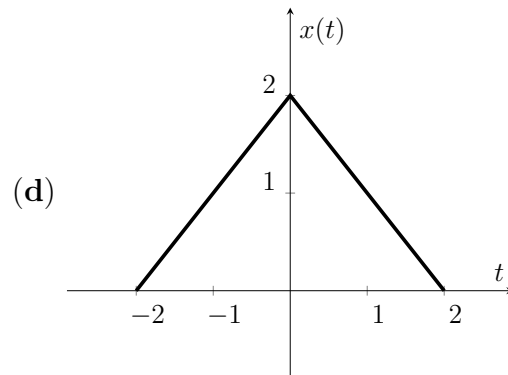
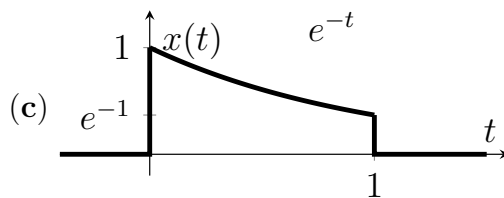
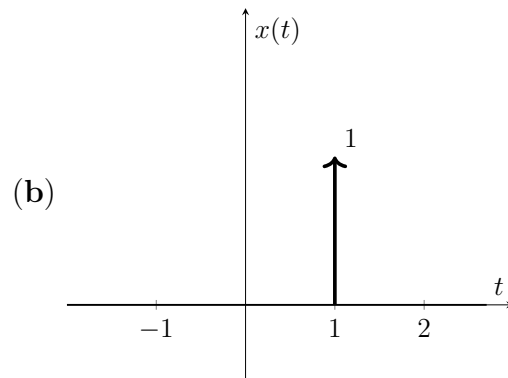
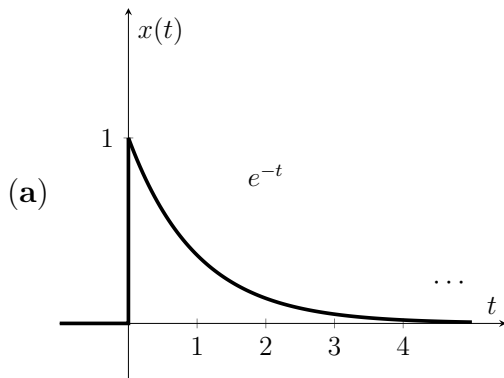


TB065 - SEÑALES Y SISTEMAS

GUÍA 4: TRANSFORMADA DE FOURIER

☞ = Python, Julia, MATLAB, OCTAVE, etc.

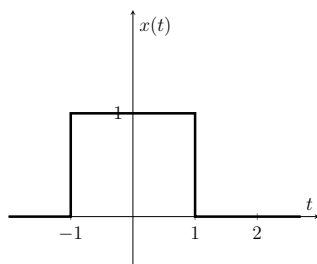
1. Hallar la transformada de Fourier de las señales de las figuras y graficar su módulo y fase.



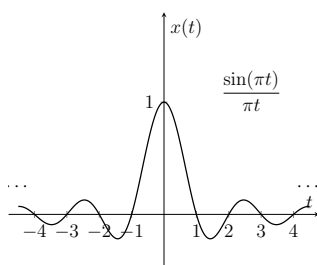
Para la señal (d), graficar también la transformada de $x(2t)$.

2. Hallar la transformada de Fourier de las siguientes señales y graficar su módulo y fase.

(a) La señal de la figura.



(b) La señal de la figura, utilizando la propiedad de dualidad a partir del resultado de (a).



3. Sea $x(t)$ la señal del ejercicio 1(c) y sea $X(\omega)$ su transformada de Fourier. Para las señales

$$x_1(t) = x(t) + x(-t), \quad x_2(t) = x(t) - x(-t), \quad x_3(t) = x(t+1) + x(t), \quad x_4(t) = t x(t),$$

se pide:

(a) Graficarlas y predecir qué puede afirmarse sobre el módulo, la fase y las simetrías de sus transformadas.

