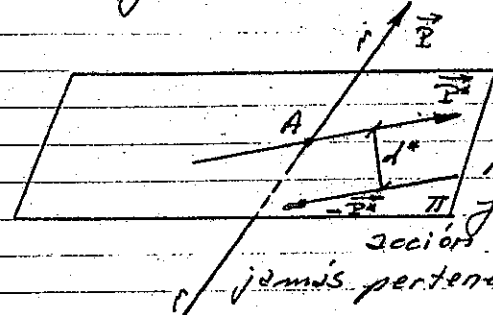


$$Par \in \pi$$

$$\vec{P} \notin \pi$$

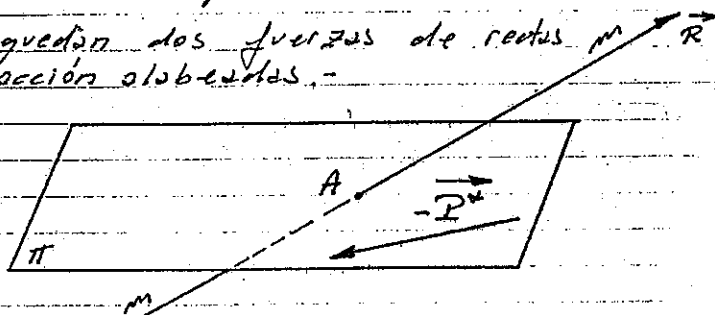
Representemos el par de fuerzas dando valores a los módulos de las fuerzas y tomando un brazo, tal que:  $M = P \cdot d$

moveremos el par en el plano  $\Pi$  hasta que la recta de acción de uno de las fuerzas pase por el punto A (Punto en que la recta de acción de la fuerza dada  $\vec{P}$  corta al plano  $\Pi$ ).



de acuerdo al primer principio de la estática podemos reducir  $\vec{P}$  y  $\vec{P}'$  en una fuerza  $\vec{R}$  cuya recta de acción pasa por A y que jamás pertenecerá al plano  $\Pi$ .

Nos quedan dos fuerzas de rectas  $m$  de acción oblicuas.

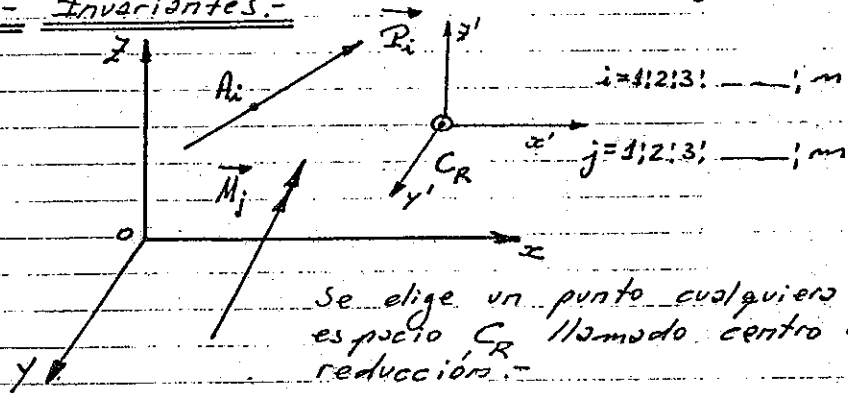


Conclusiones.-

Si  $\vec{P} \cdot \vec{M} = 0$  siendo  $\vec{P} \neq 0$  y  $\vec{M} \neq 0$  hay resultante.

Si  $\vec{P} \cdot \vec{M} \neq 0$  no se puede reducir a un único elemento.

Reducción de 1 sistema de fuerzas generalizadas.- Invariantes.-



Se elige un punto cualquiera del espacio  $C_R$  llamado centro de reducción.

(11)

1<sup>da</sup>) Se trasladan las fuerzas  $\vec{P}_i$  al centro de reducción, la traslación de una implica la aparición de un par de traslación:-

2<sup>da</sup>) Sumamos geométricamente los  $n$  vectores fuerzas trasladados y tendremos la resultante de reducción ( $\vec{R}_R$ ), es decir:

$$\vec{R}_R = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \quad (7)$$

3<sup>da</sup>) Sumamos geométricamente los  $n$  vectores momentos de los  $n$  pares de traslación y le adicionamos los  $m$  vectores momentos de los  $m$  pares dados (estos son vectores libres) y tendremos el vector momento de reducción ( $\vec{M}_{Rc}^R$ ), es decir:

$$\vec{M}_{Rc}^R = \sum_{i=1}^n [\vec{P}_i \times (C_R - A_i)] + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j \quad (8)$$

Las expresiones (7) y (8) son las expresiones vectoriales que nos definen la reducción de un sistema de fuerzas generalizadas:-

