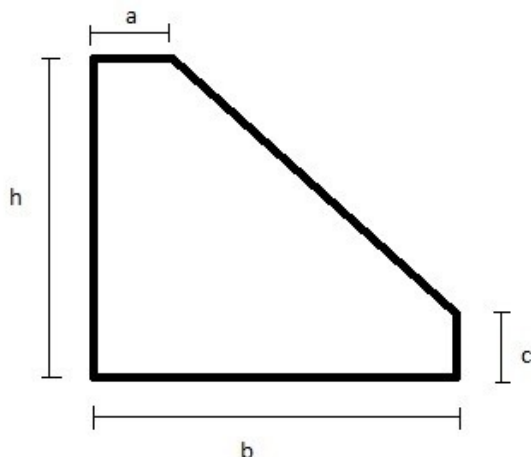


**Problema:**

- a) Hallar la posición del Baricentro
- b) Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico
- c) Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Datos

$$a := 30 \text{ cm} \quad c := 30 \text{ cm}$$

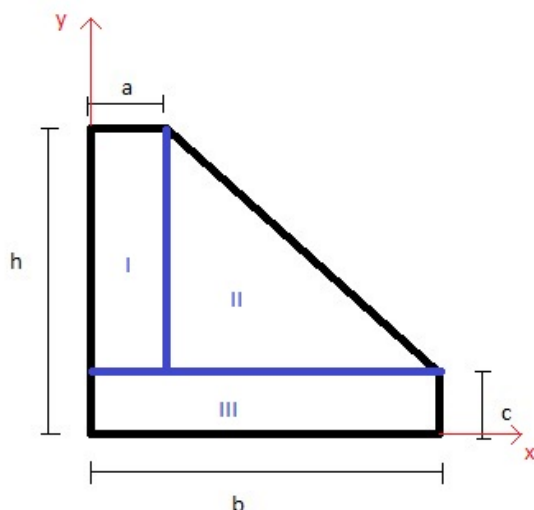
$$h := 100 \text{ cm} \quad b := 100 \text{ cm}$$

Resolución:

En primer lugar lo que debemos hacer es analizar la figura. Esta figura puede ser resuelta como un solo bloque, en ese caso se debe recurrir a las fórmulas integrales que resuelven el problema; pero existe una forma mas sencilla y rápida, igualmente válida, de resolverlo, esto es descomponiendo el problema en figuras simples.

Esta resolución resulta válida dado que existe adición de los momentos estáticos, esto es, que el momento estático de una figura es igual al de la suma de sus componentes.

Aprovechando esa propiedad y que la fórmula de momento estático involucra la posición del baricentro tendremos que:



La sección total fue descompuesta en tres figuras simples (I, II, III) las cuales tienen datos ya conocidos. Ellos son:

La posición del baricentro de un rectángulo está, tanto para el eje x como para el y, ambos paralelos a sus lados, a una distancia igual al lado correspondiente

La posición del baricentro de un triángulo está a una distancia igual a $1/3$ del cateto paralelo al eje en el cual analizamos el momento estático

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	1
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	08



Los momentos de inercia de las figuras son:

Retángulo: $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$

Triángulo: $I = \frac{b \cdot h^3}{36}$

Siendo b la base y h la altura

Siempre que tomemos momentos de inercia de figuras simples serán referidas al baricentro de las mismas. Estos datos se pueden obtener de tablas.

Punto a) Hallar la posición del Baricentro

Como mencionábamos anteriormente podemos utilizar la adición de los momentos estáticos (S) respecto a los ejes x y planteados:

$$S_T = S_I + S_{II} + S_{III}$$

Recordemos que la fórmula de momento estático se puede expresar como:

$$S = A \cdot d_G \text{ Siendo, A: área; } d_G: \text{ distancia al baricentro}$$

En el eje Y

Figura I

$$A_I := a \cdot (h - c) \quad y_{G,I} := \frac{(h - c)}{2} + c$$

$$S_{I,Y} := A_I \cdot y_{G,I} = 136500 \text{ cm}^3$$

Figura II

$$A_{II} := \frac{(b - a) \cdot (h - c)}{2} \quad y_{G,II} := c + (h - c) \cdot \frac{1}{3}$$

$$S_{II,Y} := A_{II} \cdot y_{G,II} = 130666.667 \text{ cm}^3$$

Figura III

$$A_{III} := b \cdot c \quad y_{G,III} := \frac{c}{2}$$

$$S_{III,Y} := A_{III} \cdot y_{G,III} = 45000 \text{ cm}^3$$

$$S_{T,Y} = S_{I,Y} + S_{II,Y} + S_{III,Y} = A_t \cdot Y_{Gt} \quad \text{donde} \quad A_t = A_I + A_{II} + A_{III}$$

Con lo cual la posición del baricentro de la figura total Y_{Gt} será

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	2
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	08



$$Y_{Gt} := \frac{S_{I.Y} + S_{II.Y} + S_{III.Y}}{A_I + A_{II} + A_{III}} = 41.347 \text{ cm}$$

En el eje X

Figura I

$$A_I := a \cdot (h - c)$$

$$x_{G.I} := \frac{a}{2}$$

$$S_{I.X} := A_I \cdot x_{G.I} = 31500 \text{ cm}^3$$

Figura II

$$A_{II} := \frac{(b - a) \cdot (h - c)}{2}$$

$$x_{G.II} := a + (b - a) \cdot \frac{1}{3}$$

$$S_{II.X} := A_{II} \cdot x_{G.II} = 130666.667 \text{ cm}^3$$

Figura III

$$A_{III} := b \cdot c$$

$$x_{G.III} := \frac{b}{2}$$

$$S_{III.X} := A_{III} \cdot x_{G.III} = 150000 \text{ cm}^3$$

El momento de inercia de la figura total será:

$$S_{T.X} = S_{I.X} + S_{II.X} + S_{III.X} = A_t \cdot X_{Gt} \quad \text{donde} \quad A_t = A_I + A_{II} + A_{III}$$

Con lo cual la posición del baricentro de la figura total X_{Gt} será

$$X_{Gt} := \frac{S_{I.X} + S_{II.X} + S_{III.X}}{A_I + A_{II} + A_{III}} = 41.347 \text{ cm}$$

Podemos observar que ambos valores dieron el mismo resultado, lo cual es evidente dado que la geometría es totalmente equivalente para ambos ejes

Punto b) Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico

Para resolver este punto debemos recordar que los momentos de inercia son también aditivos en tanto procedamos con el TEOREMA DE STEINER mediante. De esta forma

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	3
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	08



Podemos plantear en forma generica que:

Siendo:

$$I_X = I_{xg} + A \cdot d_x^2$$

I_X : el momento de inercia respecto a un eje X

I_{xg} : el momento de inercia de la figura respecto a su propio baricentro

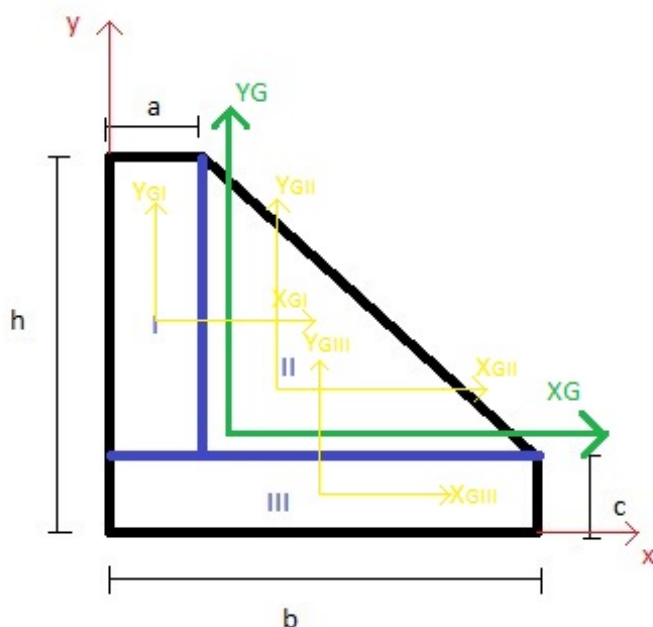
A : área de la figura

d : distancia entre el origen de X y xg

Analogamente se puede hacer para el eje Y

Es por esto que, para las figuras simples en las que se descompuso la figura total, se debe hallar el baricentro de cada una para luego trasladar los ejes al baricentro de la figura total.