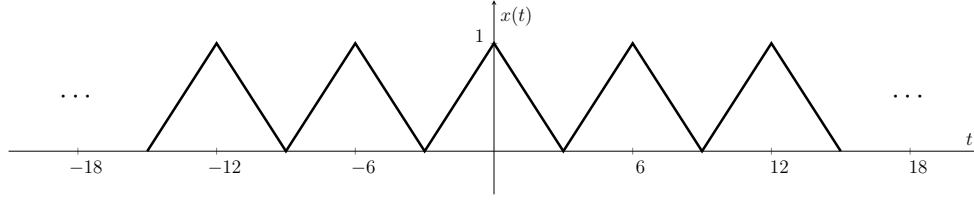
(b) Hallar las cuatro transformadas a partir de $X(\omega)$ y comparar con lo predicho en (a).

4. Hallar y graficar las señales cuyas transformadas son

(a) $X(\omega) = \cos(4\omega + \pi/3)$.

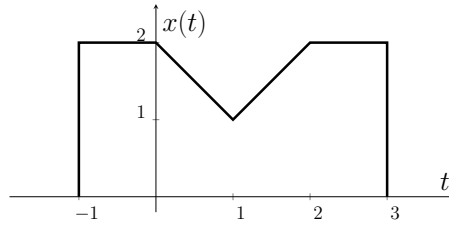
(b) $X(\omega) = \frac{2 \sin(3(\omega - 2\pi))}{\omega - 2\pi}$.

5. Sea $x(t)$ la señal periódica de la figura y sea $p(t) = x(t)[u(t+3) - u(t-3)]$.



- (a) Hallar la transformada $P(\omega)$ y relacionarla con los coeficientes de serie de Fourier de $x(t)$.
 - (b) Obtener y graficar la transformada de Fourier de $x(t)$. Compararla con $P(\omega)$.
 - (c) ¿Cómo cambian los pesos de las líneas espectrales si la señal se reemplaza por $x(t-1)$?
-

6. Sea $X(\omega)$ la transformada de la señal de la figura.



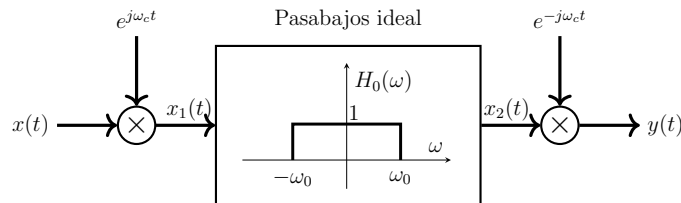
Sin obtener una expresión explícita de $X(\omega)$:

- (a) Indicar qué puede afirmarse sobre su fase.

Hallar:

(b) $X(0)$, (c) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$, (d) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$.

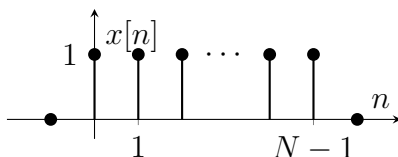
7. El filtro de la figura es pasabajos ideal, con frecuencia de corte ω_0 .



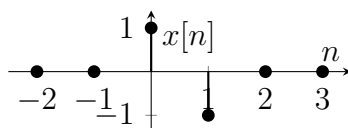
- (a) Expresar los espectros de las señales a la salida de cada bloque en función de $X(\omega)$.
- (b) Decidir si el conjunto es LTI y, si lo es, hallar su respuesta en frecuencia.
- (c) Para $\omega_c > \omega_0 > 0$, indicar qué región del espectro de entrada conserva el sistema. ¿La salida es necesariamente real si la entrada es real?

8. Hallar y graficar la transformada de Fourier de las siguientes secuencias.

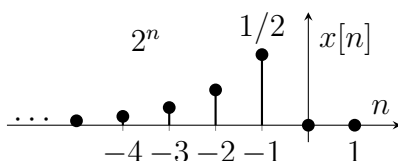
(a) La ventana de la figura, con N entero positivo. Graficar su transformada para $N = 8$ y describir qué cambia al duplicar N .



(b) La secuencia de la figura.



(c) La secuencia de la figura.