La expresión (7) no depende del centro de reducción adoptado, luego, cualquiera sea este, el vector resultante de reducción tiene siempre el mismo módulo, el mismo sentido y la misma dirección y en consecuencia se lo llama invariante vectorial de un sistema de fuerzas generalizadas y lo indicaremos con:

$$\boxed{\vec{I}_v = \vec{R}_R} \quad (9)$$

al cambiar el centro de reducción lo que cambia es la recta de acción de la  $\vec{R}_R$  y también cambia el  $\vec{M}_{Rc}^R$  pero el producto escalar de ambos vectores no cambia, lo que nos da el invariante escalar de un sistema de fuerzas generalizadas, es decir:

$$\boxed{I_e = \vec{R}_R \cdot \vec{M}_{Rc}^R} \quad (10)$$

Se deja que el estudiante justifique la expresión (12) que es invariable para un sistema dado. -  
desarrollando la expresión (10) podemos poner:

$$I_e = \vec{R}_R \cdot \vec{M}_{Re}^c = R_R \cdot M_{Re}^c \cdot \cos u$$

$u =$  ángulo formado por los dos vectores  $\vec{R}_R$  y  $\vec{M}_{Re}^c$ .

luego será

$$I_e' = \frac{I_e}{R_R} = M_{Re}^c \cdot \cos u = M_{Re}^c \cdot \vec{e}_{RR}$$

es decir, que tendríamos otra forma de indicar el invariante escalar ( $I_e'$ ) al cual se lo interpreta diciendo que cualquiera sea el centro de reducción adoptado, no varía  $\vec{R}_R$  pero si varía  $\vec{M}_{Re}^c$ , pero, en forma tal, que la proyección del vector momento de reducción sobre la dirección del vector resultante de reducción es constante. -

$$I_e' = \vec{M}_{Re}^c \cdot \vec{e}_{RR} \quad (10a)$$

es

$$I_e' = \frac{I_e}{R_R} \quad (10b)$$

Las expresiones vectoriales (7) y (8) se corresponden con las siguientes expresiones escalares o analíticas. -

$$(7a) \quad R_R^{x'-x'} = \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i = R_R \cos \alpha_{\vec{R}_R}$$

$$(7b) \quad R_R^{y'-y'} = \sum_{i=1}^n P_i \cos \beta_i = R_R \cos \beta_{\vec{R}_R}$$

$$(7c) \quad R_R^{z'-z'} = \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i = R_R \cos \gamma_{\vec{R}_R}$$

con la (7)

(13)

con la ⑧:

$$8a) M_{Re}^{CR} = \left[ \sum_{i=1}^m P_i \cos \beta_i (x_{CR} - x_{Ai}) - \sum_{i=1}^m P_i \cos \gamma_i (y_{CR} - y_{Ai}) \right] + \sum_{j=1}^m M_j \cos \alpha_j$$

$$8b) M_{Re}^{CR} = \left[ \sum_{i=1}^m P_i \cos \gamma_i (x_{CR} - x_{Ai}) - \sum_{i=1}^m P_i \cos \alpha_i (x_{CR} - x_{Ai}) \right] + \sum_{j=1}^m M_j \cos \beta_j$$

$$8c) M_{Re}^{CR} = \left[ \sum_{i=1}^m P_i \cos \alpha_i (y_{CR} - y_{Ai}) - \sum_{i=1}^m P_i \cos \beta_i (x_{CR} - x_{Ai}) \right] + \sum_{j=1}^m M_j \cos \gamma_j$$

Distintas posibilidades que pueden presentarse al reducir un sistema de fuerzas generalizadas.

Dejaremos que el estudiante discuta las distintas posibilidades, estas son:

1<sup>ra</sup>)  $\vec{R}_R \neq 0$   
 $\vec{M}_{Re}^{CR} \neq 0 \quad \text{y} \quad I_e \neq 0$  Por 3 fuerzas irreducibles entre sí.

2<sup>a</sup>)  $\vec{R}_R \neq 0$   
 $\vec{M}_{Re}^{CR} = 0 \quad \therefore I_e = 0$  Hay resultante.

3<sup>a</sup>)  $\vec{R}_R \neq 0$   
 $\vec{M}_{Re}^{CR} \neq 0 \quad \text{y} \quad I_e = 0$  Hay resultante.

4<sup>a</sup>)  $\vec{R}_R = 0$   
 $\vec{M}_{Re}^{CR} \neq 0 \quad \therefore I_e = 0$  Hay par resultante.

5<sup>a</sup>)  $\vec{R}_R = 0$   
 $\vec{M}_{Re}^{CR} = 0 \quad \therefore I_e = 0$  Condición vectorial necesario y suficiente de equilibrio de un sistema de fuerzas generalizadas.

