Pregunta 1

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

Editar pregunta

Sea la ecuación vectorial de S $\vec{X} = (u^2 - v, -2u, 2uv) \quad (u, v) \in [-1, 2] \times [0, 2]$, un vector tangente a S en el punto $P = (-1, 0, 0)$ es:

Seleccione una:

- a. $(1, 1, 1)$
- b. $(2, 0, 2)$
- c. $(0, 1, 1)$
- d. $(3, 1, -1)$

Pregunta 2

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

Editar pregunta

Las derivadas direccionales de $f(x, y) = x^2 + x\, cos(y)$ en la dirección del versor $\hat{v} = (a, b)$ en el punto $(1, \pi/2)$ son:

Seleccione una:

- a. (2,-1)
- b. $2a - b$
- c. $a + 2b$
- d. $(2a, -1)$

Pregunta 3

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

Editar pregunta

Dado el plano $\Pi: \ z = 1$ y la superficie S parametrizada por $\vec{\sigma}(u, v) = (18 + cos(u)\ sen(2v), sen(u) + v cos(2v), tan(v)) \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times (-\pi/2, \pi/2)$
, una parametrización regular de la curva $C = \Pi \cap S$ es:

Seleccione una:

- a. $\vec{\gamma}(t) = (18 + cos(t), sen(t), 1) \quad t \in [0, 2\pi]$
- b. $\vec{\gamma}(t) = (18 + cos(2t), sen(2t), tan(t)) \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$
- c. $\vec{\gamma}(u) = (18 + cos(u), sen(u), tan(v)) \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$
- d. $\vec{\gamma}(t) = (18 + cos(t), sen(t) + t, 1) \quad t \in [0, 2\pi]$

Pregunta **4**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

Editar pregunta

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+y} & \text{si} \quad x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+y=0 \end{cases}$, las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el origen son:

Seleccione una:

- a. $\nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
- b. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
- c. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \quad \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
- d. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Pregunta **5**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

Editar pregunta

Sea $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$ con $\vec{g}(x,y) = (x^2, y - x^2)$ y f diferenciable en $\Re^2$ con $\nabla f(u,v) = (u+2v, 2u)$, el $\nabla h(1,2)$ vale:

Seleccione una:

- a. $(3,2)$
- b. $(2,2)$
- c. $(2,-1)$

Pregunta **6**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

Editar pregunta

Sea $f(x,y) = xy + e^{y^2}$ determine en cuales versores $\hat{r}$ la derivada direccional en el punto $(2,0)$ es un 50% de la derivada direccional máxima en ese punto.

Seleccione una o más de una:

- a. $\hat{r} = (3/5, 4/5)$
- b. $\hat{r} = (0,1)$
- c. $\hat{r} = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$
- d. $\hat{r} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$

Pregunta **7**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

Editar pregunta

Sea $f(x,y) = x + \frac{4}{x} + y^2$ en cual/cuales de los siguientes puntos el plano tangente al gráfico de f es horizontal

Seleccione una o más de una:

- a. $(0,0,0)$
- b. $(-2,0,0)$
- c. $(2,0,4)$
- d. $(1,0,5)$

Pregunta **8**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

Editar pregunta

Sean $\vec{g}(x,y) = (x, x+2y)$, $f : \Re^2 \to \Re$ diferenciable y $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$. Sabiendo que $\vec{g}(x_0,y_0) = (u_0,v_0)$ y que $\nabla h(x_0,y_0) = (2,-1)$, entonces el $\nabla f(u_0,v_0)$ vale:

Seleccione una:

- a. $(1,1)$
- b. $(1,2)$
- c. $(5/2,-1/2)$
- d. No es posible detreminar su valor

Pregunta 1

Primero buscamos el par (u_0, v_0) que verifica $\bar{X}(u_0,v_0) = \underbrace{(-1,0,0)}_{\text{Punto } P}$

$$\begin{cases} u_0^2 - v_0 = -1 \\ -2u_0 = 0 \rightsquigarrow u_0 = 0 \xrightarrow[\text{(primera ecuación)}]{} 0^2 - v_0 = -1 \rightsquigarrow v_0 = 1 \\ 2u_0 v_0 = 0 \end{cases}$$

Se tiene entonces $(u_0, v_0) = (0,1)$

$\bar{X}(u,v)$ es al menos C^1, tendremos plano tangente a S en el $(-1,0,0)$

Un vector tangente a S en P, estará contenido en este plano, con lo cual el vector tangente será normal a un vector normal al plano.

