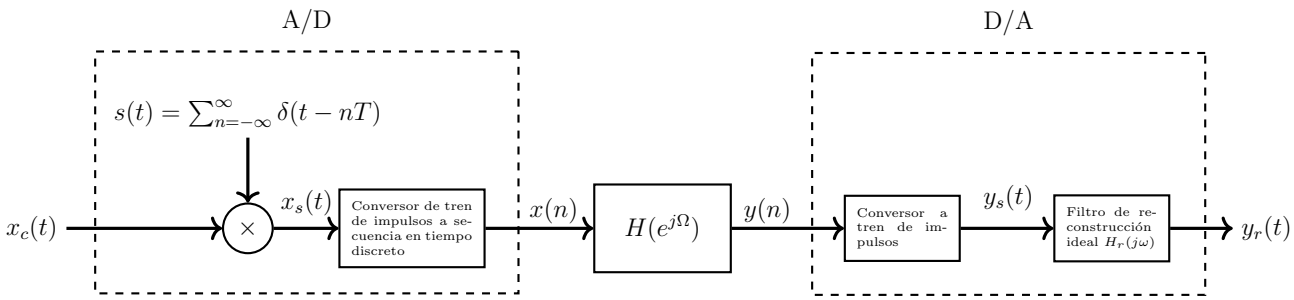
86.05 - Señales y Sistemas

Guía 5: Muestreo e Interpolación

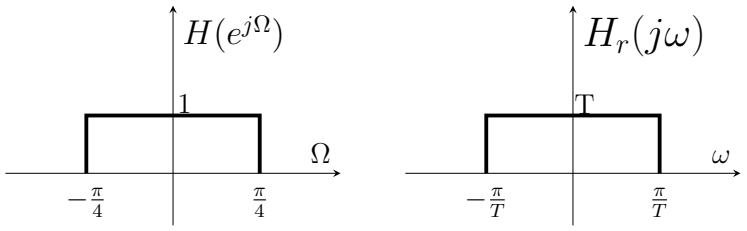
⌨ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

---

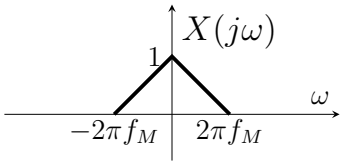
1. A continuación se muestra el sistema global para filtrar una señal en tiempo continuo utilizando un filtro en tiempo discreto.



Asumiendo que $H(e^{j\Omega})$ y $H_r(j\omega)$ tienen la forma



para el caso en que $\frac{1}{T} = 20$ kHz y la transformada $X_c(j\omega)$ de $x_c(t)$ es



con $f_M = 10$ kHz, graficar las transformadas $X_s(j\omega)$ y $X(e^{j\Omega})$ de $x_s(t)$ y $x(n)$ respectivamente.

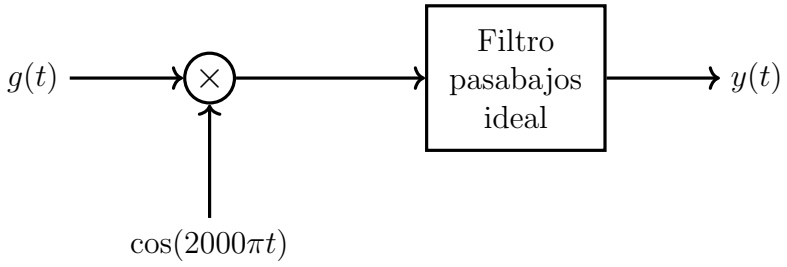
---

2. La señal discreta $x_d(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ con $n \in \mathbb{Z}$ se obtuvo del muestreo de la señal continua $x_c(t) = \cos(\omega_0 t)$ con $t \in \mathbb{R}$ a una frecuencia de muestreo $F_S = 1000$ Hz. ¿Qué valores de ω_0 positivos resultarían en obtención de la secuencia $x_d(n)$?