(14)

### clasificación de los sistemas de fuerzas generalizadas.-

clasificación

- a) Admiten resultante ( $\vec{R}$ ).-
- b) Admiten por resultante ( $\vec{M}_R$ ).-
- c) Admiten resultante de reducción ( $\vec{R}_R$ ) y por resultante de reducción ( $\vec{M}_{R_R}$ ) irreducibles entre sí.-
- d) Están en equilibrio.-

### Expresiones independientes de los sistemas de fuerzas generalizadas.-

Las expresiones (7a), (7b) y (7c) nos permiten determinar la resultante de reducción ( $\vec{R}_R$ ) y las (8a), (8b) y (8c) el momento de reducción ( $\vec{M}_{R_R}$ ). en consecuencia poseemos seis expresiones independientes, tres de proyección y tres de momentos.-

### Condiciones analíticas necesarias y suficientes que expresan el equilibrio de los sistemas de fuerzas generalizadas.-

La nulidad simultánea de las seis expresiones independientes, es decir:

(7a) = (7b) = (7c) = (8a) = (8b) = (8c) = 0      está en equilibrio.  
nos indican que el sistema de fuerzas generalizadas está en equilibrio.  
justifican.-

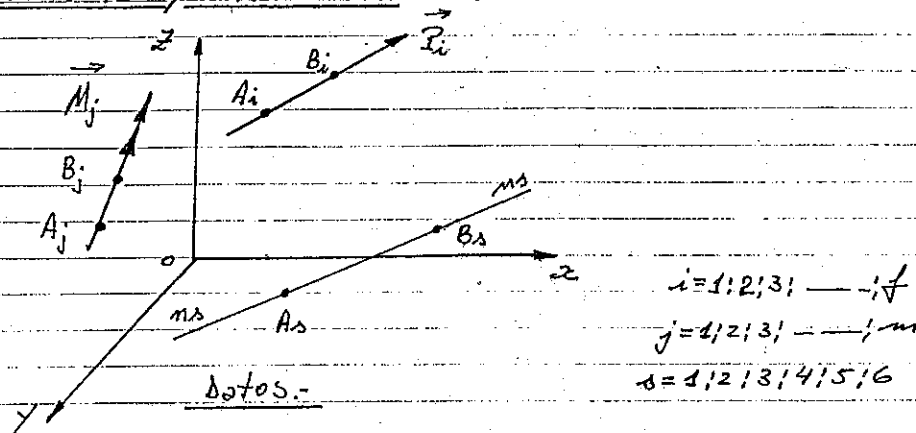
- a) discutir las distintas posibilidades al ser nulas las expresiones independientes.-
- b) Ir cambiando las expresiones de proyección por expresiones de momentos y tendremos:
  - b.1. Cuatro de momentos y dos de proyección.-
  - b.2. Cinco de momentos y uno de proyección.-
  - b.3. Seis de momentos.-

discutir que la nulidad de las seis es condición necesaria, analítica, de equilibrio, indicar la condición a cumplir para hacerlas suficiente, es decir, que sean independientes.-

# Problemas de fuerzas con incógnitas.

Al disponer de seis expresiones independientes se pueden, en principio, plantear problemas de fuerzas con seis incógnitas, por ejemplo.

## Problema planteado:



$$i = 1, 2, 3 \quad \text{--- } i, j$$

$$j = 1, 2, 3 \quad \text{--- } j, m$$

$$s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Datos:

de c/fuerza  $\Rightarrow P_i = \quad ; x_{A_i} = \quad ; y_{A_i} = \quad ; z_{A_i} = \quad ; x_{B_i} = \quad ;$

$$y_{B_i} = \quad ; z_{B_i} = \quad ; \vec{P}_i = (B_i - A_i)$$

de c/par  $\Rightarrow M_j = \quad ; x_{A_j} = \quad ; y_{A_j} = \quad ; z_{A_j} = \quad ; x_{B_j} = \quad ;$

$$y_{B_j} = \quad ; z_{B_j} = \quad ; \vec{M}_j = (B_j - A_j)$$

de c/fuerza incógnita  $\Rightarrow x_{A_s} = \quad ; y_{A_s} = \quad ; z_{A_s} = \quad ;$

$$x_{B_s} = \quad ; y_{B_s} = \quad ; z_{B_s} = \quad$$

## Incógnitas:

$$X_{A_s} = ?$$

El problema puede tratarse como equivalencia, es decir, que el sistema dato sea equivalente al sistema incógnito o como equilibrio, es decir, que el sistema dato conjuntamente con el sistema incógnito formen un sistema nulo o equilibrado o en equilibrio.

Tabulación de la reducción de un sistema de fuerzas generalizadas. -

(16)

