TB065 - Señales y Sistemas

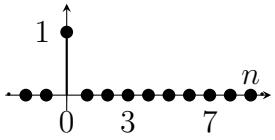
Guía 7: Transformada Discreta de Fourier

⌨ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

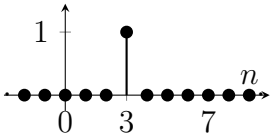
---

1. Se dan las señales de la figura.

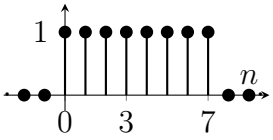
$x_a[n] = \delta[n]$



$x_b[n] = \delta[n-3]$



$x_c[n] = u[n] - u[n-8]$



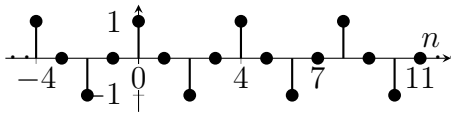
(**a**) Calcular las DFT de ocho puntos y graficar su módulo y fase.

(**b**) ¿Se pueden distinguir $x_a[n]$ y $x_b[n]$ si sólo se conserva el módulo de su DFT? Relacionar sus transformadas.

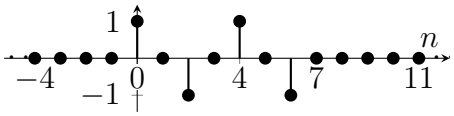
---

2. Sea $s[n]$ la señal periódica y $x[n]$ sus primeros ocho puntos extendidos con ceros, como se muestra en la figura.

$s[n] = \cos(\pi n/2)$



$x[n] = s[n]\big(u[n] - u[n-8]\big)$

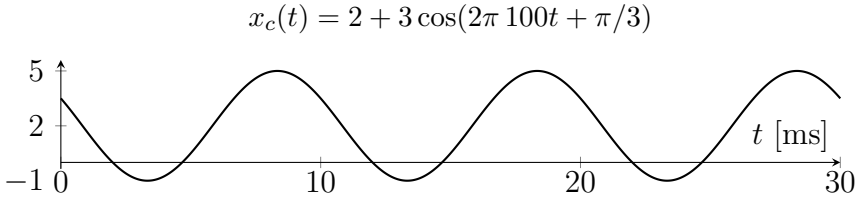


(**a**) Graficar la TFDT de $s[n]$ y el módulo de la TFDT de $x[n]$. Calcular la DFT de ocho puntos de $x[n]$ y graficar su módulo. Observar la relación entre los gráficos.

(**b**) A partir de las definiciones, relacionar la DFT de un bloque de N muestras con la TFDT de ese bloque extendido con ceros. ¿Cuál de las dos transformadas del inciso anterior se está muestreando?

(**c**) Obtener los coeficientes de la serie de Fourier de $s[n]$ utilizando la DFT de un período. Relacionarlos con la TFDT de $s[n]$.

3. La señal de la figura se muestrea a $f_s = 1000$ Hz y se toman las muestras $x[n] = x_c(n/f_s)$, $n = 0, \ldots, 99$.



(**a**) Determinar los valores no nulos de la DFT de cien puntos. Graficar su módulo y fase, primero con el índice k y luego con un eje de frecuencias en Hz que incluya las frecuencias negativas.

(**b**) ¿Cómo se recuperan de esos valores el nivel de continua, la amplitud del coseno y su fase?

(**c**) Ahora se mide $y_c(t) = x_c(t - \Delta)$, con $\Delta = 2{,}5$ ms, durante el mismo intervalo. Obtener su DFT y comparar su módulo y fase con los de $x[n]$.

---

4. Para un bloque de N muestras, la DFT se escribe como $\boldsymbol{X} = F\boldsymbol{x}$, con los valores de cada bloque ordenados en un vector columna.

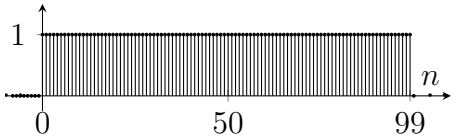
(**a**) Obtener la matriz F y la matriz de la IDFT. Relacionarlas.

(**b**) Escribir los vectores columna de F. ¿Son ortogonales con el producto interno complejo? Justificar.

