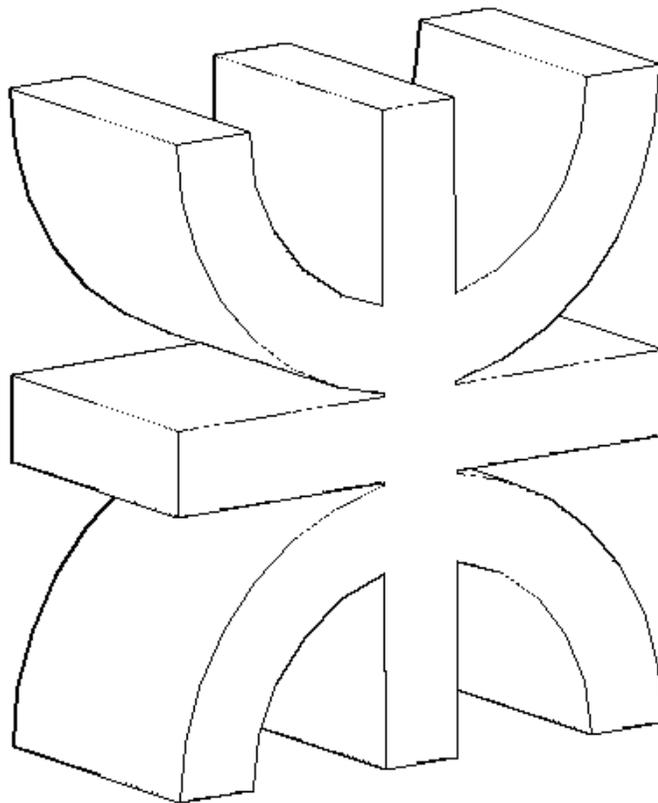


# Unidad N°2

# GEOMETRÍA DE LAS MASAS

Estabilidad I – Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires



Profesor: Ing. Néstor Ferré

JTP: Ing. Rubén Daniel Altieri

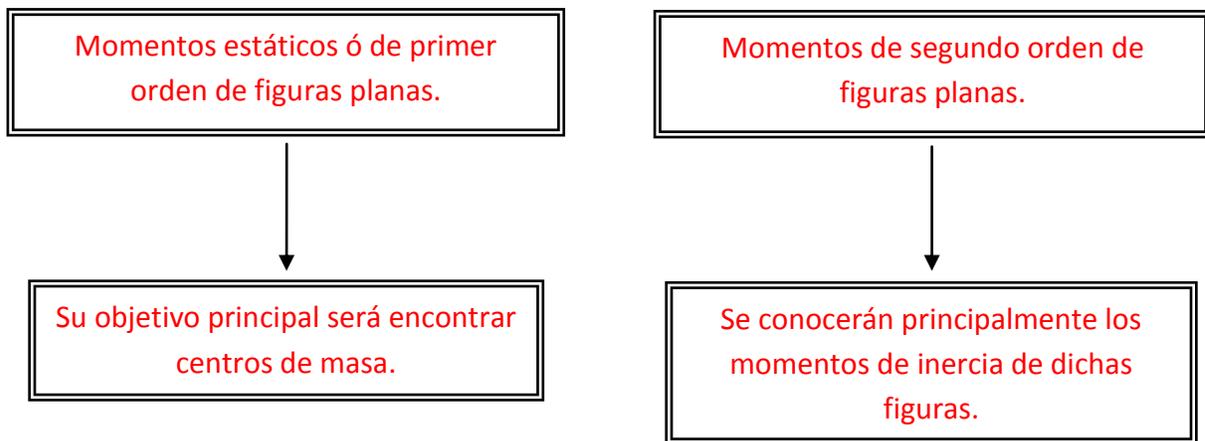
ATP: Juan Francisco Pfeiffer

## INTRODUCCIÓN

En la resolución de diversos problemas tanto de estática como de resistencia de materiales surgirá la necesidad de operar con ciertas características geométricas de los cuerpos en estudio.

El objetivo de esta unidad será definir y analizar características geométricas de las figuras planas (secciones transversales de barras) para relacionarlas más adelante con la resistencia de los materiales.

Básicamente, se verán las siguientes características:



## MASA PUNTUAL

Es una magnitud escalar que ocupa un recinto de dimensiones tan pequeñas que puede ser representado por un punto.

## CONJUNTOS DE MASAS

### **Conjunto discreto de masas:**

Se trata de un sistema ideal, formado por  $(n)$  masas puntuales (densidad infinita) de modulo  $(m)$ .

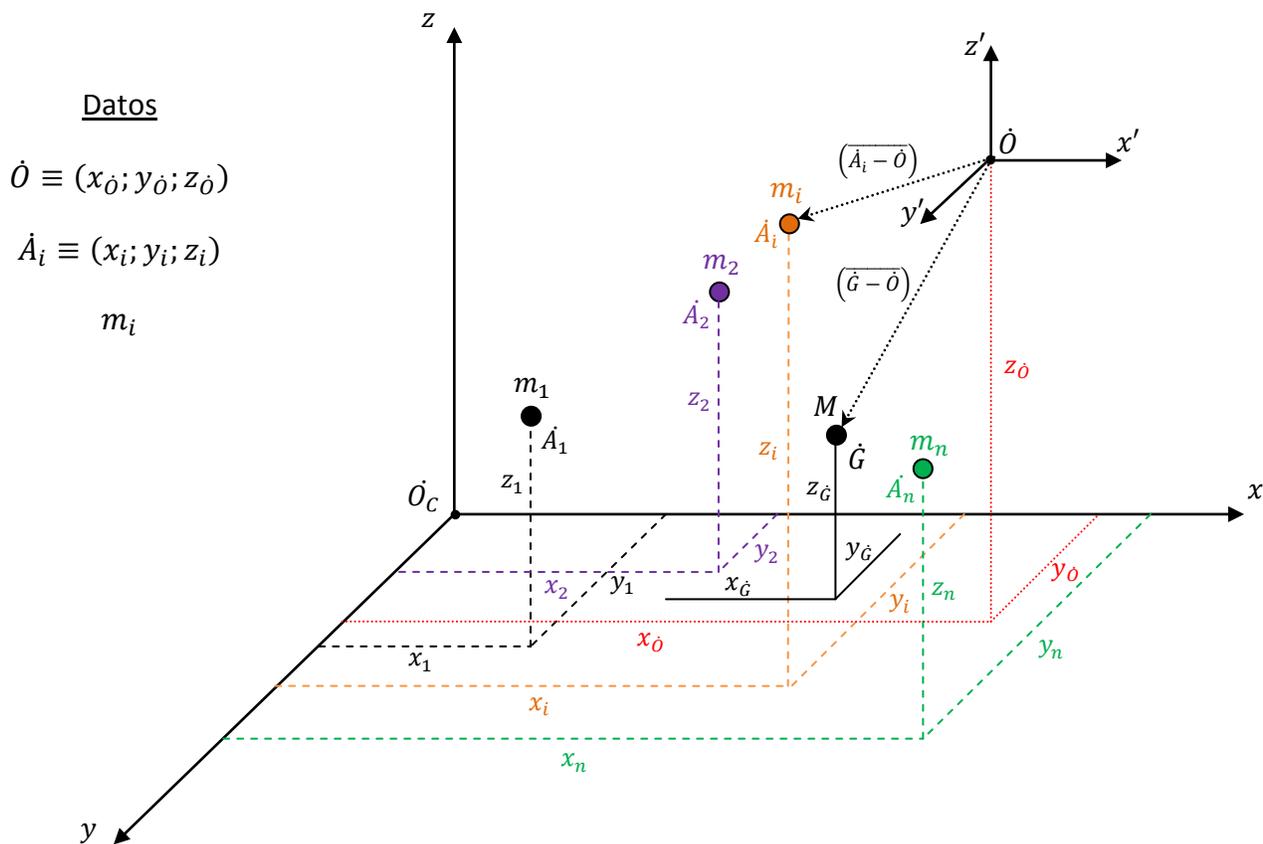
### **Conjunto continuo de masas:**

Se trata de un sistema continuo formado por infinitas masas de módulos diferenciales  $(dm)$ .

**Aclaración:** Para que conformen un sistema deben tener unidades (de masas) homogéneas.

## MOMENTOS ESTÁTICOS Ó DE PRIMER ORDEN

**Conjunto discreto de masas:**



**Masa total del sistema:** Es la suma de cada una de las masas parciales del sistema.

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

**Momento estático de una masa genérica  $m_i$  respecto de un punto  $\hat{O}$ :** El momento estático  $\bar{S}_i^{\hat{O}}$  de la masa genérica  $m_i$  respecto del punto  $\hat{O}$ , está dado por la siguiente expresión:

$$\bar{S}_i^{\hat{O}} = (\overline{\hat{A}_i - \hat{O}}) \cdot m_i$$

Momento estático total del sistema  $\overline{S^{\dot{O}}_{Sist.}}$ :

$$\overline{S^{\dot{O}}_{Sist.}} = \sum_{i=1}^n (\overline{\dot{A}_i - \dot{O}}) \cdot m_i$$

$$\overline{S^{\dot{O}}_{Sist.}} = \left[ \sum_{i=1}^n (x_{A_i} - x_{\dot{O}}) \cdot m_i \right] \cdot \check{i} + \left[ \sum_{i=1}^n (y_{A_i} - y_{\dot{O}}) \cdot m_i \right] \cdot \check{j} + \left[ \sum_{i=1}^n (z_{A_i} - z_{\dot{O}}) \cdot m_i \right] \cdot \check{k}$$

$S_{y'z'}$

$S_{x'z'}$

$S_{x'y'}$

Momento estático del sistema  
respecto del plano  $y'z'$

Momento estático del sistema  
respecto del plano  $x'z'$

Momento estático del sistema  
respecto del plano  $x'y'$

**Centro de masas:** Es un punto donde se puede considerar concentrada toda la masa del sistema, sea este discreto o continuo.