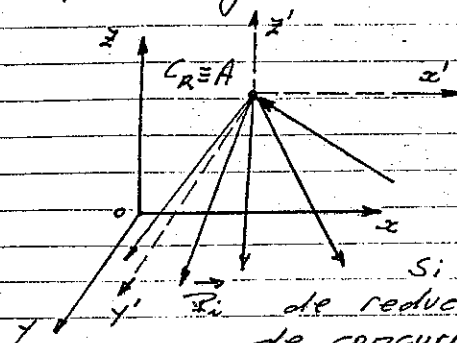
| $x_{eq} = m; y_{eq} = m; z_{eq} = m$ |  | (1)                              | (2)                              | (3)                              | (4)                              | (5)                              | (6)                              | (7)                              | (8)                              | (9)                              | (10)                             | (11)                             | (12)                             | (13)                             | (14)                             | (15)                             | (16)                             | (17)                             | (18)                             | (19)                             | (20)                             | (21)                             | (22)                             | (23)                             | (24)                             | (25)                             | (26)                             |
|--------------------------------------|--|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$     |  | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \cos \beta_i$ |
| $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$     |  | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ | $P_i \cos \alpha_i \sin \beta_i$ |
| $P_i \sin \alpha_i$                  |  | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              | $P_i \sin \alpha_i$              |
| $N_{im}$                             |  | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         | $N_{im}$                         |
| $\Sigma(5) = R_{R \ x-x}$            |  | $\Sigma(6) = R_{R \ y-y}$        |                                  | $\Sigma(7) = R_{R \ z-z}$        |                                  | $\Sigma(8) = R_{R \ x-y}$        |                                  | $\Sigma(9) = R_{R \ x-z}$        |                                  | $\Sigma(10) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(11) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(12) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(13) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(14) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(15) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(16) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(17) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(18) = R_{R \ y-z}$       |                                  |
| $\Sigma(19) = R_{R \ x-x}$           |  | $\Sigma(20) = R_{R \ y-y}$       |                                  | $\Sigma(21) = R_{R \ z-z}$       |                                  | $\Sigma(22) = R_{R \ x-y}$       |                                  | $\Sigma(23) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(24) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(25) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(26) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(27) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(28) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(29) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(30) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(31) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(32) = R_{R \ y-z}$       |                                  |
| $\Sigma(33) = R_{R \ x-x}$           |  | $\Sigma(34) = R_{R \ y-y}$       |                                  | $\Sigma(35) = R_{R \ z-z}$       |                                  | $\Sigma(36) = R_{R \ x-y}$       |                                  | $\Sigma(37) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(38) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(39) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(40) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(41) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(42) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(43) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(44) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(45) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(46) = R_{R \ y-z}$       |                                  |
| $\Sigma(47) = R_{R \ x-x}$           |  | $\Sigma(48) = R_{R \ y-y}$       |                                  | $\Sigma(49) = R_{R \ z-z}$       |                                  | $\Sigma(50) = R_{R \ x-y}$       |                                  | $\Sigma(51) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(52) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(53) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(54) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(55) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(56) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(57) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(58) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(59) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(60) = R_{R \ y-z}$       |                                  |
| $\Sigma(61) = R_{R \ x-x}$           |  | $\Sigma(62) = R_{R \ y-y}$       |                                  | $\Sigma(63) = R_{R \ z-z}$       |                                  | $\Sigma(64) = R_{R \ x-y}$       |                                  | $\Sigma(65) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(66) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(67) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(68) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(69) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(70) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(71) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(72) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(73) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(74) = R_{R \ y-z}$       |                                  |
| $\Sigma(75) = R_{R \ x-x}$           |  | $\Sigma(76) = R_{R \ y-y}$       |                                  | $\Sigma(77) = R_{R \ z-z}$       |                                  | $\Sigma(78) = R_{R \ x-y}$       |                                  | $\Sigma(79) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(80) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(81) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(82) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(83) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(84) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(85) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(86) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(87) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(88) = R_{R \ y-z}$       |                                  |
| $\Sigma(89) = R_{R \ x-x}$           |  | $\Sigma(90) = R_{R \ y-y}$       |                                  | $\Sigma(91) = R_{R \ z-z}$       |                                  | $\Sigma(92) = R_{R \ x-y}$       |                                  | $\Sigma(93) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(94) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(95) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(96) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(97) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(98) = R_{R \ y-z}$       |                                  | $\Sigma(99) = R_{R \ x-z}$       |                                  | $\Sigma(100) = R_{R \ y-z}$      |                                  | $\Sigma(101) = R_{R \ x-z}$      |                                  | $\Sigma(102) = R_{R \ y-z}$      |                                  |

$$M_{Re \ x-x}^{eq} = \Sigma(17) + \Sigma(24) ; M_{Re \ y-y}^{eq} = \Sigma(18) + \Sigma(25) ; M_{Re \ z-z}^{eq} = \Sigma(19) + \Sigma(26)$$

(17)

## Particularización de los Sistemas de Fuerzas Generalizados:

1<sup>er</sup>) Espaciales y concurrentes a un punto propio.



$i=1, 2, \dots, n$

En estos sistemas no puede haber pares. -  
(Indicar el porqué). -

Si tomamos como centro de reducción el punto común de concurrencia de las fuerzas, es decir,  $C_R \equiv A$  las expresiones (7) y (8) quedan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_R = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \\ M_{R_0}^A = \sum_{i=1}^n [\vec{P}_i \times (A-A)] = 0 \end{array} \right. \quad \therefore I_e = 0$$

El sistema admite resultante ( $\vec{R}$ ) cuya recta de acción pasa por A, es decir:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

Luego las únicas expresiones independientes son las (7a), (7b) y (7c), la nulidad de las mismas nos dan las condiciones analíticas necesarios y suficientes que justifican el equilibrio.

Completar con:

1<sup>er</sup>) Cambiar las expresiones de proyección por expresiones de momentos, es decir:

- 1.a. Dos de proyección y una de momentos.
- 1.b. Una de proyección y dos de momentos.
- 1.c. Tres de momentos.