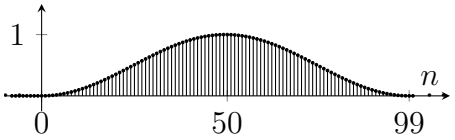
(**c**) Calcular la DFT y la IDFT de una columna de F. Relacionar los resultados con la representación de impulsos y exponenciales complejas.

5. ⌨ Se toman cien muestras desde $t = 0$, a $f_s = 100$ Hz, de un coseno de amplitud unitaria y fase inicial cero. Se analizan los casos $f_0 = 12$ Hz y $f_0 = 12{,}3$ Hz. Se usarán las ventanas de la figura.

$w_R[n] = u[n] - u[n - 100]$



$w_H[n] = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2\pi n/99)\big) w_R[n]$



(**a**) Predecir dónde aparecerán valores no nulos al usar la ventana rectangular y una DFT de cien puntos. Calcular y graficar ambos módulos en Hz y comparar con la predicción. Explicar las diferencias a partir de la TFDT del registro.

(**b**) Para el registro de 12,3 Hz, agregar ceros hasta completar ochocientas muestras y calcular la DFT. Superponerla con la de cien puntos. ¿Desapareció el efecto de observar sólo un segundo? Comparar con la amplitud original las estimaciones obtenidas multiplicando el máximo de cada módulo por 2/100.

(**c**) Aplicar la ventana de Hann al mismo registro de 12,3 Hz y usar ochocientos puntos de DFT. Comparar con la ventana rectangular el ancho del máximo principal y los valores alejados de él. Para comparar las escalas, dividir cada módulo por la suma de su ventana. ¿Qué cambia al elegir la ventana sin modificar las muestras adquiridas?

6. ⌨ Se quiere distinguir las dos componentes de

$$x_c(t) = \cos(2\pi\, 30t) + \cos(2\pi\, 30{,}5t),$$

muestreada a $f_s = 100$ Hz desde $t = 0$. Comparar los siguientes registros y tamaños de DFT:

	muestras adquiridas N	puntos de DFT M
A	100	100
B	100	1000
C	400	400

En B se completa el registro con ceros. En C se sigue midiendo la misma señal.

(**a**) Predecir en cuáles de los tres casos se verán dos máximos separados. Graficar los módulos cerca de las frecuencias de los tonos, divididos por N, y contrastarlos con la predicción.

(**b**) Calcular la separación entre frecuencias de la grilla en cada caso. ¿El caso con la grilla más fina es necesariamente el que mejor permite distinguir los tonos? Explicar qué cambió en la TFDT de los registros.

---

7. Se quiere analizar una señal con $X_c(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi\, 300$ rad/s. Se requiere $f_s > 600$ Hz y una separación entre frecuencias de la grilla menor que 0,5 Hz, sin agregar ceros. La duración del registro se define como $D = N/f_s$.

(**a**) Obtener las condiciones sobre D, f_s y N. ¿Hay una duración mínima que alcance la desigualdad estricta, o sólo un límite inferior?

(**b**) Si se fija $f_s = 800$ Hz, hallar el mínimo N admisible y la duración correspondiente.

(**c**) ¿Estas condiciones garantizan distinguir dos tonos separados por 0,5 Hz, cualesquiera sean sus amplitudes y la ventana utilizada? Justificar.

8. Sea $x[n]$ un bloque arbitrario de diez muestras y $X[k]$ su DFT. Para un entero $L \geq 2$, se forma un bloque de $10L$ muestras mediante sobremuestreo:

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, L, \ldots, 9L, \\ 0, & \text{en los demás índices del bloque.} \end{cases}$$

(**a**) Relacionar la DFT de $x_e[n]$ con $X[k]$ a partir de la definición.

(**b**) ⌨ Verificar la relación para $L = 3$ con una señal que tenga alguna muestra no nula para $n > 0$. Comparar con agregar veinte ceros al final del mismo bloque $x[n]$: ¿son la misma operación?

---

9. Sea $X_b[k]$ la DFT de ocho puntos de $x_b[n]$ del ejercicio 1. Se define

$$Y[k] = e^{-j2\pi\, 6k/8} X_b[k], \qquad k = 0, \ldots, 7.$$

(**a**) Obtener y graficar el bloque $y[n]$.