Para el sistema discreto de masas, se calculan las coordenadas del centro de masas utilizando la siguiente expresión:

$$\overline{S^{\dot{O}}_{Sist.}} = (\overline{\dot{G} - \dot{O}}) \cdot M = \sum_{i=1}^n (\overline{\dot{A}_i - \dot{O}}) \cdot m_i$$

$$(\overline{\dot{G} - \dot{O}}) = \frac{\sum_{i=1}^n (\overline{\dot{A}_i - \dot{O}}) \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$(\overline{\dot{G} - \dot{O}}) = (x_{\dot{G}} - x_{\dot{O}}) \cdot \check{i} + (y_{\dot{G}} - y_{\dot{O}}) \cdot \check{j} + (z_{\dot{G}} - z_{\dot{O}}) \cdot \check{k}$$

$$\bullet \quad x_{\dot{G}} - x_{\dot{O}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{A_i} - x_{\dot{O}}) \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\bullet \quad y_{\dot{G}} - y_{\dot{O}} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{A_i} - y_{\dot{O}}) \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

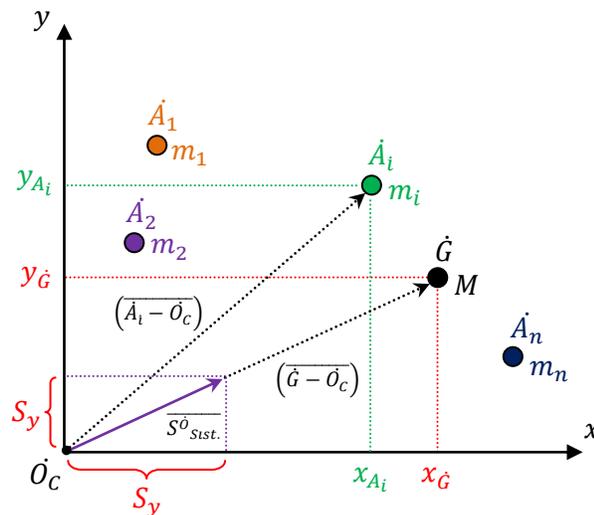
$$\bullet \quad z_{\dot{G}} - z_{\dot{O}} = \frac{\sum_{i=1}^n (z_{A_i} - z_{\dot{O}}) \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Coordenadas del centro de  
masas  $\dot{G}$  del sistema.

**En el caso particular de los sistemas coplanares:**

$$x_{\dot{G}} - x_{\dot{O}_C} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{A_i} - x_{\dot{O}_C}) \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$y_{\dot{G}} - y_{\dot{O}_C} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{A_i} - y_{\dot{O}_C}) \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$



Por simplicidad, para el cálculo de las coordenadas del centro de masas  $\dot{G}$  es común calcular el momento estático del sistema respecto del origen de coordenadas  $\dot{O}_C$  y no de un punto arbitrario  $\dot{O}$  (como hemos hecho para el sistema espacial). De esta manera, el sistema de ecuaciones se reduce a lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\dot{G}} - x_{\dot{O}_C} = x_{\dot{G}} \\ y_{\dot{G}} - y_{\dot{O}_C} = y_{\dot{G}} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{\dot{G}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{A_i} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ y_{\dot{G}} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{A_i} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \end{array} \right\}$$

En el plano coordenado, el momento estático  $\overline{S^{\dot{O}}_{Sist.}}$  se compone de la siguiente manera:

$$\overline{S^{\dot{O}}_{Sist.}} = \sum_{i=1}^n (\overline{A_i - \dot{O}_C}) \cdot m_i = (\overline{G - \dot{O}_C}) \cdot M$$

$$\overline{S^{\dot{O}}_{Sist.}} = \left( \sum_{i=1}^n x_{A_i} \cdot m_i \right) \cdot \check{i} + \left( \sum_{i=1}^n y_{A_i} \cdot m_i \right) \cdot \check{j} + 0 \cdot \check{k}$$

Momento estático del sistema respecto del eje "y"

$\longleftarrow S_y$

Momento estático del sistema respecto del eje "x"

$\longrightarrow S_x$

Conociendo las coordenadas del centro de masas del sistema, es posible calcular los momentos estáticos respecto de los ejes "x" e "y" ( $S_x$  y  $S_y$  respectivamente) de la siguiente manera:

$$\overline{S^{\dot{O}}_{Sist.}} = \underbrace{x_{\dot{G}} \cdot M}_{S_y} \cdot \check{i} + \underbrace{y_{\dot{G}} \cdot M}_{S_x} \cdot \check{j} + 0 \cdot \check{k}$$

**Nota:** El momento estático del sistema respecto de cualquier eje que pase por el centro de masas del mismo es nulo.

Para demostrar lo enunciado, supongamos un sistema discreto de masas en el plano "xy" del cual conocemos la posición de su centro de masas ( $\dot{G}$ ) y la masa total del mismo ( $M$ ).

Como puede observarse en la figura, a medida que el par de ejes gira un ángulo  $\hat{\alpha}$  en torno al punto  $\dot{O}_C$ , el eje "x" pasa a ocupar la posición  $x(\hat{\alpha})$ . Las coordenadas del centro de masas para cada par de ejes serán entonces funciones del giro  $\hat{\alpha}$  y se deduce lo siguiente:

$$\text{Cuando: } \hat{\alpha} \rightarrow \arctg\left(\frac{y_{\dot{G}}}{x_{\dot{G}}}\right), \text{ entonces } y_{\dot{G}}(\hat{\alpha}) \rightarrow 0$$

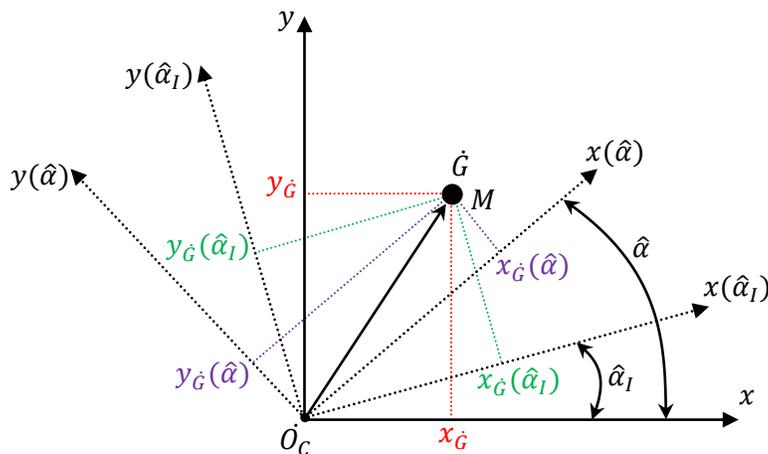
**Aclaración:**  $\hat{\alpha} = \arctg\left(\frac{y_{\dot{G}}}{x_{\dot{G}}}\right)$  implica que el eje  $x(\hat{\alpha})$  contiene a los puntos  $\dot{G}$  y  $\dot{O}_C$  (eje que contiene al centro de masas del sistema).

Por definición, el momento estático del sistema respecto del eje " $x(\hat{\alpha})$ " viene dado por la siguiente expresión:

$$S_x(\hat{\alpha}) = y_{\dot{G}}(\hat{\alpha}) \cdot M$$

$$\text{Cuando: } y_{\dot{G}}(\hat{\alpha}) \rightarrow 0, \text{ entonces } S_x(\hat{\alpha}) \rightarrow 0$$

Queda entonces demostrado que si el eje  $x(\hat{\alpha})$  contiene al centro de masas del sistema, el momento estático del mismo respecto de dicho eje es nulo.



### Conjunto continuo de masas:

Siendo la densidad del cuerpo  $\rho$  tal que  $\rho = f(x; y; z)$ :

$$dm = \rho \cdot dv$$

**Aclaración:**  $\rho = f(x; y; z)$  significa que la densidad del cuerpo puede variar de acuerdo a la ubicación del elemento de masa ( $dm$ ) dentro del mismo.

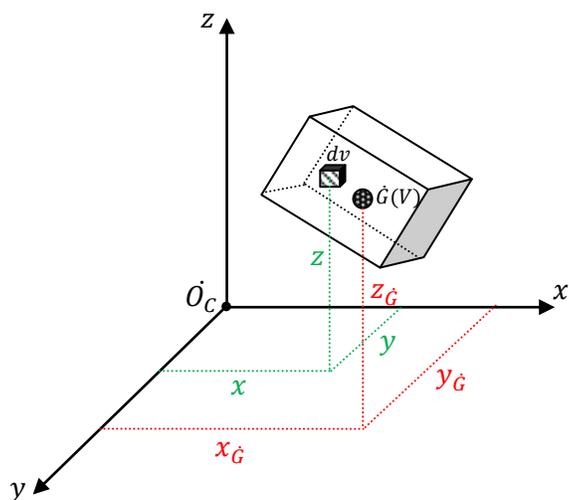
En el caso particular en que  $\rho$  es constante, el cuerpo es homogéneo y el centro geométrico (o baricentro) coincide con el centro de masas.

Para un sistema espacial:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\dot{G}} = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int x \cdot \rho \cdot dv}{\int \rho \cdot dv} = \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{\int x \cdot dv}{\int dv} = \frac{\int x \cdot dv}{\int dv} \\ y_{\dot{G}} = \frac{\int y \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int y \cdot \rho \cdot dv}{\int \rho \cdot dv} = \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{\int y \cdot dv}{\int dv} = \frac{\int y \cdot dv}{\int dv} \\ z_{\dot{G}} = \frac{\int z \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int z \cdot \rho \cdot dv}{\int \rho \cdot dv} = \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{\int z \cdot dv}{\int dv} = \frac{\int z \cdot dv}{\int dv} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{c} \text{Coordenadas del centro} \\ \text{de masas } \dot{G} \text{ o baricentro} \\ \text{del sistema.} \end{array}$$

Por lo tanto, resulta:

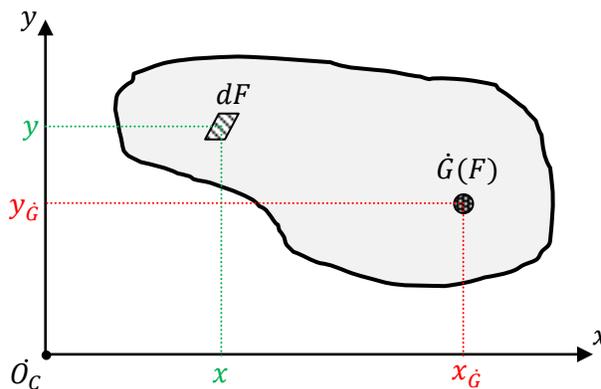
$x_{\dot{G}} = \frac{\int x \cdot dv}{\int dv}$	$y_{\dot{G}} = \frac{\int y \cdot dv}{\int dv}$	$z_{\dot{G}} = \frac{\int z \cdot dv}{\int dv}$
---	---	---



Como puede observarse en la figura de la izquierda y en los dos casos particulares que se presentan a continuación, la dificultad de encontrar las coordenadas del baricentro del cuerpo consiste simplemente en un problema matemático de definición de los límites de integración.

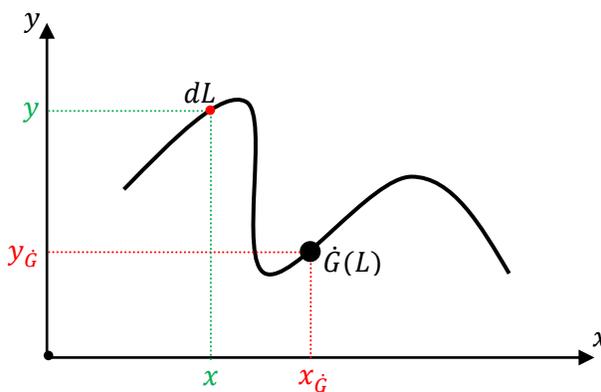
**Caso particular de una superficie plana:** El concepto es aplicable por ejemplo a una chapa plana de espesor y densidad constantes.