3. Sea $x(t)$ una señal real para la cual $X(j\omega) = 0$ cuando $|\omega| > 2000\pi$. Se realiza una modulación de amplitud para obtener la señal

$$g(t) = x(t)\sin(2000\pi t).$$

En la siguiente figura se ilustra una técnica de demodulación propuesta, donde $g(t)$ es la entrada, $y(t)$ es la salida y el filtro pasabajos ideal tiene frecuencia de corte 2000π y ganancia 2 en la banda de paso. Determinar $y(t)$.

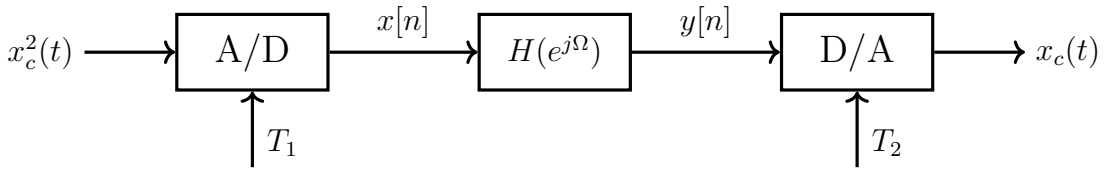


---

4. Considere la siguiente señal

$$X_c(j\omega) = u(\omega + W) - u(\omega - W)$$

donde $W > 0$ y la siguiente cadena de bloques de procesamiento



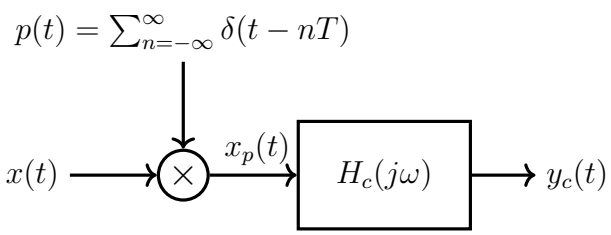
donde el sistema $H(e^{j\Omega})$ es un filtro LTI de tiempo discreto.

(**a**) Determine el valor mínimo de la frecuencia de muestreo de forma tal que $x[n]$ sea una representación sin aliasing de $x_c^2(t)$.

(**b**) Si se permite el muestreo con aliasing debería ser posible tener a la salida exactamente a $x_c(t)$. Determine valores de T_1, T_2 y $H(e^{j\Omega})$ de forma tal de lograr esto.

---

5. Sea el siguiente sistema de muestreo

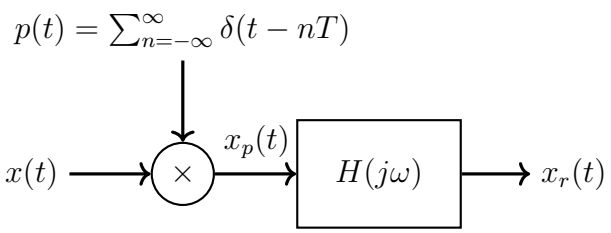


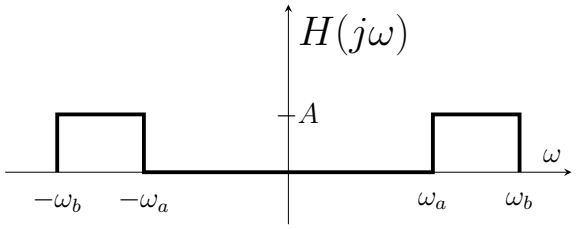
donde $H_c(j\omega)$ es un pasabajos ideal con frecuencia de corte $\frac{\omega_s}{2}$ y ganancia T y donde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. En este sistema, cuando la entrada vale $x_c(t) = \cos(\omega_0 t)$ la salida es $y_c(t) = \cos(\omega_0 t)$. Por

otro lado, cuando $x_c(t) = \cos(10\omega_0 t)$ la salida es $y_c(t) = \cos(2\omega_0 t)$. Determinar un valor de ω_s compatible con esta situación y graficar los espectros de $x_p(t)$ para los dos casos, explicando claramente la situación en cada uno de ellos.