(**b**) Compararlo con el retardo $y_l[n] = x_b[n-6]$ de la señal extendida con ceros. ¿Representan la misma señal? ¿Qué tamaño mínimo de DFT permitiría representar $y_l[n]$ sin plegado?

10. Se conocen 32 muestras uniformes de la TFDT de una señal:

$$\widetilde{X}[k] = X(2\pi k/32), \quad \widetilde{X}[16] = 1, \quad \widetilde{X}[k] = 0 \text{ para } k \neq 16.$$

(**a**) Si $x[n] = 0$ fuera de $0 \leq n \leq 31$, obtenerla y decidir si es única.

(**b**) Si sólo se sabe que $x[n] = 0$ fuera de $0 \leq n \leq 95$, hallar dos señales distintas compatibles con los datos. Relacionarlas con la IDFT de 32 puntos de $\widetilde{X}[k]$.

(**c**) Ahora se muestrea la TFDT

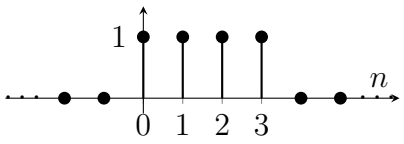
$$X_1(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

en $\Omega_k = 2\pi k/N$. Obtener el bloque de N muestras cuya DFT coincide con esos valores. ¿Es igual a las primeras N muestras de la señal original? Justificar.

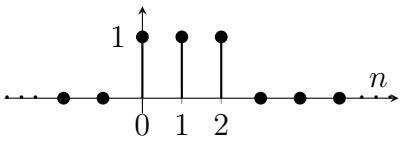
---

11. Se dan las señales de la figura.

$x[n] = u[n] - u[n-4]$



$h[n] = u[n] - u[n-3]$



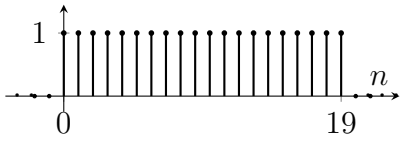
(**a**) Determinar el soporte y graficar la convolución lineal $y_l = x * h$.

(**b**) Calcular las DFT de cuatro puntos de ambas señales y obtener $y_c[n]$ como la IDFT del producto. Graficarla y explicar qué relación tiene con la periodización de $y_l[n]$ con período cuatro.

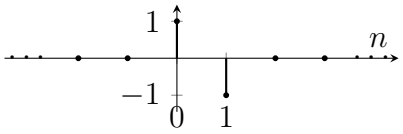
(**c**) Elegir el tamaño mínimo que permita obtener la convolución lineal mediante DFT e IDFT. ⌨ Verificar ese resultado y el del inciso anterior. Si $h[n]$ es la respuesta al impulso de un sistema LTI, ¿cuál de las dos salidas corresponde a la entrada $x[n]$ dada?

12. Se dan las respuestas al impulso de dos sistemas LTI.

$h_a[n] = u[n] - u[n-20]$



$h_b[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

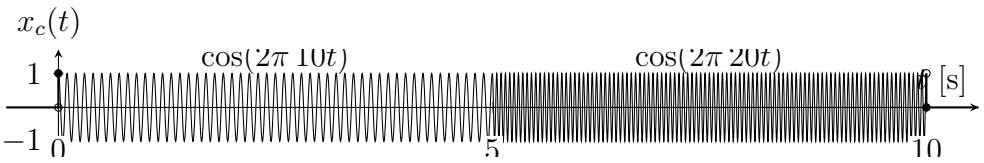


(**a**) Obtener mediante DFT cien muestras de cada respuesta en frecuencia. Graficar módulo y fase y relacionarlos con la operación que realiza cada sistema.

(**b**) Para cada sistema, considerar las entradas $x[n] = e^{j2\pi f_0 n/100}$, con $f_0 = 3$ y $f_0 = 1{,}5$. Elegir un tamaño de DFT y un bloque de entrada que permitan obtener un período de la salida mediante DFT e IDFT. ¿Puede usarse en ambos casos el mismo bloque de cien muestras repetido periódicamente?

(**c**) Comparar con la salida cuando se conservan sólo las muestras de entrada $n = 0, \ldots, 99$ y se anula la entrada fuera de ese intervalo. Explicar qué cambia en los extremos del registro y elegir un tamaño de DFT que permita calcular esa salida completa.