$x_{\dot{G}} = \frac{\int x \cdot dF}{\int dF}$	$y_{\dot{G}} = \frac{\int y \cdot dF}{\int dF}$
---	---



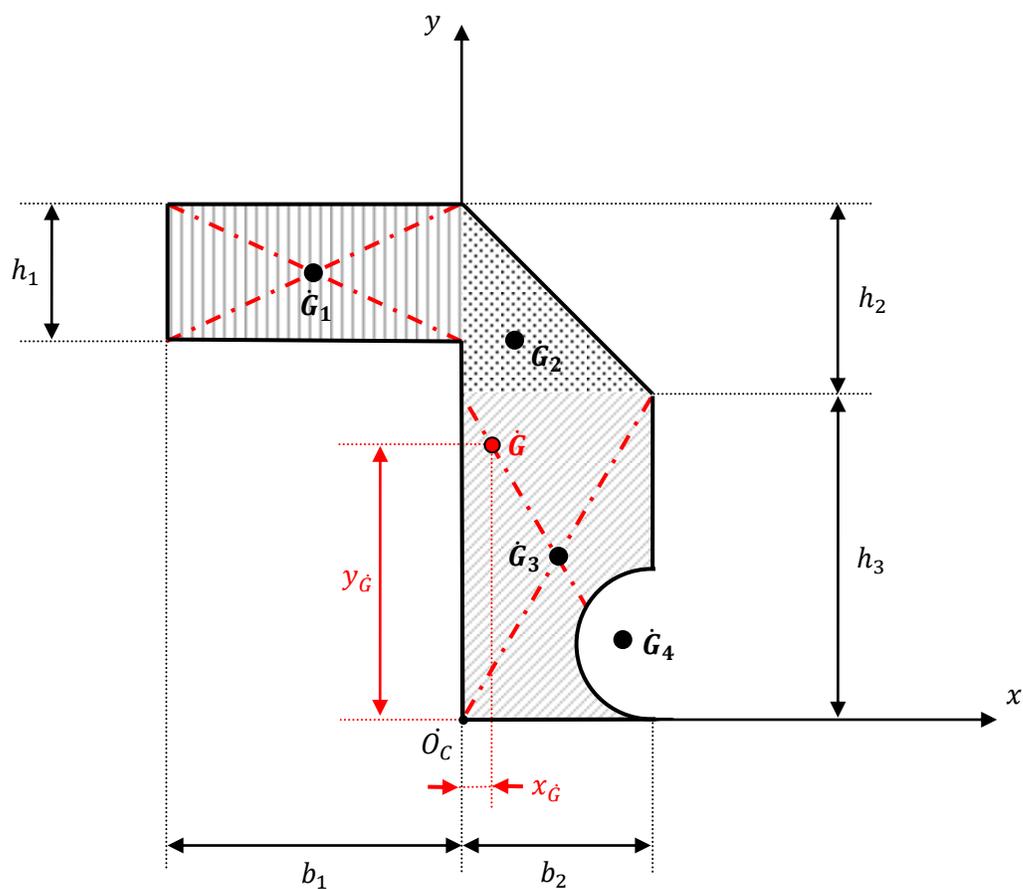
**Caso particular de una curva plana:**

$x_{\dot{G}} = \frac{\int x \cdot dl}{\int dl}$	$y_{\dot{G}} = \frac{\int y \cdot dl}{\int dl}$
---	---



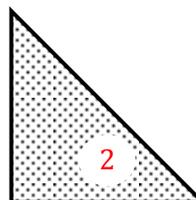
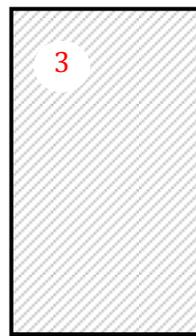
## CÁLCULO DEL BARICENTRO DE UNA FIGURA DE CONTORNO REGULAR

Se parte de un conjunto continuo de masas a para obtener otro conjunto equivalente y discreto de masas.



$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_{G_i} \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

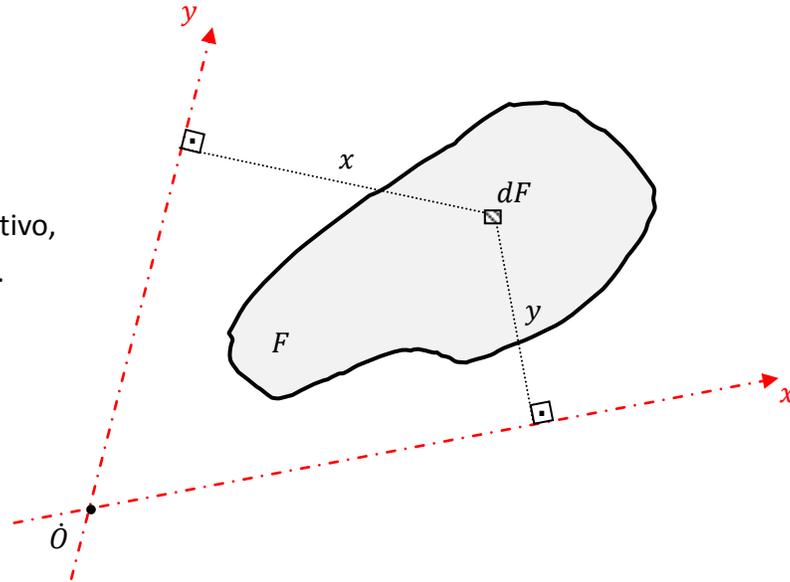
$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_{G_i} \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$



## MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN DE SUPERFICIES PLANAS

**Momento de segundo orden de una superficie plana respecto de dos ejes:** Es comúnmente denominado momento de inercia centrífugo.

$J_{xy}$  Puede ser negativo, positivo o nulo.



El momento de segundo orden del área elemental  $dF$ , respecto de los ejes "x" e "y" está dado por la siguiente expresión:

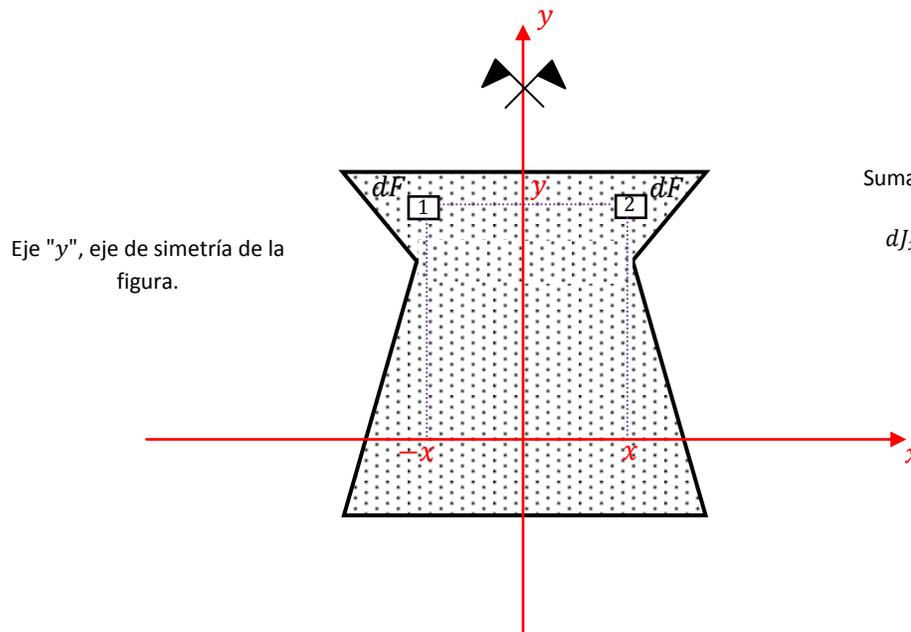
$$dJ_{xy} = x \cdot y \cdot dF$$

$$J_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF$$



$$[J_{xy}] = Long.^4$$

**Observación:** En el caso particular de que uno de los ejes coordenados sea un eje de simetría de la sección, se observa lo siguiente:



$$dJ_{xy_1} = -x \cdot y \cdot dF$$

$$dJ_{xy_2} = x \cdot y \cdot dF$$

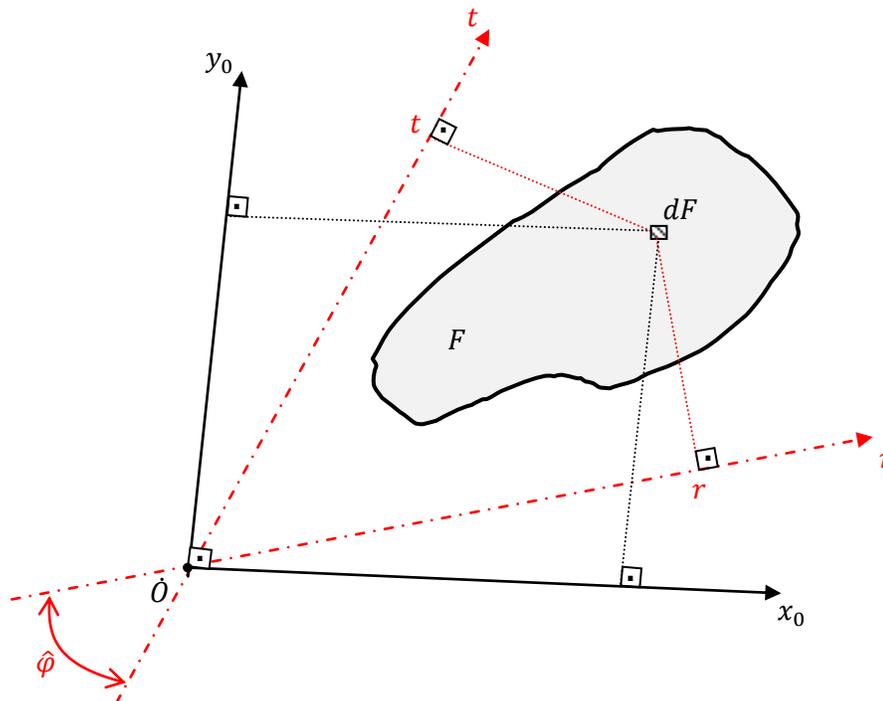
Sumando miembro a miembro:

$$dJ_{xy_1} + dJ_{xy_2} = dJ_{xy} = 0$$

Integrando:

$$J_{xy} = \int_F dJ_{xy} = 0$$

**Ejes conjugados de inercia de la sección:**



Condiciones de ejes conjugados de inercia

$$J_{rt} = 0$$

**Observación:** Para un punto cualquiera ( $\hat{O}$ ), contenido en el plano de la figura, existen infinitos pares de ejes que pasen por dicho punto y que cumplan con la condición de que  $J_{rt} = 0$ . Dichos ejes se denominan ejes conjugados de inercia de la sección.

Si el par de ejes "r" y "t", además de cumplir con la condición de ser conjugados, son ortogonales, se denominan ejes principales de inercia de la sección.

Ejes principales se denotan: " $x_0$ " e " $y_0$ "

Dichos ejes, tienen la particularidad de que para uno de ellos el momento de inercia de la figura toma el valor máximo y para el otro toma el valor mínimo.