Justificarlas y discutir las para que sean independientes. La nulidad simultánea de las mismas nos dan las distintas formas de expresar analíticamente las condiciones nece-

(18)

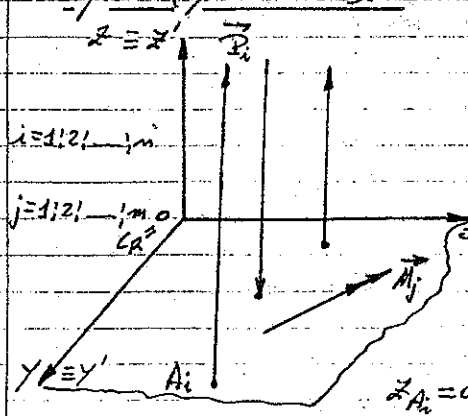
sarías y suficientes de equilibrio.

2<sup>da</sup>) Indicar cómo sería un problema de fuerzas con incógnitas.

3<sup>da</sup>) Discutir qué pasaría si tomáramos un centro de reducción ( $C_R$ ) distinto del punto de concurrencia de las fuerzas ( $A$ ).

4<sup>da</sup>) Determinar la resultante ( $\vec{R}$ ).

5<sup>da</sup>) Espaciales y concurrentes a un punto impropio (paralelas).



$$\cos \alpha_i = \cos \beta_i = \cos \gamma_i = 0$$

$$\cos \gamma_i = \pm 1$$

Datos.

$$P_i = \quad ; \cos \gamma_i =$$

$$x_{A_i} = \quad ; y_{A_i} =$$

$$z_{A_i} = 0 \text{ (por comodidad).}$$

$$M_j = \quad ; \cos \alpha_j = \quad ; \cos \beta_j = \quad ; \cos^2 \alpha_j + \cos^2 \beta_j = 1$$

Por comodidad tomamos los rectos de acción de las fuerzas paralelos al eje  $z-z'$ . Los pares deben estar contenidos en el haz de planos cuyo eje sostén es el eje  $z-z'$ .

$$P_i \cos \alpha_i = P_i \cos \beta_i = 0 ; P_i \cos \gamma_i = \pm P_i \text{ (luego, por co-}$$

modidad le daremos signo al módulo de las fuer-  
zas).

Si reducimos al origen de coordenadas, es decir, hacemos  $C_R \equiv O$  tendremos. (según las expresiones

$$\textcircled{7} \text{ y } \textcircled{8}) \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

$$\vec{M}_O^O = \sum_{i=1}^n [\vec{P}_i \times (O - A_i)] + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

Las expresiones escalares  $\textcircled{7a} = \textcircled{7b} = 0$

$$12 \quad \textcircled{7c} \quad \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i = R_{R_{z-z'}} \quad \textcircled{A}$$

(19)

Luego la resultante de reducción coincide con el eje coordenado  $z-z'$ .

La expresión escalar (8j) es:

$$M_{Re\ z-z'}^0 = \sum_{i=1}^m \gamma_{A_i} P_i \cos \gamma_i + \sum_{j=1}^m M_j \cos \alpha_j \quad (B)$$

La (8b) es:

$$M_{Re\ y-y'}^0 = - \sum_{i=1}^m x_{A_i} P_i \cos \gamma_i + \sum_{j=1}^m M_j \cos \alpha_j \quad (C)$$

La (8c) es:

$$M_{Re\ z'-z'}^0 = 0$$

Luego el vector momento del par de reducción no tiene componente según la dirección del eje  $z-z'$ , es decir, que el par de reducción está contenido en un plano del haz cuyo eje sosten es el eje  $z-z'$  (su vector momento está en un plano paralelo al plano coordenado  $x-y$ ).

En consecuencia es:

$$\vec{R}_R \perp \vec{M}_{Re}^0 \quad \therefore I_e = 0$$

Luego estos sistemas están en equilibrio o admiten resultante ( $\vec{R}$ ) o admiten par resultante ( $\vec{M}_R$ ).

Las expresiones independientes son las indicadas (A), (B) y (C) (solamente tres).

Completar con:-

- 1<sup>ra</sup>) Reducirlo y determinar  $\vec{R}$  o  $\vec{M}_R$  o que está en equilibrio.-
- 2<sup>da</sup>) Discutir que la nulidad simultánea de las (A), (B) y (C) son condición necesaria y suficiente para expresar analíticamente el equilibrio.-
- 3<sup>ra</sup>) Cambiar la expresión de proyección por una de momentos y tener tres expresiones de momentos, justificar-

(20)

los y discutirlos para que sean independientes. Considerar como condición necesaria y suficiente que analíticamente exprese el equilibrio la nulidad simultánea de ellas.

4<sup>o</sup>) Indicar como sería un problema de fuerzas con incógnitas.

5<sup>o</sup>) Discutir que pasaría si tomáramos un centro de reducción ( $C_R$ ) distinto del origen de coordenadas.

