

Guía III - Ejercicio 41

Sea $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{cuando } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{cuando } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Mostrar que las derivadas cruzadas en $(0, 0)$ de f existen y son distintas. ¿Es C^2 la función f ?

Resolución: Para resolver este problema iremos por pasos. Para calcular las derivadas segundas necesito primero las derivadas primeras pero no sólo en el punto $(0, 0)$, pues para calcular la derivada de una función tenemos que conocer como varía la función en un entorno del punto, y, por lo tanto, para conocer la derivada segunda necesitamos las derivadas primeras en un entorno del $(0, 0)$.

a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Para calcular las derivadas primeras en el $(0, 0)$ necesitamos la definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Notemos que $f(h, 0) = 0$ al evaluar f en $(h, 0) \neq (0, 0)$. De forma análoga se calcula la derivada parcial con respecto a la variable y en el punto $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, para $(x, y) \neq (0, 0)$.

Como en un entorno del punto $(x, y) \neq (0, 0)$ la fórmula de f es $xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ y por lo tanto no tiene problema (es C^1 en un entorno del punto) podemos derivar directamente por reglas. Dejamos que pacientemente las calculen el resultado es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

En a) y b) calculamos las dos funciones derivadas parciales para todo punto (x, y) , resumiendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{cuando } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{cuando } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{cuando } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{cuando } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

c) Calcular las derivadas segundas cruzadas de f en el punto $(0, 0)$.

Ahora tenemos todo lo necesario para calcularlas, tenemos que calcular la derivada parcial con respecto a la variable y en el $(0, 0)$ de la función definida (1) ($\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$), y la derivada parcial con respecto a la variable x en el $(0, 0)$ de la función definida (2) ($\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$).

Primero calcularemos $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ utilizando la expresión (1).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1$$

Mientras que para $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ utilizando la expresión (2).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1$$

Con lo cual demostramos que las derivadas segundas cruzadas en el $(0,0)$ no son iguales.

Finalmente concluimos que la función no es C^2 en el punto $(0,0)$ ya que si lo fuera esto implicaría que las derivadas segundas que calculamos fueran iguales. Les dejamos como pregunta como son las derivadas segundas cruzadas en un punto $(x,y) \neq (0,0)$.