Dado que en este punto nos piden que sean paralelos a los ejes indicados anteriormente tendremos que:



Podemos observar que identificamos los ejes baricéntricos de cada figura (color amarillo) y los ejes baricéntricos de la figura total (color verde).

Los de la figura total son las coordenadas halladas en el punto anterior (dadas desde los ejes rojos) y los de cada figura individual son conocidos como ya mencionamos anteriormente

Procedemos a trasladar los momentos de inercia a los ejes baricéntricos, para tomar las distancias entre los baricentros lo haremos con respecto a los ejes originales (rojos) como referencia:

Eje Y

Figura I

$$Y_{GI} := \frac{a}{2} = 15 \text{ cm}$$

$$d_{yI} := X_{Gt} - Y_{GI} = 26.347 \text{ cm}$$

$$I_{YgI} := \frac{a^3 \cdot (h-c)}{12} = 157500 \text{ cm}^4$$

$$I_{YGI} := I_{YgI} + A_I \cdot d_{yI}^2 = 1615198.602 \text{ cm}^4$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	4
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	08

Figura II

$$Y_{GII} := a + \left(\frac{b-a}{3} \right) = 53.333 \text{ cm} \quad d_{yII} := X_{Gt} - Y_{GII} = -11.987 \text{ cm}$$

$$I_{YgII} := \frac{(b-a) \cdot (h-c)^3}{36} = 666944.444 \text{ cm}^4 \quad I_{YGII} := I_{YgII} + A_{II} \cdot d_{yII}^2 = 1018966.066 \text{ cm}^4$$

Figura III

$$Y_{GIII} := \frac{b}{2} = 50 \text{ cm} \quad d_{yIII} := X_{Gt} - Y_{GIII} = -8.653 \text{ cm} \quad I_{YgIII} := \frac{b^3 \cdot c}{12} = 2500000 \text{ cm}^4$$

$$I_{YGIII} := I_{YgIII} + A_{III} \cdot d_{yIII}^2 = 2724645.118 \text{ cm}^4$$

El momento de inercia total, en el eje Y

$$I_{YG} := I_{YGI} + I_{YGII} + I_{YGIII} = 5358809.787 \text{ cm}^4$$

En el Eje X

Figura I

$$X_{GI} := c + \frac{(h-c)}{2} = 65 \text{ cm} \quad d_{xI} := Y_{Gt} - X_{GI} = -23.653 \text{ cm} \quad I_{XgI} := \frac{a \cdot (h-c)^3}{12} = 857500 \text{ cm}^4$$

$$I_{XGI} := I_{XgI} + A_I \cdot d_{xI}^2 = 2032417.145 \text{ cm}^4$$

Figura II

$$X_{GII} := c + \left(\frac{h-c}{3} \right) = 53.333 \text{ cm} \quad d_{xII} := Y_{Gt} - X_{GII} = -11.987 \text{ cm}$$

$$I_{XgII} := \frac{(b-a)^3 \cdot (h-c)}{36} = 666944.444 \text{ cm}^4 \quad I_{XGII} := I_{XgII} + A_{II} \cdot d_{xII}^2 = 1018966.066 \text{ cm}^4$$

Figura III

$$X_{GIII} := \frac{c}{2} = 15 \text{ cm} \quad d_{xIII} := Y_{Gt} - X_{GIII} = 26.347 \text{ cm} \quad I_{XgIII} := \frac{b \cdot c^3}{12} = 225000 \text{ cm}^4$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	5
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	08



$$I_{XGIII} := I_{XgIII} + A_{III} \cdot d_{xIII}^2 = 2307426.575 \text{ cm}^4$$

El momento de inercia total, en el eje X

$$I_{XG} := I_{XGI} + I_{XGII} + I_{XGIII} = 5358809.787 \text{ cm}^4$$

Se puede observar que los dos resultados dan iguales, esto es evidente dado que la geometría de la figura, en los ejes XG e YG, es igual cuando se la observa a simple vista.

Una forma de observar esto es mirando las áreas y la forma que tenemos por sobre el eje XG y la que tenemos a la derecha de YG, estas resultan idénticas, lo cual nos da un indicio.

Para obtener el momento centrífugo en los ejes XG e YG debemos también utilizar el teorema de Steiner generalizado donde tenemos que:

$$I_{XY} = I_{xg.yg} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

Siendo:

I_{XY} : el momento centrífugo respecto a los ejes X e Y

$I_{xg.yg}$: el momento centrífugo de la figura respecto a su propio baricentro

A : área de la figura

d : distancia entre el origen de X y xg o entre Y e yg

Vale aclarar que el momento centrífugo en los ejes principales es igual a 0. Es por esto que en el caso del rectángulo, en el eje baricéntrico horizontal y vertical valdrá cero y no así en el caso del triángulo donde tendrá un valor que es obtenido mediante una integración o directamente el dado por la tabla de propiedades geométricas.

Figura I

$$I_{xg.yg.I} := 0$$

$$I_{XG.YG.I} := I_{xg.yg.I} + A_I \cdot d_{yI} \cdot d_{xI} = -1308692.126 \text{ cm}^4$$

Figura II

$$I_{xg.yg.II} := \frac{-(b-a)^2 \cdot (h-c)^2}{72}$$

$$I_{XG.YG.II} := I_{xg.yg.II} + A_{II} \cdot d_{yII} \cdot d_{xII} = 18549.4 \text{ cm}^4$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	6
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	08



Figura III

$$I_{xg.yg.III} := 0$$

$$I_{XG.YG.III} := I_{xg.yg.III} + A_{III} \cdot d_{yIII} \cdot d_{xIII} = -683964.154 \text{ cm}^4$$

El momento centrífugo total:

$$I_{XG.YG} := I_{XG.YG.I} + I_{XG.YG.II} + I_{XG.YG.III} = -1974106.88 \text{ cm}^4$$

Punto C) Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Para hallar los momentos de inercia principal debemos recurrir a la fórmula que surge de igualar la fórmula de momento centrífugo a cero para los ángulos α correspondientes a los ejes principales (que a su vez estos se obtienen de buscar los extremos de la función momento de inercia que se logra hallando donde se hace cero la derivada de la función con respecto al ángulo α).