### 3<sup>er</sup>) Caso general de fuerzas generalizadas coplanares.

Trabajaremos con el plano coordenado  $z-y$  con el eje  $z$  saliente del plano, terna ortogonal izquierda.

$$\cos \alpha_i = \cos \beta_j = \cos \gamma_j = 0 ; x_{A_i} = 0$$

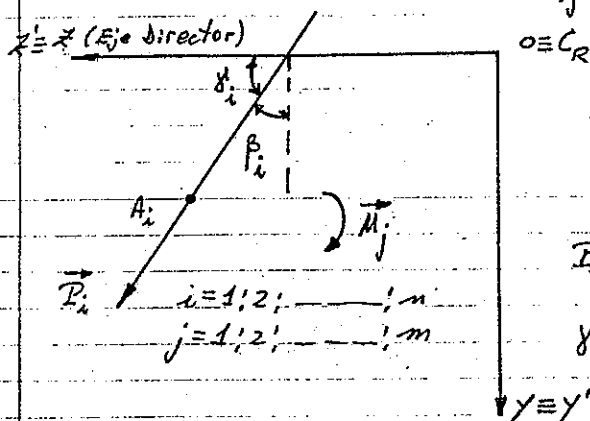
$$O \equiv C_R \quad \cos \alpha_j = \pm 1$$

$$\cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1$$

Datos.

$$P_i = i / A_i \quad ; \quad z A_i =$$

$$y_i = \quad ; \quad M_j =$$



Reducciones.

Tomemos como centro de reducción el origen de coordenadas, es decir,  $C_R \equiv O$ . De las expresiones vectoriales (7) y (8) es:

$$\vec{R}_R = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

$$\vec{M}_R^O = \sum_{i=1}^n [\vec{P}_i \times (O - A_i)] + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

las expresiones escalares (7a), (7b), (7c), (8a), (8b) y (8c)

(21)

quedan:

$$\sum_{i=1}^n I_i \cos \alpha_i = R_{x'x'} = 0$$

$$(D) \quad \sum_{i=1}^n P_i \cos \beta_i = R_{y'y'}$$

$$(E) \quad \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i = R_{z'z'}$$

$$M_{R_{x'x'}}^0 = \left[ \sum_{i=1}^n P_i \cos \beta_i (z_0 - z_{A_i}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i (y_0 - y_{A_i}) \right] + \sum_{j=1}^m M_j \cos \alpha_j =$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^n y_{A_i} P_i \cos \gamma_i - \sum_{i=1}^n z_{A_i} P_i \cos \beta_i \right] + \sum_{j=1}^m M_j \quad \text{teniendo}$$

en cuenta que  $z_0 = y_0 = 0$  y como  $\cos \alpha_i = \pm 1$  le pondremos signo a los módulos de los  $M_j$  dato.

$$\left. \begin{aligned} M_{R_{y'y'}}^0 &= 0 \\ M_{R_{z'z'}}^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{pues es } x_0 = z_{A_i} = 0 \quad \begin{matrix} \text{(ejes } x-z \text{ y } y \text{ son} \\ \text{coplanares con las fcs.} \\ \text{dato.} \end{matrix} \\ &\text{y } \cos \alpha_i = \cos \beta_i = \cos \gamma_i = 0 \end{aligned}$$

Luego  $\vec{R}_R$  está contenido en el plano de las fuerzas dato (plano  $x-y$ ) y el  $M_{R_e}^0$  coincide con el eje  $x-x'$ , luego es:

$$\vec{R}_R \perp \vec{M}_{R_e}^0 \Rightarrow I_e = 0$$

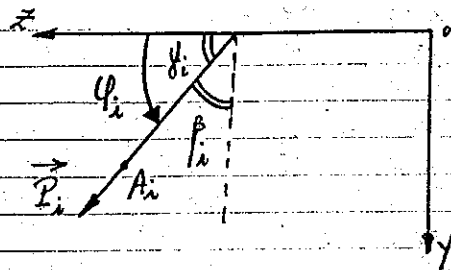
El sistema admite resultante ( $\vec{R}$ ) ó por resultante ( $M_R$ ) ó está en equilibrio. Las únicas expresiones independientes son las (7b), (7c) y (8a), la nulidad de las mismas nos dan las condiciones analíticas necesarias y suficientes que justifican el equilibrio.

Concepto de argumento de una fuerza.

Al trabajar con sistemas de fuerzas coplanares es más cómodo trabajar con un solo ángulo (argumento) en vez de los dos ángulos directores respecto de los ejes coordenados  $y$  y  $z$  ( $\beta$  y  $\gamma$ ). Se define como argumento de una fuerza al ángulo en que hay que girar en sentido anti-horario al eje director ( $z-z'$ ) hasta que coincida con la recta de

(22)

sección de la fuerza y el sentido positivo del eje director con el sentido de la fuerza.