## MOMENTO DE SEGUNDO ORDEN DE UNA SUPERFICIE

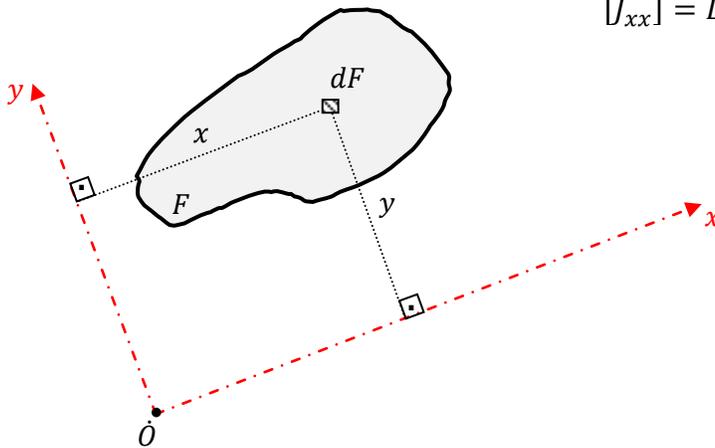
### PLANA RESPECTO DE UN EJE

Comúnmente denominado momento de inercia axial. Se lo define de la siguiente manera:

$$dJ_{xx} = y^2 \cdot dF \longrightarrow \boxed{J_{xx} = \int_F y^2 \cdot dF} \longrightarrow \text{Momento de segundo orden de la sección respecto del eje "x"}$$

$$\downarrow$$

$$[J_{xx}] = \text{Long.}^4$$



El momento de segundo orden de una sección respecto de un eje siempre tiene signo positivo.

Es un concepto que se aplica principalmente en el estudio de la flexión.

Análogamente para el eje "y":

$$dJ_{yy} = x^2 \cdot dF \longrightarrow \boxed{J_{yy} = \int_F x^2 \cdot dF} \longrightarrow \text{Momento de segundo orden de la sección respecto del eje "y"}$$

$$\downarrow$$

$$[J_{yy}] = \text{Long.}^4$$

**Aclaración:** Los ejes "x" e "y" no necesariamente deben ser ortogonales.

## MOMENTO DE SEGUNDO ORDEN DE UNA SUPERFICIE

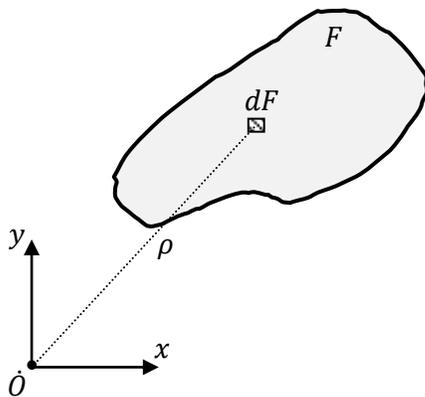
### PLANA RESPECTO DE UN PUNTO

Comúnmente denominado momento de inercia polar.

$$dJ_o = \rho \cdot dF \longrightarrow \boxed{J_o = \int_F \rho^2 \cdot dF} \longrightarrow \text{Momento de inercia polar de la sección respecto del punto } \dot{O}$$

$$\downarrow$$

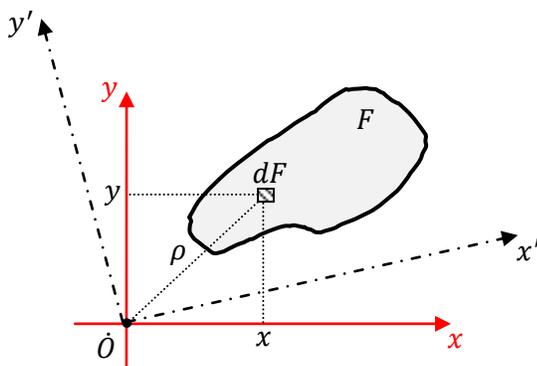
$$[J_o] = \text{Long}^4$$



El momento de inercia polar es una magnitud siempre positiva.

Es un concepto que se aplica principalmente en el estudio de la torsión.

Relación entre  $J_{xx}$ ;  $J_{yy}$  y  $J_o$  :



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$J_o = \int_F \rho^2 \cdot dF$$

$$J_o = \int_F (x^2 + y^2) \cdot dF$$

$$J_o = \int_F x^2 \cdot dF + \int_F y^2 \cdot dF$$

$$\boxed{J_o = J_{yy} + J_{xx}}$$

**Conclusión:** La suma de los momentos de inercia axiales de una figura plana respecto de cualquier par de ejes ortogonales que pasan por un punto, es constante e igual al momento de inercia polar de la figura respecto de dicho punto.

$$J_o = J_{yy} + J_{xx} = J_{y'y'} + J_{x'x'}$$

### RADIO DE GIRO AXIL

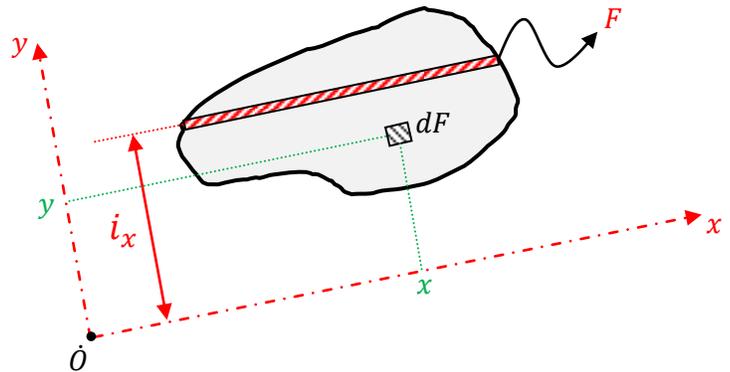
El radio de giro de una figura plana respecto de un eje "x" esta dado por la distancia comprendida entre dicho eje, y una fibra paralela al mismo donde se puede considerar concentrada el área total de la figura. Considerando esta definición, el radio de giro de la sección respecto del eje considerado puede calcularse de la siguiente manera:

$$J_{xx} = \int_F x \cdot y \cdot dF$$

$$J_{xx} = i_x^2 \cdot F$$

$$\downarrow$$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_{xx}}{F}}$$



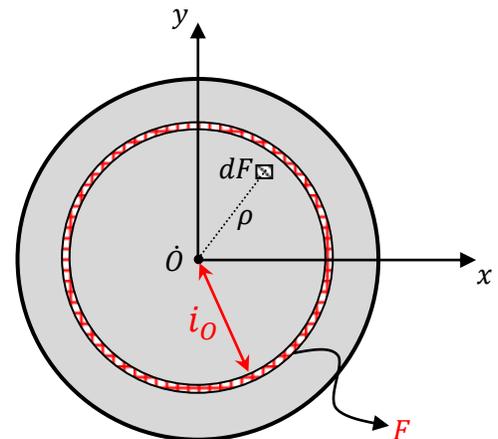
### RADIO DE GIRO POLAR

El radio de giro polar de una figura respecto de un punto  $\dot{O}$  esta dado por la distancia entre dicho punto y una fibra concéntrica con el contorno donde se puede considerar concentrada el área total de la figura.

$$J_o = \int_F \rho \cdot dF$$

$$J_o = i_o^2 \cdot F$$

$$i_o = \sqrt{\frac{J_o}{F}}$$



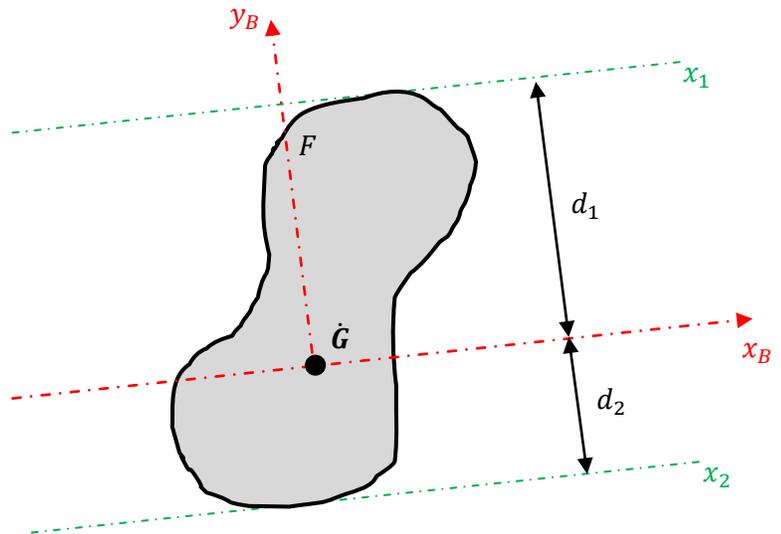
### MÓDULO RESISTENTE AXIL

Es una magnitud que depende exclusivamente de las características geométricas de la sección. Surge de considerar la distancia comprendida entre un eje baricéntrico y la fibra más alejada de la sección respecto del dicho eje.

Este concepto se aplica principalmente en el estudio de los cuerpos sometidos a flexión.

$$W_{x_1} = \frac{J_{x_B x_B}}{d_1}$$

$$W_{x_2} = \frac{J_{x_B x_B}}{d_2}$$

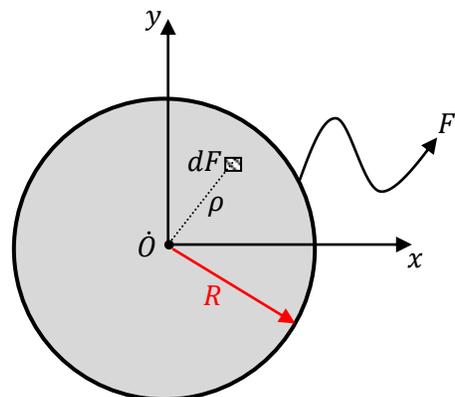


### MÓDULO RESISTENTE POLAR

En este caso, la fibra más alejada respecto del polo se corresponde con el contorno de la sección.