13. ⌨ La señal de la figura es la usada para construir un mapa tiempo–frecuencia en la guía de Transformada de Fourier. Aquí se la muestrea a $f_s = 200$ Hz y se toman las muestras $n = 0, \ldots, 1999$.



Para cada bloque completo que comienza en mR, calcular

$$S[m,k] = \sum_{r=0}^{L-1} x[mR+r]w[r]e^{-j2\pi kr/M}, \qquad k = 0, \ldots, M-1,$$

con ventana rectangular $w[r] = 1$, salto $R = 10$ y tamaño de DFT $M = 800$. Usar sólo bloques contenidos en las muestras disponibles.

(**a**) Antes de calcular, bosquejar el mapa esperado. Construir los espectrogramas con $L = 40$ y $L = 400$, mostrando $0 \le f \le 100$ Hz y el módulo cuadrado $|S[m,k]/L|^2$ con la misma escala de color. Ubicar cada columna en el tiempo del centro de su bloque.

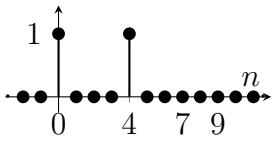
(**b**) Comparar el ancho de las bandas y la zona en que se observa el cambio de tono. ¿Qué ventana permite localizar mejor ese cambio y cuál permite distinguir mejor frecuencias cercanas? Relacionarlo con los espectros de las ventanas.

(**c**) Explicar qué cambiaría al reducir sólo R y qué cambiaría al aumentar sólo M. ¿Cuál de esos cambios modifica la duración de señal que interviene en cada columna?

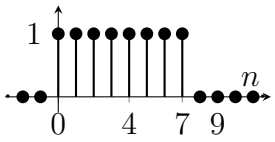
---

14. Calcular las DFT de diez puntos de las siguientes señales.

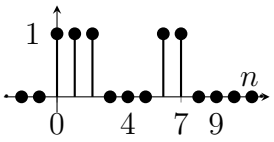
(a) $\delta[n] + \delta[n-4]$



(b)



(c)



(**a**) La señal del gráfico (a).

(**b**) La señal del gráfico (b).

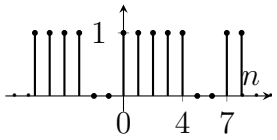
(**c**) La señal del gráfico (c).

(**d**) $x[n] = \sin(\pi n/2)/\sin(\pi n/10)$ para $n = 1, \ldots, 9$, con $x[0] = 5$ y cero fuera del bloque. Relacionar el resultado con una suma de exponenciales complejas.

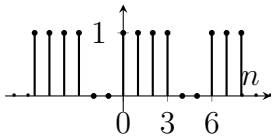
---

15. Obtener y graficar los coeficientes de serie de Fourier de las siguientes señales periódicas utilizando la DFT de un período.

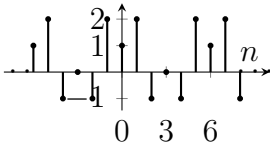
(a) $x[n]$, $N_0 = 7$



(b) $x[n]$, $N_0 = 6$



(c) $x[n]$, $N_0 = 6$



(**a**) La señal del gráfico (a).

(**b**) La señal del gráfico (b).

(**c**) La señal del gráfico (c).

(**d**) $x[n] = \sin(2\pi n/3)\cos(\pi n/2)$.

16. Se toman $N = 1500$ muestras de $x_c(t) = \cos(2\pi\, 100t)$ desde $t = 0$, a una frecuencia de muestreo que evita aliasing.

(**a**) Elegir el período de muestreo para que el índice $k_1 = 150$ de la DFT corresponda a $+100$ Hz.

(**b**) Determinar el otro índice no nulo y los valores de la DFT. ¿Qué duración del registro corresponde a esta elección?

---

17. Una señal continua $x_c(t)$ tiene $X_c(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi\, 30$ rad/s. Se toman mil muestras a $f_s = 100$ Hz, desde $t = 0$, y se calcula su DFT de mil puntos.

(**a**) Determinar los índices que corresponden a frecuencias del intervalo $[-30, 30]$ Hz.