La estrategia es entonces hallar una normal para el plano y luego verificar ortogonalidad de vectores mediante producto escalar nulo.

Un vector normal a S en el punto P viene dado por

$\bar{n}(P) = \bar{n}(u_0, v_0) = \bar{X}'_u(u_0,v_0) \times \bar{X}'_v(u_0,v_0)$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}'_u(u,v) = (2u, -2, 2v) \to \bar{X}'_u(0,1) = (0,-2,2) \\ \bar{X}'_v(u,v) = (-1, 0, 2u) \to \bar{X}'_v(0,1) = (-1,0,0) \end{array}\right\} \bar{n} = (\bar{X}'_u \times \bar{X}'_v)_{(0,1)} = (0,-2,2)$$

Verificación de ortogonalidad mediante productos internos

$(1,1,1)\cdot(0,-2,-2) = -4$

$(2,0,2)\cdot(0,-2,-2) = -4$

$(0,1,1)\cdot(0,-2,-2) = -4$

$\boxed{(3,1,-1)\cdot(0,-2,-2) = 0}$

Pregunta 2

f es suma de funciones al menos C^1 $\Rightarrow$ f es diferenciable $\Rightarrow$ para un punto del dominio de f y para el versor $\check{v}$ se tiene $\frac{\partial f}{\partial \check{v}}(\bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \check{v}$

para el punto $(1, \pi/2)$ haremos el producto $\nabla f(1, \pi/2) \cdot \underbrace{(a,b)}_{\check{v}}$

- cálculo del gradiente

$\nabla f(x,y) = (2x + \cos(y), -x \cdot \operatorname{sen}(y))$

$\nabla f(1, \pi/2) = (2 \cdot 1 + \underbrace{\cos(\pi/2)}_{0}, -1 \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(\pi/2)}_{1}) = (2, -1)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \check{v}}(1, \pi/2) = \nabla f(1, \pi/2) \circ \check{v} = (2, -1) \circ (a,b) = \boxed{2a - b}$

Pregunta 3

Para obtener parametrización de $C = \pi \cap S$, planteamos la intersección

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\sigma}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ \tan(v) = \frac{\operatorname{sen} v}{\cos v} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} v = \cos v \end{cases}$$

Como $\tan(v) = 1 \Rightarrow v = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Dado que $v \in (-\pi/2, \pi/2)$ se tiene $v = \pi/4$

$\Rightarrow \bar{\gamma}(u) = \bar{\sigma}(u, v = \frac{\pi}{4}) = (18 + \cos(u) \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(2 \cdot \frac{\pi}{4})}_{=1}, \operatorname{sen}(u) + \frac{\pi}{4} \cdot \overbrace{\cos(2 \cdot \frac{\pi}{4})}^{=0}, \overbrace{\tan(\pi/4)}^{=1})$

con $u \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \bar{\gamma}(t) = (18 + \cos(t), \operatorname{sen}(t), 1)$ con $t \in [0, 2\pi]$

Pregunta 4

La derivadas parciales de f en el (0,0) deben ser calculadas por definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\cdot(1,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h+0} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h^2} \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(0,1)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{0+h} - 0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Pregunta 5

$$\begin{tikzcd} \boxed{(x,y)} \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[rr, bend right, "h = f\circ\bar{g}"'] & \boxed{(u,v)} \arrow[r, "f"] & \boxed{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

$\bar{g}(x,y)$ tiene componentes al menos $C^1 \Rightarrow$ es diferenciable
f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow$ la composición es diferenciable