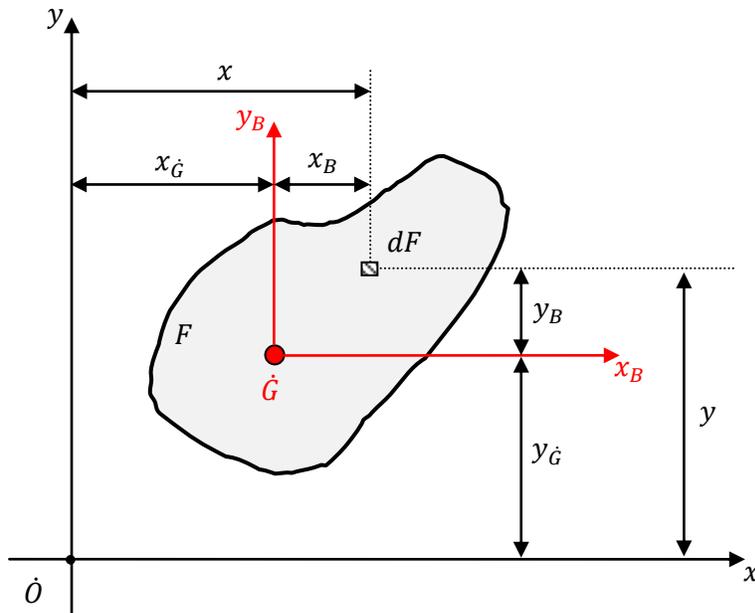
Este concepto se aplica principalmente en el estudio de la torsión.

$$W_o = \frac{J_o}{R}$$



## CÁLCULO DE LOS MOMENTOS DE INERCIA DE LAS FIGURAS MÁS USUALES.

Fórmulas de transposición paralela o Teorema de Steiner:



Datos

Ubicación de  $\dot{G} \equiv (x_{\dot{G}}; y_{\dot{G}})$  en el plano  $xy$ .

$$J_{x_B x_B}$$

$$J_{y_B y_B}$$

$$J_{x_B y_B}$$

$$x = x_B + x_{\dot{G}} \quad (1)$$

$$y = y_B + y_{\dot{G}} \quad (2)$$

$$J_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF \quad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3), resulta:

$$J_{xy} = \int_F (x_B + x_{\dot{G}}) \cdot (y_B + y_{\dot{G}}) \cdot dF$$

$$J_{xy} = \int_F x_B \cdot y_B \cdot dF + \int_F x_B \cdot y_{\dot{G}} \cdot dF + \int_F x_{\dot{G}} \cdot y_B \cdot dF + \int_F x_{\dot{G}} \cdot y_{\dot{G}} \cdot dF$$

$$J_{xy} = \underbrace{\int_F x_B \cdot y_B \cdot dF}_{J_{x_B y_B}} + y_{\dot{G}} \cdot \underbrace{\int_F x_B \cdot dF}_{S_{y_B} = 0} + x_{\dot{G}} \cdot \underbrace{\int_F y_B \cdot dF}_{S_{x_B} = 0} + x_{\dot{G}} \cdot y_{\dot{G}} \cdot \underbrace{\int_F dF}_F$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{x_B} = 0 \\ S_{y_B} = 0 \end{array} \right\}$$

→ Ambos son nulos, pues representan el momento estático de la sección respecto de los ejes "x<sub>B</sub>" e "y<sub>B</sub>" respectivamente, los cuales son ejes baricéntricos.

Por lo tanto, resulta lo siguiente:

$$J_{xy} = J_{x_B \cdot y_B} + x_{\dot{G}} \cdot y_{\dot{G}} \cdot F$$

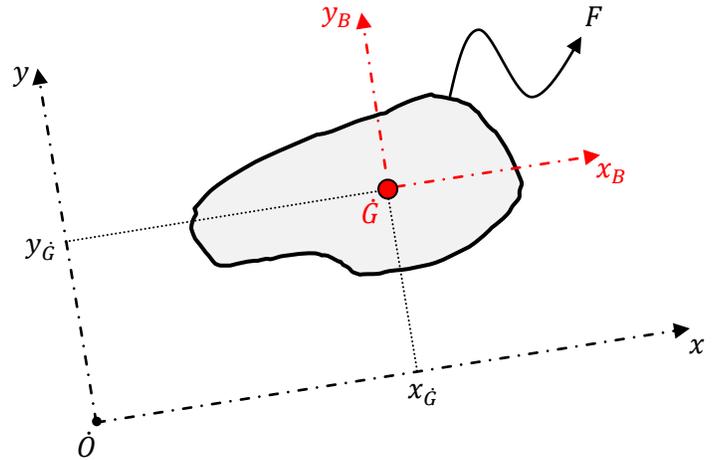
→ Teorema de Steiner

Procediendo análogamente al caso anterior, se llega a las siguientes conclusiones:

$$J_{xx} = J_{x_B \cdot x_B} + (y_G)^2 \cdot F$$

$$J_{yy} = J_{y_B \cdot y_B} + (x_G)^2 \cdot F$$

Teorema de Steiner



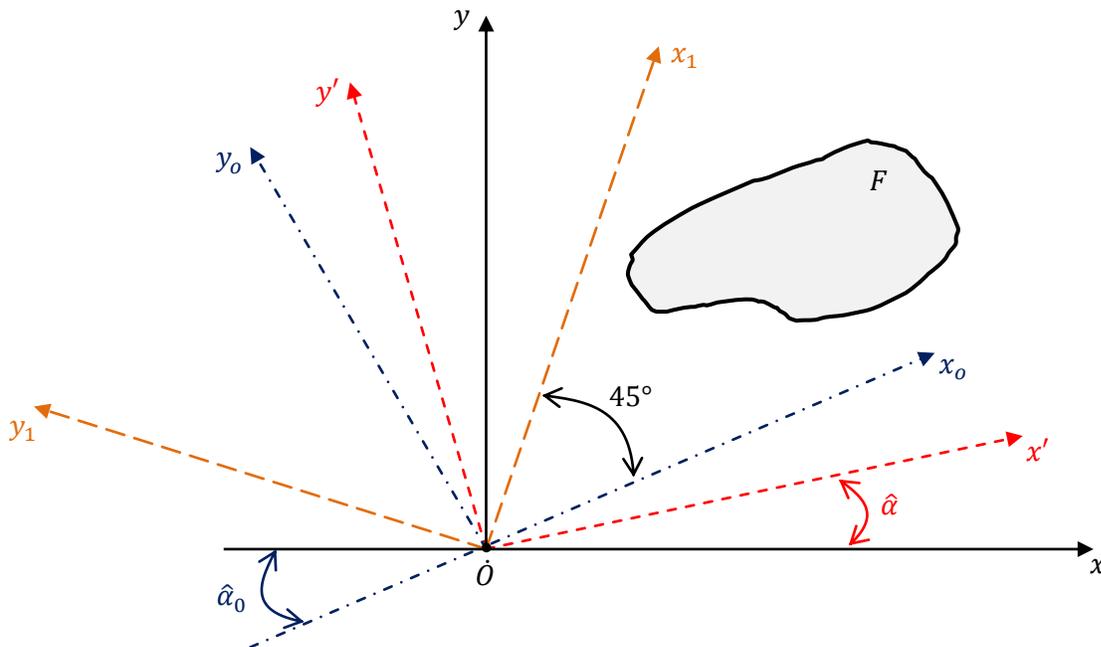
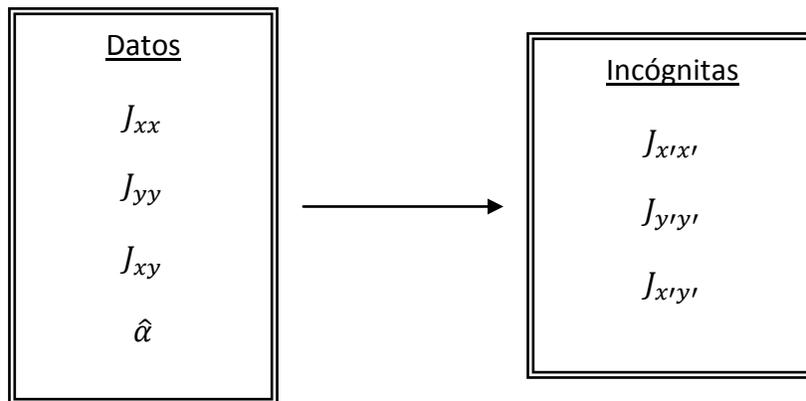
**Observaciones:**

$$J_{xx} \geq J_{x_B x_B}$$

$$J_{yy} \geq J_{y_B y_B}$$

$$J_{xy} \geq J_{x_B y_B} \text{ ó } J_{xy} \leq J_{x_B y_B}$$

## FÓRMULAS DE TRANSPOSICIÓN ANGULAR



$$J_{x_1x_1} = J_{xx} \cdot \cos^2 \hat{\alpha} + J_{yy} \cdot \sin^2 \hat{\alpha} - J_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \hat{\alpha}) \quad (1)$$

$$J_{y_1y_1} = J_{yy} \cdot \cos^2 \hat{\alpha} + J_{xx} \cdot \sin^2 \hat{\alpha} + J_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \hat{\alpha}) \quad (2)$$

$$J_{x_1y_1} = \frac{J_{xx} - J_{yy}}{2} \cdot \sin(2 \cdot \hat{\alpha}) + J_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \hat{\alpha}) \quad (3)$$

## CÁLCULO DE LOS EJES PRINCIPALES DE INERCIA DE LA SECCIÓN

Los ejes principales de la sección " $x_o$ ", " $y_o$ " deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{x_o y_o} = 0 \\ \hat{\varphi} = 90^\circ \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Ejes conjugados de inercia.} \\ \longrightarrow \text{Ortogonales.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} J_{m\acute{a}x.} = J_I \\ J_{m\acute{i}n.} = J_{II} \end{array}$$

Para hallar los valores  $J_{m\acute{a}x.}$  y  $J_{m\acute{i}n.}$  se procede hallar los valores cr\iticos de la funci\on  $J_{x'x'} = f(\hat{\alpha})$ :

$$\frac{dJ_{x'x'}}{d\hat{\alpha}} = -2 \cdot J_{xx} \cdot \cos \hat{\alpha} \cdot \sin \hat{\alpha} + 2 \cdot J_{yy} \cdot \sin \hat{\alpha} \cdot \cos \hat{\alpha} - 2 \cdot J_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \hat{\alpha})$$

$$\left. \frac{dJ_{x'x'}}{d\hat{\alpha}} \right|_{\hat{\alpha}=\hat{\alpha}_o} = -2 \cdot J_{xx} \cdot \cos \hat{\alpha}_o \cdot \sin \hat{\alpha}_o + 2 \cdot J_{yy} \cdot \sin \hat{\alpha}_o \cdot \cos \hat{\alpha}_o - 2 \cdot J_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \hat{\alpha}_o) = 0$$

$$\tan(2 \cdot \hat{\alpha}_o) = \frac{2 \cdot J_{xy}}{J_{yy} - J_{xx}} \quad (4)$$

Reemplazando el valor de  $\hat{\alpha}_o$  obtenido de (4) en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos los valores correspondientes a  $J_{m\acute{a}x.}$  y  $J_{m\acute{i}n.}$ :

$$J_{I,II} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4 \cdot J_{xy}^2} \quad (5)$$