En definitiva tenemos que las funciones obtenidas son:

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot I_{XY}}{I_Y - I_X} \quad I_I = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2} \quad I_{II} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2}$$

Si reemplazamos con los datos obtenidos en los puntos anteriores tendremos que:

$$\alpha := \frac{\arctan\left(\frac{2 \cdot I_{XG.YG}}{I_{YG} - I_{XG}}\right) \cdot \frac{180}{\pi}}{2} = -45$$

Aclaro que el $\frac{180}{\pi}$ solo está incluido para que me devuelva la respuesta en grados para el ángulo

$$I_I := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 7332916.667 \text{ cm}^4$$

$$I_{II} := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 3384702.907 \text{ cm}^4$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	7
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	08

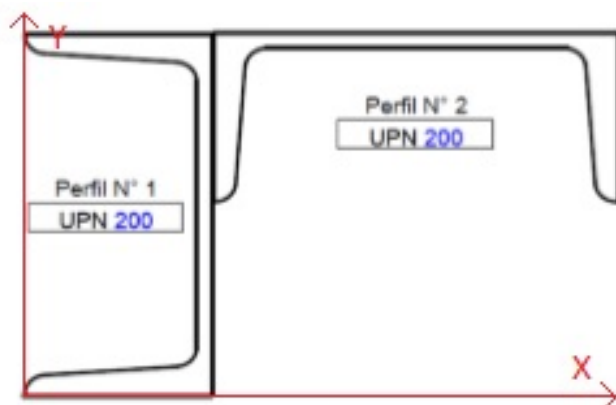


Halleemos el conjugado de el ángulo α . La fórmula está dada por la siguiente expresión siendo β el conjugado de α , ambos medidos en grados desde el eje horizontal x

$$\tan(\beta) = \frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}{I_{XG.YG} - I_{YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)} \quad \beta := \text{atan}\left(\frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}{I_{XG.YG} - I_{YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 45$$

$\alpha - \beta = -90$ Vemos que entre ambos se forma un ángulo de 90° , con lo cual a demás de ser conjugados, obviamente, son principales. Esto debe ser así dado que el ángulo α fue buscado como uno principal. Sin embargo con la misma formulación de β se puede hallar el conjugado de cualquier ángulo

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	8
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	08

**Problema:**

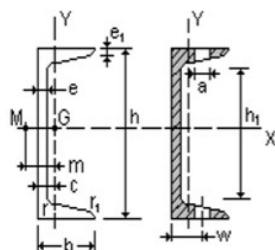
- a) Hallar la posición del Baricentro
- b) Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico
- c) Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Datos

Perfiles UPN 200

Resolución:

Para empezar a resolver el ejercicio debemos buscar los datos del perfil dado que el único dato que nos da el problema es el nombre del perfil, UPN 200. Los datos deben obtenerse de una tabla de perfiles laminados de acuerdo en donde nos encontraremos con la siguiente imagen y los siguientes datos para el perfil buscado:

Tabla 2.A1.4.- Perfiles UPN

A = Área de la de la sección

 S_x = Momento estático de media sección, respecto a X. I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X. $W_x = 2I_x : h$. Módulo resistente de la sección, respecto a X. $i_x = (I_x : A)^{1/2}$. Radio de giro de la sección, respecto a X. I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y. $W_y = 2I_y : (b-c)$. Mínimo módulo resistente de la sección, respecto a Y. $i_y = (I_y : A)^{1/2}$. Radio de giro de la sección, respecto a Y I_t = Módulo de torsión de la sección.

c = Posición del eje Y.

u = Perímetro de la sección.

a = Diámetro del agujero del roblón normal.

w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros.

 h_1 = Altura de la parte plana del alma.

p = Peso por metro.

Perfil	Dimensiones							Términos de la sección											Agujeros		Peso p kp/m
	h mm	b mm	e mm	e_1 mm	r_1 mm	h_1 mm	u mm	A cm ²	S_x cm ³	I_x cm ⁴	W_x cm ³	i_x cm	I_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm	I_t cm ⁴	c cm	m cm	w mm	a mm	
UPN 200	200	75	8,5	11,5	6,0	151	661	32,2	114	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	12,6	2,01	3,94	40	23	25,30

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.: 1
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de: 4



Con lo cual ahora podemos proceder a resolver el ejercicio:

Punto a) Hallar la posición del Baricentro

Para este punto vamos a tomar como referencia los ejes X e Y que aparecen en la imagen, es decir, referiremos los baricentros a ese sistema de ejes y el resultado también nos quedara referido a ellos.

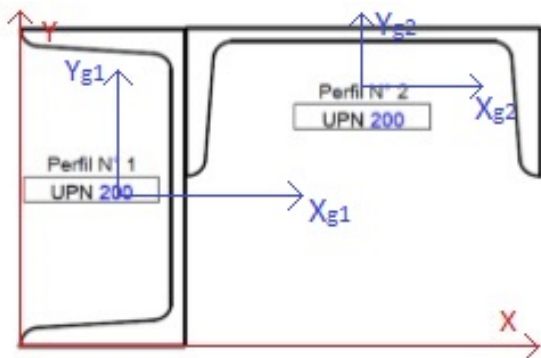
Primero obtengamos los datos necesarios:

$$h := 200 \text{ mm} \quad b := 75 \text{ mm} \quad e := 8.5 \text{ mm} \quad c := 20.1 \text{ mm} \quad A := 32.2 \text{ cm}^2$$

Posición de los baricentros:

$$\text{Perfil N}^\circ 1 \quad x_{g1} := b - c = 5.49 \text{ cm} \quad y_{g1} := \frac{h}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Perfil N}^\circ 2 \quad x_{g2} := b + \frac{h}{2} = 17.5 \text{ cm} \quad y_{g2} := (h - b) + (b - c) = 17.99 \text{ cm}$$



Para poder resolverlo plantearemos la ecuación que surge de que el momento estático de la figura compuesta es igual a la suma de los momentos estáticos individuales, con lo cual:

$$S_T = S_1 + S_2$$

Recordemos que la fórmula de momento estático se puede expresar como:

$$S = A \cdot d_G \text{ Siendo, } A: \text{área; } d_G: \text{distancia al baricentro}$$

$$A_t \cdot X_G = A \cdot x_{g1} + A \cdot x_{g2} \quad X_G := \frac{A \cdot x_{g1} + A \cdot x_{g2}}{2 \cdot A} = 11.495 \text{ cm}$$

$$A_t \cdot Y_G = A \cdot y_{g1} + A \cdot y_{g2} \quad Y_G := \frac{A \cdot y_{g1} + A \cdot y_{g2}}{2 \cdot A} = 13.995 \text{ cm}$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.: 2
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de: 4



Punto b) Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico

Para resolver este punto debemos recordar que los momentos de inercia son también aditivos en tanto procedamos con el TEOREMA DE STEINER mediante. De esta forma

podemos plantear en forma generica que:

Siendo:

$$I_X = I_{xg} + A \cdot d_x^2$$

I_X : el momento de inercia respecto a un eje X

I_{xg} : el momento de inercia de la figura respecto a su propio baricentro

A : área de la figura

d : distancia entre el origen de X y xg

Analogamente se puede hacer para el eje Y

Es por esto que, para las figuras simples en las que se descompuso la figura total, se debe hallar el baricentro de cada una para luego trasladar los ejes al baricentro de la figura total.

