

Guía III - Ejercicio 9

Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones en el origen. Analice la continuidad de las funciones y de sus derivadas parciales en el origen.

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + 2y^2} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \quad (\star) \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Resolución: En este ejercicio nos piden varias cosas, primero analizamos la continuidad de la función en el origen, sabemos que $f(0, 0) = 0$ veamos que nos da el límite, si reescribimos la expresión podemos ver que nos quedan dos términos de la forma *cero acotado*.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + 2y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left\{ 2x \frac{x^2}{x^2 + 2y^2} - \frac{y}{2} \frac{2y^2}{x^2 + 2y^2} \right\} = 0$$

Y por lo tanto la función es continua en el origen. Ahora analizaremos las derivadas parciales en el origen, es importante tener en cuenta que la continuidad de la función no me da información acerca de la existencia o no de las derivadas parciales, puede ser que una función continua no tenga derivadas parciales o éstas no sean continuas, y puede ser que la función no sea continua y tenga derivadas parciales, diferencia muy importante con respecto a funciones de una variable.

Primero calcularemos la derivada parcial en el origen, si existen. Como la función en el origen está partida debemos utilizar la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^3}{h^3} = 2$$

Para ver si la derivada parcial con respecto a x es continua en el origen necesitamos tener la expresión de tal derivada en puntos $(x, y) \neq (0, 0)$ y ver que sucede con el límite cuando tiende al $(0, 0)$, es decir tenemos que hacer como lo que hicimos en la parte de continuidad pero en lugar de la función utilizar la fórmula de la **derivada parcial con respecto a x** , conociendo, por el cálculo anterior, que en el origen vale 2. Para calcular la derivada parcial con respecto a x en puntos distintos del origen podemos directamente utilizar las reglas de derivación en $(\star)$, ya que es un cociente de polinomios y el denominador es distinto de cero.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{6x^2(x^2 + 2y^2) - (2x^3 - y^3)2x}{(x^2 + 2y^2)^2} = \frac{2x^4 + 12x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + 2y^2)^2} \quad \text{para } (x, y) \neq (0, 0)$$

Es decir que la función derivada parcial con respecto a x queda:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 + 12x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + 2y^2)^2} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ahora debemos estudiar la continuidad de esta nueva función. Es fácil verificar acercándose por distintas rectas que el límite en el origen no existe, por lo que la derivada parcial con respecto a x en el origen existe, pero no es continua. Ahora les dejamos a ustedes que hagan lo mismo con la derivada parcial con respecto a la variable y .