**CÁLCULO DE LA POSICIÓN DE LOS EJES RESPECTO DE LOS CUALES LOS  
MOMENTOS CENTRÍFUGOS SON MÁXIMO Y MÍNIMO**

Para ello procedemos a hallar los valores críticos de la función  $J_{x'y'} = g(\hat{\alpha})$ :

$$J_{x'y'} = \frac{J_{xx} - J_{yy}}{2} \cdot \sin(2 \cdot \hat{\alpha}) + J_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \hat{\alpha})$$

$$\frac{dJ_{x'y'}}{d\hat{\alpha}} = (J_{xx} - J_{yy}) \cdot \cos(2 \cdot \hat{\alpha}) - 2 \cdot J_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \hat{\alpha})$$

$$\left. \frac{dJ_{x'y'}}{d\hat{\alpha}} \right|_{\hat{\alpha}=\hat{\alpha}_I} = (J_{xx} - J_{yy}) \cdot \cos(2 \cdot \hat{\alpha}_I) - 2 \cdot J_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \hat{\alpha}_I) = 0$$

$$(J_{xx} - J_{yy}) \cdot \cos(2 \cdot \hat{\alpha}_I) = 2 \cdot J_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \hat{\alpha}_I)$$

$$\tan(2 \cdot \hat{\alpha}_I) = \frac{(J_{xx} - J_{yy})}{2 \cdot J_{xy}} \quad (6)$$

Comparando las ecuaciones (4) y (6), resulta:

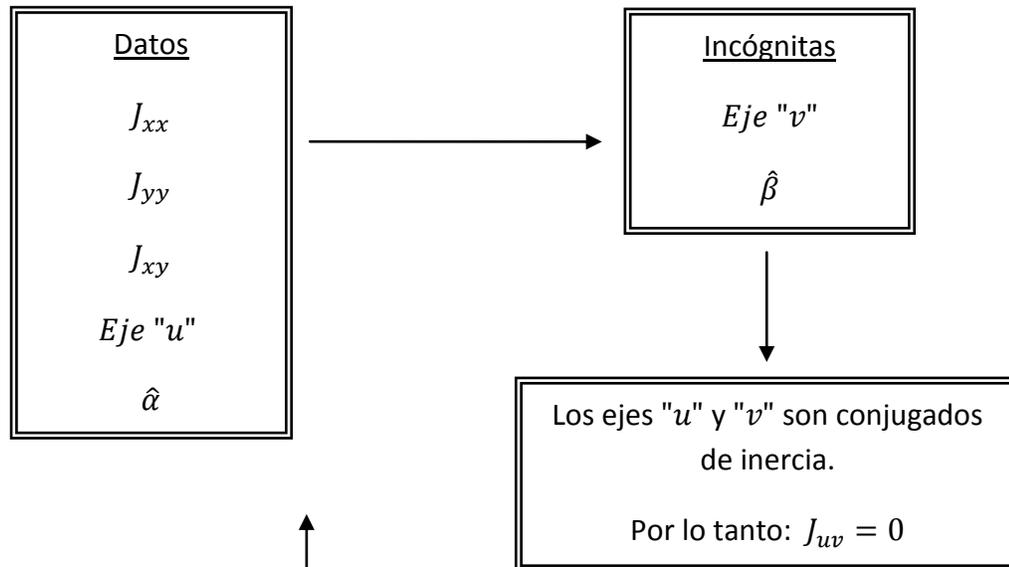
$$\tan(2 \cdot \hat{\alpha}_I) = -\frac{1}{\tan(2 \cdot \hat{\alpha}_o)}$$

De lo que se deduce que los ejes de momento centrífugo máximo y mínimo son bisectores de los ejes principales de inercia (forman 45°).

Reemplazando  $\hat{\alpha}_I$  por su expresión obtenida en (6) en la ecuación (3) obtenemos los valores correspondientes a  $J_{xy}^{\text{máx.}}$  y  $J_{xy}^{\text{mín.}}$ :

$$J_{xy}^{\text{máx.}} = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4 \cdot J_{xy}^2} \quad (7)$$

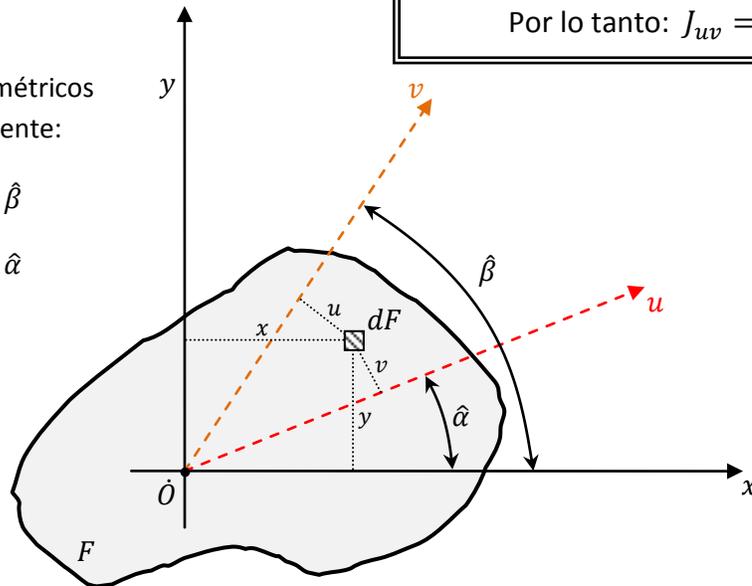
## CÁLCULO DE EJES CONJUGADOS DE INERCIA



Mediante cálculos trigonométricos puede deducirse lo siguiente:

$$u = x \cdot \sin \hat{\beta} - y \cdot \cos \hat{\beta}$$

$$v = y \cdot \cos \hat{\alpha} - x \cdot \sin \hat{\alpha}$$



Por definición:

$$J_{uv} = \int_F u \cdot v \cdot dF = \int_F (x \cdot \sin \hat{\beta} - y \cdot \cos \hat{\beta}) \cdot (y \cdot \cos \hat{\alpha} - x \cdot \sin \hat{\alpha}) \cdot dF = 0$$

$$\int_F x \cdot y \cdot \sin \hat{\beta} \cdot \cos \hat{\alpha} \cdot dF - \int_F x^2 \cdot \sin \hat{\beta} \cdot \sin \hat{\alpha} \cdot dF - \int_F y^2 \cdot \cos \hat{\beta} \cdot \cos \hat{\alpha} \cdot dF + \int_F x \cdot y \cdot \cos \hat{\beta} \cdot \sin \hat{\alpha} \cdot dF = 0$$

$$\sin \hat{\beta} \cdot \cos \hat{\alpha} \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF - \sin \hat{\beta} \cdot \sin \hat{\alpha} \cdot \int_F x^2 \cdot dF - \cos \hat{\beta} \cdot \cos \hat{\alpha} \cdot \int_F y^2 \cdot dF + \cos \hat{\beta} \cdot \sin \hat{\alpha} \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF = 0$$

$$\sin \hat{\beta} \cdot \cos \hat{\alpha} \cdot J_{xy} - \sin \hat{\beta} \cdot \sin \hat{\alpha} \cdot J_{yy} - \cos \hat{\beta} \cdot \cos \hat{\alpha} \cdot J_{xx} + \cos \hat{\beta} \cdot \sin \hat{\alpha} \cdot J_{xy} = 0$$

$$J_{xy} \cdot (\sin \hat{\beta} \cdot \cos \hat{\alpha} + \cos \hat{\beta} \cdot \sin \hat{\alpha}) - J_{yy} \cdot \sin \hat{\beta} \cdot \sin \hat{\alpha} - J_{xx} \cdot \cos \hat{\beta} \cdot \cos \hat{\alpha} = 0$$

Dividiendo ambos miembros por  $\cos \hat{\alpha} \cdot \cos \hat{\beta}$ , resulta lo siguiente:

$$J_{xy} \cdot \left( \frac{\sin \hat{\beta} \cdot \cos \hat{\alpha}}{\cos \hat{\alpha} \cdot \cos \hat{\beta}} + \frac{\cos \hat{\beta} \cdot \sin \hat{\alpha}}{\cos \hat{\alpha} \cdot \cos \hat{\beta}} \right) - J_{yy} \cdot \frac{\sin \hat{\beta} \cdot \sin \hat{\alpha}}{\cos \hat{\alpha} \cdot \cos \hat{\beta}} - J_{xx} \cdot \frac{\cos \hat{\beta} \cdot \cos \hat{\alpha}}{\cos \hat{\alpha} \cdot \cos \hat{\beta}} = 0$$

$$J_{xy} \cdot (\tan \hat{\beta} + \tan \hat{\alpha}) - J_{yy} \cdot \tan \hat{\alpha} \cdot \tan \hat{\beta} - J_{xx} = 0$$

$$J_{xy} \cdot \tan \hat{\beta} + J_{xy} \cdot \tan \hat{\alpha} - J_{yy} \cdot \tan \hat{\alpha} \cdot \tan \hat{\beta} - J_{xx} = 0$$

$$\tan \hat{\beta} \cdot (J_{xy} - J_{yy} \cdot \tan \hat{\alpha}) + J_{xy} \cdot \tan \hat{\alpha} - J_{xx} = 0$$

Despejando:

$$\tan \hat{\beta} = \frac{J_{xx} - J_{xy} \cdot \tan \hat{\alpha}}{J_{xy} - J_{yy} \cdot \tan \hat{\alpha}}$$

$$\hat{\beta} = \arctg \left( \frac{J_{xx} - J_{xy} \cdot \tan \hat{\alpha}}{J_{xy} - J_{yy} \cdot \tan \hat{\alpha}} \right)$$

En el caso particular en que los ejes de referencia son ejes principales de inercia de la sección, la ecuación anterior adquiere la siguiente expresión:

$$\tan \hat{\beta} = -\frac{J_{xx}}{J_{yy}} \cdot \cotan \hat{\alpha}$$

Valores correspondientes de los momentos de segundo orden axiales:

$$J_{uu} = J_{xx} \cdot \cos^2 \hat{\alpha} + J_{yy} \cdot \sin^2 \hat{\alpha} - J_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \hat{\alpha})$$