$\Rightarrow$ vale la regla de la cadena

$$Jh(1,2) = \underbrace{Jf(\bar{g}(1,2))}_{?} \cdot \underbrace{J\bar{g}(1,2)}_{?}$$

$$J\bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} g'_{1x} & g'_{1y} \\ g'_{2x} & g'_{2y} \end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ -2x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J\bar{g}(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{g}(1,2) = (1^2, 2-1^2) = (1,1) \Rightarrow Jf(\bar{g}(1,2)) = Jf(1,1) = \nabla f(1,1) = (1+2\cdot 1, 2\cdot 1)$$

$$\nabla f(\bar{g}(1,2)) = (3,2)$$

$$\Rightarrow \boxed{Jh(1,2) = \nabla h(1,2) = (3,2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (2,2)}$$

Pregunta 6

$f(x,y)$ es suma de funciones al menos $C^1 \Rightarrow$ es diferenciable

vale para un punto $(x_0,y_0) \in Dom(f)$ que para un versor $\check{N}$,

$$\frac{\partial f}{\partial \check{N}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \check{N}$$

- Cómputo del gradiente

$$\nabla f(x,y) = (y, x + 2y e^{y^2}) \rightsquigarrow \nabla f(2,0) = (0, 2 + 2 \cdot 0 \cdot e^{0^2}) = (0, 2)$$

Además, el valor de la derivada direccional máxima en el punto $(2,0)$ es $\|\nabla f(2,0)\|$, con lo que podemos plantear para el versor incógnita $\check{N}$,

$$\frac{\partial f}{\partial \check{N}}(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \check{N} = \underbrace{\|\nabla f(2,0)\|}_{4} \cdot 50\% = 2$$

$$\begin{cases} \nabla f(2,0) \cdot \check{N} = \|f(2,0)\| \cdot 50\% \\ \|\check{N}\| = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (0,2) \cdot (a,b) = 2 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 1 \end{matrix}$$

$$\boxed{\check{N} = (0,1)}$$

Pregunta 7

f es suma de funciones que en su dominio son $C^1 \Rightarrow$ f es diferenciable en su dominio

Podemos emplear el resultado de que para una función diferenciable, el vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$ es normal al plano tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Plano tangente horizontal quiere decir que las dos primeras componentes del anterior vector son nulos.

Planteamos entonces $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{se tienen dos puntos } (-2,0) \text{ y } (2,0)$$

armamos el punto de la superficie $z = f(x,y)$

$f(-2,0) = -2 + 4/(-2) + 0^2 = -4 \rightarrow$ punto $(-2,0,-4)$

$f(2,0) = 2 + 4/2 + 0^2 = 4 \rightarrow$ $\boxed{\text{punto } (2,0,4)}$

Pregunta 8

$$\begin{tikzcd} \boxed{(x,y)} \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[rr, bend right, "h = f\circ\bar{g}"'] & \boxed{(u,v)} \arrow[r, "f"] & \boxed{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

$\bar{g}(x,y)$ es al menos C^1 en $\mathbb{R}^2$

f es diferenciable en $(u_0,v_0) = \bar{g}(x_0,y_0)$

Luego la composición $h = f\circ\bar{g}$ resulta diferenciable en el punto (x_0,y_0)

por regla de la cadena: $\underbrace{J h(x_0,y_0)}_{\text{vector conocido}} = \underbrace{J f(\underbrace{\bar{g}(x_0,y_0)}_{(u_0,v_0)})}_{\text{vector incógnita}} \cdot \underbrace{J\bar{g}(x_0,y_0)}_{\text{matriz a determinar}}$ (*)

$\bar{g}(x,y) = (\overbrace{g_1(x,y)}^{x}, \overbrace{g_2(x,y)}^{x+2y})$

$$J\bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema (*) queda $(2,-1) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para } \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) \text{ se tiene } -1 = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\cdot 2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) = -1/2 \\ \text{para } \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) \text{ se tiene } 2 = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\cdot 1 + (-1/2)\cdot 1 \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) = 5/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(u_0,v_0) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

NOTA