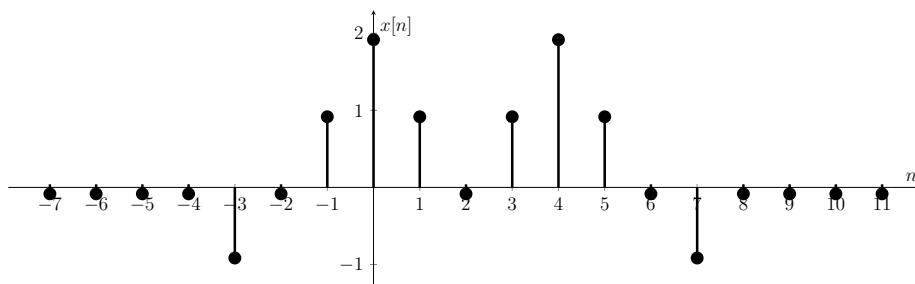
(d) $x[n] = \sin(\pi n/2) + \cos(n)$.

9. Hallar y graficar las secuencias cuyas transformadas son

(a) $X(\Omega) = 1 + 3e^{-j2\Omega} - 4e^{-j10\Omega}$.

(b) $X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}k\right)$.

10. Sea $X(\Omega)$ la transformada de Fourier de la secuencia de la figura.



Sin obtener una expresión explícita de $X(\Omega)$:

(a) Hallar $X(0)$, $X(\pi)$ y $\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega$.

(b) Indicar qué puede afirmarse sobre la fase.

(c) ¿Se puede distinguir $x[n]$ de $x[n-1]$ conociendo sólo el módulo de su transformada? Justificar.

11. Se desea obtener la salida

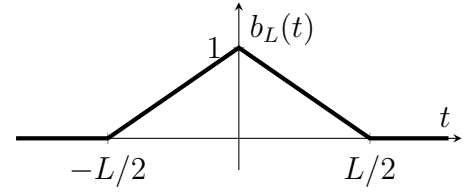
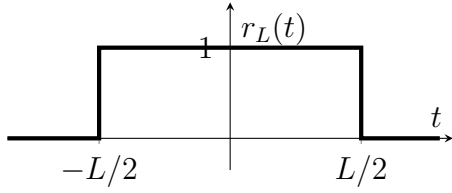
$$y[n] = \cos(\pi n/3) + \sqrt{3} \sin(\pi n/3) + 2 \cos(n).$$

Para cada una de las siguientes entradas, decidir si existe un sistema LTI discreto que produzca esa salida. Cuando sea posible, indicar los valores requeridos de $H(\Omega)$ en las frecuencias involucradas y decidir si el sistema puede tener respuesta al impulso real.

(a) $x[n] = e^{j\pi n/3}$.

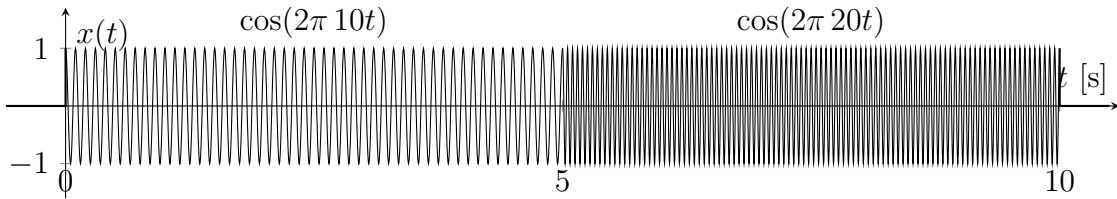
(b) $x[n] = \cos(\pi n/3) + \cos(n)$.

12. Sean las ventanas rectangular $r_L(t)$ y triangular $b_L(t)$ de las figuras, con $L > 0$.



- (a) Hallar sus transformadas $R_L(\omega)$ y $B_L(\omega)$ usando propiedades.
- (b) Bosquejar $|R_L(\omega)|/R_L(0)$ y $|B_L(\omega)|/B_L(0)$ en una misma escala. Comparar el ancho del pico central y la altura de los picos secundarios.
- (c) Hallar la transformada de $e^{j\omega_0 t} r_L(t)$. ¿Cómo cambia su módulo al duplicar L ? ¿Y al usar $b_L(t)$ en lugar de $r_L(t)$?
-

13. Sea la señal de la figura, nula fuera del intervalo $[0, 10]$ s.



- (a) ¿El módulo de la transformada permite distinguir $x(t)$ de $x(t - 2)$? Justificar sin calcular las transformadas.

