Derivadas Parciales Segundas En Funciones Compuestas

Ejercicio 17 de la Guía 4

Curso 4 - Análisis Matemático II

1. Consigna

Suponiendo que f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes y $z = f(x,y)$ donde $x = 2s + 3t$ e $y = 3s - 2t$, calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

2. Árbol de Dependencias

Sea una función compuesta $h(s,t) = f \circ \vec{g}$, donde

$$f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R} \setminus z = f(x,y)$$
$$\vec{g} : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2 \setminus (x,y) = \vec{g}(s,t)$$

Si se quieren calcular sus derivadas parciales, un camino posible es usando el **árbol de dependencias**, el cual se muestra en la Figura 1.

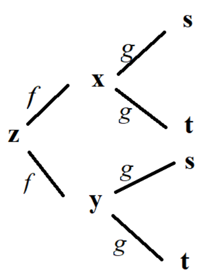

Figura 1: *Árbol de dependencias para $h(s,t) = f \circ \vec{g}$.*

La construcción del mismo se hace indicando, en orden, las dependencias de las distintas variables. En este caso, se observa que z depende de x e y por medio de f, mientras que x e y dependen **cada una** de s y t por medio de $\vec{g}$. En el árbol se empieza indicando la variable correspondiente a la composición, en este caso z y se sigue con las dependencias directas de la misma (x e y) formando las primeras ramas.Luego, se indican las dependencias de la variable de **cada rama** (s y t). En las flechas se indica la función a través de la cual se da la dependencia.

Si se quisiera hacer el árbol para un caso en el que f depende de, por ejemplo, x, y y z, se tendían inicialmente tres ramas y luego habría que indicar la dependencia de cada una de ellas. Es importante ver que no se podría usar la función $\vec{g}$ tal como se muestra más arriba porque sólo indica dependencias para x e y. Esto pasa porque no se cumple la relación de dimensiones que debe cumplirse al hacer una composición.

Una vez que se terminó el árbol se calculan las derivadas parciales de la siguiente manera:

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).\frac{\partial y}{\partial s}(s,t) \tag{1}$$
$$\frac{\partial h}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) \tag{2}$$

El procedimiento para hallar la expresíon 1 es: se quiere calcular la derivada de h con respecto a s, por lo que se deben buscar en el árbol todas las s, recorrer el camino desde z a cada una de ellas y sumarlos. En este caso hay 2 caminos: uno pasando por x y otro pasando por y. Para pasar de z a x se debe usar f, tal como se indica en el árbol. Por lo tanto, se deriva f con respecto a x. Luego, se pasa de x a s usando $\vec{g}$, por lo que se debe derivar la expresión que da $\vec{g}$ para x con respecto a s. Multiplicando las dos derivadas mencionadas, se obtiene el primer camino. Para el segundo camino, el procedimiento es similar pero con y en lugar de x. El primer término de la Ecuación 1 corresponde al primer camino y el segundo término al segundo.

Para la expresión 2 es totalmente análogo. Se buscan todas las t en el diagrama y se calcula cada camino.

3. Resolución

La idea es primero calcular las derivadas primeras usando las matrices jacobianas y luego modificar ligeramente el árbol de dependencias para calcular las derivadas segundas. Se definen las siguientes funciones:

$$\begin{gathered} f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R} \setminus z = f(x, y) \\ \vec{g} : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2 \setminus \vec{g}(s, t) = (2s + 3t, 3s - 2t) = (x, y) \\ h : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R} \setminus h(s, t) = f \circ \vec{g} = f(2s + 3t, 3s - 2t) \end{gathered}$$