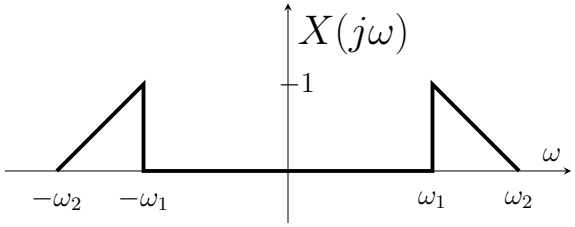
---

6. Dado el siguiente sistema de muestreo





y considerando que $\omega_1 > \omega_2 - \omega_1$, encontrar el máximo valor de T y los valores de las constantes A, ω_a, ω_b tales que $x(t) = x_r(t)$ cuando la señal $x(t)$ tiene un espectro como se muestra a continuación



---

7. Escribir las ecuaciones en diferencias de un interpolador de orden cero y otro de orden uno, en su versión discreta.

(**a**) Implementar las ecuaciones en

(**b**) Interpolar la señal $x_e(n)$ definida como

$$x_e(n) = \begin{cases} \cos(\frac{2\pi 100}{L}) & \text{para } n = kL,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(**c**) ¿Es posible implementar realmente una interpolación ideal? ¿Qué aproximaciones se podrían hacer para obtenerlo y cómo se altera el espectro de la señal al hacerlas?

---

8. Sea la señal $z(t) = x(t) + y(t)$ donde

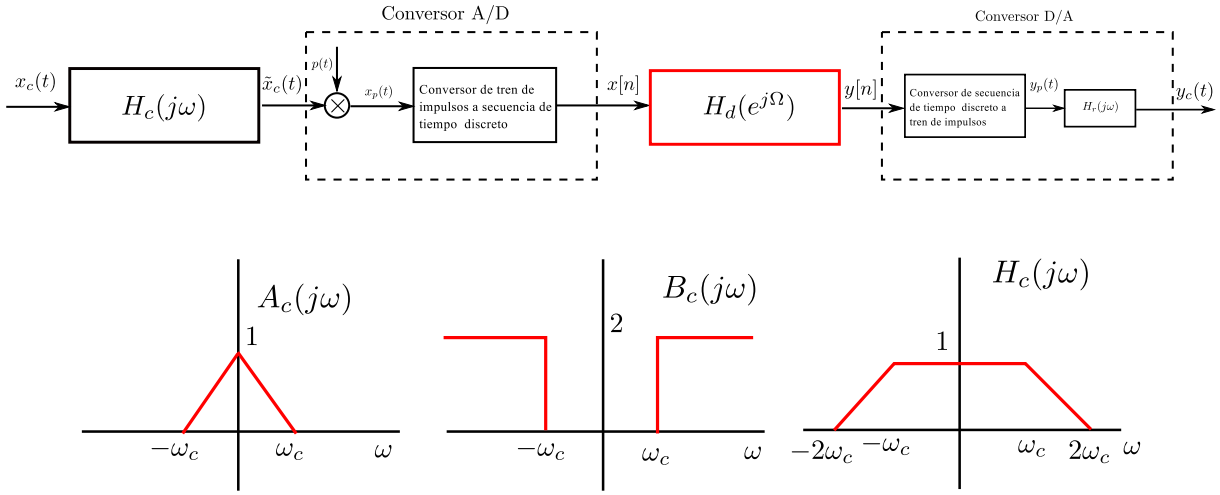
$$x(t) = \frac{\sin^2\left(\frac{W}{2}t\right)}{\pi^2 t^2} \qquad\qquad y(t) = 2\frac{\sin\left(\frac{W}{2}t\right)}{\pi t}\cos\left(\frac{5W}{2}t\right)$$

La señal $z(t)$ ingresa a un conversor A/D ideal con frecuencia de muestreo ω_s.

(**a**) Calcular la frecuencia de Nyquist para esta señal.

(**b**) Diseñar un sistema que permita, con la mínima frecuencia de muestreo posible, recuperar la señal $y(t)$ usando las muestras $z(n)$ que se obtienen a la salida del conversor A/D. El sistema puede contener partes en tiempo discreto y tiempo continuo.

9. Considere el sistema de la figura. La señal de entrada es $x_c(t) = a_c(t) + b_c(t)$, y los espectros de $a_c(t)$ y $b_c(t)$ se muestran en la figura. Vemos que se usa antes del muestreo un filtro que limita el espectro de la señal $b_c(t)$ y cuya magnitud de su respuesta en frecuencia se muestra en la figura. El filtro $H_r(j\omega)$ del conversor D/A es el interpolador ideal.