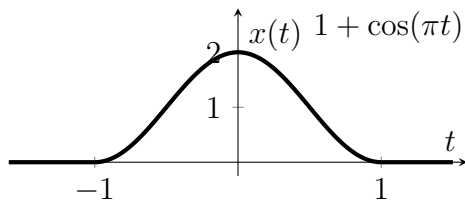
Para observar distintas partes de la señal se utiliza $z_\tau(t) = x(t)r_L(t - \tau)$, con la ventana rectangular del ejercicio 12. Sea $Z_\tau(\omega)$ su transformada de Fourier.

- (b) Para $L = 2$ s y $\tau = 2, 5$ y 8 s, indicar qué tramo de $x(t)$ selecciona la ventana y bosquejar $|Z_\tau(\omega)|$. No se pide una expresión cerrada.
- (c) Se construye un mapa con τ en el eje horizontal, ω en el vertical y una intensidad de color proporcional a $|Z_\tau(\omega)|^2$. Bosquejarlo para $0 \leq \tau \leq 10$ s. ¿Qué representa una columna del mapa? ¿Qué permite leer que no muestra el módulo de la transformada de toda la señal?
- (d) ¿Qué cambiaría en el mapa al usar $L = 0,2$ s? Comparar la localización del cambio de tono y el ancho de las bandas en frecuencia, sin comparar intensidades entre mapas.

EJERCICIOS ADICIONALES

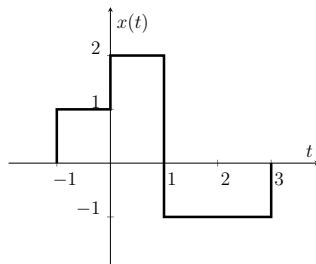
14. Hallar y graficar la transformada de las siguientes señales.

(a) La señal de la figura.

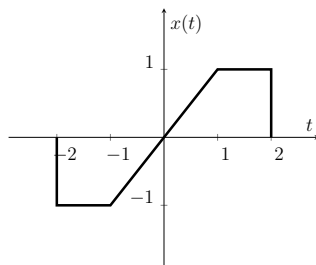


(b) $x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \frac{\sin(2\pi(t-1))}{\pi(t-1)}$.

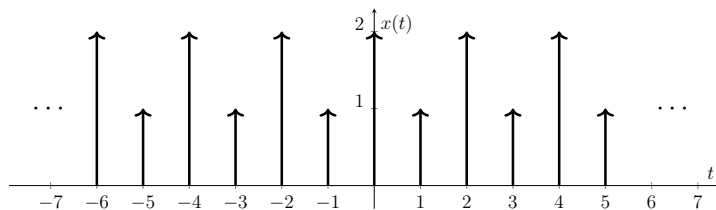
(c) La señal de la figura.



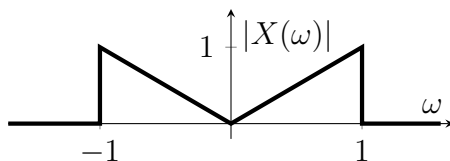
(d) La señal de la figura.



(e) El tren de impulsos de la figura.