(**b**) Se afirma que los demás valores de la DFT necesariamente deben ser cero. ¿Es correcta esa conclusión? Justificar considerando el efecto de tomar sólo un registro de la señal.

---

18. Una señal continua muestreada sin aliasing a 400 Hz contiene un coseno de 111 Hz. Se dispone de un registro de novecientas muestras.

(**a**) Determinar los índices de la DFT de novecientos puntos más cercanos a las dos componentes de ese coseno y las frecuencias exactas que representan.

(**b**) ¿Cuál es la menor cantidad de ceros que hay que agregar al registro discreto para que ambas frecuencias coincidan con índices de la nueva DFT? Determinarlos. ¿Esa coincidencia obliga a que el aporte del coseno quede concentrado sólo en esos dos índices?

19. Una señal discreta tiene TFDT

$$X(\Omega) = 5e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} - 8e^{-j4\Omega}.$$

(**a**) Escribir su DFT de diez puntos.

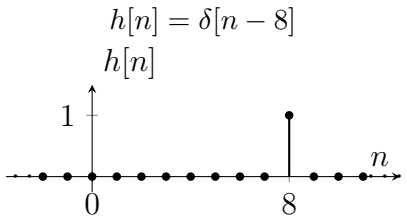
(**b**) Si $Y[k] = e^{-j6\pi k/5}X[k]$, obtener y dibujar $y[n]$.

(**c**) Sea $Z[k] = 1 + e^{-j6\pi k/10}$. Obtener el bloque cuya DFT es $W[k] = Z[k]X[k]$.

(**d**) Sea $H[k]$ la DFT de diez puntos de $h[n] = u[n] - u[n-10]$. Obtener la IDFT de $X[k]H[k]$. ¿Cómo se explica el resultado en términos de lo que conserva ese filtro circular?

---

20. Tomar $x[n] = x_c[n]$ del ejercicio 1 y la respuesta al impulso de la figura.

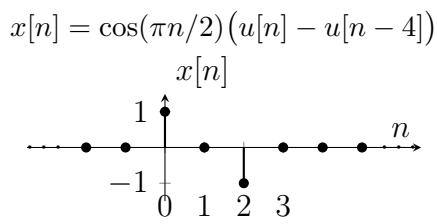


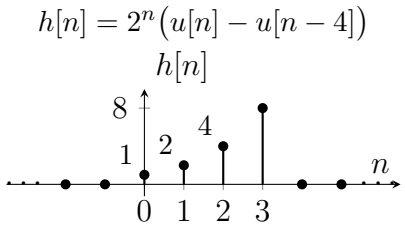
(**a**) Obtener y graficar la salida lineal $y = x * h$.

(**b**) Obtenerla mediante DFT e IDFT y determinar el tamaño mínimo necesario. ¿Por qué no basta contar la cantidad de coeficientes no nulos de $h[n]$? ⌨ Verificar.

---

21. Se dan las señales de la figura.





(**a**) Obtener sus DFT de cuatro puntos.

(**b**) Calcular la convolución circular de cuatro puntos directamente y mediante DFT e IDFT. Comparar.

(**c**) Obtener la salida del sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ para la entrada $x[n]$. Relacionarla con la convolución circular e indicar cómo calcularla sin plegado usando la DFT.

22. Se tiene

$$x[n] = \big[\cos(2\pi n/64) + \cos(16\pi n/64)\big]\big(u[n] - u[n-64]\big).$$

De su DFT $X[k]$ se conserva $X_1[k] = X[2k]$, $k = 0, \ldots, 31$.

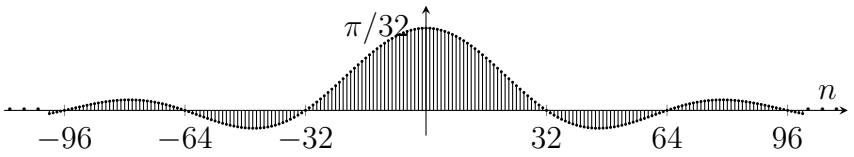
(**a**) Hallar el bloque $x_1[n]$ dado por la IDFT de 32 puntos de $X_1[k]$. Relacionarlo con las muestras del bloque original. ⌨ Verificar.