Con el planteo de Steiner podremos obtener los momentos de inercia que aportan cada uno de los perfiles, siendo para cada uno su momento baricéntrico (obtenido de la tabla):

$$I_x := 1910 \text{ cm}^4 \quad I_y := 148 \text{ cm}^4 \quad I_{xy} := 0 \text{ cm}^4$$

Teniendo en cuenta que I_x representa el momento de inercia en un eje horizontal para el perfil posicionado de la forma indicada en la tabla, con lo cual, para el perfil N°1 el I_x es el momento de inercia en su eje baricéntrico "x" y para el perfil N°2 es el momento de inercia en su eje baricéntrico "y". Analogamente se puede establecer los valores para el momento de inercia I_y . Es por eso que no se deben confundir por qué se ponen estos parámetros en cada cálculo. Por otro lado el momento centrífugo es igual a cero dado que x e y son ejes principales

Perfil N°1 $d_{x1} := X_G - x_{g1} = 6.005 \text{ cm}$

$$I_{YG1} := I_y + A \cdot d_{x1}^2 = 1309.133 \text{ cm}^4$$

$d_{y1} := Y_G - y_{g1} = 3.995 \text{ cm}$

$$I_{XG1} := I_x + A \cdot d_{y1}^2 = 2423.913 \text{ cm}^4$$

$$I_{XG.YG.1} := I_{xy} + A \cdot d_{x1} \cdot d_{y1} = 772.477 \text{ cm}^4$$

Perfil N°1 $d_{x2} := X_G - x_{g2} = -6.005 \text{ cm}$

$$I_{YG2} := I_y + A \cdot d_{x2}^2 = 3071.133 \text{ cm}^4$$

$d_{y2} := Y_G - y_{g2} = -3.995 \text{ cm}$

$$I_{XG2} := I_x + A \cdot d_{y2}^2 = 661.913 \text{ cm}^4$$

$$I_{XG.YG.2} := I_{xy} + A \cdot d_{x2} \cdot d_{y2} = 772.477 \text{ cm}^4$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.: 3
N° DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de: 4



$$I_{YG} := I_{YG1} + I_{YG2} = 4380.266 \text{ cm}^4$$

$$I_{XG} := I_{XG1} + I_{XG2} = 3085.826 \text{ cm}^4$$

$$I_{XG.YG} := I_{XG.YG.1} + I_{XG.YG.2} = 1544.954 \text{ cm}^4$$

Punto C) Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Para hallar los momentos de inercia principal debemos recurrir a la fórmula que surge de igualar la fórmula de momento centrífugo a cero para los ángulos α correspondientes a los ejes principales (que a su vez estos se obtienen de buscar los extremos de la función momento de inercia que se logra hallando donde se hace cero la derivada de la función con respecto al ángulo α).

En definitiva tenemos que las funciones obtenidas son:

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot I_{XY}}{I_Y - I_X} \quad I_I = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2} \quad I_{II} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2}$$

Si reemplazamos con los datos obtenidos en los puntos anteriores tendremos que:

$$\alpha := \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot I_{XG.YG}}{I_{YG} - I_{XG}}\right) \cdot \frac{180}{\pi}}{2} = 33.635$$

Aclaro que el $\frac{180}{\pi}$ solo está incluido para que me devuelva la respuesta en grados para el ángulo

$$I_I := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 5408.091 \text{ cm}^4$$

$$I_{II} := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 2058 \text{ cm}^4$$

Halleemos el conjugado de el ángulo α . La fórmula está dada por la siguiente expresión siendo β el conjugado de α , ambos medidos en grados desde el eje horizontal x

$$\tan(\beta) = \frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}{I_{XG.YG} - I_{YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)} \quad \beta := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}{I_{XG.YG} - I_{YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = -56.365$$

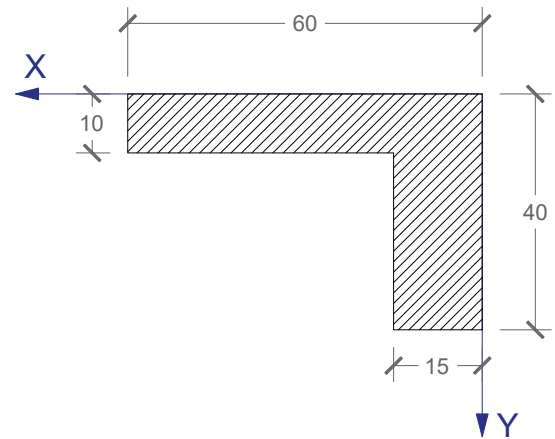
$$\alpha - \beta = 90$$

Vemos que entre ambos se forma un ángulo de 90° , con lo cual a demás de ser conjugados, obviamente, son principales. Esto debe ser así dado que el ángulo α fue buscado como uno principal. Sin embargo con la misma formulación de β se puede hallar el conjugado de cualquier ángulo

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.: 4
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de: 4

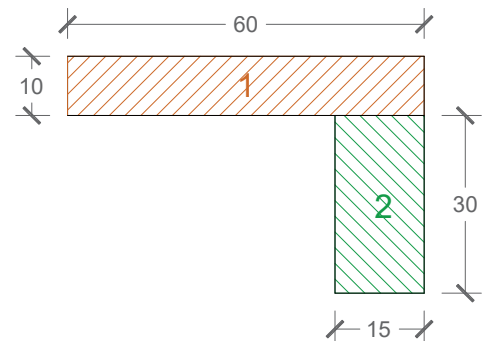
Enunciado: Para la siguiente figura

- Calcular los momentos de inercia para los ejes X e Y.
- Calcular el momento centrífugo XY.
- Calcular la posición del baricentro de la figura.
- Calcular los momentos de inercia para ejes X e Y baricéntricos.
- Calcular los momentos de inercia principales, y el ángulo que forma con el eje X.



Resolución:

Dividimos nuestra figura en dos rectángulo como se indica en la figura:



$$\text{Área del rectángulo 1: } A_1 := 10\text{cm} \cdot 60\text{cm} = 600 \cdot \text{cm}^2$$

$$\text{Área del rectángulo 2: } A_2 := 15\text{cm} \cdot 30\text{cm} = 450 \cdot \text{cm}^2$$

$$\text{Área total: } A_t := A_1 + A_2 = 1.05 \times 10^3 \cdot \text{cm}^2$$

a) Los momentos de inercia de la figura compuesta lo calculamos como la suma de los momentos de inercia de cada figura respecto al eje correspondiente. En cada caso lo calcularemos como el valor del momento de inercia baricéntrico más el término de Steiner.

Vamos a calcular primero el momento de inercia respecto al eje X. Por lo tanto para el rectángulo 1 es el eje de menor inercia, y para el rectángulo 2 el de mayor inercia. Las distancias para el término de Steiner son distancias en Y, desde el baricentro de cada rectángulo al eje X.

$$\text{Para el rectángulo 1: } J_{x1} := \frac{60 \cdot \text{cm} \cdot (10\text{cm})^3}{12} + A_1 \cdot \left(\frac{10\text{cm}}{2} \right)^2 = 2 \times 10^4 \cdot \text{cm}^4$$

$$\text{Para el rectángulo 2: } J_{x2} := \frac{15 \cdot \text{cm} \cdot (30\text{cm})^3}{12} + A_2 \cdot \left(10\text{cm} + \frac{30\text{cm}}{2} \right)^2 = 3.15 \times 10^5 \cdot \text{cm}^4$$

$$\text{Para la figura compuesta: } J_x := J_{x1} + J_{x2} = 3.35 \times 10^5 \cdot \text{cm}^4$$

Para el momento de inercia respecto al eje Y, para el rectángulo 1 es el eje de mayor inercia, y para el rectángulo 2 el de menor inercia. Las distancias para el término de Steiner son distancias en X, desde el baricentro de cada rectángulo al eje Y.

$$\text{Para el rectángulo 1: } J_{y1} := \frac{10 \cdot \text{cm} \cdot (60\text{cm})^3}{12} + A_1 \cdot \left(\frac{60\text{cm}}{2} \right)^2 = 7.2 \times 10^5 \cdot \text{cm}^4$$

$$\text{Para el rectángulo 2: } J_{y2} := \frac{30 \cdot \text{cm} \cdot (15\text{cm})^3}{12} + A_2 \cdot \left(\frac{15\text{cm}}{2} \right)^2 = 3.375 \times 10^4 \cdot \text{cm}^4$$

$$\text{Para la figura compuesta: } J_y := J_{y1} + J_{y2} = 7.537 \times 10^5 \cdot \text{cm}^4$$

b) El momento centrífugo de cada figura respecto a su baricentro es nulo, ya que son ejes principales. Por lo tanto el momento centrífugo total de la figura respecto a los ejes XY será solamente del que resulta del término de Steiner. En el caso del momento centrífugo este término se calcula como el área de cada rectángulo multiplicado por las distancias tanto en X como en Y. Como las figuras están en el cuadrante negativo el valor del momento centrífugo será positivo.

