86.05 - Señales y Sistemas

Guía 8: Transformada de Laplace y Z, Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias

⌨ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

****En esta guía se recomienda fuertemente que, además de realizar los ejercicios analíticamente los verifique, en la medida de lo posible, usando ⌨**

---

1. Determinar la transformada de Laplace, la región de convergencia asociada y el diagrama de polos y ceros de cada una de las siguientes funciones del tiempo:

(**a**) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$.

(**b**) $x(t) = e^{2t}u(-t) + e^{3t}u(-t)$.

(**c**) $x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$.

---

2. Graficar el diagrama de polos y ceros de las siguientes transformadas de Laplace:

(**a**) $\frac{1}{s^2+9}; \mathbb{R}\{s\} > 0$.

(**b**) $\frac{1}{s^2+9}; \mathbb{R}\{s\} < 0$.

(**c**) $\frac{s+1}{(s+1)^2+9}; \mathbb{R}\{s\} < -1$.

(**d**) $\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}; \mathbb{R}\{s\} > -1$.

---

3. Aplique la antitransformada para los casos al ejercicio 2, y halle $x(t)$.

---

4. Considere un sistema LTI continuo en el cual la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ están relacionadas con la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

Sean $X(s)$ e $Y(s)$ las transformadas de Laplace de $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, y sea $H(s)$ la transformada de Laplace de $h(t)$ siendo esta última la respuesta al impulso del sistema.

(**a**) Determine $H(s)$ como una relación de polinomios en s. Dibuje el patrón de polos y ceros de $H(s)$.

(**b**) Determine $h(t)$ para cada uno de los siguientes casos:

- El sistema es estable.
- El sistema es causal.

- El sistema no es causal ni estable.

---

5. Determine la transformada Z de cada una de las siguientes secuencias. Grafique el diagrama de polos y ceros e indique la región de convergencia. Indique además si existe o no la transformada de Fourier en cada caso.

(**a**) $\delta(n+5)$.

(**b**) $\delta(n-5)$.

(**c**) $(-1)^n u(n)$.

(**d**) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n+3)$.

(**e**) $\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(-n-2)$.

(**f**) $\left(\frac{1}{4}\right)^n u(3-n)$.

(**g**) $\left(\frac{1}{2}\right)^n (u(n+4) - u(n-5))$.

(**h**) $n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

(**i**) $|n|\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

(**j**) $4^n \cos\left(\frac{2\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right) u(-n-1)$.

---

6. Aplique la antitransformada Z:

(**a**) $X(z) = \dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$, siendo $x(n)$ absolutamente sumable.

(**b**) $X(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$, siendo $x(n)$ derecha.

(**c**) $X(z) = \dfrac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$, siendo $x(n)$ absolutamente sumable.

---

7. Sean los sistemas descriptos por las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$
$$y(n) - \frac{3}{2}y(n-1) = x(n)$$

(**a**) Hallar $H(z)$, realizar el diagrama de polos y ceros, y analizar estabilidad y causalidad para cada uno de los sistemas y para el sistema que resulta de conectarlos en cascada.

(**b**) Hallar la respuesta al impulso y al escalón de la cascada de ambos utilizando ⌨ , para cada uno de los casos que resulta del análisis realizado en el punto anterior.

(**c**) Graficar la respuesta en frecuencia del sistema del punto anterior usando ⌨ .

(**d**) Realize mediante ⌨ un muestreo de la transformada Z en el círculo unidad y mediante una IDFT obtenga una función temporal a partir de estas muestras, indicando el significado que

esta función tiene. Comparar con las funciones obtenidas en los puntos anteriores. Es igual a alguna de ellas?. Justifique analíticamente su respuesta.

---

8. Para el sistema LTI descripto por

$$H(z) = 1 - z^{-5}$$

se pide:

(**a**) Dibujar el diagrama de polos y ceros y las posibles ROC, analizando estabilidad y causalidad en cada caso.

(**b**) Para cada una de las posibles ROC encontradas en el ítem anterior, hallar $h(n)$ (antitransformada de $H(z)$) y graficarla.

