# POLINOMIO DE TAYLOR

*Este es un resumen de los resultados más importantes.*

Recordemos que para funciones de una variable independiente el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f$ alrededor del punto $t_0$ si la función es dos veces derivable en $t_0$ es:

$$p_2(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} f''(t_0)(t - t_0)^2$$

La relación que hay entre la función $f$ y su polinomio de Taylor ($p_2(t)$) es que para valores cercanos a $t_0$ el polinomio y la función toman valores aproximados[1]. Además podemos asegurar que la función y las derivadas (hasta la segunda) son igualas al polinomio y sus derivadas **solamente en el punto** $t_0$. Dicho de otro modo el polinomio de Taylor de orden 2 es el mejor polinomio de orden 2 que aproxima a la función alrededor de $t_0$.
Si extendemos el concepto a funciones de varias variables la idea es construir un polinomio de grado dos[2] tal que en un punto $P$ la función y las derivadas parciales (hasta las segundas) coincidan con la función y las derivadas en ese mismo punto, por supuesto tenemos que pedir que la función sea $C^2$ en un entorno de $P$ para asegurarnos que existan las derivadas y que la aproximación sea buena.
Más explícitamente para una función de dos variables el polinomio de Taylor de orden 2 en un punto $P = (x_0, y_0)$ será:

$$\begin{aligned} p_2(x,y) &= f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} (y - y_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0,y_0)} (x - x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(x_0,y_0)} (x - x_0)(y - y_0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_0,y_0)} (y - y_0)^2\right] \end{aligned} \tag{1}$$

Dejamos que verifiquen que en el punto $P = (x_0, y_0)$ se cumplen las siguientes igualdades:

$$p_2(x_0,y_0) = f(x_0,y_0), \qquad \left(\frac{\partial p_2}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}, \qquad \left(\frac{\partial p_2}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)},$$
$$\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0,y_0)}, \qquad \left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_0,y_0)}, \qquad \left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x \partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(x_0,y_0)}$$

Cuando nos piden que calculemos el valor aproximado de $f$ en un punto $Q = (x_1, y_1)$ cercano a $P = (x_0, y_0)$ usando el polinomio de Taylor de orden dos evaluamos el polinomio en $Q$ y nos da un valor aproximado (recordar que sólo en $P$ podemos asegurar que el polinomio y la función son iguales.

*Ejercicio: Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de* $f(x,y) = e^{x+y}\, cos(y-1)$ *en el punto* $(-1, 1)$. *Calcular aproximadamente* $f(-0.9, 1.05)$ *usando el desarrollo anterior.*
*Solución:* Primero mencionemos que la función $f$ es $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ por ser el producto de una función exponencial y la función *coseno*. Para armar el polinomio de Taylor necesitamos conocer la función

[1] El significado de cercano y aproximado en este resumen es bastante ambiguo, hace falta una discusión más detallada.
[2] En este resumen sólo veremos hasta el segundo orden.

y las derivadas (hasta las segundas) en el punto $(-1,1)$ para luego reemplazar en la ecuación 1.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{x+y}\, cos(y-1) &\Rightarrow\ & f(-1,1)=1\\
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} &= e^{x+y}\, cos(y-1) &\Rightarrow\ & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(-1,1)}=1\\
\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} &= e^{x+y}\, cos(y-1) - e^{x+y}\, sen(y-1) &\Rightarrow\ & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(-1,1)}=1\\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x,y)} &= e^{x+y}\, cos(y-1) &\Rightarrow\ & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(-1,1)}=1\\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x,y)} &= -2e^{x+y}\, sen(y-1) &\Rightarrow\ & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(-1,1)}=0\\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{(x,y)} &= e^{x+y}\, cos(y-1) - e^{x+y}\, sen(y-1) &\Rightarrow\ & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{(-1,1)}=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2(x,y) &= 1+1(x+1)+1(y-1)+\frac{1}{2}\left[1(x+1)^2+2\cdot 1(x+a)(y-1)+0(y-1)^2\right]\\
p_2(x,y) &\approx f(x,y) \qquad \text{en un entorno del punto } (-1,1)
\end{aligned}$$

Para calcular el valor aproximado de $f(-0.9, 1.05)$ simplemente evaluamos $p_2(-0.9, 1.05) \approx f(-0.9, 1.05)$, dejamos para ustedes las cuentas.

Si queremos el polinomio de Taylor de segundo orden para una función de tres variables $f(x,y,z)$ en un punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ hace falta agregar las derivadas con respecto a la variable $z$:

$$\begin{aligned}
p_2(x,y,z) = {} & f(x_0,y_0,z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0) + \\
& +\frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)^2 \\
& +2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)(y-y_0) + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)(z-z_0) + \\
& +2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)(z-z_0)\Bigg]
\end{aligned}$$

Finalmente mencionemos brevemente algo acerca del error que se comete al aproximar la función por su polinomio. Solamente evaluaremos el error al aproximar una función de dos variables por el polinomio de orden uno. Si $f \in C^1$ en una bola alrededor del punto $(x_0,y_0)$, llamamos resto $(R_1(x,y))$ al error que se comete podemos escribir

$$f(x,y) = p_1(x,y) + R_1(x,y) \qquad \text{en un entorno del punto } (x_0,y_0)$$

$$\text{con} \qquad p_1(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

y $R_1(x,y)$ cumple que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_1(x,y)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|}$$

Es decir que $R_1(x,y) = f(x,y) - p_1(x,y)$ no sólo tiende a cero cuando me acerco al punto $(x_0,y_0)$, también tiende a cero cuando lo divido por algo "chiquito" como es $\|(x-x_0,y-y_0)\|$, esto último les debería hacer recordar la definición de diferenciabilidad.

Si además $f \in C^2$ en una bola alrededor del punto $(x_0, y_0)$ y $(x, y)$ pertenece a la bola, una de las formas de escribir el resto[3] es:

$$R_1(x,y) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(a,b)}(x-x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(a,b)}(x-x_0)(y-y_0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(a,b)}(y-y_0)^2\right]$$

donde $(a, b)$ pertenece al segmento que une los puntos $(x, y)$ y $(x_0, y_0)$, es decir que existe $0 \leq t \leq 1$ tal que $(a, b) = (x_0, y_0) + t(x - x_0, y - y_0)$. Noten que el punto $(a, b)$ donde evaluamos las derivadas segundas no lo conocemos (al menos a *priori*), la idea siempre es encontrar una cota para el resto. Esto puede hacerse viendo cual es el máximo valor que puede tomar la expresión

$$R_1(x,y) \leq \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a',b')}(x-x_0)^2 + 2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(a',b')}|x-x_0||y-y_0| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a',b')}(y-y_0)^2\right]$$

donde $(a', b')$ es donde se alcanza el máximo valor de los módulos de las derivadas segundas. Esa expresión da una cota para el resto, es decir que estamos seguros que el error que se comete va a ser menor.

[3] Esto sale de los teoremas de valor medio.