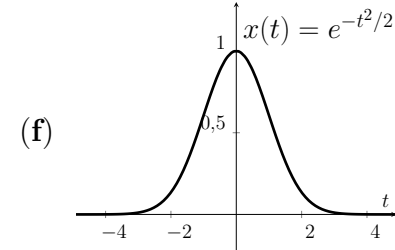
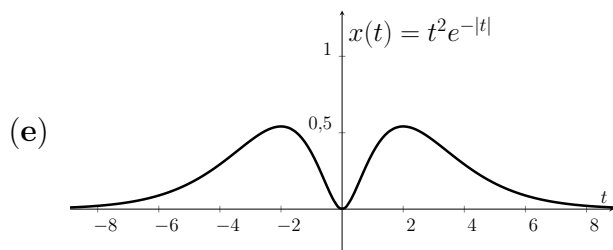
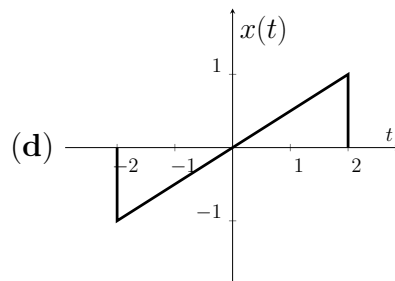
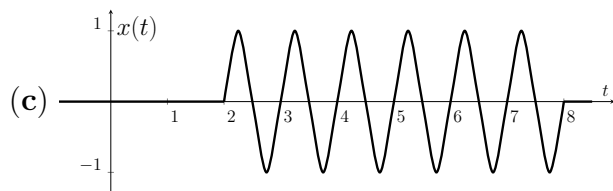
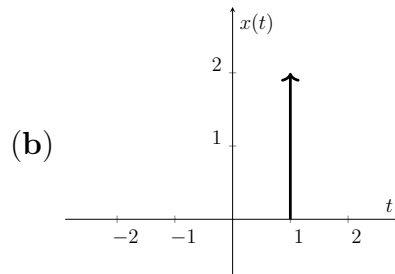
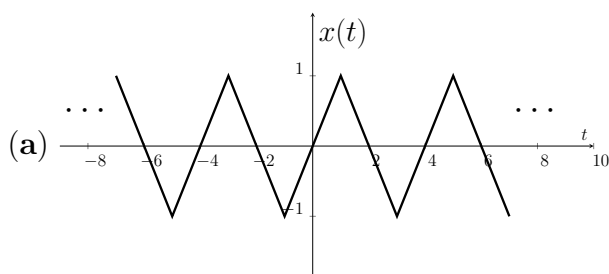


(f) Hallar y graficar ahora la señal cuya transformada tiene el módulo de la figura y fase $\arg X(\omega) = -3\omega$ donde el módulo no es nulo.



15. Para cada señal de las figuras, sin calcular su transformada:

- Decidir si $X(\omega)$ es real, imaginaria pura o ninguna de las dos.
- ¿Se puede obtener una transformada real desplazando la señal en el tiempo? Indicar el desplazamiento si existe.
- ¿Es $X(\omega)$ periódica? Justificar.



Para las señales (e), (f) y $z(t) = e^{-(t-1)^2/2}$, hallar además, sin calcular sus transformadas,

$$X(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega) d\omega,$$

usando $Z(\omega)$ en el caso de $z(t)$.

16. Sin obtener expresiones explícitas de las transformadas:

(a) Para la señal del ejercicio 6, hallar

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega.$$

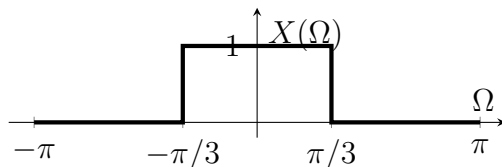
(b) Para la secuencia del ejercicio 10, hallar

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \right|^2 d\Omega.$$

17. Hallar la transformada inversa en los siguientes casos.

(a) $X(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega} - 1/5}{1 - (1/5)e^{-j\Omega}}.$

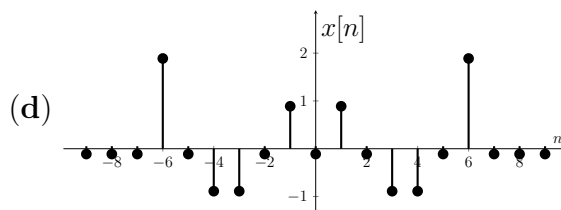
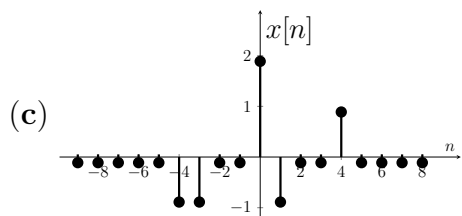
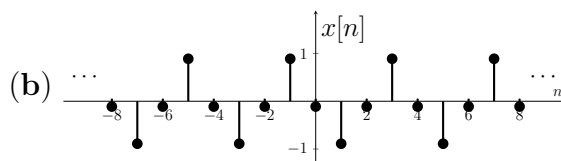
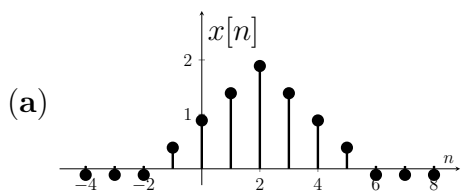
(b) La figura muestra un período de $X(\Omega)$, que es 2π -periódica.