Además, como en la consigna se indica que f es C^2, se sabe que es diferenciable en todo su dominio. $\vec{g}$ también lo es porque cada componente es un polinomio y los polinomios son funciones elementales. h también lo será porque surge de componer dos funciones diferenciables. Por lo tanto, se puede aplicar la regla de la cadena en cualquiera de sus formas: matrices jacobianas y árbol de dependencias. Se empieza calculando las derivadas primeras de la siguiente manera, donde se indica con J la matriz jacobiana de cada funcion:

$$J_h(s, t) = J_f(\vec{g}(s, t)).J_{\vec{g}}(s, t) \tag{3}$$

Dado que f *va de* $\mathcal{R}^2$ *en* $\mathcal{R}^1$, su matriz jacobiana es $1x2$ (ver relación con las potencias a las que se *eleva* $\mathcal{R}$ en los conjuntos de salida y llegada). De la misma manera, se ve que las matrices jacobianas de $\vec{g}$ y f son de $2x2$ y $1x2$ respectivamente. Por lo tanto, las dimensiones son lógicas, se puede resolver sin problemas.

La matriz jacobiana de g se calcula usando la definición ya que la misma es conocida:

$$J_{\vec{g}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

La funciones f y h son desconocidas, por lo que reemplazo en la Ecuación 3 directamente con la definición:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial h}{\partial s}(s, t), \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\ \left(\frac{\partial h}{\partial s}(s, t), \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)\right) = \left(2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 3\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \end{gathered}$$

Aclaración: uso $f(x, y)$ en lugar de $f(\vec{g}(s, t))$ para que quede más legible, pero recordar que, por como se definió $\vec{g}$, x e y son funciones de s y t por medio de $\vec{g}$.

Hasta ahora se calcularon las derivadas primeras, por lo que se procede a calcular las derivadas segundas. Para esto, se piensa a cada una de las derivadas primeras como una función (de hecho lo son) y se las deriva con respecto a s y t usando el árbol de la Figura 1. La diferencia es, entonces, que en lugar de f, se tiene $\frac{\partial h}{\partial s}$ porque es la función que relaciona x e y con z. Recorriendo los distintos caminos para llegar a s, tal como se explicó anteriormente, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(s, t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial s}(s, t)\right).\frac{\partial x}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial s}(s, t)\right).\frac{\partial y}{\partial s}(s, t)$$

Reemplazando con la expresión para $\frac{\partial h}{\partial s}(s, t)$ obtenida usando las matrices jacobianas y calculando $\frac{\partial x}{\partial s}(s, t)$ y $\frac{\partial y}{\partial s}(s, t)$ usando la definició de $\vec{g}$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(s,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).\frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$
$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) = 2$$
$$\frac{\partial y}{\partial s}(s,t) = 3$$

Por lo tanto, usando la linealidad de la derivada y reemplazando con las derivadas de x e y, se puede escribir:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(s,t) = \left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)2 + \left(2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)3$$

Dado que f es C^2, se sabe por el teorema Schwarz que sus derivadas segundas cruzadas son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Finalmente, se usa la observación anterior y se reagrupan los términos obteniéndose uno de los resultados deseados:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(s,t) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 9\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 12\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

El procedimiento es completamente análogo para calcular $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(s,t)$. Se usa el árbol de dependencias pero con $f = \frac{\partial h}{\partial t}(s,t)$ y buscando caminos para llegar a t:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(s,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\right).\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\right).\frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(s,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).\frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$
$$\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = 3$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = -2$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(s,t) = \left(3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)3 + \left(3\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)(-2)$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(s,t) = 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - 12\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Por último, calculo las derivadas cruzadas. Es lo mismo calcular $\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}(s,t)$ o $\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(s,t)$ ya que h es C^2. A continuación se muestra un caso pero se deja el otro como ejercicio para verificar que el resultado es el mismo. Se lleva a cabo el mismo procedimiento usado para $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(s,t)$ y $\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(s,t)$ pero con $f = \frac{\partial h}{\partial s}(s,t)$ y buscando los caminos que llevan a t. En el caso que queda como ejercicio se debe usar $\frac{\partial^2 h}{\partial t}(s,t)$ como f y buscar caminos hacia s.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}(s,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right).\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right).\frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}(s,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).\frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$
$$\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = 3$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = -2$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}(s,t) = \left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)3 + \left(2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)(-2)$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}(s,t) = 6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 5\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$