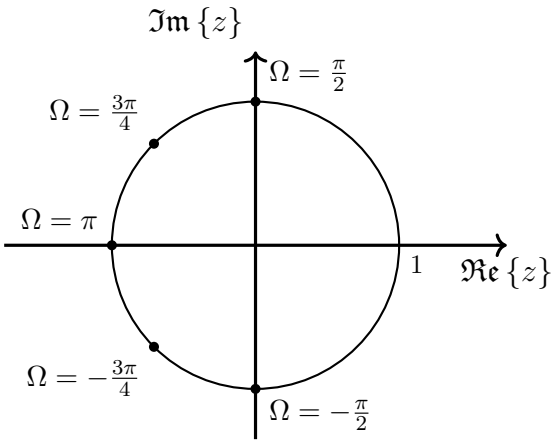
(**c**) Para cada una de las posibles ROC hallar la ecuación en diferencias equivalente.

(**d**) Determinar $H(\Omega)$ la transformada de Fourier de $h(n)$ y graficarla, indicando la relación con $H(z)$.

(**e**) Para la secuencia $\hat{H}(k)$, correspondiente a muestras de la transformada de Fourier $H(\Omega)$ en $\Omega = \frac{2\pi k}{N}$, determinar su IDFT,$\hat{h}(n)$, para los casos: $N = 10, N = 5, \text{y} N = 2$. Indicar la relación entre $\hat{h}(n)$ y $h(n)$ en cada caso, justificando su respuesta.

---

9. Diseñar un sistema causal que ante la entrada $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + \cos(\pi n)$, elimine **perfectamente** las dos primeras componentes y deje a la tercera sin alterar salvo un cambio de fase. En la siguiente figura se indican las frecuencias de las tres componentes sobre el círculo unidad.



Ayuda: piense en el concepto de cero de una función transferencia. Una vez diseñado este sistema determinar:

(**a**) La respuesta al impulso del sistema.

(**b**) La ganancia.

(**c**) La salida que se obtiene cuando la entrada es $x(n) = u(n)$.

(**d**) Es el sistema único? Si no lo es encuentre otro que cumpla con lo pedido y compare.

---

10. Sea un sistema cuya transferencia vale:

$$H(z) = \frac{z^{-2} - \alpha}{(1 - \beta z^{-1})(1 - 3z^{-1})}$$

donde α y β son números desconocidos. Se sabe que cuando la entrada al sistema es $x(n) = 1$ la salida es idénticamente nula y cuando $x(n) = (\frac{1}{2})^n$ la salida es $y(n) = \infty$ para todo n.

(**a**) Determine el diagrama de polos y ceros del sistema.

(**b**) Puede ser el sistema estable y causal? Cuál es la ROC para que sea estable? Y la ROC para que sea causal?

(**c**) Para el caso en que el sistema es estable determine la respuesta al escalón.

---

11. Sea $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ con $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Suponiendo que $N = 10$ encuentre expresiones de las DFT de las siguiente señales en función de un muestreo adecuado de $X(z)$.

(**a**) $x_1[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq 2N-1 \end{cases}$

(**b**) $x_2[n] = x[n] + x[n-N]$

Verifique los resultados obtenidos con  .

---

12. Sea un sistema de tiempo continuo causal y estable dado por

$$H_c(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2 + 2},$$

(**a**) Encuentre el diagrama de polos y ceros y la ROC del sistema.

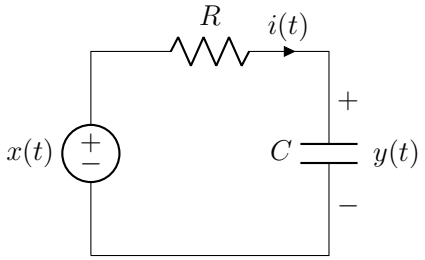
(**b**) Se desea determinar un sistema de tiempo discreto $H_d(z)$ que responda "aproximadamente" de la misma forma que el sistema $H_c(s)$. Se propone calcularlo de la siguiente forma

$$h_d(n) = h_c(nT),\ T > 0$$

Determine $h_d(n)$, $H_d(z)$, la ROC y el diagrama de polos y ceros del mismo. Es el sistema estable y causal? Dependen la estabilidad y causalidad del valor elegido de T?

Ejercicios adicionales

13. Considere un circuito RC serie, excitado con una señal periódica rectangular de período $T = 1s$, ciclo de servicio 0.5 y de amplitud unitaria, con $RC = 0{,}1$ s. Considere la salida de tensión sobre el capacitor.