$$J_{xy} := A_1 \cdot \left(\frac{10\text{cm}}{2} \right) \cdot \left(\frac{60\text{cm}}{2} \right) + A_2 \cdot \left(10\text{cm} + \frac{30\text{cm}}{2} \right) \cdot \left(\frac{15\text{cm}}{2} \right) = 1.744 \times 10^5 \cdot \text{cm}^4$$

c) Las coordenadas del baricentro se definen como $R = \frac{1}{A_t} \cdot \sum_{i=1}^n (A_i \cdot r_i)$ Entonces para nuestras coordenadas:

$$X_g := \frac{A_1 \cdot \frac{60\text{cm}}{2} + A_2 \cdot \frac{15\text{cm}}{2}}{A_t} = 20.357 \cdot \text{cm} \quad Y_g := \frac{A_1 \cdot \frac{10\text{cm}}{2} + A_2 \cdot \left(10\text{cm} + \frac{30\text{cm}}{2} \right)}{A_t} = 13.571 \cdot \text{cm}$$

d) Para el cálculo de los momentos de inercia baricéntricos usaremos el teorema de Steiner, conociendo los momentos de inercia respecto a los ejes X e Y del origen de coordenadas y las distancias al baricentro.

$$J_{xg} := J_x - A_t \cdot Y_g^2 = 1.416 \times 10^5 \cdot \text{cm}^4$$

$$J_{yg} := J_y - A_t \cdot X_g^2 = 3.186 \times 10^5 \cdot \text{cm}^4$$

$$J_{xyg} := J_{xy} - A_t \cdot Y_g \cdot X_g = -1.157 \times 10^5 \cdot \text{cm}^4$$

e) Los momentos de inercia principales de nuestra sección son aquellos para los cuales el momento centrífugo es igual a cero (para ejes perpendiculares entre si). Dicho problema constituye un problema matemático de vectores propios (autovalores y autovectores) cuya solución es:

$$J_1 := \frac{1}{2} \cdot (J_{xg} + J_{yg}) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{xg} - J_{yg})^2 + 4 \cdot J_{xyg}^2} = 3.758 \times 10^5 \cdot \text{cm}^4$$

$$J_2 := \frac{1}{2} \cdot (J_{xg} + J_{yg}) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{xg} - J_{yg})^2 + 4 \cdot J_{xyg}^2} = 8.443 \times 10^4 \cdot \text{cm}^4$$

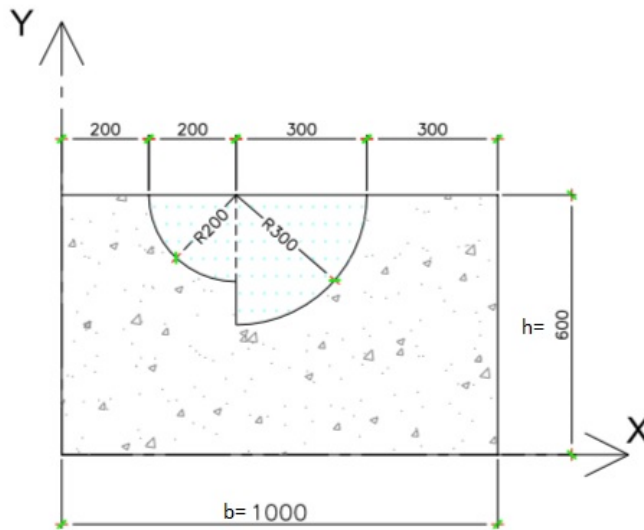
Y el ángulo que forma X con dichos ejes principales es:

$$\alpha_1 := \frac{1}{2} \cdot \text{atan} \left(\frac{2 \cdot J_{xyg}}{J_{xg} - J_{yg}} \right) = 26.295 \cdot \text{deg} \quad \alpha_2 := \frac{1}{2} \cdot \text{atan} \left(\frac{2 \cdot J_{xyg}}{J_{xg} - J_{yg}} \right) + 90\text{deg} = 116.295 \cdot \text{deg}$$

También podemos calcular los auto valores y auto vectores:

$$M_I := \begin{pmatrix} J_{xg} & J_{xyg} \\ J_{xyg} & J_{yg} \end{pmatrix} \quad \text{eigenvals}(M_I) = \begin{pmatrix} 8.443 \times 10^4 \\ 3.758 \times 10^5 \end{pmatrix} \cdot \text{cm}^4$$

$$\text{eigenvec}(M_I, \text{eigenvals}(M_I)_0) = \begin{pmatrix} 0.897 \\ 0.443 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvec}(M_I, \text{eigenvals}(M_I)_1) = \begin{pmatrix} -0.443 \\ 0.897 \end{pmatrix}$$

**Problema:**

- Hallar la posición del Baricentro
- Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico
- Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Datos

$$b := 1000 \text{ m} \quad h := 600 \text{ m}$$

$$r_{II} := 200 \text{ m} \quad r_{III} := 300 \text{ m}$$

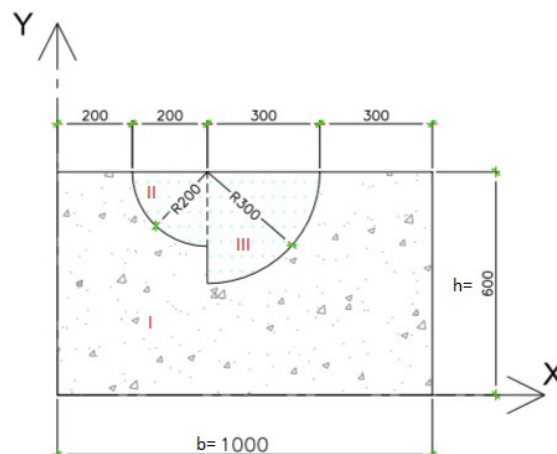
Podemos analizar la figura como una partición de distintas figuras, esto se debe a que existe adición como propiedad tanto para los momentos estáticos como para los momentos de inercia y centrífugos, con lo cual, como regla general, podemos plantear que cierta propiedad en la figura total resulta igual a la suma (se entiende por suma de cosas positivas o negativas -resta-) de las partes componentes.

Como podemos observar en la figura presentada en el problema tenemos un cierto corte rectangular al cual se le practican dos excavaciones formando cuartos de círculos. Esto quiere decir que tendremos una figura a la cual se le resta una cierta porción de área, con lo cual:

Punto a) Hallar la posición del Baricentro

Como mencionábamos anteriormente podemos utilizar la adición de los momentos estáticos (S) respecto a los ejes x y planteados:

$$S_T = S_I - S_{II} - S_{III}$$



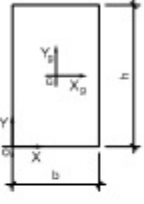
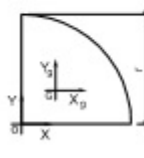
ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	1
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	7



Recordemos que la fórmula de momento estático se puede expresar como:

$$S = A \cdot d_G \text{ Siendo, } A: \text{área; } d_G: \text{distancia al baricentro}$$

Recordemos las propiedades geométricas de los elementos componentes:

SECCIÓN	BARICENTRO / ÁREA	MOMENTOS DE INERCIA Y MOMENTOS CENTRÍFUGOS	
	$x_g = \frac{b}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$	$I_{xg} = \frac{b \cdot h^3}{12}$
	$y_g = \frac{h}{2}$	$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$	$I_{yg} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$
	$F = b \cdot h$	$I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$	$I_{xyg} = 0$
	$x_g = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = \frac{\pi r^4}{16} = \frac{\pi D^4}{256}$	$I_{xg} = r^4 \left[\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right]$
	$y_g = \frac{4r}{3\pi}$	$I_y = \frac{\pi r^4}{16} = \frac{\pi D^4}{256}$	$I_{yg} = r^4 \left[\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right]$
	$F = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi D^2}{16}$	$I_{xy} = \frac{r^4}{8}$	$I_{xyg} = r^4 \left[\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right]$

En el eje y tendremos:

Figura I

$$A_I := b \cdot h = 600000 \text{ m}^2 \quad y_{G,I} := \frac{h}{2} = 300 \text{ m} \quad S_{I,Y} := A_I \cdot y_{G,I} = 180000000 \text{ m}^3$$

Figura II

$$A_{II} := \pi \cdot \frac{r_{II}^2}{4} = 31415.927 \text{ m}^2 \quad y_{G,II} := h - \frac{4 \cdot r_{II}}{3 \cdot \pi} = 515.117 \text{ m}$$

$$S_{II,Y} := A_{II} \cdot y_{G,II} = 16182889.255 \text{ m}^3$$

Figura III

$$A_{III} := \pi \cdot \frac{r_{III}^2}{4} = 70685.835 \text{ m}^2 \quad y_{G,III} := h - \frac{4 \cdot r_{III}}{3 \cdot \pi}$$

$$S_{III,Y} := A_{III} \cdot y_{G,III} = 33411500.823 \text{ m}^3$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	2
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	7



$$S_{T.Y} = S_{I.Y} + S_{II.Y} + S_{III.Y} = A_t \cdot Y_{Gt} \quad \text{donde} \quad A_t = A_I + A_{II} + A_{III}$$

Con lo cual la posición del baricentro de la figura total Y_{Gt} será

$$Y_{Gt} := \frac{S_{I.Y} + S_{II.Y} + S_{III.Y}}{A_I + A_{II} + A_{III}} = 327.01 \text{ m}$$

En el eje X

Figura I

$$x_{G.I} := \frac{b}{2} = 500 \text{ m}$$

$$S_{I.X} := A_I \cdot x_{G.I} = 3000000000 \text{ m}^3$$

Figura II

$$x_{G.II} := 400 \text{ m} - \frac{4 \cdot r_{II}}{3 \cdot \pi}$$

$$S_{II.X} := A_{II} \cdot x_{G.II} = 9899703.948 \text{ m}^3$$

Figura III

$$x_{G.III} := 400 \text{ m} + \frac{4 \cdot r_{III}}{3 \cdot \pi}$$

$$S_{III.X} := A_{III} \cdot x_{G.III} = 37274333882308.1 \text{ cm}^3$$

El momento de inercia de la figura total será:

$$S_{T.X} = S_{I.X} + S_{II.X} + S_{III.X} = A_t \cdot X_{Gt} \quad \text{donde} \quad A_t = A_I + A_{II} + A_{III}$$

Con lo cual la posición del baricentro de la figura total X_{Gt} será

$$X_{Gt} := \frac{S_{I.X} + S_{II.X} + S_{III.X}}{A_I + A_{II} + A_{III}} = 494.478 \text{ m}$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	3
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	7



Punto b) Calcular el momento de inercia y centrífugo en el eje vertical y horizontal baricéntrico

Para resolver este punto debemos recordar que los momentos de inercia son también aditivos en tanto procedamos con el TEOREMA DE STEINER mediante. De esta forma

podemos plantear en forma generica que:

Siendo:

$$I_X = I_{xg} + A \cdot d_x^2$$

I_X : el momento de inercia respecto a un eje X

I_{xg} : el momento de inercia de la figura respecto a su propio baricentro

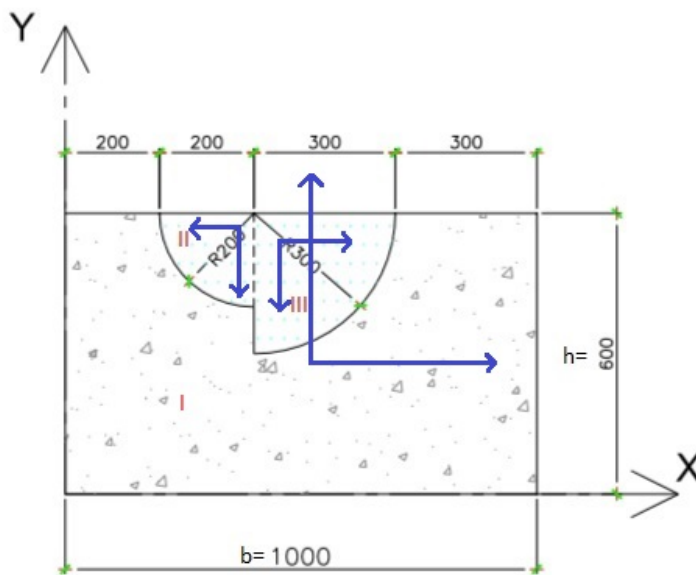
A : área de la figura

d : distancia entre el origen de X y x_g

Analogamente se puede hacer para el eje Y

Es por esto que, para las figuras simples en las que se descompuso la figura total, se debe hallar el baricentro de cada una para luego trasladar los ejes al baricentro de la figura total.

Dado que en este punto nos piden que sean paralelos a los ejes indicados anteriormente tendremos que:



Como vemos se toman de cada una de las figuras los ejes baricéntricos. Esto está directamente relacionado con la aplicación del Teorema de Steiner dado que este plantea que la traslación es desde un eje baricéntrico a uno cualquiera (sumando el término de Steiner) o desde un eje cualquiera a uno baricéntrico (en este caso se resta).

Ahora conforme lo que nos pide el enunciado trasladaremos cada uno de los ejes para luego superponer sus efectos, esto es adicionando como antes dijimos.

Eje Y

Figura I

$$d_{yI} := X_{Gt} - x_{G,I} = -5.522 \text{ m} \quad I_{YgI} := \frac{h \cdot b^3}{12} = 50000000000 \text{ m}^4$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.: 4
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de: 7



$$I_{YGI} := I_{YgI} + A_I \cdot d_{yI}^2 = 50018293950.775 \text{ m}^4$$

Figura II

$$d_{yII} := X_{Gt} - x_{G.II} = 179.361 \text{ m} \quad I_{YgII} := r_{II}^4 \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \cdot \pi} \right) = 87805568.517 \text{ m}^4$$

$$I_{YGII} := I_{YgII} + A_{II} \cdot d_{yII}^2 = 1098466016.262 \text{ m}^4$$

Figura III

$$d_{yIII} := X_{Gt} - x_{G.III} = -32.846 \text{ m} \quad I_{YgIII} := r_{III}^4 \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \cdot \pi} \right) = 444515690.618 \text{ m}^4$$

$$I_{YGIII} := I_{YgIII} + A_{III} \cdot d_{yIII}^2 = 520774499.853 \text{ m}^4$$