(**b**) Hallar otras dos señales de 64 muestras que den el mismo $x_1[n]$ mediante este procedimiento. ¿Qué información se perdió al submuestrear el espectro?

---

23. Se desea obtener las muestras de TFDT en $\Omega_k = 2\pi k/100$, $k = 0, \ldots, 99$, de la señal de la figura.

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi n/32)}{n}, & n \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{32}, & n = 0. \end{cases}$$



(**a**) ¿Basta tomar cien muestras consecutivas de $x[n]$ y calcular su DFT para obtener los valores exactos buscados? Comparar el espectro original con el de una truncación.

(**b**) Proponer un procedimiento aproximado mediante DFT que permita conservar la misma grilla de cien frecuencias y mejorar la aproximación al alargar la truncación. Tener en cuenta los índices negativos del registro. ¿Cómo evaluaría el efecto de la truncación?

24. ⌨ Se toman cien muestras a $f_s = 100$ Hz de

$$x_c(t) = \cos(2\pi f_1 t) + B\cos(2\pi f_2 t), \qquad f_2 = f_1 + \alpha \text{ Hz}.$$

(**a**) Con $B = 1$, comparar $f_1 = 30$ y 30,5 Hz, para $\alpha = 0{,}5$, 1 y 5. Usar primero cien y luego mil puntos de DFT, completando con ceros. ¿Qué diferencias se deben a la separación de los tonos y cuáles a su posición respecto de la grilla?

(**b**) Tomar $f_1 = 30{,}5$ Hz, $\alpha = 5$ y $B = 0{,}05$. Comparar los módulos con ventana rectangular y de Hann, usando mil puntos y la misma normalización del ejercicio 5. ¿En cuál se distingue mejor el tono de menor amplitud? Explicar el efecto de la ventana, no sólo la apariencia del gráfico.

---

25. ⌨ Calcular e interpretar espectrogramas de las siguientes señales, muestreadas a 400 Hz para $n = 0, \ldots, 399$:

$$x_a(t) = \cos(2\pi\, 100t), \qquad x_b(t) = [1 + \cos(2\pi\, 10t)]\cos(2\pi\, 100t),$$

$$x_c(t) = \cos(2\pi\, 100t^2), \qquad 0 \le t < 1.$$

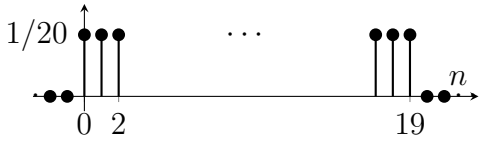
(**a**) Elegir ventanas que permitan comparar el tono estacionario, las bandas de la modulación y la variación de frecuencia del tercer caso. Bosquejar los mapas esperados antes de calcular.

(**b**) Comparar dos longitudes de ventana manteniendo fijos el salto y el tamaño de DFT. Explicar qué se ve de la envolvente en $x_b(t)$ y cómo varía la frecuencia en $x_c(t)$. ¿Qué precaución exige que esta última se acerque a 200 Hz?

(**c**) Comparar dos saltos de ventana con la misma longitud y tamaño de DFT. ¿Cambia el ancho de las bandas o sólo la cantidad de posiciones observadas? Indicar los parámetros y la escala usados en cada gráfico.

26. Se dispone de mil muestras de una señal tomada a 1 kHz. Se quiere obtener la salida completa de un sistema LTI con la respuesta al impulso de la figura, considerando la entrada nula fuera del registro.

$$h[n] = \tfrac{1}{20}\big(u[n] - u[n-20]\big)$$



La unidad de cálculo permite DFT e IDFT de tamaños que son potencia de dos.

(**a**) Determinar el intervalo de índices que debe reservarse para la salida completa y elegir el menor tamaño permitido que evite plegado. Indicar cuántas DFT e IDFT se calculan si todavía no se conoce la DFT de $h[n]$.

(**b**) ⌨ Implementar el procedimiento para una señal de mil muestras que tenga valores no nulos al principio y al final del registro. Comparar con la convolución directa, incluidos los extremos de la salida.

(**c**) Comparar el orden de costo de la convolución directa con el de este procedimiento usando un algoritmo FFT. ¿Alcanza con elegir un tamaño potencia de dos para asegurar que será más rápido? ¿Qué cambiaría si las DFT se calcularan por su definición?