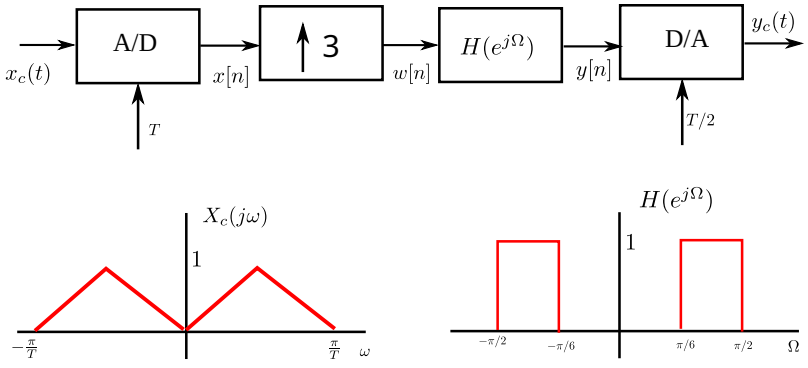


(**a**) Suponga que la frecuencia de muestreo es $\omega_s = 4\omega_c$. Determine $H_d(e^{j\Omega})$ de forma tal que $y_c(t) = a_c(t)$.

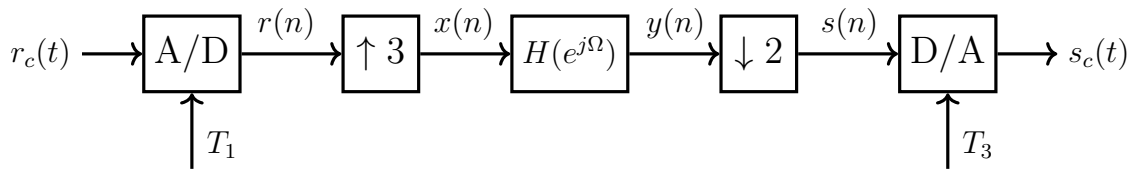
(**b**) Determine si es posible que $y_c(t) = a_c(t)$ si $\omega_s < 4\omega_c$. Si ese es el caso determine el mínimo valor de ω_s que permite lograr esto y determine $H_d(e^{j\Omega})$ para ese caso.

---

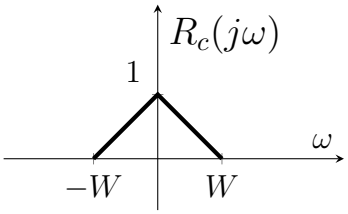
10. Considere el sistema de la figura. El filtro de tiempo discreto y el espectro de la señal de entrada se muestran también en la figura. El conversor D/A es ideal y el expansor contiene sólo el bloque que agrega los ceros (o sea luego del agregado de ceros no hay filtro pasabajos y la señal resultante es filtrada por $H(e^{j\Omega})$). Determine las transformadas de Fourier de $x[n]$, $w[n]$, $y[n]$ e $y_c(t)$ (puede hacerlo en forma gráfica).



11. Sea el siguiente sistema:



donde



$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \Omega_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y los conversores A/D y D/A son ideales.

(**a**) Obtener $R(e^{j\Omega})$ y $X(e^{j\Omega})$.

(**b**) Determinar Ω_0, T_2 y α tales que la señal $y(n)$ sea igual a $\alpha r_c(nT_2)$.

(**c**) Con el valor de Ω_0 hallado en el punto anterior, obtener T_3 y β tales que $s_c(t) = \beta r_c(t)$.

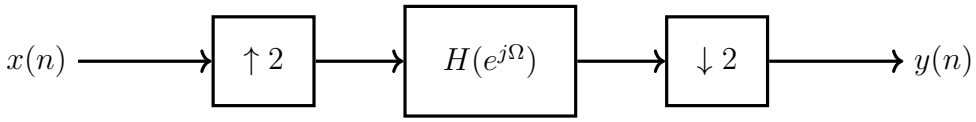
---

12. Sea $x_c(t)$ una señal real de tiempo continuo cuya frecuencia superior es $\omega_M = 2\pi 250$ Hz, y la señal $y_c(t)$ definida como $y_c(t) = x_c(t - \frac{1}{1000})$.