El momento de inercia total, en el eje Y

$$I_{YG} := I_{YGI} + I_{YGII} + I_{YGIII} = 51637534466.89 \text{ m}^4$$

En el Eje XFigura I

$$d_{xI} := Y_{Gt} - y_{G.I} = 27.01 \text{ m} \quad I_{XgI} := \frac{b \cdot h^3}{12} = 18000000000 \text{ m}^4$$

$$I_{XGI} := I_{XgI} + A_I \cdot d_{xI}^2 = 18437728359.504 \text{ m}^4$$

Figura II

$$d_{xII} := Y_{Gt} - y_{G.II} = -188.107 \text{ m} \quad I_{XgII} := r_{II}^4 \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \cdot \pi} \right) = 87805568.517 \text{ m}^4$$

$$I_{XGII} := I_{XgII} + A_{II} \cdot d_{xII}^2 = 1098466016.262 \text{ m}^4$$

Figura III

$$d_{xIII} := Y_{Gt} - y_{G.III} = -145.666 \text{ m} \quad I_{XgIII} := r_{III}^4 \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9 \cdot \pi} \right) = 444515690.618 \text{ m}^4$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	5
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	7



$$I_{XGIII} := I_{YgIII} + A_{III} \cdot d_{yIII}^2 = 520774499.853 \text{ m}^4$$

El momento de inercia total, en el eje X

$$I_{XG} := I_{XGI} + I_{XGII} + I_{XGIII} = 20056968875.619 \text{ m}^4$$

Para obtener el momento centrífugo en los ejes XG e YG debemos también utilizar el teorema de Steiner generalizado donde tenemos que:

$$I_{XY} = I_{xg.yg} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

Siendo:

I_{XY} : el momento centrífugo respecto a los ejes X e Y

$I_{xg.yg}$: el momento centrífugo de la figura respecto a su propio baricentro

A : área de la figura

d : distancia entre el origen de X y xg o entre Y e yg

Vale aclarar que el momento centrífugo en los ejes principales es igual a 0. Es por esto que en el caso del rectángulo, en el eje baricéntrico horizontal y vertical valdrá cero y no así en el caso del cuarto de círculo donde tendrá un valor que es obtenido mediante una integración o directamente el dado por la tabla de propiedades geométricas.

Figura I

$$I_{xg.yg.I} := 0$$

$$I_{XG.YG.I} := I_{xg.yg.I} + A_I \cdot d_{yI} \cdot d_{xI} = -89486205.985 \text{ m}^4$$

Figura II

$$I_{xg.yg.II} := r_{II}^4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9 \cdot \pi} \right) = -26353696.842 \text{ m}^4$$

$$I_{XG.YG.II} := I_{xg.yg.II} + A_{II} \cdot d_{yII} \cdot d_{xII} = -1086298041.18 \text{ m}^4$$

Figura III

$$I_{xg.yg.III} := r_{III}^4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9 \cdot \pi} \right) = -133415590.262 \text{ m}^4$$

$$I_{XG.YG.III} := I_{xg.yg.III} + A_{III} \cdot d_{yIII} \cdot d_{xIII} = 204780934.108 \text{ m}^4$$

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	6
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	7



El momento centrífugo total:

$$I_{XG.YG} := I_{XG.YG.I} + I_{XG.YG.II} + I_{XG.YG.III} = -97100331305810800 \text{ cm}^4$$

Punto C) Calcular el momento de inercia en los ejes principales

Para hallar los momentos de inercia principal debemos recurrir a la fórmula que surge de igualar la fórmula de momento centrífugo a cero para los ángulos α correspondientes a los ejes principales (que a su vez estos se obtienen de buscar los extremos de la función momento de inercia que se logra hallando donde se hace cero la derivada de la función con respecto al ángulo α).

En definitiva tenemos que las funciones obtenidas son:

$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot I_{XY}}{I_Y - I_X} \quad I_I = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2} \quad I_{II} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Y - I_X)^2 + 4 \cdot I_{XY}^2}$$

Si reemplazamos con los datos obtenidos en los puntos anteriores tendremos que:

$$\alpha := \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot I_{XG.YG}}{I_{YG} - I_{XG}}\right) \cdot \frac{180}{\pi}}{2} = -1.759$$

Aclaro que el $\frac{180}{\pi}$ solo está incluido para que me devuelva la respuesta en grados para el ángulo

$$I_I := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 51667361601.344 \text{ m}^4$$

$$I_{II} := \frac{I_{XG} + I_{YG}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{YG} - I_{XG})^2 + 4 \cdot I_{XG.YG}^2} = 20027141741.165 \text{ m}^4$$

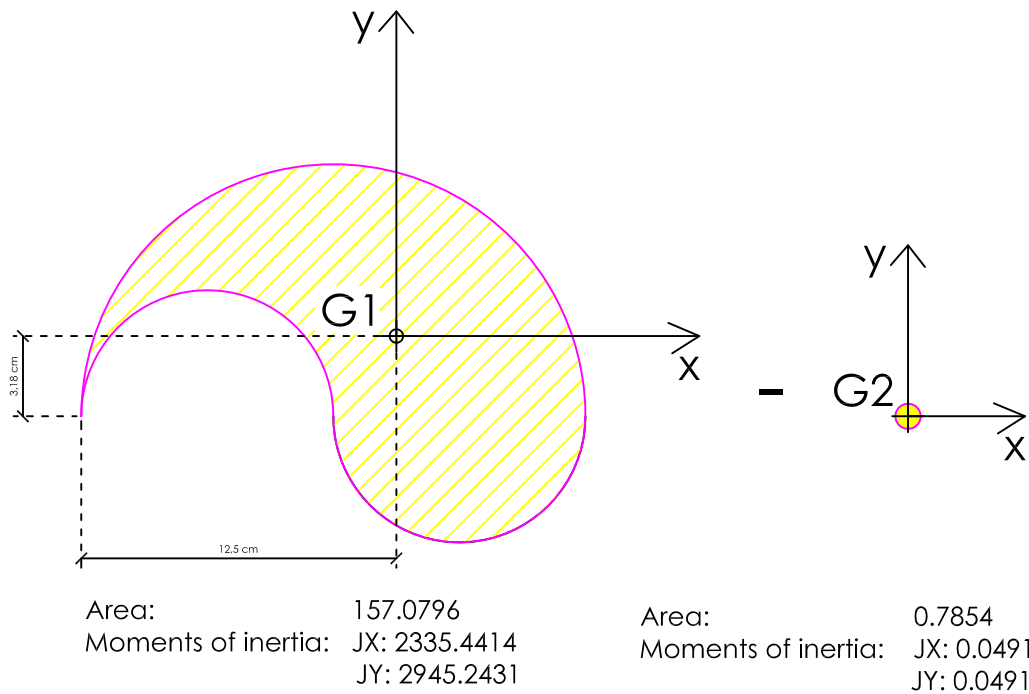
Halleemos el conjugado de el ángulo α . La fórmula está dada por la siguiente expresión siendo β el conjugado de α , ambos medidos en grados desde el eje horizontal x

$$\tan(\beta) = \frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}{I_{XG.YG} - I_{YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)} \quad \beta := \operatorname{atan}\left(\frac{I_{XG} - I_{XG.YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}{I_{XG.YG} - I_{YG} \cdot \tan(\alpha^\circ)}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 88.241$$