18. Para cada secuencia de las figuras, sin calcular su transformada:

- Decidir si $X(\Omega)$ es real, imaginaria pura o ninguna de las dos.
- ¿Se puede obtener una transformada real desplazando la secuencia un número entero de muestras? Indicar el desplazamiento si existe.
- Hallar $\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega$.

Para las secuencias de duración finita, hallar también $X(0)$ y $X(\pi)$. Para la periódica, ubicar sus líneas espectrales.



19. Una señal periódica de período $T = 1$ está definida en $0 \leq t < 1$ por $x(t) = \alpha t$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea $w(t) = \alpha t[u(t) - u(t - 1)]$.

(a) Hallar la transformada $W(\omega)$ y los coeficientes de serie de Fourier de $x(t)$. Relacionarlos.

(b) La señal periódica ingresa a un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = \frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}.$$

Hallar y graficar la respuesta en frecuencia. Determinar la salida $y(t)$ y hallar α sabiendo que $y(1/2) = 1$.

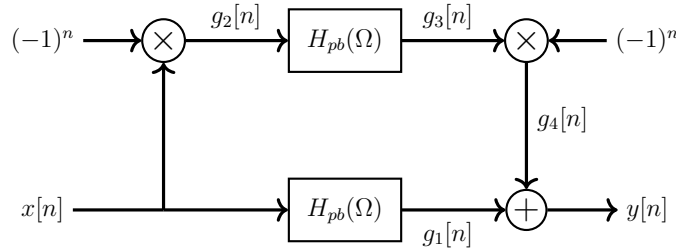
20. Un sistema LTI discreto tiene respuesta al impulso $h[n] = (1/2)^n u[n]$. Hallar la salida para las siguientes entradas. En cada caso, elegir entre la TFDT, la propiedad de autofunción y la convolución, y justificar la elección.

- (a) $x[n] = (3/4)^n u[n]$.
- (b) $x[n] = (-1)^n u[n]$.
- (c) $x[n] = Ae^{j\pi n/2}$, con $A \in \mathbb{R}$.
- (d) $x[n] = 10 - 5 \sin(\pi n/2) + 20 \cos(\pi n)$.

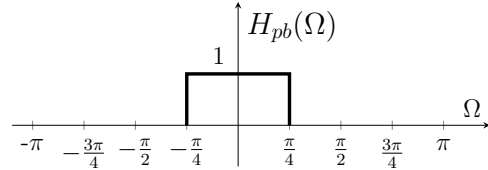
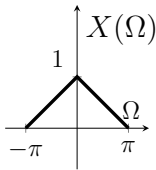
21. Considere un sistema LTI continuo, causal y estable, con respuesta al impulso $h(t)$ y respuesta en frecuencia $H(\omega)$.

- (a) Hallar la salida $y_1(t)$ para $x_1(t) = Ae^{j\omega t}$.
- (b) Hallar la salida $y_2(t)$ para $x_2(t) = Ae^{j\omega t}u(t)$ y escribirla como $y_2(t) = y_1(t) + z(t)$.
- (c) Demostrar que $z(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. ¿En qué se diferencia la salida de encender el tono en $t = 0$ de la salida de un tono presente desde $-\infty$?
- (d) Extender el resultado a tiempo discreto.

22. Sea el sistema de la figura.

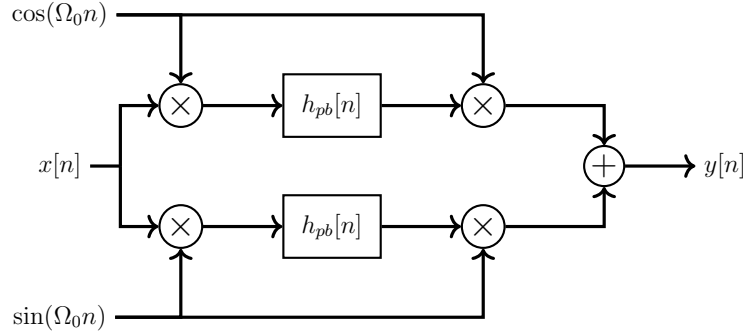


Los gráficos muestran un período de $X(\Omega)$ y de la respuesta en frecuencia del filtro; ambas se extienden con período 2π .