(**a**) Determinar si es posible recuperar $x_c(t)$ a partir de $x(n) = x_c(\frac{n}{500})$.

(**b**) Determinar si es posible recuperar $y_c(t)$ a partir de $y(n) = y_c(\frac{n}{500})$.

(**c**) Determinar si es posible obtener un sistema $H(e^{j\Omega})$ de manera que si se implementa en la siguiente estructura en cascada

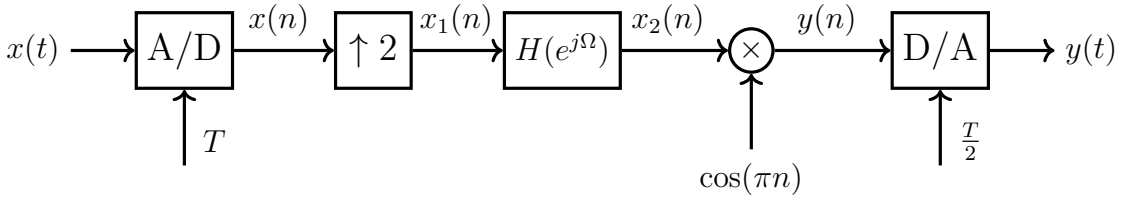


es posible obtener $y(n)$ a partir de $x(n)$.

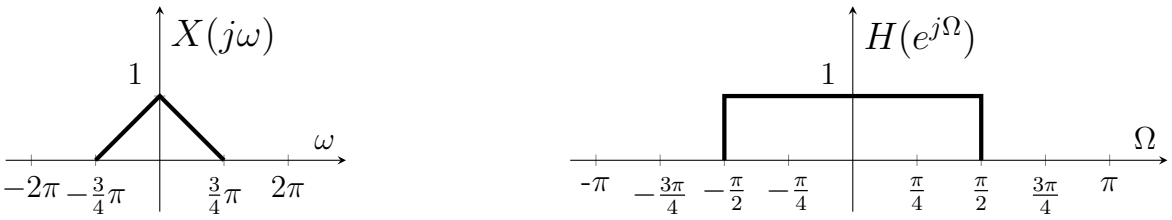
(**d**) Determinar si es posible obtener $y(n)$ a partir de $x(n)$ utilizando un único sistema LTI con respuesta en frecuencia $H_{eff}(e^{j\Omega})$. En caso de que así sea, obtener $H_{eff}(e^{j\Omega})$.

---

13. Sea el sistema de la figura:



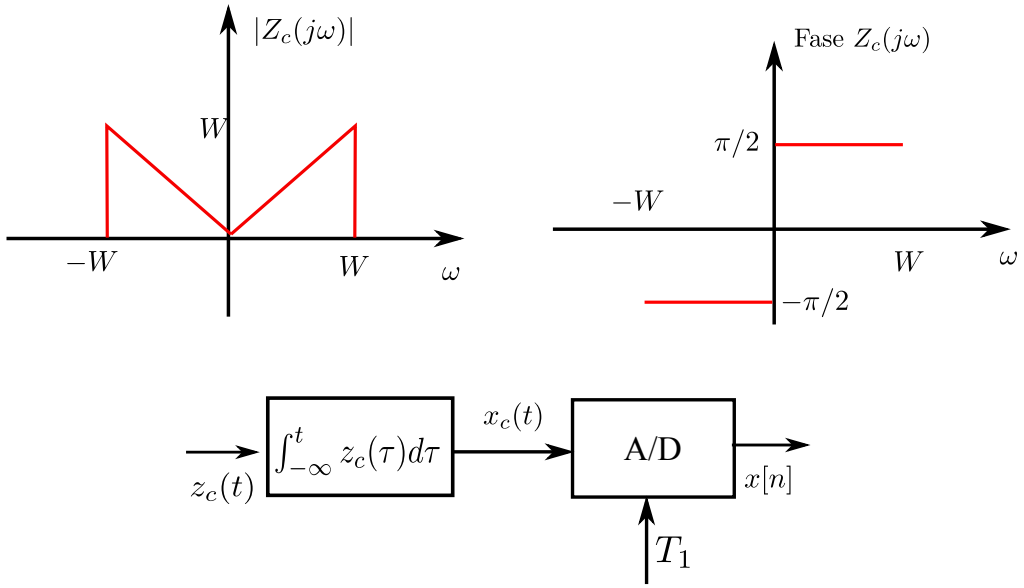
Tanto el conversor A/D como el D/A son ideales ($T = \frac{4}{3}$ s). Por otro lado, el espectro en frecuencias de $x(t)$ y la respuesta en frecuencia del sistema $H(e^{j\Omega})$ son los siguientes:



Dibujar los espectros de $x(n)$, $x_1(n)$, $x_2(n)$, $y(n)$ y $y(t)$.

---

14. Sea $z(t)$ una señal cuya transformada de Fourier se puede ver en la figura. La misma es alimentada en el sistema que se muestra también en la figura.



(**a**) Determine la transformada de Fourier de la señal $x_c(t)$ a la entrada del conversor A/D. Es la señal resultante de banda limitada?

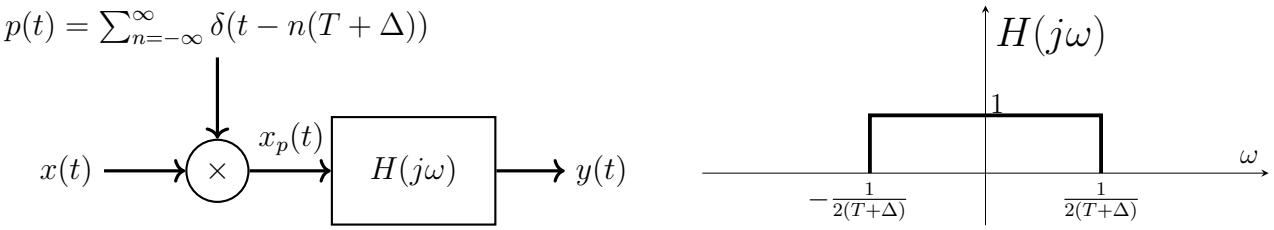
(**b**) Asumiendo que T_1 se elige tal que la frecuencia de muestreo es exactamente el doble de la frecuencia de Nyquist dibuje cualitativamente la señal $x[n]$.

(**c**) Tomando la señal $x[n]$ del punto b) como entrada a un conversor D/A ideal, determine los parámetros del mismo de forma tal que la señal de tiempo continuo a su salida tenga un ancho de banda de $3W$. Escriba en forma cerrada la forma temporal de dicha señal.

(**d**) Diseñe un sistema de resampleo (usando decimadores y expansores de la forma más eficiente posible) que tome como entrada la señal $x[n]$ del punto **(b)** y entregue una señal $y[n]$ tal que $y[n] = x_c(nT_2)$ con $T_2 = \frac{3\pi}{10W}$. Dibuje esquemáticamente la arquitectura del sistema.

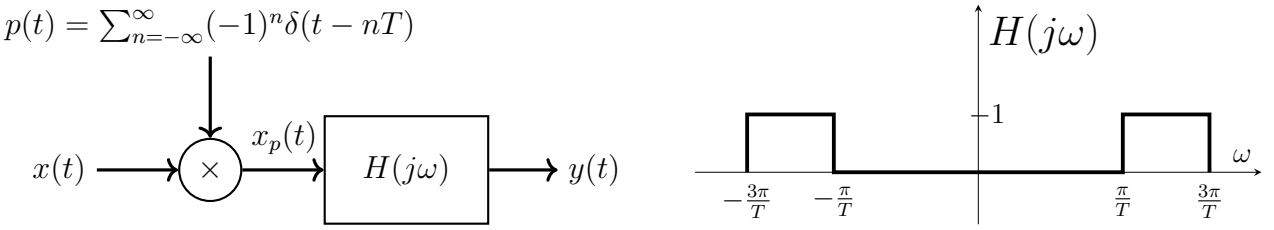
15. Para el sistema del ejercicio 1, determinar para qué rango de valores de T, el sistema completo con entrada $x_c(t)$ de banda limitada ($2\pi f_M$ = frecuencia máxima de la señal) y salida $y_r(t)$ es equivalente al sistema LTI con respuesta en frecuencia $H_{eff}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in (-\omega_c, \omega_c) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.
Determinar el valor de ω_c en función de T.