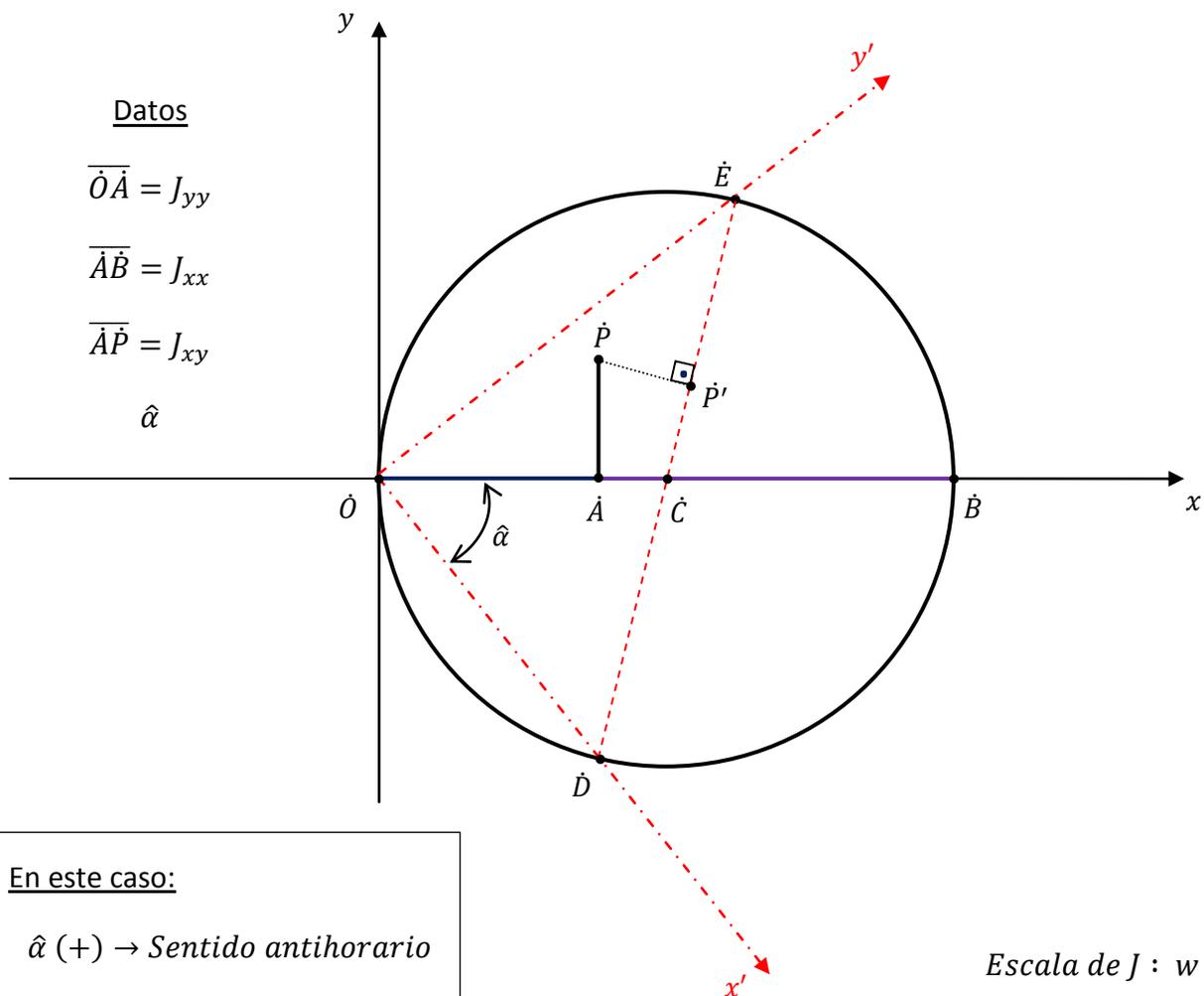
$$J_{vv} = J_{xx} \cdot \cos^2 \hat{\beta} + J_{yy} \cdot \sin^2 \hat{\beta} - J_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \hat{\beta})$$

## CIRCUNFERENCIA DE MOHR

El trazado de la circunferencia de Mohr nos permite, en forma muy simple, verificar los valores obtenidos del cálculo analítico de los problemas que se presentan dónde deben obtenerse los momentos de inercia de figuras planas.

Básicamente se distinguen las siguientes tres aplicaciones de esta herramienta gráfica en geometría de las masas:

- **Primera aplicación:** Determinación de los momentos de inercia axiales  $J_{x'x'}$  ;  $J_{y'y'}$  y el centrífugo  $J_{x'y'}$  correspondientes al par de ejes  $x'y'$  ortogonales girados un ángulo  $\hat{\alpha}$  respecto del eje primitivo  $x$ .



**Descripción del procedimiento:**

Se traza en una determinada escala sobre el eje  $x$  y a partir del punto  $\dot{O}$  el segmento determinado por el valor correspondiente a  $J_{yy}$  cuyo extremo determina el punto  $\dot{A}$  y consecutivo a este se traza el segmento correspondiente a  $J_{xx}$  el cual tiene origen en  $\dot{A}$  y extremo en  $\dot{B}$ .

El segmento  $\overline{\dot{O}\dot{B}}$  determina el diámetro de la circunferencia de Mohr, y en base a ello es posible ubicar el punto  $\dot{C}$  (centro de la circunferencia).

Posteriormente se traza a partir del punto  $\dot{A}$  el valor correspondiente en escala a  $J_{xy}$  hacia arriba o hacia abajo según sea positivo o negativo respectivamente. El extremo del segmento trazado determina un punto  $\dot{P}$  determinado polo de la circunferencia.

Lo expuesto hasta el momento corresponde al procedimiento inicial genérico para cualquiera de las tres aplicaciones de la circunferencia de Mohr a las que hacemos referencia en el presente trabajo.

Ahora bien, para determinar los momentos de inercia  $J_{x'x'}$  ;  $J_{y'y'}$  y el centrífugo  $J_{x'y'}$  correspondientes al par de ejes  $x'y'$  ortogonales, girados un ángulo  $\hat{\alpha}$  respecto del eje primitivo  $x$ , se procederá, a partir de lo enunciado anteriormente, de la siguiente manera:

Se traza a partir de  $\dot{O}$  el eje  $x'$  con el ángulo  $\hat{\alpha}$  dado como dato, este nuevo eje intersecta a la circunferencia en un punto  $\dot{D}$ .

Posteriormente se traza el segmento  $\overline{\dot{D}\dot{C}}$  cuya prolongación corta a la circunferencia en un nuevo punto de referencia  $\dot{E}$ . El eje  $y'$  queda entonces determinado al unir el origen  $\dot{O}$  con el punto  $\dot{E}$ .

Finalmente, de la proyección del polo sobre el segmento  $\overline{\dot{D}\dot{E}}$  se obtiene el punto  $\dot{P}'$  resultando lo siguiente:

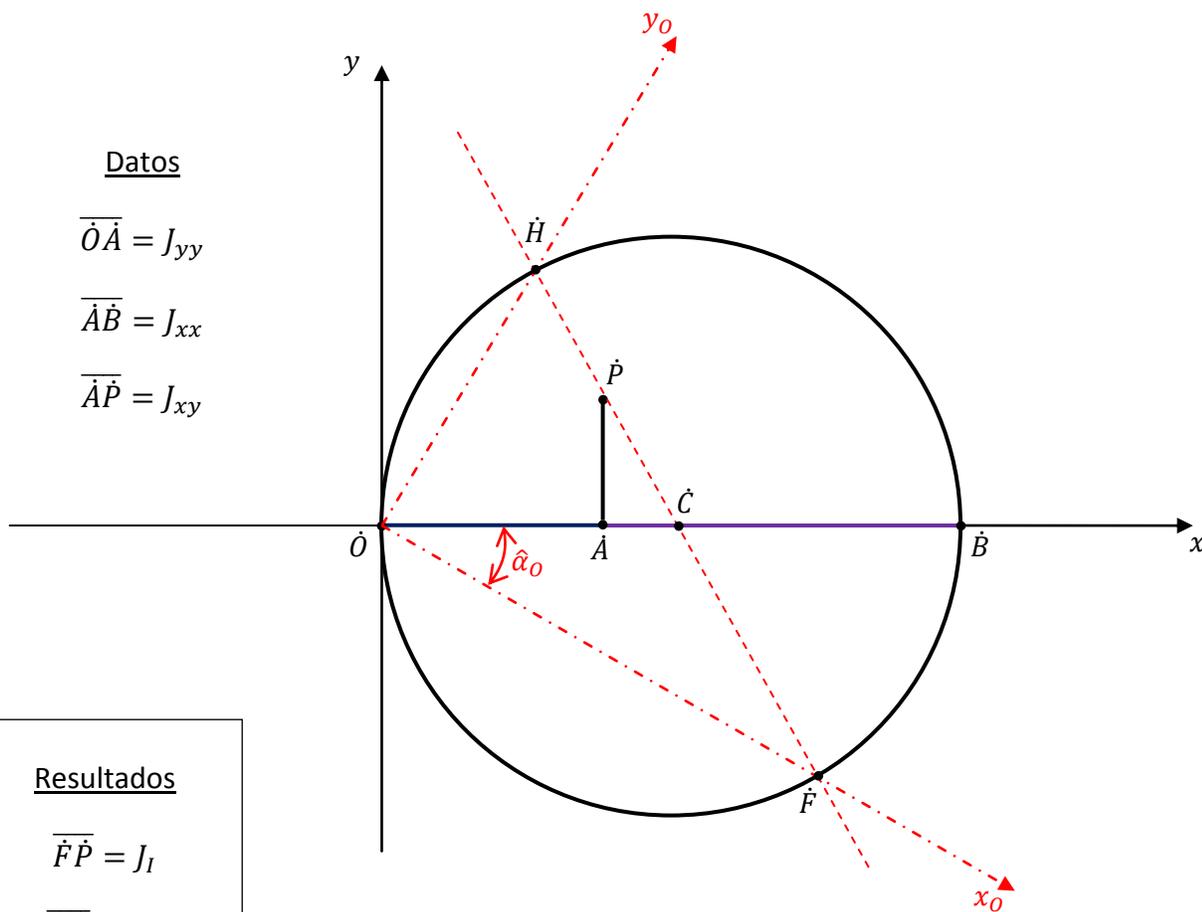
$$\overline{\dot{D}\dot{P}'} = J_{x'x'}$$

$$\overline{\dot{P}'\dot{E}} = J_{y'y'}$$

$$\overline{\dot{P}\dot{P}'} = J_{x'y'}$$

- **Segunda aplicación:** Mediante la circunferencia de Mohr, determinar la posición de los ejes principales de inercia de la figura dada respecto del par de ejes  $x'$  e  $y'$ , ortogonales, y los valores de los respectivos momentos de segundo orden  $J_I$  y  $J_{II}$  (principales de inercia).

En este caso, a partir del procedimiento genérico explicado con anterioridad, se procederá a unir mediante un segmento el centro de la circunferencia  $\dot{C}$  con el polo  $\dot{P}$ . La prolongación de dicho segmento cortará a la circunferencia en dos puntos  $\dot{F}$  y  $\dot{H}$ . De esta manera, los ejes principales de inercia quedaran determinados al trazar  $\overline{\dot{O}\dot{F}}$  y  $\overline{\dot{O}\dot{H}}$ .