Graficar los espectros de $g_1[n]$, $g_2[n]$, $g_3[n]$, $g_4[n]$ e $y[n]$ en $-\pi \leq \Omega < \pi$.

23. Sea el sistema de la figura, donde ambos bloques tienen respuesta al impulso $h_{pb}[n]$.



- (a) Determinar si el sistema completo es LTI y, en ese caso, obtener su respuesta al impulso equivalente.
- (b) Obtener la respuesta en frecuencia equivalente en términos de $H_{pb}(\Omega)$.
- (c) Si $\Omega_0 = \pi/2$ y $h_{pb}[n]$ es un pasabajos ideal de ganancia unitaria y frecuencia de corte $\Omega_c = \pi/4$, hallar y graficar la respuesta en frecuencia equivalente.
- (d) Comparar esta respuesta con la de una cadena de modulación compleja como la del ejercicio 7, implementada en tiempo discreto con el mismo pasabajos y frecuencia de modulación $\Omega_0 = \pi/2$.

24. Un sistema LTI discreto estable verifica las siguientes relaciones:

- Si $x[n] = (1/2)^n u[n]$, entonces

$$y[n] = \alpha(1/3)^n u[n] + \beta(1/2)^{n-1} u[n-1].$$

- Si $x[n] = 1 + (-1)^n$, entonces $y[n] = 1 - (-1)^n$.

Determinar α , β y la respuesta al impulso. Escribir una ecuación en diferencias para el sistema. ¿Qué operación realiza sobre una entrada cualquiera?

25. Un sistema LTI discreto se define por

$$v[n] = (x * z)[n] - x[n], \quad y[n] = (v * g)[n], \quad g[n] = (1/2)^n u[n],$$

donde $z[n]$ es absolutamente sumable.

- (a) Hallar la respuesta en frecuencia y escribir una ecuación que relacione $y[n]$, $y[n-1]$ y $v[n]$.
- (b) Hallar la respuesta al impulso si $z[n] = (1/3)^n u[n] + \delta[n]$.

26. La transformada de Fourier de corto tiempo se define como

$$X_w(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j\omega t} dt.$$

Sean $X(\omega)$ y $W(\omega)$ las transformadas de $x(t)$ y $w(t)$.

(a) Expresar $X_w(\omega, \tau)$ en términos de $X(\omega)$, $W(\omega)$ y τ .

(b) Obtener la transformada de corto tiempo de $x(t - t_0)$ en términos de $X_w(\omega, \tau)$. ¿Cómo se desplaza su módulo al cuadrado en el plano tiempo–frecuencia?

(c) Para la señal del ejercicio 13 y $w(t) = r_2(t)$, hallar $X_w(\omega, \tau)$ para $\tau = 2, 5$ y 8 s. Comparar con los bosquejos de ese ejercicio.

(d) Bosquejar $x(t)$ y $x(10 - t)$ e indicar en qué orden aparecen los tonos en cada señal. Comparar los módulos de sus transformadas de Fourier y sus mapas tiempo–frecuencia.

27. Considere los siguientes sistemas LTI estables, inicialmente en reposo: si la entrada es nula antes de t_0 (o n_0), la salida también lo es. Para entradas definidas desde $-\infty$, se considera la salida dada por la convolución con la respuesta al impulso.

(a) Un sistema continuo satisface, con $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \alpha x(t) + \frac{dx(t)}{dt}.$$

Hallar su respuesta en frecuencia. Para $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$, comparar el módulo y la fase. ¿Se trata del mismo sistema?

(b) Un sistema discreto satisface

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n - 1] = x[n] + x[n - 1].$$

Hallar y graficar el módulo de su respuesta en frecuencia e identificar las frecuencias que el sistema anula. Determinar la salida para $x[n] = 2 + \cos(\pi n/2)$, definida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

28. Para el sistema continuo del ejercicio 27:

(a) Hallar las respuestas al impulso y al escalón.

(b) Determinar todos los valores de α para los cuales la entrada e^{jt} produce una salida Ae^{jt} con $|A| = \sqrt{2}$.