16. Sea el sistema de muestreo como se muestra a continuación:

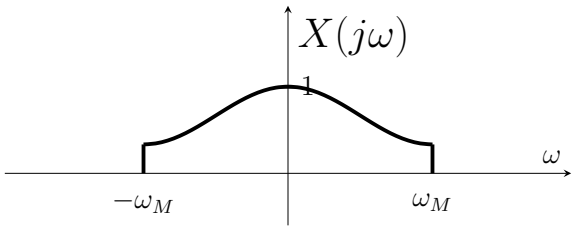


Para $x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ encontrar el intervalo de valores de Δ de manera que $y(t)$ sea proporcional a $x(at)$ para algún $a \in (0, 1)$. Determinar el valor de a en términos de T y de Δ.

17. Sea el siguiente sistema de muestreo



Dada una señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier es como se muestra a continuación:



se pide:

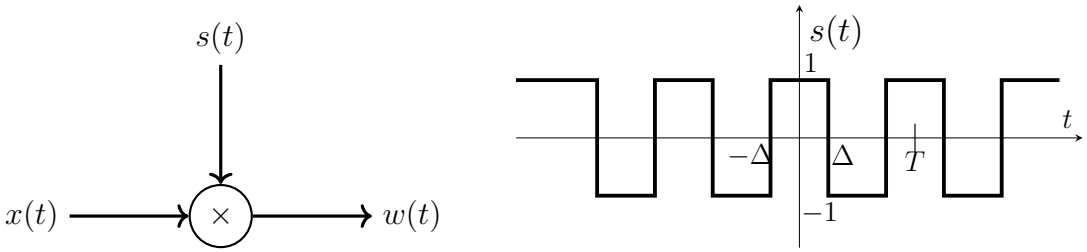
(**a**) Para $T = \frac{\pi}{2\omega_M}$ dibujar la transformada de Fourier de $x_p(t)$ e $y(t)$.

(**b**) Para $T = \frac{\pi}{2\omega_M}$ determinar un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

(**c**) Para $T = \frac{\pi}{2\omega_M}$ determinar un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.

(**d**) Determinar el valor *máximo* de T en relación a ω_M para el cual $x(t)$ puede recuperarse a partir de $x_p(t)$ o de $y(t)$.

18. En la siguiente figura se muestra un sistema en el cual la señal de entrada es multiplicada por una onda cuadrada periódica $s(t)$ de período T.



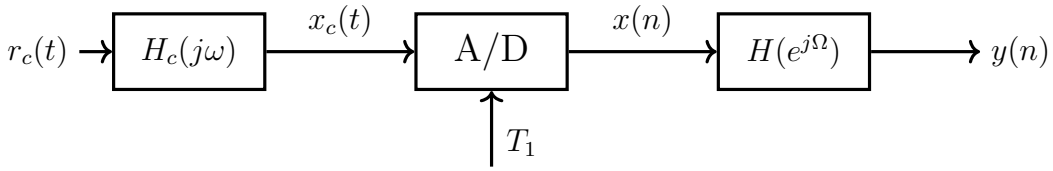
Suponiendo que la entrada es de banda limitada ($X(j\omega) = 0 \; \forall \, |\omega| > \omega_M$)

(**a**) Para $\Delta = \frac{T}{3}$ determinar en términos de ω_M el valor máximo de T para el cual no hay traslape entre las réplicas de $X(j\omega)$ en $W(j\omega)$.

(**b**) Para $\Delta = \frac{T}{4}$ determinar en términos de ω_M el valor máximo de T para el cual no hay traslape entre las réplicas de $X(j\omega)$ en $W(j\omega)$

---

19. Sea el siguiente sistema:



donde se sabe que el sistema $H_c(j\omega)$ es LTI, causal y se describe mediante:

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + \alpha x_c(t) = r_c(t), \; \alpha > 0, \text{ con condición de reposo inicial}$$

Sea, además, la señal $r_c(t) = u(t) - u(t - T_1)$, donde T_1 es también el período de muestreo del conversor A/D ideal de la figura.