Resultados

$$\overline{\dot{F}\dot{P}} = J_I$$

$$\overline{\dot{P}\dot{H}} = J_{II}$$

$$\hat{\alpha}_0$$

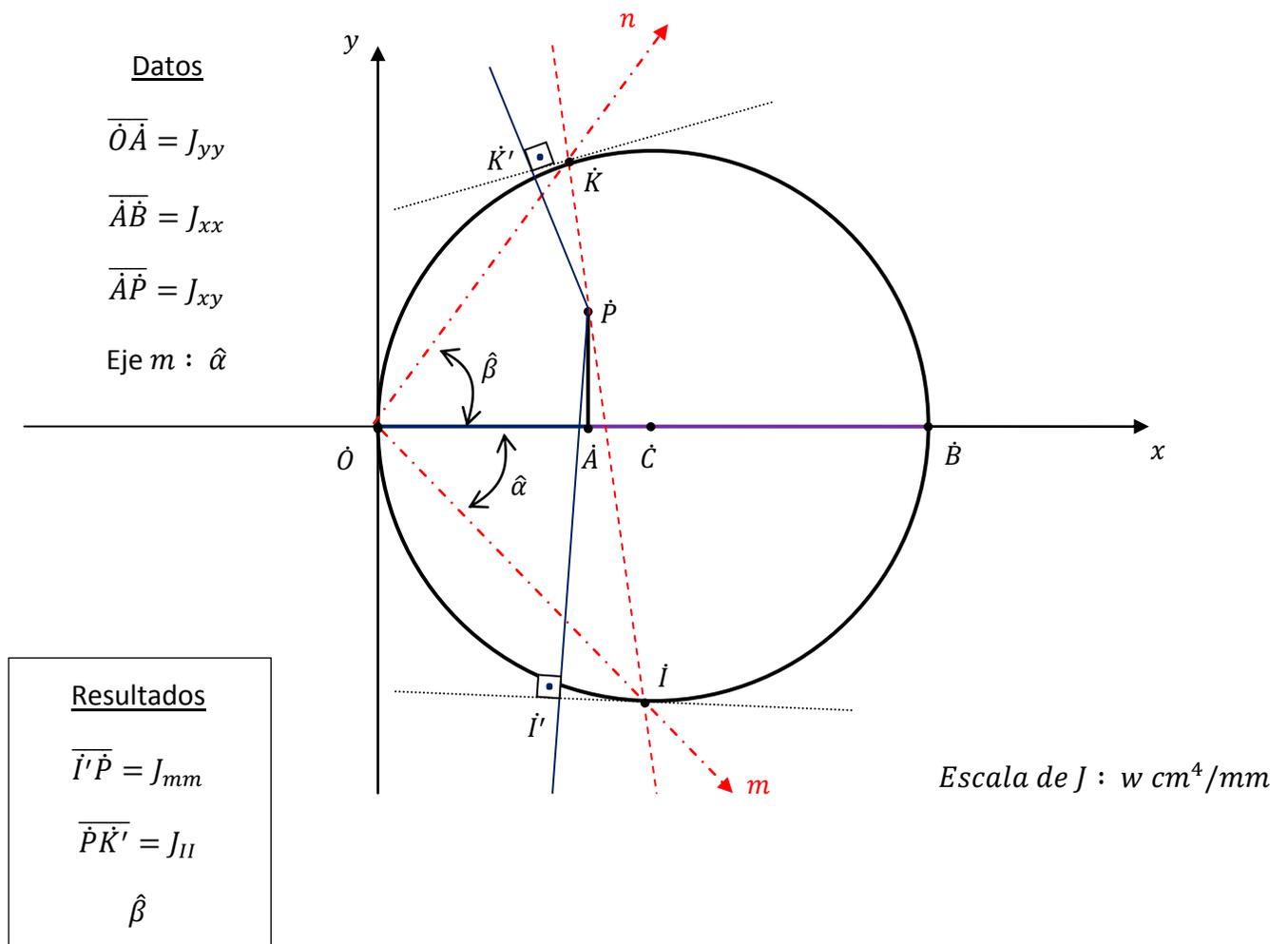
Escala de  $J$  :  $w \text{ cm}^4/\text{mm}$

- **Tercera aplicación:** Mediante la circunferencia de Mohr, determinar la posición del eje  $n$ , conjugado de inercia del eje  $m$  cuya dirección forma un ángulo  $\hat{\alpha}$  con el eje primitivo  $x$ .

A partir del procedimiento genérico, se procede de la siguiente manera:

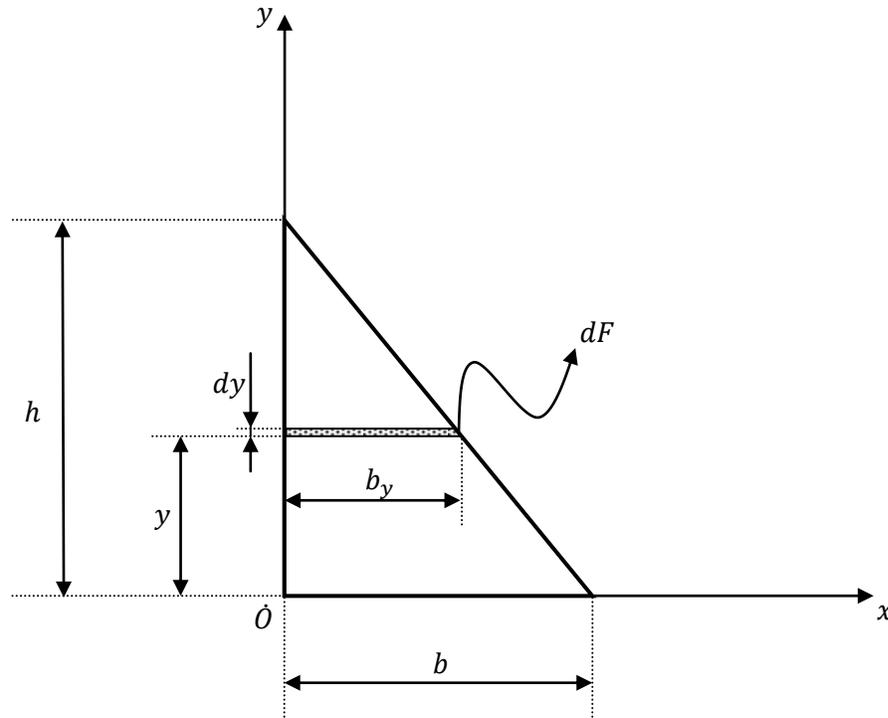
- Se une el punto  $\dot{I}$ , determinado por la intersección del eje  $m$  con la circunferencia, con el polo. La prolongación del segmento trazado corta a la circunferencia en otro punto  $\dot{K}$ .
- Se traza el eje  $n$ , conjugado de inercia del eje  $m$ , uniendo los puntos  $\dot{O}$  y  $\dot{K}$ .
- Se trazan las rectas tangentes a la circunferencia en los puntos  $\dot{I}$  y  $\dot{K}$  y se determina la distancia de éstas al polo. Estas distancias representan, en la escala, el valor de los momentos de segundo orden de la figura plana respecto de los ejes  $m$  y  $n$ , conjugados de inercia ( $J_{mm}$  y  $J_{nn}$ ).

Se observa que al ser nula la distancia del segmento  $\overline{\dot{I}\dot{K}}$  al polo de la circunferencia se verifica  $J_{mn} = 0$  lo cual cumple con la condición de ser los ejes  $m$  y  $n$  conjugados de inercia de la figura.



La aplicación de la circunferencia de Mohr para hallar la dirección de ejes conjugados de inercia se aplica para la determinación gráfica del denominado **eje neutro** en el estudio de la flexión, tema que se desarrollará más adelante.

**Ejemplo de aplicación:** A los efectos de dejar en claro algunos conceptos explicados anteriormente se procederá a analizar ciertas características geométricas de una sección en particular (sección correspondiente a un triángulo rectángulo de base  $b$  y altura  $h$ ).



Cálculo de las coordenadas del baricentro: Para ello utilizaremos el concepto de momento estático de la figura respecto de un eje.

$$dF = b_y \cdot dy$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{h}{b} = \frac{(h - y)}{b_y}$$

$$b_y = b \cdot \frac{(h - y)}{h} = b - \frac{b}{h} \cdot y \quad (1)$$

$$\bar{S}_x = \int_F y \cdot dF = \int_0^h y \cdot b_y \cdot dy \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\begin{aligned}\bar{S}_x &= \int_0^h y \cdot \left( b - \frac{b}{h} \cdot y \right) \cdot dy \\ \bar{S}_x &= b \cdot \int_0^h y \cdot dy - \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy \\ \bar{S}_x &= b \cdot \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^h - \frac{b}{h} \cdot \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h \\ \bar{S}_x &= \frac{b \cdot h^2}{2} - \frac{b}{h} \cdot \frac{h^3}{3} \\ \bar{S}_x &= \frac{b \cdot h^2}{6} \quad (3)\end{aligned}$$

Por definición de baricentro se puede considerar lo siguiente:

$$\bar{S}_x = y_{\hat{G}} \cdot F = y_{\hat{G}} \cdot \frac{b \cdot h}{2} \quad (4)$$

Igualando (4) y (3):

$$\begin{aligned}y_{\hat{G}} \cdot \frac{b \cdot h}{2} &= \frac{b \cdot h^2}{6} \\ y_{\hat{G}} &= \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$y_{\hat{G}} = \frac{h}{3}$$

Análogamente se procede para determinar la coordenada  $x_{\hat{G}}$  del baricentro y de esta manera queda determinado el mismo.

Cálculo del momento de segundo orden respecto del eje  $x_{\hat{G}}$ , baricéntrico: Para ello calculamos primeramente el momento de segundo orden respecto del eje  $x$  y luego aplicaremos la transposición paralela (Teorema de Steiner) para encontrar la expresión correspondiente a  $J_{x_{\hat{G}}x_{\hat{G}}}$ .

Por definición de momento de segundo orden respecto de un eje:

$$J_{xx} = \int_F y^2 \cdot dF$$

$$J_{xx} = \int_0^h y^2 \cdot b_y \cdot dy$$

Reemplazando  $b_y$  por su expresión obtenida de (1):

$$J_{xx} = \int_0^h y^2 \cdot \left( b - \frac{b}{h} \cdot y \right) \cdot dy$$

$$J_{xx} = b \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy - \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y^3 \cdot dy$$

$$J_{xx} = b \cdot \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h - \frac{b}{h} \cdot \left[ \frac{y^4}{4} \right]_0^h$$

$$J_{xx} = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4}$$

$$J_{xx} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (5)$$

Según Teorema de Steiner:

$$J_{xx} = J_{x_{\hat{G}}x_{\hat{G}}} + F \cdot y_{\hat{G}}^2$$

Despejando  $J_{x_{\hat{G}}x_{\hat{G}}}$ :

$$J_{x_{\hat{G}}x_{\hat{G}}} = J_{xx} - F \cdot y_{\hat{G}}^2 \quad (6)$$

Reemplazando en (6)  $J_{xx}$  por su expresión de la ecuación (5),  $F$  por su correspondiente expresión (área del triángulo) y el valor de la coordenada de  $y_{\hat{G}}$  obtenida anteriormente resulta lo siguiente:

$$J_{x_{\hat{G}}x_{\hat{G}}} = J_{xx} - F \cdot y_{\hat{G}}^2$$

$$J_{x_{\hat{G}}x_{\hat{G}}} = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$J_{x_{\hat{G}}x_{\hat{G}}} = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{18}$$

Finalmente se obtiene la expresión buscada correspondiente al momento de segundo orden respecto del eje baricéntrico  $x_{\hat{G}}$ .

$$J_{x_{\hat{G}}x_{\hat{G}}} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

Análogamente a lo expuesto se procede para determinar las expresiones correspondientes a los momentos de segundo orden  $J_{y_{\hat{G}}y_{\hat{G}}}$  y  $J_{x_{\hat{G}}y_{\hat{G}}}$ .