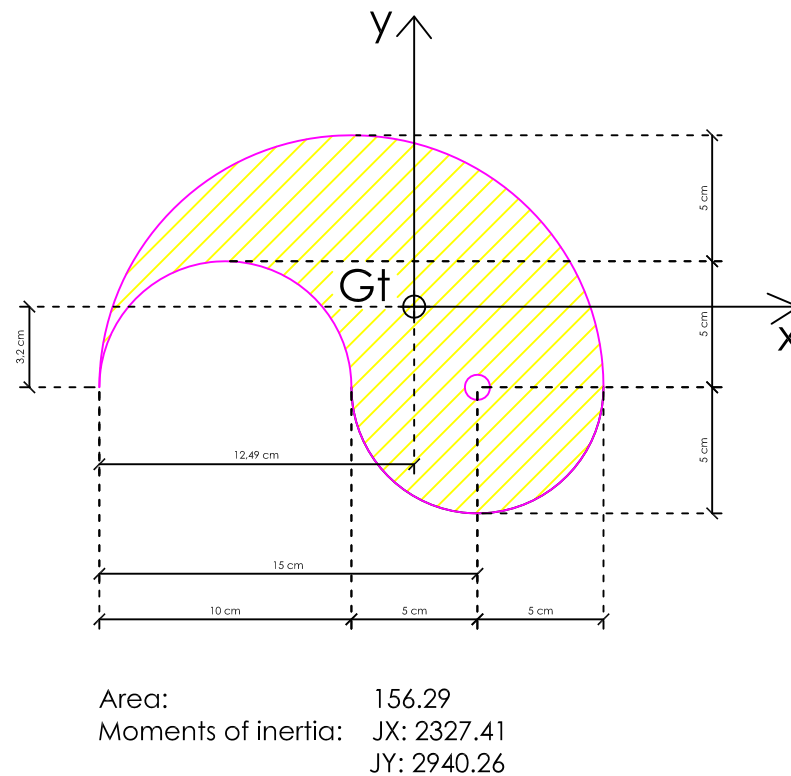
$$\alpha - \beta = -90$$

Vemos que entre ambos se forma un ángulo de 90° , con lo cual a demás de ser conjugados, obviamente, son principales. Esto debe ser así dado que el ángulo α fue buscado como uno principal. Sin embargo con la misma formulación de β se puede hallar el conjugado de cualquier ángulo

ER.GdIM.01	EJERCICIOS RESUELTOS: Geometría de las Masas	Sr. Juan Belleri	Ing. Sosti	004	28-ago-17	Pág.:	7
Nº DOC.	CARPETA - SUB-CARPETA	PREPARÓ	REVISÓ	CURSOS	FECHA	de:	7



=



Escática y resistencia de materiales

Resolución de ejercicio de clase

Figura 1

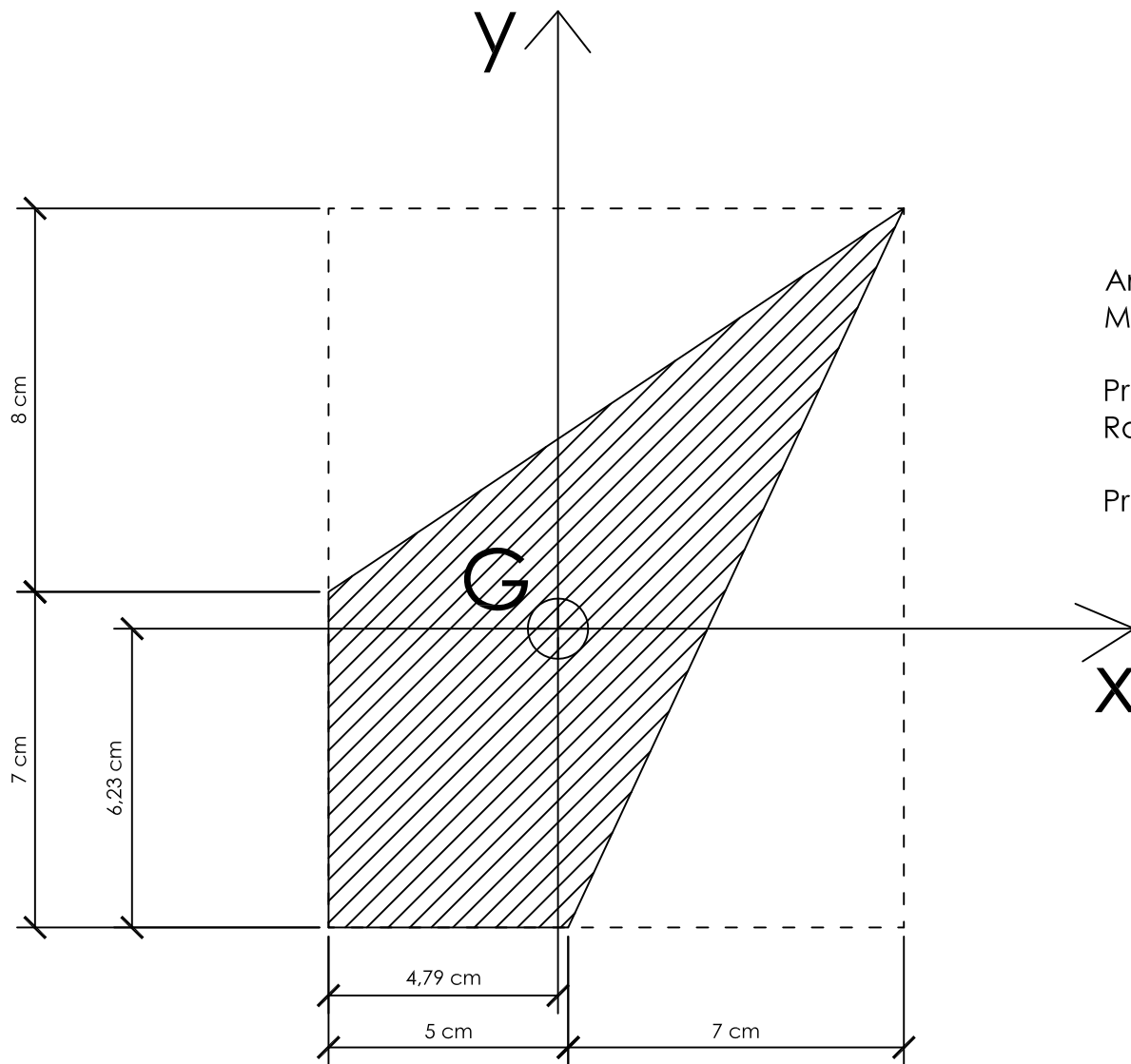
$F_1 := 157.0796 \text{ cm}^2$	$x_{g1} := 12.5 \text{ cm}$	$y_{g1} := 3.18 \text{ cm}$
$J_{x1} := 2335.4414 \text{ cm}^4$	$J_{y1} := 2945.2431 \text{ cm}^4$	

Figura 2

$F_2 := 0.7854 \text{ cm}^2$	$x_{g2} := 15 \text{ cm}$	$y_{g2} := 0 \text{ cm}$
$J_{x2} := 0.0491 \text{ cm}^4$	$J_{y2} := 0.0491 \text{ cm}^4$	

Figura compuesta

$F_t := F_1 + F_2$	$F_t = 156.29 \cdot \text{cm}^2$	
$x_t := \frac{x_{g1} \cdot F_1 + x_{g2} \cdot F_2}{F_t}$	$x_t = 12.49 \cdot \text{cm}$	
$y_t := \frac{y_{g1} \cdot F_1 + y_{g2} \cdot F_2}{F_t}$	$y_t = 3.2 \cdot \text{cm}$	
$J_{xt} := \left[J_{x1} + F_1 \cdot (y_t - y_{g1})^2 \right] - \left[J_{x2} + F_2 \cdot (y_t - y_{g2})^2 \right]$	$J_{xt} = 2327.41 \cdot \text{cm}^4$	
$J_{yt} := \left[J_{y1} + F_1 \cdot (x_t - x_{g1})^2 \right] - \left[J_{y2} + F_2 \cdot (x_t - x_{g2})^2 \right]$	$J_{yt} = 2940.26 \cdot \text{cm}^4$	



Area: 79.5000
 Moments of inertia: JX: 970.9450
 JY: 618.1148
 Product of inertia: JXY: 541.8310
 Radii of gyration: rX: 3.4947
 rY: 2.7884
 Principal moments and X-Y directions about centroid:
 I: 224.7026 along [0.5875 0.8092]
 J: 1364.3571 along [-0.8092 0.5875]