$\phi_i = \text{Argumento}$

$$\cos \beta_i = \sin \phi_i$$

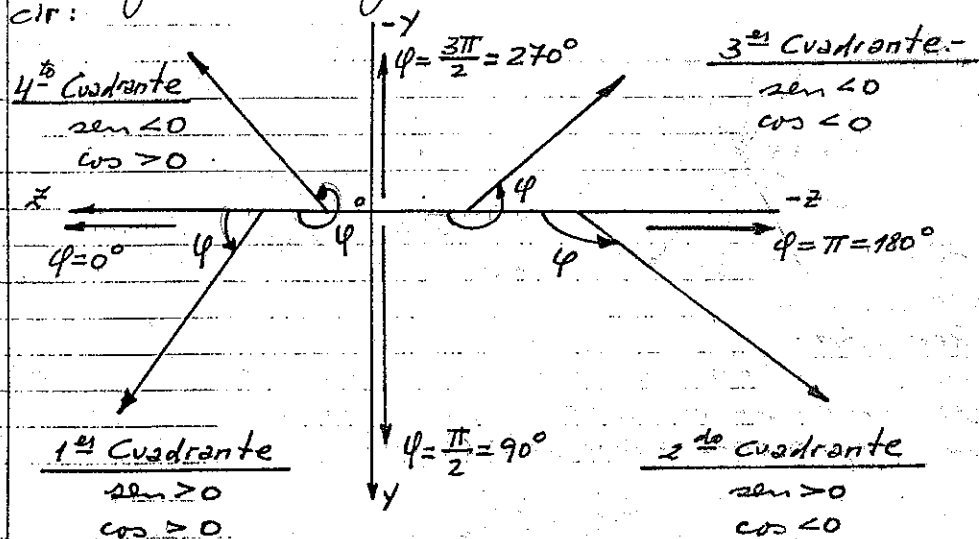
$$\cos \beta_i = \cos \phi_i$$

luego la expresión (8) en función del argumento es:

$$M_{R_e}^{C_R} \vec{x}'\vec{z}' = \left[ \sum_{i=1}^n P_i \sin \phi_i (\vec{z}_R - \vec{z}_{A_i}) - \sum_{i=1}^n P_i \cos \phi_i (\vec{y}_R - \vec{y}_{A_i}) \right] + \sum_{j=1}^m M_j$$

teniendo en cuenta  
que  $\cos \alpha_j = \pm 1$

definido el concepto de argumento sigue la  
circunferencia trigonométrica a utilizar, es de-  
cir:



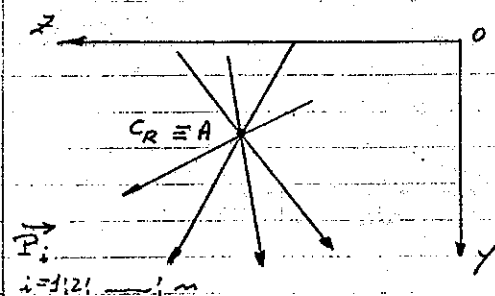
completar con:

- 1<sup>er</sup>) Reducirlo y determinar  $\vec{R}$  ó  $\vec{M}_R$  ó que  
esté en equilibrio.
- 2<sup>da</sup>) discutir que la nulidad simultánea de las

(23)

- ①, ⑤ y ⑥ son condición necesaria y suficiente para expresar analíticamente el equilibrio.
- 3<sup>ta</sup>) Cambiar las expresiones de proyección por expresiones de momentos y tener:
- Una de proyección y dos de momentos.
  - Tres de momentos.
- justificarlos y discutirlos para que sean independientes. Considerar como condición necesaria y suficiente que analíticamente exprese el equilibrio, la nulidad simultánea de ellos.
- 4<sup>ta</sup>) Indicar como sería un problema de fuerzas con incógnitas.
- 5<sup>ta</sup>) Discutir qué pasaría si tomáramos un centro de reducción ( $C_R$ ) distinto del origen de coordenadas.
- Que pertenezca al plano  $Z-Y$ .
  - Que no pertenezca al plano  $Z-Y$ .

4<sup>ta</sup>) Fuerzas generalizadas coplanares y concurrentes a un punto propio.



En estos sistemas no puede haber pares.

Datos:

$$P_i = \quad ; \quad Y_A = \quad ; \quad Z_A = \quad$$

Reducción:

Tomemos como centro de reducción el punto común de concurrencia de las fuerzas  $C_R \equiv A$ . De las expresiones vectoriales ⑦ y ⑧ es:

$$\vec{R}_R = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

$$\vec{M}_{Re}^A = 0$$

$$\therefore I_e = 0$$

Luego el sistema admite resultante o está en equilibrio. Las únicas expresiones independientes son

125 (76) y (76), es decir:

$$(G) \quad \sum_{i=1}^n P_i \sin \varphi_i = R_y = R \sin \varphi_R$$

$$(H) \quad \sum_{i=1}^n P_i \cos \varphi_i = R_x = R \cos \varphi_R$$

La nulidad simultánea de las mismas nos dan las condiciones analíticas necesarias y suficientes que justifican el equilibrio.

Completar con:

1<sup>ra</sup>) Reducirlo y determinar  $\vec{R}$  ó que está en equilibrio.

2<sup>da</sup>) Discutir que la nulidad simultánea de las (G) y (H) son condición necesaria y suficiente para expresar analíticamente el equilibrio.