Recuerde que la relación entre la corriente y la tensión en el capacitor es

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

Se pide:

(**a**) Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de la entrada $x(t)$ y en base a éstos calcular los de la salida $y(t)$, aplicando los conceptos de sistemas LTI vistos hasta el momento. Graficar estos coeficientes, para $k = 0, \ldots, 100$. Se recomienda usar ⌨ .

(**b**) Calcular analíticamente utilizando Transformada de Laplace la forma de $y(t)$. Calcular a partir de esta expresión temporal los coeficientes de su representación en serie de Fourier. Comparar estos valores con los obtenidos en el punto anterior.

(**c**) Explicar conceptualmente qué es la respuesta en frecuencia. Graficar esta función para los valores de k mencionados utilizando los datos calculados en el punto anterior y los coeficientes de la señal de entrada. Graficar toda la envolvente superponiéndola a los valores anteriores.

---

14. Considere la siguiente señal de tiempo continuo

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta}\delta(t - n\beta)$$

donde $\beta > 0$.

(**a**) Determine $X(s)$, su ROC y el diagrama de polos y ceros. Hint: Analice con sumo cuidado el diagrama de polos y ceros ya que tiene una estructura muy particular.

(**b**) Muestre que existe la transformada de Fourier de tiempo continuo (en el sentido distribucional como vimos en clase). Observa algunas propiedades interesante? Justifique.

---

15. Considere un sistema LTI causal en tiempo continuo dado por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-1} e^{-\alpha(t-\tau)} \left\{x(\tau - \beta_1) + x(\tau - \beta_2)\right\} d\tau,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z},\ \beta_2 > \beta_1$$

(**a**) Determine la transferencia $H(s)$ del mismo y su diagrama de polos y ceros.

(**b**) Determine el rango de valores para α, β_1 y β_2 de manera tal que sea estable.

---

16. Una secuencia a derecha $x(n)$ tiene transformada Z dada por

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}$$

Determine $x(n)$ para $n < 0$.

---

17. Sea

$$X(z) = \frac{1 - 4z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}, \quad \text{ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/6\}$$

Considere la respuesta al impulso de un sistema LTI dada por $h[n] = \alpha^n x[n]$. Determine el rango de valores de α tal que $h[n]$ corresponda a un sistema cuyo sistema inverso pueda elegirse estable y causal. En función de α escriba la ROC de dicho sistema inverso.

---

18. Considere el siguiente sistema

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + \frac{4}{3}z^{-2}}$$

(**a**) Analice las distintas ROCs asociadas con esta transferencia y la estabilidad y causalidad de los sistemas asociados a cada una de ellas.

(**b**) Encuentre un sistema $H'(z)$ cuya respuesta en frecuencia tenga la misma magnitud que la de la transferencia anterior pero que se causal y estable. Detalle cuidadosamente el procedimiento utilizado para encontrar dicho sistema.

---

19. Un problema frecuente en la práctica es cuando la señal $x(n)$ ha sido filtrada por un sistema LTI, cuya salida es la señal distorsionada $y(n)$, y se desea recuperar la señal original $x(n)$ procesando $y(n)$. En teoría, $x(n)$ puede ser recuperada de $y(n)$, pasando $y(n)$ por un filtro inverso cuya transferencia es el recíproco de la transferencia del filtro distorsionante. Suponga que la distorsión es causada por un filtro FIR con respuesta al impulso

$$h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta\left(n - n_0\right)$$

donde n_0 es un numero entero positivo, es decir la distorsión es un eco con retardo n_0.

(**a**) Determinar la transformada Z de $h(n)$, que denominaremos $H(z)$, y la DFT de N puntos de $h(n)$, o $H_1(k)$. Qué relación hay entre $H(z)$ y $H_1(k)$?. Asuma que $N = 4n_0$.

(**b**) Determinar $H_i(z)$, la transformada Z del filtro inverso y $h_i(n)$, su respuesta al impulso. Este filtro inverso es FIR o IIR?.

(**c**) Suponga que vamos a usar un filtro FIR de longitud N con objeto de implementar el filtro inverso, y sea la DFT de N puntos de dicho filtro inverso propuesto:

$$G(k) = \frac{1}{H_1(k)}, k = 0, \ldots, N-1$$

Hallar la respuesta al impulso $g(n)$ del filtro inverso propuesto.

(**d**) Es el hecho de que la multiplicación de $G(k)H_1(k) = 1, \forall k$ un argumento válido para asegurar que hemos implementado un filtro inverso? Explique claramente por qué.