(**a**) Obtener la señal $x_c(t)$.

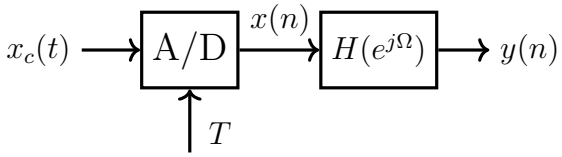
(**b**) Encontrar el sistema LTI de tiempo discreto $H(e^{j\Omega})$ tal que $y(n) = \delta(n) - 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$. De ser posible, obtener una ecuación en diferencias para dicho sistema.

---

20. Sea la señal

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(k) g(t - kT_0)$$

donde $\alpha(k)$ es una secuencia de tiempo discreto tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha(k)| < \infty$ y $g(t)$ es una señal de banda limitada con ancho de banda $W = \frac{2\pi}{T_0}$. La señal $x_c(t)$ ingresa al siguiente sistema:



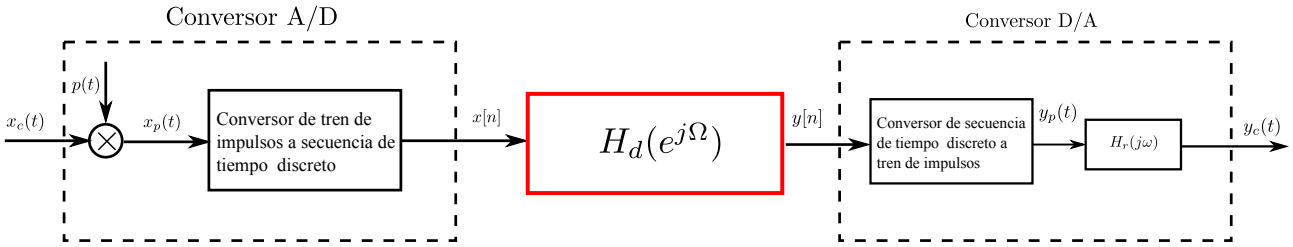
en donde el conversor A/D tiene frecuencia de muestreo igual a la de Nyquist y el sistema $H(e^{j\Omega})$ es un filtro LTI de tiempo discreto.

(**a**) Justificar que $x_c(t)$ es de banda limitada y determinar $Y(e^{j\Omega})$.

(**b**) Asumiendo que $H(e^{j\Omega}) = \frac{T}{G(j\frac{\Omega}{T})}$ con T el período de muestreo, ¿es posible recuperar la secuencia $\alpha(k)$ a partir de la salida $y(n)$? En caso afirmativo, diseñar un sistema de tiempo discreto que permita recuperar la señal mencionada.

---

21. Considere una señal de tiempo continuo dada por $x_c(t) = z(t) + \gamma z(t-\beta)$ donde $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $|\gamma| < 1$ y donde $Z(j\omega) = 0$ para $|\omega| > W$. Es decir la señal $x_c(t)$ contiene a $z(t)$ y un eco de la misma señal. Se desea implementar un sistema como el de la figura:



donde $H_r(j\omega)$ es el filtro pasa-bajos ideal con ganancia T (frecuencia de muestreo) y frecuencia de corte igual a $\omega_c = \frac{\pi}{T}$. Se supone que se muestrea con $T = \delta\frac{\pi}{W}$ con $\delta \in (0,1)$ de forma tal que no existe aliasing.

(**a**) Determine un sistema LTI en tiempo continuo (no el de la figura) que permita recuperar $z(t)$ a partir de $x_c(t)$.

(**b**) Determine la respuesta en frecuencia del filtro de tiempo discreto $H_d(e^{j\Omega})$ de la figura de forma tal que el sistema nos permita recuperar $z(t)$.

(**c**) Cómo debería elegir δ para que el filtro de tiempo discreto se pueda implementar a través de una ecuación en diferencias?