3<sup>ra</sup>) Cambiar las expresiones de proyección por expresiones de momentos y tener:

3.1. Una de proyección y una de momento.

3.2. Dos expresiones de momentos. Justificarlas y discutirlos para que sean independientes. Considerar como condición necesaria y suficiente que analíticamente exprese el equilibrio, la nulidad simultánea de ellas.

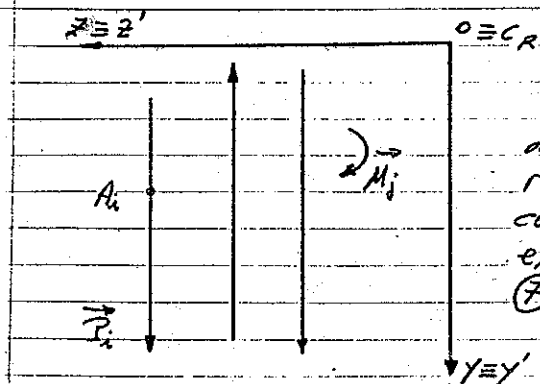
4<sup>ta</sup>) Indicar como sería un problema de fuerzas con incógnitas.

5<sup>ta</sup>) Discutir qué pasaría si el centro de reducción ( $C_R$ ) no coincidiera con (A) punto común de las rectas de acción de las fuerzas.

5<sup>ta</sup>) Fuerzas generalizadas coplanares y concurrentes a un punto impropio (paralelas).

Por comodidad tomaremos las rectas de acción de las fuerzas paralelas al eje de ordenadas  $y-y$ , luego será:  $\cos \varphi_i = 0$  y  $\sin \varphi_i = \pm 1$

(25)



Al ser  $\cos \phi_i = \pm 1$  le daremos un signo al módulo de las fuerzas. Si reducimos al origen de coordenadas  $C_R \equiv O$  las expresiones vectoriales (7) y (8) serán:

$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

$$\vec{R}_R = \sum_{i=1}^m \vec{P}_i$$

$$\vec{M}_{R_e}^0 = \sum_{i=1}^m [\vec{P}_i \times (O - A_i)] + \sum_{j=1}^n \vec{M}_j$$

y las (7a), (7b), (7c), (8a), (8b) y (8c) son:

$$R_{R x-x'} = 0$$

$$(1) \quad R_{R y-y'} = \sum_{i=1}^m P_i \cos \phi_i = \sum_{i=1}^m P_i$$

$$R_{R z-z'} = 0$$

$$M_{R_e x'-x}^0 = - \sum_{i=1}^m y_{A_i} P_i \cos \phi_i + \sum_{j=1}^n M_j = \sum_{j=1}^n M_j - \sum_{i=1}^m y_{A_i} P_i \quad (5)$$

$$M_{R_e y'-y}^0 = M_{R_e z'-z}^0 = 0$$

$$\therefore \text{es } \vec{R}_R \perp \vec{M}_{R_e}^0 \quad \therefore I_e = 0$$

El sistema admite resultante ( $\vec{R}$ ) ó por resultante ( $\vec{M}_R$ ) ó está en equilibrio. Las únicas expresiones independientes son las (7b) y (8a), la nulidad de las mismas nos dan las condiciones analíticas necesarias y suficientes que justifican el equilibrio.

completar con:

1<sup>o</sup>) Reducirlo y determinar  $\vec{R}$  ó  $\vec{M}_R$  ó que está en equilibrio.

2<sup>da</sup>) Discutir que la nulidad simultánea de las (2) y (5) son condición necesaria y suficiente para expresar analíticamente el equilibrio.-

3<sup>ra</sup>) Cambiar la expresión de proyección por una expresión de momentos y tener:

3.1. Dos expresiones de momentos.-

Justificarlas y discutirlos para que sean independientes. Considerar como condición necesaria y suficiente que analíticamente exprese el equilibrio, la nulidad simultánea de ellos.-

4<sup>a</sup>) Indicar como sería un problema de fuerzas con incógnitas.-

5<sup>a</sup>) Discutir que pasaría si el centro de reducción (C.R.) fuera cualquier otro punto del espacio en lugar del origen de coordenadas.-

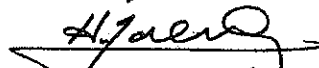
Soluciones gráficas para los sistemas coplanares de fuerzas generalizados.-

Estas soluciones gráficas se pueden ver en cualquier texto de Estática entre los correspondientes a autores nacionales tenemos:

"Estática Gráfica" del Ing. H. Meoli.-

"Estabilidad 1<sup>er</sup> curso" del Ing. E. Fliess.-

Buenos Aires, Abril de 1985

  
Ing. Héctor A. Foletto.-

P.S.: Notas realizadas para los cursos de promoción sin examen final de Estabilidad I a dictarse en el Departamento de Estabilidad de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.-

Este libro se terminó de imprimir en el mes de abril de 1985  
En COPRINT IMPRESORA S.R.L., Av. de Mayo 666, Capital.  
Hecho el depósito que marca la Ley 11.723.  
EDITORIAL C.E.I. "LL.R.", Paseo Colón 850, Buenos Aires.