Guía IV - Ejercicio 14

Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) \to \vec{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ *una función biyectiva y* C^2 *que satisface:*

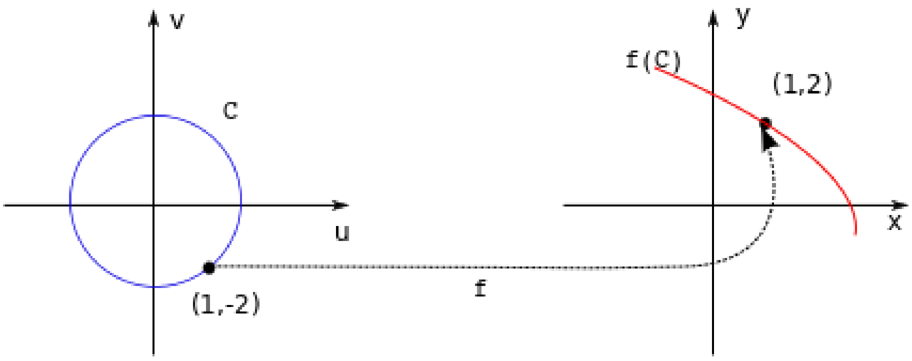
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \vec{f}(1, -2) = (1, 2)$$

a) Hallar un vector tangente en $(1, 2)$ *a la curva imagen por* $\vec{f}$ *de la circunferencia de ecuación* $u^2 + v^2 = 5$.

b) Hallar un vector tangente en $(1, -2)$ *de la preimagen por* $\vec{f}$ *de la recta de ecuación* $y = 2x$.

Resolución:
a) La función $\vec{f}$ (biyectiva y C^2) la pensamos como una función que manda un punto del plano (u, v) en otro del plano (x, y), y como la función es continua (por ser C^2) e inyectiva mandará una curva C en el plano (u, v) en otra curva $f(C)$ en el plano (x, y) llamada curva imagen de C a través de $\vec{f}$. En la Figura 1 se muestra un esquema de la situación donde la curva C es $u^2 + v^2 = 5$ y la curva imagen $f(C)$ será una curva en el plano (x, y) que desconocemos ya que no conocemos $\vec{f}$ (en la figura dibujamos una curva solamente para ilustrar).

Figura 1:



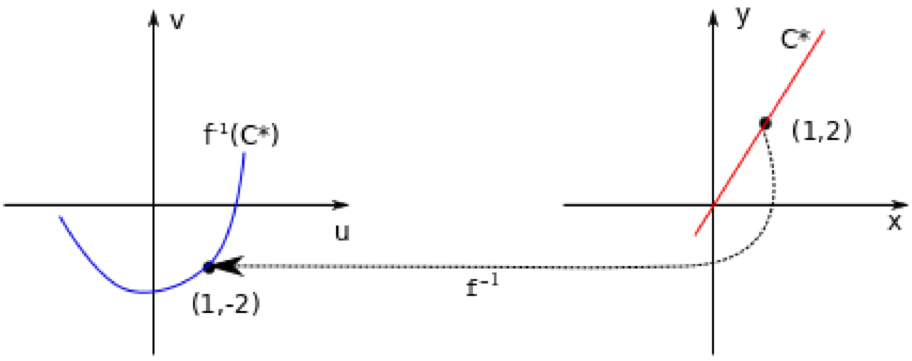
Una parametrización de la curva $f(C)$ es $\vec{\beta}(t) = \vec{f} \circ \vec{\alpha}(t)$, siendo $\vec{\alpha}(t)$ una parametrización de la curva C. La curva $u^2 + v^2 = 5$ podemos parametrizarla con $\vec{\alpha}(t) = (\sqrt{5}\ cos(t), \sqrt{5}\ sen(t))$ (que es una parametrización regular), si t_0 es tal que $\vec{\alpha}(t_0) = (1, -2)$ entonces $\vec{\beta}(t_0) = \vec{f}(\vec{\alpha}(t_0)) = \vec{f}(1, -2) = (1, 2)$ y por lo tanto un vector tangente a $\vec{f}(C)$ en el punto $(1, 2)$ podemos calcularlo con $\vec{\beta}'(t_0)$.
A pesar que no conocemos explícitamente la función $\vec{f}$ podemos calcular lo pedido ya que conocemos su matriz Jacobiana en el punto $(1, -2)$, como $\vec{f}$ es C^2 es diferenciable y vale la regla de la cadena $\vec{\beta}'(t_0) = J_{\vec{f}}(\vec{\alpha}(t_0)\ \vec{\alpha}'(t_0)$. Les dejamos que calculen $\vec{\alpha}'(t_0)$, pero fíjense que como C es una circunferencia centrada en el origen un vector tangente a C en $(1, -2)$ será el $(2, 1)$, o cualquier múltiplo no nulo. Por lo tanto:

$$\vec{\beta}'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

y el vector $(1, 5)$ es un vector tangente a $\vec{f}(C)$ en el punto $(1, 2)$.

b) Primero aclaremos que la preimagen por $\vec{f}$ de la recta $y = 2x$son los puntos del dominio (u, v) que al aplicarle la función $\vec{f}$ van a puntos de la recta. Otra manera de verlo es que como la función $\vec{f}$ es biyectiva existe la inversa $\vec{f}^{-1}$, si llamamos C^* a la recta $y = 2x$ en el plano (x, y), la preimagen de C^* es $\vec{f}^{-1}(C^*)$ (ver Figura 2).

Figura 2:



Este problema es "inverso" al anterior ya que tenemos (o es muy fácil de calcular) un vector tangente a una curva en el plano (x, y) y queremos un vector tangente en el plano (u, v) de la curva preimagen. Como C^* es una recta es fácil ver que un vector tangente en cualquier punto es $\vec{v} = (1, 2)$ (un vector director), si a este vector lo ponemos en lugar de $\vec{\beta}'$ de la ecuación anterior queremos averiguar el vector tangente que ocupa el lugar de $\vec{\alpha}'$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{\alpha}'(t_1) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\alpha}'(t_1) = (1, 0)$$

Por lo tanto un vector tangente a la curva preimagen por $\vec{f}$ de la recta $y = 2x$ en $(1, -2)$ es $\vec{v} = (1, 0)$.

Comentario: Si $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) \to \vec{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ es biyectiva dijimos que existe la función inversa de $\vec{f}$. Por definición de función inversa tenemos que:

$$\vec{f} \circ \vec{f}^{-1} = \vec{f}^{-1} \circ \vec{f} = Id$$

Donde Id es la función identidad, más explícitamente:
$\vec{f}^{-1}_{(\vec{f}(u,v))} \circ \vec{f}_{(u,v)} = (u, v)$, y $\vec{f}_{(\vec{f}^{-1}(x,y))} \circ \vec{f}^{-1}_{(x,y)} = (x, y)$.
Si llamamos $\vec{f}(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$ y aplicamos regla de la cadena (si $\vec{f}$ es diferenciable) obtenemos:

$$Jf^{-1}{}_{(x_0,y_0)}\ Jf_{(u_o,v_o)} = Jf_{(u_o,v_o)}\ Jf^{-1}{}_{(x_0,y_0)} = I_2$$

con I_2 la matriz identidad de 2×2 (Jacobiana de la función identidad). Con esto podemos concluir que la matriz Jacobiana de $\vec{f}^{-1}$ en $(1, 2)$ es la inversa de la matriz Jacobiana de $\vec{f}$ en $(1, -2)$.